Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

EL ESPACIO DE FUNCIONES CONTINUAS ENTRE ESPACIOS TOPOLÓGICOS ADMISIBLES

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciada en Matemáticas

PRESENTA:

Martha Hernández Castañeda

Asesor:
Dr. David Maya Escudero.

Coasesor:
Dr. Fernando Orozco Zitli.

Toluca, México, 07 de junio de 2021

Índice general

Introducción

La topología general se ocupa del estudio de los espacios topológicos, las aplicaciones continuas, y un tipo especial de éstas, los homeomorfismos o equivalencias topológicas. Estos homeomorfismos determinan una clasificación de los espacios topológicos en la cual, si dos espacios están en la misma clase, entonces poseen las mismas propiedades topológicas, es decir, las mismas propiedades que tienen relevancia en la topología general.

Para un espacio topológico X, una familia de cubiertas abiertas $\mathfrak{O}$ de X tal que para cada par de cubiertas existe una tercera que refina doble a ambas y que para cada punto x de X, la familia de estrellas en x con respecto a cada cubierta de la familia es una base local de x en X, es llamada *admisible*. En caso de que exista $\mathfrak{O}$ al par $(X, \mathfrak{O})$ es un *espacio admisible*. La estructura admisible de un espacio provee de herramientas importantes para generar un método interesante de estudio de en ausencia de la metrización, la noción de distancia entre dos puntos es pequeña usada para espacios métricos se sustituye por la idea de cercanía entre dos puntos si pertenecen a un mismo abierto en una cubierta.

Por otro lado, se ha estudiado el espacio de funciones continuas $C(X, Y)$ entre espacios metrizables compactos dotado con la métrica uniforme con el fin de determinar la relación existente entre las propiedades topológicas de los espacios base y dicho espacio de funciones. Una de las líneas de investigación en el estudio de espacio de funciones continuas es determinar las distintas propiedades topológicas de subespacios distinguidos de $C(X, Y)$.

Otro de los conceptos para describir propiedades de un espacio topológico es la homogeneidad. Un espacio topológico X es *homogéneo* si para cualesquiera puntos $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(x) = y$. De manera intuitiva, podemos decir que un espacio homogéneo se *ve* igual en cada uno de sus puntos. Desde su aparición, la homogeneidad ha atraído la atención de los especialistas y a través del tiempo se han conseguido dar solución a problemas que son históricos por su importancia. Por esta razón, se han buscado criterios para determinar la homogeneidad en ciertas clases de espacios topológicos, como lo son espacios metrizables compactos.

Es de nuestro interés determinar qué resultados en [5], los cuales están hechos para espacios métricos compactos, se puede generalizar debilitando esta condición a espacios admisibles.

Este escrito está formado por cuatro capítulos, de los cuales el primero es una recopilación de conceptos básicos y notaciones imprescindibles para un seguimiento asequible. Además se exponen resultados y propiedades que serán empleados en futuras demostraciones.

En el segundo capítulo analizaremos algunas propiedades básicas y definiciones de [1] para la estructura admisible de un espacio. La noción de cercanía en espacios métricos es si están a distancia "pequeña". Veremos que un espacio admisible es completo si toda red $\mathfrak{D}$-Cauchy converge.

En el capítulo 3 describimos al espacio de funciones continuas entre espacios compactos por medio de función en el espacio admisible. Para ser más específicos, veremos que el conjuntos de todas las funciones continuas y suprayectivas es un subconjunto cerrado del espacio de funciones continuas, mostraremos que al espacio de homeomorfismos lo podemos ver como la intersección del conjunto de funciones continuas y suprayectivas con la intersección del conjunto de todas las $\mathcal{U}$-funciones. Probaremos que condiciones que impliquen la completez del espacio de funciones continas.

En el último capítulo estudiaremos la propiedad admisible de Effros en espacios admisibles e introduciremos la definición de $G(I)$-subconjunto de X, veremos que un espacio admisible punto finito $(X, \mathfrak{D})$ es completo si y sólo si $\mathfrak{D}$ es un sistema completo de cubiertas abiertas según Frolík, además se exponen resultados de [3] que serán útiles para concluir que el espacio de homeomorfismo es completo. [1].

Capítulo 1

Espacios topológicos

En este capítulo se definen conceptos esenciales que serán utilizados constantemente en los capítulos sucesivos, en especial nos interesa recordar las propiedades de los espacios topológicos que involucran los conceptos de compacidad y los axiomas de separación; así como algunas propiedades de las funciones continuas, y homeomorfismos entre espacios topológicos. Cabe mencionar que no se darán las pruebas de los teoremas que se presentan en este capítulo porque no es nuestro objetivo, pero se darán las referencias donde pueden consultarse.

1.1. Definición de topología

Definición 1.1. Una *topología* en un cojunto X es una colección τ de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, que satisfacen:
(1.1.1) $\emptyset$ y X pertenecen a τ,
(1.1.2) cualquier unión de elementos de τ pertenece a τ,
(1.1.3) cualquier intersección finita de elementos de τ pertenece a τ.

Decimos que (X, τ) es un espacio topológico, a veces abreviado X es un espacio topológico cuando no puede producirse confusión acerca de τ.

Definición 1.2. Si X es un espacio topológico y $E \subseteq X$, decimos que E es *cerrado* en X si y sólo si $X - E$ es abierto en X.

Definición 1.3. Si X es un espacio topológico y $E \subseteq X$, la *cerradura* de E en X es el conjunto $\overline{E} = \mathrm{Cl}(E) = \bigcap\{K \subseteq X : K \text{ es cerrado en } X \text{ y } E \subseteq K\}$.

Lema 1.4. *[9, Lemma 3.6, p. 25] Sean A, B subconjuntos de X. Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

Definición 1.5. Si X es un espacio topológico y $E \subseteq X$, el *interior* de E en X es el conjunto $E^\circ = \operatorname{Int} E = \bigcup\{G \subseteq X : G \text{ es abierto en } X \text{ y } G \subseteq E\}$.

Lema 1.6. *[9, Lemma 3.9, p. 27] Sean A, B subconjuntos de X. Si $A \subseteq B$, entonces $\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$.*

Definición 1.7. Sea X un espacio topológico con topología τ. Si Y es un subconjunto de X. La colección $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ es una topología sobre Y, denominada *topología relativa*. Con esta topología, Y se denomina *subespacio* de X.

1.2. Bases y sistemas de vecindades

Definición 1.8. Si X es un espacio topológico y $x \in X$, una *vecindad* de x es un conjunto U que contiene un abierto V que contiene a x. Así, evidentemente, U es una vecindad de x si y sólo si $x \in \operatorname{Int} U$. La colección $\mathcal{U}_x$ de todas las vecindades de x en X es llamado *sistema de vecindades* para x.

Definición 1.9. Una *base de vecindades* en x en un espacio topológico X es una subcolección $\mathcal{B}_x$ del sistema de vecindades $\mathcal{U}_x$ que tiene la propiedad de que cada $U \in \mathcal{U}_x$ contiene algún $V \in \mathcal{B}_x$. Es decir, $\mathcal{U}_x$ debe ser determinado por $\mathcal{B}_x$ de la siguiente manera: $\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : V \subseteq U \text{ para algún } V \in \mathcal{B}_x\}$.

Definición 1.10. Una *base* para alguna topología para un conjunto X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que

(1.10.1) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x.

(1.10.2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos B_1y B_2 de $\mathcal{B}$, entonces existe un elemento B_3 de $\mathcal{B}$ que contiene a x tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, entonces definimos la topología τ generada por $\mathcal{B}$ como sigue: Un subconjunto U de X es abierto en X si para cada $x \in U$, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Notemos que cada elemento básico es en sí mismo un elemento de τ.

Lema 1.11. *[6, Lemma 13.1, p. 80] Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para τ. Entonces τ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$.*

Definición 1.12. Sean X y Y espacios topológicos. La *topolgía producto* sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y.

1.3. Funciones continuas, abiertas, cerradas, cocientes y homeomorfismos

Definición 1.13. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es *continua* en $x \in X$ si y sólo si para cada vecindad V de $f(x)$ en Y, existe una vecindad U de x en X tal que $f(U) \subseteq V$. Decimos que f es *continua* en X si y sólo si f es continua en cada $x \in X$.

Teorema 1.14. *[9, Theorem 7.3, p. 45] Si X, Y y Z son espacios topológicos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Teorema 1.15. *[6, Theorem 18.1, p. 104] Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1.15.1) *f es continua.*

(1.15.2) *Para cada subconjunto A de X, se tiene que $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(1.15.3) *Para cada conjunto cerrado B de X, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

(1.15.4) *Para cada subconjunto abierto A de Y, se tiene que $f^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de X.*

Definición 1.16. Si X y Y son espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ es *abierta (cerrada)* si y sólo si para cada abierto (cerrado) A de X, $f(A)$ es abierto (cerrado) en Y.

Teorema 1.17. *[2, Theorem 1.4.13, p. 32] Una función continua $f : X \to Y$ es cerrada si y sólo si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto abierto U de X que contiene a $f^{-1}(y)$, existe en Y una vecindad V de y tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$.*

Definición 1.18. Si X y Y son espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si y sólo si f es inyectiva, suprayectiva, continua y f^{-1} también es continua. En este caso, decimos que X y Y son *homeomorfos*.

Proposición 1.19. *[2, Proposition 1.4.18, p. 33] Sea $f : X \to Y$ una función inyectiva y suprayectiva. Entonces f es un homeomorfismo si y sólo si f es una función abierta.*

Definición 1.20. Si X es un espacio topológico, Y un conjunto y $g : X \to Y$ una función suprayectiva, entonces $\tau_g = \{G \subseteq Y : g^{-1}(G) \text{ es abierto en } X\}$ es una topología sobre Y, llamada *topología cociente* inducida en Y por g. Cuando a Y se le da una topología cociente de este tipo, se le llama *espacio cociente* de X, y la función inducida se llama *función cociente*.

1.4. Redes

Definición 1.21. Un conjunto Λ es *dirigido* si y sólo si hay una relación $\leq$ sobre Λ que satisface:
(1.21.1) $\leq$ es reflexiva y transitiva.
(1.21.2) Para cada $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Definición 1.22. Un subcojunto K de Λ se dice que es *cofinal* en Λ si para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \leq \beta$.

Definición 1.23. Una *red* en un conjunto X es una función $P : \Lambda \to X$ tal que $P(\lambda) = x_\lambda$ donde Λ es algún conjunto dirigido. La denotamos como $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Definición 1.24. Sea X un conjunto. Una *subred* de una red $P : \Lambda \to X$ es la composición $P \circ \varphi$, donde $\varphi : M \to \Lambda$ es una función cofinal creciente del conjunto dirigido M a Λ. Eso es,
(1.24.1) si $\mu_1 \leq \mu_2$, entonces $\varphi(\mu_1) \leq \varphi(\mu_2)$ (φ es creciente),
(1.24.2) para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ tal que $\lambda \leq \varphi(\mu)$ (φ es cofinal en Λ).

Para $\mu \in M$, el punto $P \circ M(\mu)$ lo denotamos como x_{λ_μ}, y decimos que $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$ es una subred de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Definición 1.25. Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en un espacio X. Entonces $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *converge* a $x \in X$, escribimos $x_\lambda \to x$, siempre que para cada vecindad U de x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para cada $\lambda \geq \lambda_0$.

Proposición 1.26. *[9, Corollary 10.5, p. 71] Sea X un espacio topológico. Entonces E es un subconjunto cerrado de X si y sólo si siempre que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq E$ y $x_\lambda \to x$, se cumple que $x \in E$.*

Teorema 1.27. *[9, Theorem 11.7, p. 75] Si $E \subseteq X$, entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si existe una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $x_\lambda \to x$.*

Teorema 1.28. *[9, Theorem 11.8, p. 75] Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Entonces f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si siempre que $x_\lambda \to x_0$ en X, se cumple que $f(x_\lambda) \to f(x_0)$ en Y.*

1.5. Axiomas de separación

Definición 1.29. Un espacio topológico X se denomina *espacio de Hausdorff* si para cada par de puntos distintos x, y de X, existen abiertos disjuntos U y V de X que contienen a x y y, respectivamente .

Teorema 1.30. *[6, Theorem 17.8, p. 99] Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Teorema 1.31. *[9, Theorem 13.7, p. 86] Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio topológico X:*

(1.31.1) *X es de Hausdorff,*
(1.31.2) *los límites en X son únicos, es decir, ninguna red en X converge a más de un punto.*

Definición 1.32. Un espacio topológico X es *regular* si y sólo si siempre que A es cerrado en X y $x \notin A$, existen conjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$.

Definición 1.33. Un espacio topológico X es *normal* si y sólo si siempre que A y B sean conjuntos cerrados ajenos en X, existen conjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Lema 1.34. *[6, Lemma 31.1, p. 196] Sea X un espacio topológico.*

(1.34.1) *X es regular si y sólo si, dado un punto $x \in X$ y U abierto en X que contiene a x, existe un abierto V de x tal que $\overline{V} \subseteq U$.*
(1.34.2) *X es normal si y sólo si, dado un conjunto cerrado A de X y un conjunto abierto U de X que contiene a A, existe un conjunto abierto V de X que contiene a A tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

1.6. Compacidad

Definición 1.35. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que es una *cubierta* de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X.

Se dice que $\mathcal{A}$ es una *cubierta abierta* de X si es una cubierta de X formada por conjuntos abiertos de X. Una *subcubierta* es una subfamilia de $\mathcal{A}$ cuya unión es X.

Definición 1.36. Un espacio X se dice que es *compacto* si cada cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X tiene una subcubierta finita.

Teorema 1.37. *[9, Theorem 17.14, p. 123] Una función continua, inyectiva y suprayectiva de un espacio compacto X en un espacio de Hausdorff Y es un homeomorfismo.*

Teorema 1.38. *[6, Theorem 32.3, p. 202] Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, entonces X es normal.*

Teorema 1.39. *[9, Theorem 11.5, p. 75] Una red tiene a y como punto límite si y sólo si tiene una subred convergente a y.*

Teorema 1.40. *[9, Theorem 17.4, p. 118] Un espacio topológico X es compacto si y sólo si cada red en X tiene un punto límite.*

El siguiente Teorema es consecuencia de Teorema 1.39 y Teorema 1.40.

Teorema 1.41. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si cada red en X tiene una subred convergente.*

Capítulo 2

Completez de los espacios admisibles

Es común pensar la noción de espacio métrico como una axiomatización de la idea de cercanía entre dos puntos. El concepto de admisibilidad surge con la intención de transferir metodologías del espacio métrico a los espacios topológicos generales en ausencia de metrización. Este capítulo contiene las definiciones básicas y los resultados sobre los espacios admisibles completos.

2.1. Nociones básicas de cubiertas

Uno de los fundamentos importantes en el estudio de los espacios admisibles son ciertas nociones básicas de cubiertas, las cuales nos ayudan a obtener información sobre los espacios que estamos trabajando. Sin más preámbulos, pasemos a presentar dichas nociones básicas de cubiertas.

Para cada cubierta $\mathcal{U}$ de un espacio X y $Y \subseteq X$, *la estrella de* Y *con respecto a* $\mathcal{U}$ es el conjunto $\mathrm{St}[Y,\mathcal{U}] = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : Y \cap U \neq \emptyset\}$. Si $Y = \{x\}$, escribiremos $\mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ en lugar de $\mathrm{St}[\{x\},\mathcal{U}]$.

Teorema 2.1. *Sean X un espacio y $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ cubiertas de X. Se cumplen las siguientes condiciones.*
(2.1.1) *Si Y es un subconjunto de X, entonces* $\mathrm{St}[Y,\mathcal{U}] = \bigcup_{x\in Y} \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$.
(2.1.2) *Si $z, x \in X$, entonces $z \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ si y sólo si $x \in \mathrm{St}[z,\mathcal{U}]$.*

Demostración. Probaremos que (2.1.1) se verifica. Sea $z \in \mathrm{St}[Y,\mathcal{U}]$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $z \in U$ y $U \cap Y \neq \emptyset$. Elejimos $w \in U \cap Y$. Notemos que $z, w \in U$ y $w \in Y$. Así $z \in \mathrm{St}[w,\mathcal{U}]$. De lo anterior $\mathrm{St}[Y,\mathcal{U}] \subseteq \bigcup_{x\in Y} \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$.

Por otra parte, para cualquier $z \in \bigcup_{x\in Y} \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$, existe $x \in Y$ tal que $z \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$. Del hecho que $z \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $z, x \in U$. Así $z \in \mathrm{St}[Y,\mathcal{U}]$, es decir, $\bigcup_{x\in Y} \mathrm{St}[x,\mathcal{U}] \subseteq \mathrm{St}[Y,\mathcal{U}]$.

Para probar (2.1.2) basta con demostrar que si $z \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$, entonces $x \in \mathrm{St}[z,\mathcal{U}]$. Supongamos que $z \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $z, x \in U$, de donde $x \in \mathrm{St}[z, U]$.

□

Teorema 2.2. *Sea X un espacio. Si $\mathfrak{O}$ es una familia de cubiertas abiertas de X tal que $\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ es una base local de vecindades para cada $x \in X$ y $Y \subseteq X$, entonces $\mathrm{Cl}(Y) = \bigcap\{\mathrm{St}[Y,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$.*

Demostración. Sean $z \in Cl(Y)$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Entonces $\mathrm{St}[z,\mathcal{U}]$ es una vecindad de z y con esto intersecta a Y. De esta manera, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $z \in U$ y $U \cap Y \neq \emptyset$, de donde $z \in \mathrm{St}[Y,\mathcal{U}]$. De lo anterior $Cl(Y) \subseteq \bigcap\{\mathrm{St}[Y,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$.

Ahora sea $z \in \bigcap\{\mathrm{St}[Y,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$. Sea $V \in \tau$ tal que $z \in V$. Entonces existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathrm{St}[z,\mathcal{U}] \subseteq V$. Por otro lado, existe $x \in Y$ tal que $z \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$. Por (2.1.2) del Teorema 2.1, se tiene que $x \in \mathrm{St}[z,\mathcal{U}]$. Así $x \in \mathrm{St}[z,\mathcal{U}] \cap Y \subseteq V \cap Y$. De donde $\bigcap\{\mathrm{St}[Y,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\} \subseteq Cl(Y)$. □

Corolario 2.3. *Sea X es un espacio de Hausdorff. Si $\mathfrak{O}$ es una familia de cubiertas de X tal que $\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ es una base local de vecindades para cada $x \in X$, entonces $\{x\} = \bigcap\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Dado que X es un espacio de Hausdorff, $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X. Por Teorema 2.2, se concluye que $\{x\} = \bigcap\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$. □

Sean X un espacio y $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ cubiertas de X. Decimos que $\mathcal{U}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{V}$, escribimos $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$. Además, $\mathcal{U}$ es un *doble refinamiento* de $\mathcal{V}$, escribimos $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2}\mathcal{V}$, si para cada $U, W \in \mathcal{U}$ tales que $U \cap W \neq \emptyset$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \cup W \subseteq V$. Escribimos $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2^2}\mathcal{V}$, si existe una cubierta $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2}\mathcal{W}$ y

$\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{V}$. Inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, escribimos $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$, si existe una cubierta $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

Lema 2.4. *Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ cubiertas de un espacio X y $p \in X$. Si $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, entonces* $\mathrm{St}[p, \mathcal{U}] \subseteq \mathrm{St}[p, \mathcal{V}]$.

Demostración. Sea $x \in \mathrm{St}[p, \mathcal{U}]$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, p \in U$. Dado que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$. Entonces $x, p \in V$. Por lo que $x \in \mathrm{St}[p, \mathcal{V}]$. □

Lema 2.5. *Sea X un espacio. Para cada par de cubiertas $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ de X y para cada $n \in \mathbb{N}$, la condición $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$ implica que para cada $U_1, \ldots, U_{n+1} \in \mathcal{U}$ tales que $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$ con $j = 1, \ldots, n$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U_1 \cup \cdots \cup U_{n+1} \subseteq V$.*

Demostración. Probaremos por inducción sobre n que se cumple la condición. Para $n = 1$, de la definición se sigue que $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2}\mathcal{V}$ si y sólo si para cada $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U_1 \cup U_2 \subseteq V$.

Supongamos que para cada par de cubiertas $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$ de X la condición $\mathcal{Q} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{R}$ implica que para cada $Q_1, \ldots, Q_{n+1} \in \mathcal{Q}$ tales que $Q_j \cap Q_{j+1} \neq \emptyset$ con $j = 1, \ldots, n$, existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $Q_1 \cup \cdots \cup Q_{n+1} \subseteq R$. Sean $\mathcal{W}, \mathcal{S}$ cubiertas de X tales que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2^{n+1}}\mathcal{S}$. Sean $W_1, \ldots, W_{n+2} \in \mathcal{W}$ tales que $W_j \cap W_{j+1} \neq \emptyset$ con $j = 1, \ldots, n+1$. Por definición, existe una cubierta $\mathcal{F}$ de X tal que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \leq \frac{1}{2}\mathcal{S}$. Del hecho que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{F}$, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $W_1 \cup \cdots \cup W_{n+1} \subseteq F_1$ y $W_2 \cup \cdots \cup W_{n+2} \subseteq F_2$. De donde $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F} \leq \frac{1}{2}\mathcal{S}$, existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $F_1 \cup F_2 \subseteq S$. Así $W_1 \cup \cdots \cup W_{n+2} \subseteq S$. Con esto se concluye la demostración. □

Lema 2.6. *Sea X un espacio. Si $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son cubiertas abiertas finitas de X, entonces existe una cubierta abierta finita $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$.*

Demostración. Para cada $x \in X$, definimos $W_x = \bigcap\{U \in \mathcal{U} : x \in U\} \cap \bigcap\{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$. Sea $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$. Notemos que $\mathcal{W}$ es cubierta abierta finita de X. Mostraremos que $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$. Sea $W_z \in \mathcal{W}$. Sean $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que $z \in U$ y $z \in V$. Entonces $W_z \subseteq U$ y $W_z \subseteq V$. Por lo tanto $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$. □

2.2. Espacios Admisibles

En esta sección definiremos a los espacios admisibles. Primero trabajaremos con la definición de familia de cubiertas abiertas admisible, posteriormente introduciremos una función cuyo comportamiento es similar a la de una métrica. Finalmente, demostraremos algunos resultados de dicha función que serán una de las principales herramientas en la siguiente sección.

Una familia de cubiertas abiertas $\mathfrak{O}$ de X se dice *admisible* si satisface las siguientes condiciones:

($A1$) Para cualesquiera $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

($A2$) Para cada $x \in X$, la colección $\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ es una base local para la topología de X en el punto x.

El espacio X se llama *admisible* si admite una familia de cubiertas abiertas admisible. A lo largo de este escrito, diremos que el par ordenado $(X, \mathfrak{O})$ es un espacio admisible si X es un espacio que admite a la familia de cubiertas abiertas admisible $\mathfrak{O}$.

La familia de los espacios admisibles contiene a todos lo espacios métricos y a todos los espacios compactos de Hausdorff.

Teorema 2.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. La familia $\mathfrak{O} = \{\mathcal{U}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ de cubiertas abiertas $\mathcal{U}_\varepsilon = \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X\}$ es admisible de (X, d).*

Demostración. Mostraremos que $\mathfrak{O}$ cumple ($A1$). Afirmamos que si $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $\mathcal{U}_\delta \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$.

Sean $a, b \in X$ tales que $B_d(a, \delta) \cap B_d(b, \delta) \neq \emptyset$. Entonces existe $z \in B_d(a, \delta) \cap B_d(b, \delta)$. Sea $p \in B_d(a, \delta) \cup B_d(b, \delta)$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in B_d(a, \delta)$. Entonces $d(p, z) \leq d(p, a) + d(a, z) < \delta + \delta \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto $p \in B_d(z, \varepsilon)$. De lo anterior $B_d(a, \delta) \cup B_d(b, \delta) \subseteq B_d(z, \varepsilon)$. Se concluye que $\mathcal{U}_\delta \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$.

Para $\varepsilon, \beta > 0$, hacemos $\delta = \frac{\mathrm{mín}\{\varepsilon,\beta\}}{2}$ para obtener que $\mathcal{U}_\delta \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$ y $\mathcal{U}_\delta \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}_\beta$. Por lo tanto, ($A1$) se cumple en $\mathfrak{O}$.

Falta mostrar que $\mathfrak{O}$ cumple ($A2$). Sean $x \in X$ y V un abierto de X tal que $x \in V$. Como X es un espacio métrico, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(x, \lambda) \subseteq V$. Sean $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} > 0$ y $z \in \mathrm{St}\,[x, \mathcal{U}_\varepsilon]$. Entonces existe $y \in X$ tal que $z, x \in B_d(y, \varepsilon)$. De donde $d(y, z) < \varepsilon$ y $d(y, x) < \varepsilon$, así $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + \varepsilon = \lambda$. Por lo que $z \in B_d(x, \lambda)$, es decir, $z \in V$.

Por lo tanto $\mathfrak{O}$ es una familia de cubiertas admisible. $\square$

Teorema 2.8. *Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, entonces la familia $\mathfrak{O} = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ es cubierta finita de $X\}$ es admisible.*

Demostración. Sean $\mathcal{P}, \mathcal{R} \in \mathfrak{O}$. Por Lema 2.6, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{U} \leq \mathcal{P}$ y $\mathcal{U} \leq \mathcal{R}$. Digamos $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$. Afirmamos que existe $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_k\} \in \mathfrak{O}$ tal que $\overline{V_j} \subseteq \overline{U_j}$.

Definimos $F_1 = X - \bigcup\limits_{j=2}^{k} U_j$. Entonces F_1 es cerrado en X y $F_1 \subseteq U_1$. Por (1.34.2) del Lema 1.34, existe $V_1 \in \tau_X$ tal que $F_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$. De manera recursiva definimos $F_r = X - [(\bigcup\limits_{i=1}^{r-1} V_i) \cup (\bigcup\limits_{j=r+1}^{k} U_j)]$. Entonces F_r es un cerrado en X y $F_r \subseteq U_r$. Por Teorema 1.38, X es normal, por (1.34.2) del Lema 1.34, existe $V_r \in \tau_X$ tal que $F_r \subseteq V_r \subseteq \overline{V_r} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r}$.

Mostraremos que $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $x \in X$. Sea $L = \{j \in \{1, \ldots, k\} : x \in U_j\}$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, L es un conjunto no vacío y finito. Definimos $J = \max L$. Entonces $x \notin U_n$ para cada $n > J$, o equivalentemente $x \in \bigcap\limits_{n=J+1}^{k} (X - U_n)$. Supongamos que $x \notin \bigcap\limits_{n=1}^{J-1} (X - V_n)$. Entonces, existe $i \leq J - 1$ tal que $x \in V_i$. Ahora bien, supongamos que $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{J-1} (X - V_n)$. Entonces $x \in (\bigcap\limits_{n=1}^{J-1} (X - V_n)) \cap (\bigcap\limits_{n=J+1}^{k} (X - U_n))$, de donde $x \in X - [(\bigcup\limits_{n=1}^{J-1} V_n) \cup (\bigcup\limits_{n=J+1}^{k} U_n)]$, es decir, $x \in F_J$. Por lo que $x \in V_J$. De lo anterior, concluimos que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X.

Para cada $x \in X$, definimos $A_x = \bigcup\{U_s : x \in \overline{V_s}, s \leq k\}$ y $B_x = \bigcup\{\overline{V_t} : x \notin \overline{V_t}, t \leq k\}$. Tenemos que cada A_x es abierto en X y cada B_x es cerrado en X. Sea $W_x = A_x - B_x$ para cada $x \in X$ y sea $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$. Notemos que $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}_n$. Mostraremos que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$.

Sea $W_x, W_y \in \mathcal{W}$ tales que $W_x \cap W_y \neq \emptyset$. Sea $z \in W_x \cap W_y$. Elejimos $j \leq k$ tal que $z \in V_j$. De donde $z \in \overline{V_j}$, así $y, x \in \overline{V_j}$. Del hecho que $x \in \overline{V_j}$, $A_x \subseteq U_j$. Por lo que $W_x \subseteq U_j$. De manera similar, tenemos que $W_y \subseteq U_j$.

Por lo que $W_x \cup W_y \subseteq U_j$. Por lo tanto $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Las condiciones $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \leq \mathcal{P}$ implican que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{P}$. De la misma manera $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{R}$. Por lo tanto, $\mathfrak{O}$ cumple $(A1)$.

Probaremos que $\mathfrak{O}$ cumple $(A2)$. Sean $x \in X$ y V abierto de X tal que

$x \in V$. Por Teorema 1.38, X es normal, entonces existe T abierto de X tal que $x \in T \subseteq \overline{T} \subseteq V$. Notemos que $X - \overline{T}$ es abierto de X. Sea $\mathcal{U} = \{V, X - \overline{T}\}$. De manera que $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Sea $z \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $z, x \in U$. Del hecho que $x \in V$ y que $x \notin X \setminus \overline{T}$, se tiene que $z \in V$. Concluimos que $\mathrm{St}[x, \mathcal{U}] \subseteq V$.

Por lo tanto $\mathfrak{O}$ es una familia de cubiertas admisible. $\square$

Antes de introducir una función cuyo comportamiento es similar a la de una métrica, es necesario proporcionar dos resultados que serán útiles para transferir las metodologías deseadas.

Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible y $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ el conjunto potencia de $\mathfrak{O}$. Definimos la relación $\preceq$ en $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ como sigue: $\mathfrak{E} \preceq \mathfrak{F}$ si y sólo si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$. Del hecho que la relación $\subseteq$ es un orden parcial, se sigue que $\preceq$ es un orden parcial.

Para todo $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}(\mathfrak{O})$, se tiene que $\mathfrak{O} \preceq \mathfrak{E} \preceq \emptyset$. Intuitivamente, $\mathfrak{O}$ es *cero* y $\emptyset$ es *infinito* en este orden parcial.

Para cada $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$n \cdot \mathfrak{E} = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{O} : \text{existe } \mathcal{V} \in \mathfrak{E} \text{ tal que } \mathcal{V} \leq \tfrac{1}{2^n}\mathcal{U}\}.$$

Proposición 2.9. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible.*
(2.9.1) *Si $\mathfrak{E}, \mathfrak{F} \in \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ tales que $\mathfrak{E} \preceq \mathfrak{F}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \cdot \mathfrak{E} \preceq n \cdot \mathfrak{F}$.*
(2.9.2) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$.*
(2.9.3) *Si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{U} \in k \cdot \{\mathcal{V}\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in n \cdot \mathfrak{F}$. Entonces existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Puesto que $\mathfrak{E} \preceq \mathfrak{F}$, se tiene que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$. Por lo que $\mathcal{V} \in \mathfrak{E}$ y $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. De donde $\mathcal{U} \in n \cdot \mathfrak{E}$. Por lo tanto $n \cdot \mathfrak{E} \preceq n \cdot \mathfrak{F}$. Esto termina la prueba de (2.9.1).

Probaremos por inducción sobre n que se cumple (2.9.2).

Por $(A1)$ para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Con lo cual $1 \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$.

Supongamos que $n \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Entonces $\mathcal{U} \in 1 \cdot \mathfrak{O}$, es decir, existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ y $n \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{W}$. Así $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^{n+1}}\mathcal{U}$. De donde $\mathcal{U} \in (n+1) \cdot \mathfrak{O}$.

Por lo tanto $n \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que $\mathcal{U} \in k \cdot \{\mathcal{V}\}$ si y sólo si existe $\mathcal{W} \in \{\mathcal{V}\}$ tal que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$, lo que es equivalente a $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$. Por lo tanto (2.9.3) se cumple. $\square$

Definimos una función $\rho : X \times X \to \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ como

$$\rho(x,y) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{O} : y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]\ \}.$$

Proposición 2.10. *La función $\rho : X \times X \to \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ cumple las siguientes condiciones:*
(ρ.1) *Si $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$, entonces $\mathcal{V} \in \rho(x,y)$.*
(ρ.2) *Para todo $x, y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\rho(x,y) \preceq n \cdot \rho(x,y)$.*
(ρ.3) *Para todo $x, y \in X$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.*
(ρ.4) *Para todo $x, y \in X$, $\mathfrak{O} \preceq \rho(x,y)$ y $\mathfrak{O} = \rho(x,x)$.*
(ρ.5) *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $\rho(x,y) = \mathfrak{O}$ si y sólo si $x = y$.*
(ρ.6) *Para todo $x, y, z \in X$, $\rho(x,y) \preceq 1 \cdot (\rho(x,z) \cap \rho(z,y))$.*
(ρ.7) *Para todo $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$,*

$$\rho(x,y) \preceq n \cdot (\rho(x,x_1) \cap \rho(x_1,x_2) \cap \cdots \cap \rho(x_n,y)).$$

Demostración. Iniciamos mostrando que (ρ.1) se cumple. Como $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$, $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$. Del hecho que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ y por Lema 2.4, se tiene que $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{V}]$. Existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $y, x \in V$. Por lo tanto $\mathcal{V} \in \rho(x,y)$. Así, ρ cumple (ρ.1).

Probaremos (ρ.2). Sea $\mathcal{U} \in n \cdot \rho(x,y)$. Entonces, existe $\mathcal{V} \in \rho(x,y)$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Entonces $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{V}]$. Existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $y, x \in V$. Por Lema 2.5, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$, así, $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$. Por lo tanto $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$.

Sea $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$. Entonces $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$. Por Lema (2.1.2), $x \in \mathrm{St}[y,\mathcal{U}]$. De lo anterior, se concluye que $\mathcal{U} \in \rho(y,x)$. De lo anterior, $\rho(x,y) \subseteq \rho(y,x)$. De manera similar se prueba que $\rho(y,x) \subseteq \rho(x,y)$. Así ($\rho$.3) se verifica.

Notemos que $\rho(x,y) \subseteq \mathfrak{O}$, por lo que $\mathfrak{O} \preceq \rho(x,y)$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Del hecho que $x \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$, se tiene que $\mathfrak{O} = \rho(x,x)$. Con esto hemos probado (ρ.4).

Veamos que (ρ.5) es cierto. Supongamos que $\rho(x,y) = \mathfrak{O}$. Entonces $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Dado que $\mathfrak{O}$ es una familia admisible, $\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ es una base local de vecindades para x. Del hecho que $y \in \bigcap\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ y X es un espacio de Hausdorff, por Corolario 2.3, se tiene que $x = y$.

Para probar (ρ.6), sea $\mathcal{U} \in 1 \cdot (\rho(x,z) \cap \rho(z,y))$. Entonces existe $\mathcal{V} \in \rho(x,z) \cap \rho(z,y)$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\mathcal{V} \in \rho(x,z) \cap \rho(z,y)$, $x \in \mathrm{St}[z,\mathcal{V}]$ y $z \in \mathrm{St}[y,\mathcal{V}]$. De donde, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $x, z \in V_1$ y $z, y \in V_2$. Así, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Por Lema 2.5, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \subseteq U$. De este modo $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$.

Finalmente vamos a demostrar $(\rho.7)$. Sea $\mathcal{U} \in n \cdot (\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \cdots \cap \rho(x_n, y))$. Entonces, existe $\mathcal{V} \in \rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \cdots \cap \rho(x_n, y)$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Como $\mathcal{V} \in \rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \cdots \cap \rho(x_n, y)$, existen $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1} \in \mathcal{V}$ tales que $x, x_1 \in V_1, x_1, x_2 \in V_2, \ldots, x_n, y \in V_{n+1}$. De modo que $V_j \cap V_{j+1} \neq \emptyset$ con $j = 1, \ldots, n$, y $x, y \in V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n+1}$. Por Lema 2.5, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n+1} \subseteq U$. Por lo que $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. □

Definición 2.11. Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible.

(2.11.1) Un subconjunto Y de X *es acotado con respecto a* $\mathfrak{O}$ si existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para todo $x, y \in Y$. En este caso decimos que Y *es acotado por* $\mathcal{U}$.

(2.11.2) El *diámetro* de un subconjunto Y de X es el conjunto $D(Y) \in \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ definido como $D(Y) = \bigcap\{\rho(x, y) : x, y \in Y\}$.

Lema 2.12. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible y sean Y, A, B subconjuntos de X. Se cumplen las siguientes condiciones:*

(2.12.1) *Si Y es acotado con respecto a $\mathfrak{O}$, entonces $D(Y) \neq \emptyset$.*

(2.12.2) *El subconjunto Y es acotado por $\mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{U} \in D(Y)$.*

(2.12.3) *Para todo $x, y \in A$, $\rho(x, y) \preceq D(A)$.*

(2.12.4) *Si $A \subseteq B$, entonces $D(A) \preceq D(B)$.*

(2.12.5) *$D(A) \preceq D(\mathrm{Cl}(A)) \preceq 2 \cdot D(A)$.*

Demostración. Verificamos (2.12.1). Dado que Y es acotado con respecto a $\mathfrak{O}$, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para todo $x, y \in Y$. Así $\mathcal{U} \in D(Y)$. Por lo tanto $D(Y) \neq \emptyset$.

Para probar (2.12.2), basta con demostrar que si $\mathcal{U} \in D(Y)$, Y es acotado por $\mathcal{U}$. Del hecho que $\mathcal{U} \in D(Y)$, se tiene que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para todo $x, y \in Y$. Por lo tanto Y es acotado por $\mathcal{U}$.

Veremos que (2.12.3) se cumple. Sea $\mathcal{U} \in D(A)$. Entonces $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para todo $x, y \in A$. Por lo tanto $\rho(x, y) \preceq D(A)$.

Probaremos (2.12.4). Sea $\mathcal{U} \in D(B)$ y $x, y \in A$. Dado que $\mathcal{U} \in D(B)$, $\mathcal{U} \in \rho(w, z)$ para todo $w, z \in B$. Como $x, y \in A$, $x, y \in B$. Por lo que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Ya que x, y son arbitrarios, se tiene que $\mathcal{U} \in D(A)$. Por lo tanto $D(A) \preceq D(B)$.

Del hecho que $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$, por (2.12.4), se tiene que $D(A) \preceq D(\mathrm{Cl}(A))$. Sean $\mathcal{U} \in 2 \cdot D(A)$ y $a, b \in \mathrm{Cl}(A)$. Como $\mathcal{U} \in 2 \cdot D(A)$, existe $\mathcal{V} \in D(A)$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^2}\mathcal{U}$. Del hecho que $\mathrm{St}[a, \mathcal{V}]$ es una vecindad de a y $\mathrm{St}[b, \mathcal{V}]$ es una vecindad de b, se tiene que existen $x, y \in A$ tales que $x \in \mathrm{St}[a, \mathcal{V}]$ y $y \in \mathrm{St}[b, \mathcal{V}]$. Por lo que $\mathcal{V} \in (\rho(a, x) \cap \rho(b, y) \cap \rho(x, y))$. Entonces $\mathcal{U} \in 2 \cdot (\rho(a, x) \cap \rho(b, y) \cap \rho(x, y))$. Por ($\rho$.7) de la Proposición 2.10, $\mathcal{U} \in \rho(a, b)$. Esto prueba que $2 \cdot D(A) \subseteq D(\mathrm{Cl}(A))$. Por lo tanto $D(\mathrm{Cl}(A)) \preceq 2 \cdot D(A)$. Hemos probado (2.12.5). □

Lema 2.13. *Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible, Y un subconjunto de X y $\mathbb{W}$ una familia de conjuntos abiertos de X tales que $Y \subseteq \bigcup \mathbb{W}$. Si Y es compacto, entonces existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ que cumple que para cada subconjunto A de X tal que $\mathcal{U} \in D(A)$ y $A \cap Y \neq \emptyset$, existe $W \in \mathbb{W}$ tal que $A \subseteq W$.*

Demostración. Procederemos por contradicción, supondremos que para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existe $A_{\mathcal{U}} \subseteq X$ tal que $\mathcal{U} \in D(A_{\mathcal{U}})$, $A_{\mathcal{U}} \cap Y \neq \emptyset$ y $A_{\mathcal{U}} \cap (X - W) \neq \emptyset$ para todo $W \in \mathbb{W}$. Dado $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, elejimos $y_{\mathcal{U}} \in A_{\mathcal{U}} \cap Y$. Así $(y_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in \mathfrak{O}}$ es una red. Por Teorema 1.41, existe un conjunto dirigido M y una función creciente y cofinal $\varphi : M \to \mathfrak{O}$ tal que $(y_{\varphi(m)})_{m \in M}$ es una subred convergente. Sea $y \in Y$ tal que $\lim y_{\varphi(m)} = y$. Dado que $Y \subseteq \bigcup \mathbb{W}$, existe $W_0 \in \mathbb{W}$ tal que $y \in W_0$. Por ($A2$), existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathrm{St}[y, \mathcal{V}] \subseteq W_0$. De ($A1$), existe $\mathcal{E} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{E} \leq \frac{1}{2}\mathcal{V}$. Por lema 2.4, $\mathrm{St}[y, \mathcal{E}] \subseteq \mathrm{St}[y, \mathcal{V}] \subseteq W_0$. Así existe $L \in M$ tal que $y_{\varphi(L)} \in \mathrm{St}[y, \mathcal{E}]$ para todo $l \geq_M L$. Existe $j \in M$ tal que $j \geq_M L$, $\varphi(j) \leq \frac{1}{2}\mathcal{E}$. Mostraremos que $A_{\varphi(j)} \subseteq W_0$. Sea $x \in A_{\varphi(j)}$. Entonces $\varphi(j) \in \rho(x, y_{\varphi(j)})$, de donde $\mathcal{E} \in \rho(x, y_{\varphi(j)})$ y $\mathcal{E} \in \rho(y, y_{\varphi(j)})$. Por lo que $\mathcal{V} \in \rho(x, y)$, es decir, $x \in \mathrm{St}[y, \mathcal{V}] \subseteq W_0$. De donde $A_{\varphi(j)} \subseteq W_0$. Entonces $A_{\varphi(j)} \cap (X - W_0) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. □

La cubierta $\mathcal{U}$ en el Lema anterior llamaremos una *cubierta de Lebesgue* para la colección $\mathbb{W}$.

2.3. Espacios Admisibles Completos

En esta última sección estudiamos el concepto de completez mediante el uso de la estructura admisible. Extendemos algunos teoremas clásicos que no fueron previamente discutidos además presentamos una extensión del Teorema de Intersección de Cantor.

La siguiente definición se aproxima a la noción de red convergente al *cero* $\mathfrak{O}$ de $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ para la familia admisible $\mathfrak{O}$ de cubiertas.

Definición 2.14. Una red $(\mathfrak{E}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ *converge a* $\mathfrak{O}$, escribimos $\mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$, si para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \mathfrak{E}_\lambda$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Proposición 2.15. *Sean $(\mathfrak{E}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(\mathfrak{D}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ redes en $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ y $k \in \mathbb{N}$. Se cumplen las siguientes condiciones:*
(2.15.1) *Si $\mathfrak{D}_\lambda \preceq \mathfrak{E}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $\mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$, entonces $\mathfrak{D}_\lambda \to \mathfrak{O}$.*
(2.15.2) *Si $\mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$, entonces $k \cdot \mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \mathfrak{E}_\lambda$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Como $\mathfrak{D}_\lambda \preceq \mathfrak{E}_\lambda$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}_\lambda$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. De lo anterior, $\mathfrak{D}_\lambda \to \mathfrak{O}$. Esto termina la prueba de (2.15.1).

Para probar (2.15.2), sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Por (2.9.2) de la Proposición 2.9, $\mathcal{U} \in k \cdot \mathfrak{O}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$. Por (2.9.3) de la Proposicón 2.9, $\mathcal{U} \in k \cdot \{\mathcal{V}\}$. Así, $k \cdot \{\mathcal{V}\} \preceq \{\mathcal{U}\}$. Como $\mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{V} \in \mathfrak{E}_\lambda$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. De modo que $\mathfrak{E}_\lambda \preceq \{\mathcal{V}\}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Por (2.9.3) de la Proposición 2.9, $k \cdot \mathfrak{E}_\lambda \preceq k \cdot \{\mathcal{V}\}$. Esto implica que $\mathcal{U} \in k \cdot \mathfrak{E}_\lambda$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Por lo tanto $k \cdot \mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$. □

Proposición 2.16. *Sean $(X, \mathfrak{O})$ espacio admisible y $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X. Entonces $x_\lambda \to x$ si y sólo si $\rho(x_\lambda, x) \to \mathfrak{O}$.*

Demostración. Mostraremos primero que la condición $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x implica $\rho(x_\lambda, x) \to \mathfrak{O}$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. De donde $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, x)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Por lo tanto $\rho(x_\lambda, x) \to \mathfrak{O}$.

Supongamos ahora que $\rho(x_\lambda, x)$ converge a $\mathfrak{O}$. Entonces para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, x)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. De lo anterior $x_\lambda \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Por lo tanto $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x. □

Intuitivamente, los espacios métricos completos son aquellos espacios que no tiene huecos. Una forma natural para describir estos espacios es vía redes de Cauchy. La siguiente definición nos ayuda a describir a los espacios admisibles completos mediante redes $\mathfrak{O}$-Cauchy.

Definición 2.17. Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible y $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X.
(2.17.1) La red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es $\mathfrak{O}$-*Cauchy* si para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$, entonces $x_{\lambda_1} \in \mathrm{St}[x_{\lambda_2},\mathcal{U}]$.
(2.17.2) Si toda red $\mathfrak{O}$-Cauchy en X converge, entonces X es llamado un *espacio admisible completo*.

Lema 2.18. *Sea $(X,\mathfrak{O})$ un espacio admisible. Una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en X es $\mathfrak{O}$-Cauchy si y sólo si para cada $\mathcal{U}\in\mathfrak{O}$ existe $\lambda_0\in\Lambda$ tal que $\mathcal{U}\in\rho(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})$ siempre que $\lambda_1,\lambda_2\geq\lambda_0$.*

Demostración. Supongamos que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es $\mathfrak{O}$-Cauchy. Sea $\mathcal{U}\in\mathfrak{O}$. Existe $\lambda_0\in\Lambda$ tal que si $\lambda_1,\lambda_2\geq\lambda_0$, entonces $x_{\lambda_1}\in\mathrm{St}[x_{\lambda_2},\mathcal{U}]$. De donde $\mathcal{U}\in\rho(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})$ siempre que $\lambda_1,\lambda_2\geq\lambda_0$.

Ahora bien, sea $\mathcal{U}\in\mathfrak{O}$. Existe $\lambda_0\in\Lambda$ tal que $\mathcal{U}\in\rho(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})$ siempre que $\lambda_1,\lambda_2\geq\lambda_0$. Del hecho que $\mathcal{U}\in\rho(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})$, se sigue que $x_{\lambda_1}\in\mathrm{St}[x_{\lambda_2},\mathcal{U}]$ para todo $\lambda_1,\lambda_2\geq\lambda_0$. De lo anterior anterior $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{O}$-Cauchy. $\square$

Proposición 2.19. *Sea $(X,\mathfrak{O})$ un espacio admisible. Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{O}$-Cauchy y $(x_{\lambda_k})_{k\in M}$ es una subred convergente, entonces $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge y $\lim x_{\lambda_k}=\lim x_\lambda$.*

Demostración. Sean $x\in X$ tal que $\lim x_{\lambda_k}=x$ y $\mathcal{U}\in\mathfrak{O}$. Por $(A1)$, existe $\mathcal{V}\in\mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V}\leq\frac{1}{2}\mathcal{U}$. De la Proposición 2.16, se tiene que $\rho(x_{\lambda_k},x)\to\mathfrak{O}$, es decir, existe $\beta_0\in M$ tal que $\beta\geq\beta_0$ implica que $\mathcal{V}\in\rho(x_{\lambda_\beta},x)$. Del hecho que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es $\mathfrak{O}$-Cauchy, existe $\lambda_0\in\Lambda$ tal que $\mathcal{V}\in\rho(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})$ con $\lambda_1,\lambda_2\geq\lambda_0$. Sea $k\geq\beta_0$ tal que $\lambda_k\geq\lambda_0$. Sea $\gamma\geq\lambda_0$. Entonces $x_{\lambda_k}\in\mathrm{St}[x,\mathcal{V}]\cap\mathrm{St}[x_\gamma,\mathcal{V}]$, de donde $\mathcal{V}\in\rho(x,x_{\lambda_k})\cap\rho(x_{\lambda_k},x_\gamma)$. Por $(\rho.6)$ de la Proposición 2.10, $\mathcal{U}\in\rho(x,x_\gamma)$. Así, $x_\gamma\in\mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$, es decir, $(x_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ conerverge a x.

Por lo tanto $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge y $\lim x_{\lambda_k}=\lim x_\lambda$. $\square$

Definición 2.20. Sea X un espacio topológico. Decimos que una red de subconjuntos $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de X es *decreciente* si para cada $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$ tales que $\lambda_1\leq\lambda_2$ se tiene que $F_{\lambda_2}\subseteq F_{\lambda_1}$.

Teorema 2.21. *Un espacio admisible $(X,\mathfrak{O})$ es completo si y sólo si para cada red decreciente $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X con $D(F_\lambda)\to\mathfrak{O}$ se tiene que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\emptyset$.*

Demostración. Supongamos que X es completo. Sea $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red de subconjuntos cerrados decreciente de X y $D(F_\lambda)\to\mathfrak{O}$.

Sea $x_\lambda\in F_\lambda$ para cada $\lambda\in\Lambda$ y sea $\mathcal{U}\in\mathfrak{O}$. Veamos que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{O}$-Cauchy. Dado que $D(F_\lambda)\to\mathfrak{O}$, existe λ_0 tal que si $\lambda\geq\lambda_0$ se tiene que $\mathcal{U}\in D(F_\lambda)$. Para $\lambda_1,\lambda_2\geq\lambda_0$, tenemos que $F_{\lambda_1}\cup F_{\lambda_2}\subseteq F_{\lambda_0}$ y así $x_{\lambda_1},x_{\lambda_2}\in F_{\lambda_0}$. Como $\mathcal{U}\in D(F_{\lambda_0})$, $\mathcal{U}\in\rho(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})$.

Del hecho que X es completo, la red $\mathfrak{D}$-Cauchy $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en X converge. Sea $x \in X$. Supongamos que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x.

Sea $\gamma \in \Lambda$. Entonces $(x_\delta)_{\delta\geq\gamma}$ converge a x. Como $x_\delta \in F_\delta \subseteq F_\gamma$ para todo $\delta \geq \gamma$ y F_γ es cerrado, $x \in F_\gamma$. Por lo tanto $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$.

Supongamos ahora que cada red $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ decreciente de subconjuntos cerrados de X con $D(F_\lambda) \to \mathfrak{D}$ tiene intersección no vacía. Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red $\mathfrak{D}$-Cauchy. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sean $G_\alpha = \{x_\kappa : \kappa \geq \alpha\}$ y $F_\alpha = \overline{G_\alpha}$. Notemos que $(F_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X.

Veamos que $D(F_\alpha) \to \mathfrak{D}$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$. Existe λ_0 tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ siempre que $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$. Por lo que $\mathcal{U} \in D(G_{\lambda_0})$, así $D(G_\alpha) \to \mathfrak{D}$. Por (2.15.2) de la Proposición 2.15, $2\cdot D(G_\alpha) \to \mathfrak{D}$. Además $D(G_\alpha) \preceq D(F_\alpha) \preceq 2\cdot D(G_\alpha)$, por (2.15.1) de la Proposición 2.15, se concluye que $D(G_\alpha) \to \mathfrak{D}$.

Dado que $(F_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red decreciente de subconjuntos de X y $D(F_\alpha) \to \mathfrak{D}$, se tiene que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ tal que $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$. Mostraremos que $\lim x_\lambda = x$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$. Dado que $D(F_\lambda) \to \mathfrak{D}$, existe λ_0 tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, entonces $\mathcal{U} \in D(F_\lambda)$. Como $x_\lambda, x \in F_\lambda$, $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, x)$. Por lo tanto $\rho(x_\lambda, x) \to \mathfrak{D}$. Por Proposición 2.16, toda red $\mathfrak{D}$-Cauchy en X converge. Por lo tanto, X es un espacio admisible completo.

□

Corolario 2.22. *Sea $(X, \mathfrak{D})$ un espacio de Hausdorff admisible completo. Si $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $D(F_\lambda) \to \mathfrak{D}$, entonces la intersección $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ consta de un sólo punto.*

Demostración. Sean $x, y \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$. Del hecho que $D(F_\lambda) \to \mathfrak{D}$, se tiene que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Esto implica que $\rho(x, y) = \mathfrak{D}$. Por $(\rho.5)$ de la Proposición 2.10, $x = y$.

Por lo tanto, la intersección $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ es un sólo punto.

□

Definición 2.23. Un espacio X es *totalmente acotado con respecto a* $\mathfrak{D}$ si para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$ existen subconjuntos $X_1, \ldots, X_n$ de X tales que $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$ y $\mathcal{U} \in D(X_k)$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposición 2.24. *Un espacio admisible* $(X, \mathfrak{O})$ *es totalmente acotado si y sólo si para cada* $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ *existen* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *tales que* $X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{St}[x_k, \mathcal{U}]$.

Demostración. Supongamos que X es totalmente acotado. Entonces para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existen subconjuntos $X_1, \ldots, X_n$ de X tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$ y $\mathcal{U} \in D(X_k)$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sea $x_j \in X_j$. Del hecho que $\mathcal{U} \in D(X_j)$, se tiene que $\mathcal{U} \in \rho(x_j, x)$, es decir, $x \in \mathrm{St}[x_j, \mathcal{U}]$ para cada $x \in X_j$. Por lo que $X_j \subseteq \mathrm{St}[x_j, \mathcal{U}]$. Por lo tanto $X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{St}[x_k, \mathcal{U}]$. Esto demuestra la primera parte.

Para probar que X es totalmente acotado, sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Por $(A1)$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{St}[x_k, \mathcal{V}]$. Definimos $X_i = \mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notemos que $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$. Veamos que $\mathcal{U} \in D(X_k)$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Sean $x, y \in \mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]$. Entonces existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $x, x_i \in V_1$ y $y, x_i \in V_2$. Así $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Como $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \subseteq U$. Por lo que $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$. Esto implica que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Se concluye que $\mathcal{U} \in D(X_i)$. Por lo tanto X es totalmente acotado. $\square$

Proposición 2.25. *Un espacio admisible* $(X, \mathfrak{O})$ *es totalmente acotado si y sólo si para cada red de puntos de* X *existe una subred* $\mathfrak{O}$*-Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $(X, \mathfrak{O})$ es totalmente acotado y sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red de elementos de X. Probaremos que para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, existe un subconjunto $X_{\mathcal{U}}$ de X tal que $\mathcal{U} \in D(X_{\mathcal{U}})$ y $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_{\mathcal{U}}\}$ es cofinal.

Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Dado que X es totalmente acotado, existen subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de X tales que $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_i$ y $\mathcal{U} \in D(A_j)$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $L_j = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in A_j\}$. Supongamos que cada L_j no es cofinal. Entonces existe $\theta_j \in \Lambda$ tal que si $\gamma \in L_j$, entonces $\gamma \leq \theta_j$. Existe $\beta \in \Lambda$ tal que $\beta \geq \theta_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_\beta \in A_k$. De donde $\beta \in L_k$, es decir $\beta \leq \theta_k$. Lo cual es una contradicción. Por lo que existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que L_k es cofinal. Hacemos $X_{\mathcal{U}} = A_k$. Entonces $X_{\mathcal{U}}$ es un subconjunto de X tal que $\mathcal{U} \in D(X_{\mathcal{U}})$ y $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_{\mathcal{U}}\}$ es cofinal.

Ahora, sea $\Gamma = \{(\lambda,\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathfrak{D}, x_\lambda \in X_\mathcal{U}\}$. Definimos la relación $(\lambda,\mathcal{U}) \leq (\gamma,\mathcal{V})$ si y sólo si $\lambda \leq \gamma$ y $X_\mathcal{V} \subseteq X_\mathcal{U}$. Tenemos que $(\Gamma,\leq)$ es un conjunto dirigido. Sea $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ definida por $\varphi(\lambda,\mathcal{U}) = \lambda$. Entonces $(x_{\varphi(\lambda,\mathcal{U})})_{(\lambda,\mathcal{U})\in\Gamma}$ es una subred de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Sean $\mathcal{V} \in \mathfrak{D}$ y $\beta \in \Lambda$ tal que $(\beta,\mathcal{V}) \in \Gamma$. Sean $(\eta,\mathcal{W}),(\gamma,\mathcal{F}) \in \Gamma$ tales que $(\eta,\mathcal{W}),(\gamma,\mathcal{F}) \geq (\beta,\mathcal{V})$. Entonces $\eta,\gamma \geq \beta$ y $X_\mathcal{F}, X_\mathcal{W} \subseteq X_\mathcal{V}$. Así $x_\eta, x_\gamma \in X_\mathcal{V}$. De donde $\mathcal{V} \in \rho(x_\eta,x_\gamma)$ para todo $\eta,\gamma \geq \beta$. Por lo tanto $(x_{\varphi(\lambda,\mathcal{U})})_{(\lambda,\mathcal{U})\in\Gamma}$ es una subred $\mathfrak{D}$-Cauchy.

Ahora, supongamos que cada red de puntos de X tiene una subred $\mathfrak{D}$-Cauchy. Para obtener una contradicción, supondremos que X no es totalmente acotado. Por Proposición 2.24, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$ tal que $\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : x \in X\}$ no tiene subcubiertas finitas de X. Sea $\mathtt{F} = \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}$. Entonces $(\mathtt{F},\subseteq)$ es un conjunto dirigido. Para cada $F \in \mathtt{F}$, sea $x_F \in X - \bigcup\limits_{y\in\mathtt{F}} \mathrm{St}[y,\mathcal{U}]$. Obtenemos que $(x_F)_{F\in\mathtt{F}}$ es una red de elementos de X. Por lo tanto, existe una función creciente y cofinal $\varphi : \Lambda \to \mathtt{F}$ tal que $(x_{\varphi(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ es un subred $\mathfrak{D}$-Cauchy de $(x_F)_{F\in\mathtt{F}}$. Entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\varphi(\gamma)},x_{\varphi(\delta)})$ para cada $\gamma,\delta \geq \lambda_0$. Existe $\theta \in \Lambda$ tal que $F_{\lambda_0} \cup \{x_{F_{\lambda_0}}\} \subseteq F_\theta$. Entonces existe $\pi \in \Lambda$ tal que $\lambda_0 \leq \pi$ y $\theta \leq \pi$. Así $F_{\lambda_0} \subseteq F_\pi$ y $F_\theta \subseteq F_\pi$, además $\mathcal{U} \in \rho(x_{\varphi(\lambda_0)},x_{\varphi(\pi)})$. De donde $x_{\varphi(\pi)} \in X - \bigcup\{\mathrm{St}[y,\mathcal{U}] : y \in F_\pi\}$. Esto es una contradicción. Concluimos que X es totalmente acotado.

□

Teorema 2.26. *Un espacio de Hausdorff admisible* $(X,\mathfrak{D})$ *es compacto si y sólo si* $(X,\mathfrak{D})$ *es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Supongamos que X es compacto. Entonces para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$ la cubierta abierta $\{\mathrm{Int}\,\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{D}\}$ tiene una subcubierta finita. Por Proposición 2.24, X es totalmente acotado.

Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{D}$-Cauchy en X, entonces $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tiene una subred convergente en X. Por Proposición 2.19, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge en X. Se concluye que X es completo.

Supongamos que X es completo y totalmente acotado. Por Proposición 2.25, para cada red de puntos de X existe una subred $\mathfrak{D}$-Cauchy. Del hecho que X es completo, cada red $\mathfrak{D}$-Cauchy de puntos de X es convergente en X. Por Teorema 1.41, X es compacto.

□

Capítulo 3

Espacio de funciones

A pesar de la amplia teoría que se conoce sobre el espacio de funciones continuas entre espacios metrizables compactos dotado con la métrica uniforme, aún puede extenderse, por ejemplo, dotar al espacio de funciones continuas entre espacios admisibles de una estructura admisible. Este capítulo nos enfocaremos a extender resultados conocidos sobre la completez del espacio de funciones continuas entre espacios metrizables compactos al espacio de funciones continuas entre espacios admisibles compactos.

3.1. Definiciones y resultados auxiliares

A continuación, definiremos una topología para el espacio de funciones continuas entre espacios admisibles. Además, se expondrán resultados importantes que se usarán en la siguiente sección.

Sean X un espacio topológico y $(Y, \mathfrak{O})$ un espacio admisible. Denotamos por $C(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas de X en Y. Para cada $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ y para cada $f \in C(X, Y)$, definimos $\mathfrak{B}(f, \mathcal{W}) = \{g \in C(X, Y) : \mathcal{W} \in \rho(f(x), g(x))$ para todo $x \in X\}$. La colección τ consiste del elemento $\emptyset$ y de todos los subconjuntos U de $C(X, Y)$ tal que para cada $f \in \mathsf{U}$ existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ de modo que $\mathfrak{B}(f, \mathcal{W}) \subseteq \mathsf{U}$.

Teorema 3.1. *La familia τ es una topología para $C(X, Y)$.*

Demostración. Notemos que $\emptyset$ y $C(X, Y)$ son elementos de τ por definición. Sea $f \in \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} \mathsf{U}_\alpha$. Entonces $f \in \mathsf{U}_\gamma$ para algún $\gamma \in \Lambda$. Así existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathfrak{B}(f,\mathcal{W}) \subseteq \mathsf{U}_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathsf{U}_\alpha$. Por lo tanto $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathsf{U}_\alpha \in \tau$. Sean $\mathsf{U}, \mathsf{V} \in \tau$. Sea $f \in \mathsf{U}\cap\mathsf{V}$. Dado que $f \in \mathsf{U}$, existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathfrak{B}(f,\mathcal{W}) \subseteq \mathsf{U}$. Como $f \in \mathsf{V}$, existe $\mathcal{A} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathfrak{B}(f,\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{V}$. Dado que $\mathcal{W}, \mathcal{A} \in \mathfrak{O}$ por $(A1)$, existe $\mathcal{K} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{K} \leq \frac{1}{2}\mathcal{W}$ y $\mathcal{K} \leq \frac{1}{2}\mathcal{A}$. Sea $g \in \mathfrak{B}(f,\mathcal{K})$. Entonces $\mathcal{K} \in \rho(f(x), g(x))$ para todo $x \in X$, es decir, $g(x) \in \mathrm{St}[f(x),\mathcal{K}]$. Por Lema 2.4, $g(x) \in \mathrm{St}[f(x),\mathcal{W}]$ y $g(x) \in \mathrm{St}[f(x),\mathcal{A}]$, y $\mathcal{W}, \mathcal{A} \in \rho(f(x), g(x))$ para cada $x \in X$. Por lo que $g \in \mathfrak{B}(f,\mathcal{W}) \cap \mathfrak{B}(f,\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{U}\cap\mathsf{V}$. Por lo tanto, $\mathsf{U}\cap\mathsf{V} \in \tau$. De lo anterior concluimos que la familia τ es una topología para $C(X,Y)$.

□

En seguida definiremos una función para el espacio $C(X,Y)$ cuyo comportamiento es similar al de una métrica.

Sean $(Y,\mathfrak{O})$ un espacio admisible y X un espacio. Definimos una función $\hat{\rho} : C(X,Y) \times C(X,Y) \to \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ como

$$\hat{\rho}(f,g) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{O} : f(x) \in \mathrm{St}[g(x),\mathcal{U}] \text{ para cada } x \in X\}.$$

Proposición 3.2. *La función $\hat{\rho}$ cumple las siguientes condiciones:*

($\hat{\rho}$.1) *Para todo $f, g \in C(X,Y)$, se tiene $\hat{\rho}(f,g) = \hat{\rho}(g,f)$.*

($\hat{\rho}$.2) *Para todo $f, g \in C(X,Y)$, se tiene que $\mathfrak{O} \preceq \hat{\rho}(f,g)$ y $\mathfrak{O} = \hat{\rho}(f,f)$.*

($\hat{\rho}$.3) *Si Y es un espacio de Hausdorff, entonces $\hat{\rho}(f,g) = \mathfrak{O}$ si y sólo si $f = g$.*

($\hat{\rho}$.4) *Para todo $f, g, h \in C(X,Y)$, se tiene que $\hat{\rho}(f,h) \preceq 1\cdot(\hat{\rho}(f,g)\cap\hat{\rho}(g,h))$.*

($\hat{\rho}$.5) *Para cada $f, g \in C(X,Y)$ y cada $x \in X$, se tiene que $\rho(f(x), g(x)) \preceq \hat{\rho}(f,g)$.*

($\hat{\rho}$.6) *Para todo $f, g \in C(X,Y)$, se tiene que $\hat{\rho}(f,g) = \bigcap_{x\in X} \rho(f(x), g(x))$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(f,g)$. Entonces $f(x) \in \mathrm{St}[g(x),\mathcal{U}]$ para todo $x \in X$. Por (2.1.2) de Teorema 2.1, $g(x) \in \mathrm{St}[f(x),\mathcal{U}]$. Así, $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(g,f)$, es decir $\hat{\rho}(f,g) \subseteq \hat{\rho}(g,f)$. De manera similar se prueba que $\hat{\rho}(g,f) \subseteq \hat{\rho}(f,g)$. Hemos probado ($\hat{\rho}$.1).

Notemos que $\hat{\rho}(f,g) \subseteq \mathfrak{O}$ por definición. De donde $\mathfrak{O} \preceq \hat{\rho}(f,g)$. Ahora, sean $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ y $x \in X$. Del hecho que $f(x) \in \mathrm{St}[f(x),\mathcal{U}]$, se tiene que $\mathfrak{O} = \rho(f(x),(x))$, es decir $\mathfrak{O} = \hat{\rho}(f,f)$. Por lo tanto ($\hat{\rho}$.2) se cumple.

Para probar ($\hat{\rho}$.3), supongamos que $\hat{\rho}(f,g) = \mathfrak{O}$. Sea $x \in X$. Para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, $f(x) \in \mathrm{St}[g(x),\mathcal{U}]$. Dado que $\mathfrak{O}$ es una familia admisible, se tiene que $\{\mathrm{St}[f(x),\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ es una base local de vecindades para $f(x)$. Del hecho que Y es de Hausdorff, por Corolario 2.3, se tiene que $\bigcap \mathrm{St}[g(x), \mathcal{U}] = \{g(x)\}$. Así $f(x) = g(x)$. Por lo tanto $f = g$.

Sea $\mathcal{U} \in 1 \cdot (\hat{\rho}(f,g) \cap \hat{\rho}(g,h))$. Entonces existe $\mathcal{V} \in \hat{\rho}(f,g) \cap \hat{\rho}(g,h)$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Sea $x \in X$. Dado que $\mathcal{V} \in \hat{\rho}(f,g) \cap \hat{\rho}(g,h)$, $f(x) \in \mathrm{St}[g(x), \mathcal{V}]$ y $g(x) \in \mathrm{St}[h(x), \mathcal{V}]$. Así existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $g(x), f(x) \in V_1$, $h(x), g(x) \in V_2$. Por Lema 2.5, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \subseteq U$, de donde $f(x), h(x) \in U$. Por lo que $f(x) \in \mathrm{St}[h(x), \mathcal{U}]$. Obtenemos que $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(f,g)$. Concluimos que $(\hat{\rho}.4)$ se verifica.

Continuando con el orden probaremos $(\hat{\rho}.5)$. Sean $x \in X$ y $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(f,g)$. Entonces $f(x) \in \mathrm{St}[g(x), \mathcal{U}]$. De donde $\mathcal{U} \in \rho(f(x), g(x))$. Por lo tanto $\rho(f(x), g(x)) \preceq \hat{\rho}(f,g)$.

Finalmente, veremos que $(\hat{\rho}.6)$ se cumple. Sea $\mathcal{U} \in \bigcap_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$. Entonces $\mathcal{U} \in \rho(f(x), g(x))$ para todo $x \in X$, es decir, $f(x) \in \mathrm{St}[g(x), \mathcal{U}]$ para todo $x \in X$. Por lo que $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(f,g)$. $\square$

Sean X y Y espacios. El símbolo $S(X,Y)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas y suprayectivas de X en Y. Observemos que $C(X,Y) \neq \emptyset$ pero $S(X,Y)$ puede ser vacío.

Lema 3.3. *Sean X, Z espacios topológicos y $(Y, \mathfrak{O})$ un espacio admisible. Sean $f \in C(Z,X)$ y $g,h \in C(X,Y)$. Si $f \in S(Z,X)$, entonces $\hat{\rho}(g \circ f, h \circ f) = \hat{\rho}(g,h)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(g,h)$ y $z \in Z$. Sabemos que $h(x) \in \mathrm{St}[g(x), \mathcal{U}]$ para todo $x \in X$. Entonces $h(f(z)) \in \mathrm{St}[g(f(z)), \mathcal{U}]$. Por lo tanto $\hat{\rho}(g,h) \subseteq \hat{\rho}(g \circ f, h \circ f)$.

Ahora, sea $\mathcal{W} \in \hat{\rho}(g \circ f, h \circ f)$. Si $w \in Z$, entonces $g(f(w)) \in \mathrm{St}[h(f(w)), \mathcal{W}]$. Sea $y \in X$. Dado que f es suprayectiva, existe $w \in Z$ tal que $f(w) = y$. Así, $g(y) \in \mathrm{St}[h(y), \mathcal{W}]$. Por lo tanto $\hat{\rho}(g \circ f, h \circ f) \subseteq \hat{\rho}(g,h)$. $\square$

Dados espacios X y Y, denotamos por $H(X,Y)$ al conjuntos de todos los homeomorfismo de X en Y. En caso de que $X = Y$, escribimos simplemente $H(X)$. Observemos que $H(X,Y)$ puede ser vacío, pero $H(X) \neq \emptyset$.

Lema 3.4. *Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio compacto admisible, $(Y, \mathfrak{R})$ un espacio admisible y $f \in C(X,Y)$. Para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{R}$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que si $\mathcal{V} \in \rho(x,y)$, entonces $\mathcal{U} \in \rho(f(x), f(y))$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{R}$. Definimos $\mathbb{W} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$. Notemos que $\mathbb{W}$ es una familia de conjuntos abiertos de X. Mostraremos que $X \subseteq \bigcup \mathbb{W}$.

Sean $x \in X$. Existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(x) \in U$. De donde $x \in f^{-1}(U)$. Así $X \subseteq \bigcup \mathbb{W}$.

Por Lema 2.13, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ que cumple que para cada $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{V} \in D(A)$, existe $W \in \mathbb{W}$ tal que $A \subseteq W$. Sean $x, y \in X$ tales que $\mathcal{V} \in \rho(x, y)$. Existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, y \in f^{-1}(U)$. Esto implica que $f(x), f(y) \in U$. Por lo tanto, $f(x) \in \mathrm{St}[f(y), \mathcal{U}]$. □

Lema 3.5. *Sean $(X, \mathfrak{O})$ espacio compacto admisible, $f \in C(X, X)$, $g \in H(X)$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Entonces existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(f \circ g^{-1} \circ k, f)$ para cada $k \in C(X, X)$ con $\mathcal{V} \in \hat{\rho}(g, k)$.*

Demostración. Dado que f es continua y $(X, \mathfrak{O})$ es compacto, por Lema 3.4, existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que si $\mathcal{W} \in \rho(x, y)$, entonces $\mathcal{U} \in \rho(f(x), f(y))$. Como g^{-1} es continua, por Lema 3.4 existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que si $\mathcal{V} \in \rho(w, z)$, entonces $\mathcal{W} \in \rho(g^{-1}(w), g^{-1}(z))$. Sea $k \in C(X, X)$ tal que $\mathcal{V} \in \hat{\rho}(g, k)$. Sea $x \in X$. Por ($\hat{\rho}$.6) de la Proposición 3.2, $\mathcal{V} \in \rho(g(x), k(x))$. Esto implica que $\mathcal{W} \in \rho(g^{-1}(g(x)), g^{-1}(k(x)))$. Por lo que $f(x) \in \mathrm{St}[f(g^{-1}(k(x))), \mathcal{U}]$. Aplicando ($\hat{\rho}$.6) de la Proposición 3.2 se concluye que $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(f \circ g^{-1} \circ k, f)$. □

Denotamos a la función identidad en X como 1_x.

Lema 3.6. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible. Sean $f \in H(X)$ y A un subconjunto de X. Si $f(A) = A$ y $f(z) = z$ para cada $z \in X - A$, entonces $\hat{\rho}(f, 1_X) \preceq D(A)$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\mathcal{U} \in D(A)$. Supogamos que $x \in A$. Entonces $f(x) \in f(A)$. Dado que $\mathcal{U} \in D(A)$, $\mathcal{U} \in \rho(f(x), x)$, es decir, $f(x) \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$. Por lo tanto $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(f, 1_X)$. □

Sean X un espacio topológico, $(Y, \mathfrak{O})$ un espacio admisible y $\mathcal{U}$ una cubierta de X. Un elemento $f \in C(X, Y)$ es una *$\mathcal{U}$-función* si $\mathcal{U} \in D(f^{-1}(y))$ para todo $y \in Y$. Definimos $C_{\mathcal{U}}(X, Y) = \{f \in C(X, Y) : f \text{ es } \mathcal{U} - \text{función}\}$.

Teorema 3.7. *Sean X un espacio compacto de Hausdorff, $(Y, \mathfrak{Q})$ un espacio compacto de Hausdorff admisible. Entonces $S(X, Y)$ es un subconjunto cerrado de $C(X, Y)$.*

Demostración. Probaremos que $C(X, Y) - S(X, Y)$ es un subconjunto abierto de $C(X, Y)$.

Sea $f \in C(X,Y) - S(X,Y)$. Entonces existe $y \in Y - f(X)$. Como Y es compacto y $f \in C(X,Y)$, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathrm{St}[y,\mathcal{U}] \cap f(X) = \emptyset$.

Probaremos que $\mathfrak{B}(f,\mathcal{U}) \subseteq C(X,Y) - S(X,Y)$. Sea $g \in \mathfrak{B}(f,\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{U} \in \rho(f(x), g(x))$ para todo $x \in X$. Supongamos que $g \in S(X,Y)$. Entonces existe $a \in X$ tal que $g(a) = y$. Entonces $\mathcal{U} \in \rho(f(a), y)$. Esto es una contradicción. □

Teorema 3.8. *Sean X un espacio compacto y $(Y,\mathfrak{Q})$ un espacio compacto Hausdorff admisible. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X, entonces $C_{\mathcal{U}}(X,Y)$ es un subconjunto abierto de $C(X,Y)$.*

Demostración. Sea $f \in C_{\mathcal{U}}(X,Y)$. Dado que f es una $\mathcal{U}$-función y $f : X \to f(X)$ es cerrada, por Teorema 1.17, para cada $y \in f(X)$ y cada $V \in \mathcal{U}$ tal que $f^{-1}(y) \subseteq V$, existe un subconjunto abierto U_y de Y tal que $y \in U_y$ y $f^{-1}(U_y) \subseteq V$. De donde $\mathcal{U} \in D(f^{-1}(U_y))$.

Consideramos $A = \{U_y : y \in f(X)\}$. Dado que X es compacto y f es continua, se tiene que $f(X)$ es compacto. Por Lema 2.13, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{Q}$ que cumple que para cada $L \subseteq Y$ tal que $\mathcal{V} \in D(L)$ y $L \cap f(X) \neq \emptyset$, existe $y \in f(X)$ tal que $L \subseteq U_y$.

Por $(A1)$, $\mathcal{W} \in \mathfrak{Q}$ tal que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{V}$. Mostraremos que $B_{\hat{\rho}}(f,\mathcal{W}) \subseteq C_{\mathcal{U}}(X,Y)$. Sea $g \in C(X,Y)$ tal que $\mathcal{W} \in \hat{\rho}(f,g)$. Sea $y \in Y$. Probaremos que $\mathcal{V} \in D(f(g^{-1}(y)))$. Sean $a, b \in f(g^{-1}(y))$. Entonces existen $p, q \in g^{-1}(y)$ tal que $f(p) = a$ y $f(q) = b$. Del hecho que $\mathcal{W} \in \hat{\rho}(f,g)$, se tiene que $\mathcal{W} \in \rho(f(p), g(p))$ y $\mathcal{W} \in \rho(f(q), g(q))$. De donde $\mathcal{W} \in \rho(a,y) \cap \rho(b,y)$. Por Lema 2.5, $\mathcal{V} \in \rho(a,b)$. Se tiene que $\mathcal{V} \in D(f(g^{-1}(y)))$ y $f(g^{-1}(y)) \cap f(X) \neq \emptyset$. Existe $z \in f(X)$ tal que $f(g^{-1}(y)) \subseteq U_z$. De donde $f^{-1}(f(g^{-1}(y))) \subseteq f^{-1}(U_z)$. Entonces $g^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(f(g^{-1}(y))) \subseteq f^{-1}(U_z)$. Por (2.12.4) del Lema 2.12, $D(g^{-1}(y)) \preceq D(f^{-1}(f(g^{-1}(y)))) \preceq D(f^{-1}(U_z)) \preceq \{\mathcal{U}\}$. Esto implica que $\mathcal{U} \in D(g^{-1}(y))$. Por lo tanto g es una $\mathcal{U}$-función. □

Teorema 3.9. *Sean $(X,\mathfrak{O})$ y $(Y,\mathfrak{Q})$ espacios compactos Hausdorff admisibles. Entonces $H(X,Y) = S(X,Y) \cap \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathfrak{O}} C_{\mathcal{U}}(X,Y)$.*

Demostración. Sea $f \in H(X,Y)$. Entonces $f \in S(X,Y)$. Sean $y \in Y$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Dado que f es inyectiva, se tiene que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Por lo que $\mathcal{U} \in D(f^{-1}(y))$. Del hecho que $y \in Y$

y $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$ son arbitrarios, se tiene que $f \in \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathfrak{D}} C_{\mathcal{U}}(X,Y)$. Concluimos que $H(X,Y) \subseteq S(X,Y) \cap \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathfrak{D}} C_{\mathcal{U}}(X,Y)$.

Por otra parte, sea $g \in S(X,Y) \cap \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathfrak{D}} C_{\mathcal{U}}(X,Y)$. Entonces g es una función continua y suprayectiva. Por Proposición 1.19, basta con demostrar que g es una función inyectiva. Sean $x, z \in X$ tales que $g(x) = g(z)$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$. Dado que $g \in C_{\mathcal{U}}(X,Y)$ para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$, se tiene que $\mathcal{U} \in D(g^{-1}(y))$ para todo $y \in Y$. Así $\mathcal{U} \in \rho(w,v)$ para todo $w, v \in g^{-1}(y)$. Entonces $z \in \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathfrak{D}} \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$. Del hecho que X es de Hausdorff, por Corolario 2.3, se tiene que $z = x$. Así, g es inyectiva. De lo anterior, $S(X,Y) \cap \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathfrak{D}} C_{\mathcal{U}}(X,Y) \subseteq H(X,Y)$. Por lo tanto $H(X,Y) = S(X,Y) \cap \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathfrak{D}} C_{\mathcal{U}}(X,Y)$. $\square$

3.2. La completez de C(X,Y)

La propiedad de completez se preserva bajo homeomorfismo entre espacios métricos. Los espacios topológicos completos poseen ciertas propiedades interesantes desde el punto de vista de la topología que motiva a estudiarlos. Iniciamos probando que el espacio de funciones continuas es completo bajo ciertas condiciones.

Teorema 3.10. *Sea X un espacio compacto y $(Y,\mathfrak{D})$ un espacio compacto admisible. Entonces $C(X,Y)$ es completo.*

Demostración. Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red $\mathfrak{D}$-Cauchy en $C(X,Y)$. Sean $x \in X$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$. Dado que $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red $\mathfrak{D}$-Cauchy, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(f_\psi, f_\varphi)$ para todo $\psi, \varphi \geq \lambda$. De donde $\mathcal{U} \in \rho(f_\psi(x), f_\varphi(x))$ para todo $\psi, \varphi \geq \lambda$. Así $(f_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{D}$-Cauchy para cada $x \in X$. Como Y es compacto, por Teorema 2.26, se tiene que Y es completo y con esto $(f_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda}$ converge para cada $x \in X$. Definimos $f : X \to Y$ como $f(x) = \text{lím}\, f_\alpha(x)$ para cada $x \in X$. A continuación vamos a demostrar que $f = \text{lím}\, f_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Sea $\mathcal{W} \in \mathfrak{D}$. Por $(A1)$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{D}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{W}$. Dado que $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{D}$-Cauchy, existe $\beta \in \Lambda$ tal que $\mathcal{V} \in \hat{\rho}(f_\varphi, f_\psi)$. Sea $x \in X$ y $\psi \in \Lambda$. Por $(\hat{\rho}.5)$ de la Proposición 3.2, $\mathcal{V} \in \rho(f_\varphi(x), f_\psi(x))$ para todo $\psi \in \Lambda$. Del hecho que $f(x) = \text{lím}\, f_\varphi(x)$, se obtiene que $\mathcal{V} \in \rho(f_\psi(x), f(x))$. Así $\mathcal{V} \in 1 \cdot (\rho(f_\varphi(x), f_\psi(x)) \cap \rho(f_\psi(x), f(x)))$. Por $(\rho.7)$ de la Proposición 2.10,

$\mathcal{W} \in \rho(f_\varphi(x), f(x))$. Por ($\hat{\rho}$.6) de la Proposición 3.2, $\mathcal{W} \in \hat{\rho}(f_\varphi, f)$ para todo $\psi \in \Lambda$. Esto demuestra que $f = \lim f_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Mostraremos que $f \in C(X,Y)$. Sean $w \in X$ y $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$. Por $(A1)$, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2^2}\mathcal{W}$. Dado que $f = \lim f_\alpha$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(f_\beta(x), f(x))$ para todo $x \in X$ y $\beta \geq \gamma$. Del hecho que f_β es continua, existe un abierto U de X tal que $w \in U$ y $f_\beta(U) \subseteq \mathrm{St}[f_\beta(w), \mathcal{U}]$. Probaremos que $f(U) \subseteq \mathrm{St}[f(w), \mathcal{W}]$. Sea $z \in U$. Dado que $\mathcal{U} \in \rho(f(w), f_\beta(w)) \cap \rho(f_\beta(w), f_\beta(z)) \cap \rho(f_\beta(z), f(z))$ y $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2^2}\mathcal{W}$, obtenemos $\mathcal{W} \in 2 \cdot (\rho(f(w), f_\beta(w)) \cap \rho(f_\beta(w), f_\beta(z)) \cap \rho(f_\beta(z), f(z)))$. Por ($\rho$.7) de la Proposición 2.10 $\mathcal{W} \in \rho(f(w), f(z))$. Por lo que $f(z) \in \mathrm{St}[f(w), \mathcal{W}]$. Así $f \in C(X,Y)$. Por lo tanto cada red $\mathfrak{O}$-Cauchy en $C(X,Y)$ converge. De lo anterior concluimos que $C(X,Y)$ es completo.

$\square$

Capítulo 4

La propiedad admisible de Effros

En este capítulo desarrollamos parte de uno de los aspectos más atractivos del estudio de la topología general: la propiedad de Effros. El objetivo es generalizar la propiedad de Effros para espacios admisibles y hallar criterios de homogeneidad para espacios admisibles.

Definición 4.1. Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible y $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Una *$(\rho,\mathcal{U})$-cadena* de X es un conjunto finito no vacío $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_i, x_{i+1})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Decimos que la $(\rho,\mathcal{U})$-cadena $\{x_1, \ldots, x_n\}$ va de p a q si $x_1 = p$ y $x_n = q$.

El siguiente lema generaliza a [7, Excercise 4.22, p. 63].

Lema 4.2. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible. Si Z es subconjunto no vacío de X, entonces*

$C(Z,\mathcal{U}) = \{x \in X :$ *existe una $(\rho,\mathcal{U})$-cadena de X de x a un punto de Z*$\}$ *es un subconjunto no vacío abierto y cerrado de X.*

Demostración. Observemos que $Z \subseteq C(Z,\mathcal{U})$. Por lo tanto $C(Z,\mathcal{U})$ es no vacío. Mostraremos que $\overline{C(Z,\mathcal{U})} \subseteq C(Z,\mathcal{U}) \subseteq \operatorname{Int} C(Z,\mathcal{U})$. Sea $p \in \overline{C(Z,\mathcal{U})}$. Entonces existe $y \in \operatorname{St}[p,\mathcal{U}] \cap C(Z,\mathcal{U})$. Así, existe una $(\rho,\mathcal{U})$-cadena $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X tal que $x_1 \in Z$ y $x_n = y$. De donde $\{x_1, \ldots, x_n, p\}$ es una $(\rho,\mathcal{U})$-cadena que va de x_1 a p. Por lo tanto, $p \in C(Z,\mathcal{U})$. Con esto se concluye que $C(Z,\mathcal{U})$ es un subconjunto cerrado de X.

Ahora, sea $w \in C(Z,\mathcal{U})$. Probaremos que $\operatorname{St}[w,\mathcal{U}] \subseteq C(Z,\mathcal{U})$. Sea $q \in \operatorname{St}[w,\mathcal{U}]$. Dado que $w \in C(Z,\mathcal{U})$, existe una $(\rho,\mathcal{U})$-cadena $\{a_1, \ldots, a_m\}$

de X tal que $a_1 \in Z$ y $a_m = w$. Entonces $\{a_1, \ldots, a_m, q\}$ es una $(\rho,\mathcal{U})$-cadena de X que va de a_1 a q. Por lo tanto $q \in C(Z,\mathcal{U})$. Concluimos que $C(Z,\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de X. □

Definición 4.3. Un espacio X es *conexo* si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.

Lema 4.4. *Si $(X, \mathfrak{O})$ es un espacio admisible conexo, entonces para cada par de puntos de X hay una $(\rho,\mathcal{U})$-cadena.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Por Lema 4.2, $C(\{x\},\mathcal{U})$ es un subconjunto no vacío abierto y cerrado de X. Del hecho que X es conexo, se tiene que $C(\{x\},\mathcal{U}) = X$. Así, existe una $(\rho,\mathcal{U})$-cadena que va de x en y. □

Definición 4.5. Un espacio topológico X es *homogéneo* siempre que para cada $x, y \in X$, existe $h \in H(X)$ tal que $h(x) = y$.

Definición 4.6. Decimos que un espacio admisible $(X, \mathfrak{O})$ tiene la *propiedad admisible de Effros* si para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que para cualesquiera dos puntos x y y de X, con $\mathcal{V} \in \rho(x, y)$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ que cumple $h(x) = y$ y para cada $z \in X$, $\mathcal{U} \in \rho(z, h(z))$. La cubierta $\mathcal{V}$ es llamada una *cubierta de Effros* para la cubierta $\mathcal{U}$ dada.

Referente al [4, Teorema 5.3, p. 118] se muestra el siguiente Teorema para espacios admisibles.

Teorema 4.7. *Si $(X, \mathfrak{O})$ es un espacio conexo admisible que satisface la propiedad admisible de Effros, entonces X es homogéneo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Dado que X satisface la propiedad admisible de Effros, existe una cubierta de Effros $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ para $\mathcal{U}$ dada. Del Lema 4.4, existe una $(\rho, \mathcal{V})$-cadena $\{z_1, \ldots, z_n\}$ que va de x a y. En consecuencia, dada $j \in \{2, \ldots, n\}$, existe un homeomorfismo $h_j : X \to X$ tal que $h_j(z_{j-1}) = z_j$. Sea $h : X \to X$ dada por $h = h_n \circ \cdots \circ h_2$. Notemos que h es un homeomorfismo de X. Además $h(x) = h_n \circ \cdots \circ h_2(x) = h_n \circ \cdots \circ h_3(z_2) = h_n \circ \cdots \circ h_4(z_3) = \cdots = h_n(z_{n-1}) = y$. Por lo tanto X es homogéneo. □

Definición 4.8. Una familia $\mathfrak{U}$ de conjuntos tiene *la propiedad de intersección finita* si la intersección de cada subfamilia finita es no vacía. Una *familia centrada* es una familia de conjuntos que tienen la propiedad de intersección finita.

Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de un espacio X. Diremos que $x \in \bigcap \overline{\mathcal{U}}$, si $x \in \overline{A}$ para cada $A \in \mathcal{U}$.

Definición 4.9. Un sistema $\{\mathcal{B}_i : i \in I\}$ de cubiertas abiertas de un espacio X se dice que es *completo según Frolik* si satisface la siguiente condición:

(4.9.1) Si $\mathcal{U}$ es una familia centrada en X tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$, entonces $\bigcap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$.

Definición 4.10. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de un espacio X. Decimos que $\mathcal{U}$ es una *cubierta punto finita* si para cada $x \in X$ la colección $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ es finita.

Definición 4.11. Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible. Decimos que $(X, \mathfrak{O})$ es un *espacio admisible punto finito* si cada elemento de $\mathfrak{O}$ es una cubierta punto finita.

Teorema 4.12. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible punto finito. Entonces $(X, \mathfrak{O})$ es completo si y sólo si $\mathfrak{O}$ es un sistema de cubiertas abiertas completo según Frolík.*

Demostración. Supongamos que $(X, \mathfrak{O})$ es completo. Sea $\mathcal{A}$ una familia abierta centrada de subconjuntos de X tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Sea $\mathbb{P} = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} : \mathcal{B} \text{ finito}\}$. La relación $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$ si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ es una dirección para $\mathbb{P}$. Del hecho que $\mathcal{A}$ es una familia abierta centrada, se tiene que $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{B} \in \mathbb{P}$. Sea $x_{\mathcal{B}} \in \bigcap \mathcal{B}$ para cada $\mathcal{B} \in \mathbb{P}$. Entonces $(x_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B} \in \mathbb{P}}$ es una red. Mostraremos que $(x_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B} \in \mathbb{P}}$ es una red $\mathfrak{O}$-Cauchy. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Existe $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$. De donde $\{U\} \in \mathbb{P}$. Sean $\mathcal{D}, \mathcal{F} \in \mathbb{P}$ tal que $\{U\} \subseteq \mathcal{D}, \mathcal{F}$. Entonces $U \in \mathcal{D}$, $U \in \mathcal{F}$. Así $x_{\mathcal{D}} \in \bigcap \mathcal{D} \subseteq U$, $x_{\mathcal{F}} \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq U$. De donde $\mathcal{U} \in \rho(x_{\mathcal{D}}, x_{\mathcal{F}})$. Como $(X, \mathfrak{O})$ es completo, existe $x \in X$ tal que $(x_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B} \in \mathbb{P}}$ converge a x. Afirmamos que $x \in \bigcap \overline{\mathcal{A}}$. Sean $A \in \mathcal{A}$ y W un abierto de X tal que $x \in W$. Existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathrm{St}[x, \mathcal{V}] \subseteq W$. Existe $\mathcal{K} \in \mathbb{P}$ tal que $x_{\mathcal{G}} \in \mathrm{St}[x, \mathcal{V}]$ para todo $\mathcal{G} \geq \mathcal{K}$. Notemos que $\mathcal{K} \cup \{A\} \in \mathbb{P}$ y $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \cup \{A\} = \mathcal{L}$. Entonces $x_{\mathcal{L}} \in W$ y $x_{\mathcal{L}} \in \bigcap \mathcal{L} \subseteq A$. Por lo tanto, $x_{\mathcal{L}} \in A \cap W$ y $x \in \overline{A}$. De lo anterior concluimos que $\mathfrak{O}$ es un sistema de cubiertas abiertas completo según Frolík.

Ahora, supongamos que $\mathfrak{O}$ es un sistema de cubiertas abiertas completo según Frolík. Sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red de $\mathfrak{O}$-Cauchy en X. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Por Lema 2.18, existe $\lambda_{\mathcal{U}} \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_\theta, x_\gamma)$ para todo $\theta, \gamma \geq \lambda_{\mathcal{U}}$. Entonces $\{x_\beta : \beta \geq \lambda_{\mathcal{U}}\} \subseteq \mathrm{St}[x_{\lambda_{\mathcal{U}}}, \mathcal{U}]$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, definimos $\Gamma(U) = \{\beta \in \Lambda : \beta \geq \lambda_{\mathcal{U}}, x_\beta \in U\}$. Sea $\mathcal{G} = \{V \in \mathcal{U} : x_{\lambda_{\mathcal{U}}} \in V\}$. Notemos que $\mathcal{G}$ es finita. Afirmamos que existe $V \in \mathcal{G}$ tal que $\Gamma(V)$ es cofinal.

Supongamos que $\Gamma(V)$ no es cofinal para todo $V \in \mathcal{G}$. Para cada $V \in \mathcal{G}$, existe $\theta_V \in \Lambda$ tal que $\theta_V \geq \lambda_{\mathcal{U}}$ y si $\gamma \in \Gamma(V)$, se tiene que $\gamma \geq \theta_V$. Dado que Λ es un conjunto dirigido, existe $\eta \in \Lambda$ tal que $\eta \geq \theta_V$ para todo $V \in \mathcal{G}$. De donde $\eta \geq \lambda_{\mathcal{U}}$, así $x_\eta \in \mathrm{St}[x_{\lambda_{\mathcal{U}}}, \mathcal{U}]$, es decir, $x_\eta, x_{\lambda_{\mathcal{U}}} \in W$ para algún $W \in \mathcal{U}$. Por lo que $W \in \mathcal{G}$. De donde, $x_\eta \in \Gamma(W)$ y $\eta \geq \theta_W$, lo cual es una contradicción.

Sea $\mathcal{A} = \{U : \text{existe}\, \mathcal{U} \in \mathfrak{D} \text{ tal que } U \in \mathfrak{U} \text{y } \Gamma(U) \text{ es cofinal}\}$. Notemos que $\mathcal{A}$ es una familia abierta. Probaremos que $\mathcal{A}$ es una familia centrada. Sean $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{A}$. Entonces existen $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k \in \mathfrak{D}$ tales que $U_i \in \mathcal{U}_i$ y $\Gamma(U_i)$ es cofinal. Sea $\theta \geq \lambda_{\mathcal{U}_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Existe $\gamma \in \bigcap_{i=1}^{k} \Gamma(U_i)$ tal que $\gamma \geq \theta$. De donde $x_\gamma \in U_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo que $\bigcap U_i \neq \emptyset$. Por hipótesis, obtenemos que $\bigcap \overline{\mathcal{A}} \neq \emptyset$.

Sea $y \in \bigcap \overline{\mathcal{A}}$. Mostraremos que $\rho(x_\lambda, y) \to \mathfrak{D}$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$. Entonces existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{D}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^2}\mathcal{U}$. Del hecho que $y \in \bigcap \overline{\mathcal{A}}$, se tiene que $y \in \overline{U}$ para todo $U \in \mathcal{A}$. Entonces $\mathrm{St}[y, \mathcal{V}] \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{A}$. Sea $R \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}$. Entonces $x_{\lambda_{\mathcal{V}}} \in R$. De donde $R \cap \mathrm{St}[y, \mathcal{V}] \neq \emptyset$, así existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \cap R \neq \emptyset$. Sea $\lambda \geq \lambda_{\mathcal{V}}$. Entonces $x_\lambda \in \mathrm{St}[x_{\lambda_{\mathcal{V}}}, \mathcal{V}]$. Existe $S \in \mathcal{V}$ tal que $x_\lambda, x_{\lambda_{\mathcal{V}}} \in S$. De modo que $S \cap R \neq \emptyset$ y $R \cap V \neq \emptyset$. Por Lema 2.5, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $S \cup R \cup V \subseteq U$. De esto $x_\lambda, y \in U$. Por lo tanto $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, y)$. Concluimos que $(X, \mathfrak{D})$ es completo según Cauchy.

$\square$

Definición 4.13. Un subconjunto G de un espacio X se dice que es un *$G(I)$-subconjunto* de X si es la intersección de una familia de abiertos $\{L_k : k \in I\}$.

Usaremos estos tres resultado conocidos en la literatura.

Teorema 4.14. *[3, Theorem 2.5., p 362] Sea X un espacio regular que tiene un sistema completo $\{\mathcal{B}_i : i \in I\}$ de cubiertas abiertas según Frolík. Entonces, cada $G(I)$-subconjunto no vacío de X tiene un sistema completo de cubiertas abiertas.*

Teorema 4.15. *[3, Theorem 2.6., p 362] Si X es un espacio regular que tiene un sistema completo $\{\mathcal{B}_i : i \in I\}$ de cubiertas abiertas según Frolík. Entonces cada subespacio cerrado F de X tiene un sistema completo de cubiertas abiertas.*

Teorema 4.16. *[3, Theorem 2.7., p. 363] Sea X un espacio regular que tiene un sistema completo $\{\mathcal{B}_i : i \in I\}$ de cubiertas abiertas según Frolík. Las siguientes propiedades de un subconjunto A de X son equivalentes:*

(4.16.1) *A tiene un sistema de cubiertas abiertas completo según Frolík.*
(4.16.2) *A es la intersección de un subconjunto cerrado y de un $G(I)$-subconjunto de X.*

Ya estamos en condiciones de probar la completez del espacio de homeomorfismos de un espacio admisible punto finito.

Teorema 4.17. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible punto finito regular. Entonces $H(X)$ es completo.*

Demostración. Del Teorema 3.7, $S(X,X)$ es cerrado en $C(X,X)$ y por Teorema 3.8, cada $C_{\mathcal{U}}(X,X)$ es abierto en $C(X,X)$. Además del Teorema 3.9, $H(X) = S(X,X) \cap \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathfrak{O}} C_{\mathcal{U}}(X,X)$, es decir, $H(X)$ es la intersección de un subconjunto cerrado y de un $G(I)$-subconjunto de X. Por (4.16.2) del Teorema 4.16, $H(X)$ tiene un sistema completo de cubiertas abiertas según Frolík. Del Teorema 4.12, se tiene que $H(X)$ es completo. $\square$

A continuación enunciamos y demostramos algunos resultados de [8] generalizando cada uno de ellos a espacios admisibles.

Definición 4.18. Sea X un espacio topológico. Para cada $x \in X$, sea $H_x = \{h \in H(X) : h(x) = x\}$.

Notemos que si $f, g \in H_x$, entonces $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x) = x$ y $f^{-1}(x) = x$. Por lo que $f \circ g \in H_x$ y $f^{-1} \in H_x$.

Lema 4.19. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible. Entonces H_x es un subconjunto cerrado de $H(X)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $(h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red convergente en H_x. Sea $f \in H(X)$ tal que $h_\lambda \to f$. Por Corolario 1.26, basta con demostar que $f \in H_x$. Por $(\hat{\rho}.5)$ de la Proposición 3.2, $\rho(h_\lambda(z), f(z)) \preceq \hat{\rho}(h_\lambda, f)$ para cada $z \in Z$. Así, $h_\lambda(x) \to f(x)$, es decir, $x \to f(x)$. Por lo tanto $f \in H_x$. $\square$

Teorema 4.20. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio compacto admisible. Entonces $\varphi : H(X) \times H(X) \to H(X)$ definida por $\varphi(f,g) = f \circ g^{-1}$ es continua.*

Demostración. Sean $(f,g) \in H(X) \times H(X)$ y U abierto de $H(X)$ tal que $\varphi(f,g) \in U$. Entonces existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathfrak{B}(f \circ g^{-1}, \mathcal{U}) \cap H(X) \subseteq U$. De (A1), existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Por Lema 3.5, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{W} \in \hat{\rho}(f \circ g^{-1} \circ k, f)$ para todo $k \in \hat{\rho}(g, \mathcal{V})$. Notemos que

$\mathfrak{B}(f,\mathcal{W})\cap H(X)$ y $\mathfrak{B}(g,\mathcal{V})\cap H(X)$ son vecindades de f y g respectivamente en $H(X)$. Mostraremos que $\varphi(\mathfrak{B}(f,\mathcal{W})\times\mathfrak{B}(g,\mathcal{V}))\subseteq\mathfrak{B}(f\circ g^{-1},\mathcal{U})$.

Sea $(h,j)\in\mathfrak{B}(f,\mathcal{W})\times\mathfrak{B}(g,\mathcal{V})$. Entonces $\mathcal{W}\in\hat{\rho}(f,h)$ y $\mathcal{V}\in\hat{\rho}(g,j)$. Del hecho que $\mathcal{V}\in\hat{\rho}(g,j)$, se tiene que $\mathcal{W}\in\hat{\rho}(f\circ g^{-1}\circ j,f)$. Por Lema 3.3, $\hat{\rho}(f\circ g^{-1},h\circ j^{-1})=\hat{\rho}(f\circ g^{-1}\circ j,h)$. Por ($\hat{\rho}$.4) de la Proposición 3.2, $\hat{\rho}(f\circ g^{-1}\circ j,h)\preceq 1\cdot(\hat{\rho}(f\circ g^{-1}\circ j,f))\cap\hat{\rho}(f,h))$. Dado que $\mathcal{W}\in\hat{\rho}(f\circ g^{-1}\circ j,f))\cap\hat{\rho}(f,h)$ y $\mathcal{W}\leq\frac{1}{2}\mathcal{U}$, se tiene que $\mathcal{U}\in\hat{\rho}(f\circ g^{-1},h\circ j^{-1})$. Por lo tanto φ es continua.

$\square$

Lema 4.21. *Sea $(X,\mathfrak{O})$ un espacio compacto de Hausdorff admisible. Entonces $\eta:H(X)\times X\to X$ definida por $\eta(h,x)=h(x)$ es continua.*

Demostración. Sean $(h,x)\in H(X)\times X$ y V abierto de X tal que $h(x)\in V$. Por $(A2)$, existe $\mathcal{V}\in\mathfrak{O}$ tal que $\mathrm{St}[h(x),\mathcal{V}]\subseteq V$. Por Lema 3.4, existe $\mathcal{W}\in\mathfrak{O}$ tal que si $\mathcal{W}\in\rho(x,y)$, entonces $\mathcal{V}\in\rho(h(x),h(y))$. Por $(A1)$, existe $\mathcal{R}\in\mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{R}\leq\frac{1}{2}\mathcal{W}$. Por Lema 3.5, existe $\mathcal{U}\in\mathfrak{O}$ tal que si $\mathcal{U}\in\hat{\rho}(h,g)$, entonces $\mathcal{R}\in\hat{\rho}(h^{-1}\circ g,1_X)$. Mostraremos que $\eta(\mathfrak{B}(h,\mathcal{U})\times\mathrm{St}[x,\mathcal{R}])\subseteq\mathrm{St}[h(x),\mathcal{V}]$.

Sea $(k,z)\in\mathfrak{B}(h,\mathcal{U})\times\mathrm{St}[x,\mathcal{R}]$. Entonces $\mathcal{U}\in\hat{\rho}(h,k)$. De donde $\mathcal{R}\in\hat{\rho}(h^{-1}\circ k,1_X)$. Del hecho que $\mathcal{R}\in\rho(h^{-1}\circ k(z),z)\cap\mathcal{R}\in\rho(z,x)$ y $\mathcal{R}\leq\frac{1}{2}\mathcal{W}$, se tiene que $\mathcal{W}\in\rho(h^{-1}\circ k(z),x)$. Así, $\mathcal{V}\in\rho(k(z),h(x))$.

Por lo tanto η es continua. $\square$

Definición 4.22. Para cada $f\in H(X)$ y $x\in X$, sea

$$H(X)/H_x=fH_x=\{f\circ k:k\in H_x\}.$$

Notemos que $H(X)/H_x$ tiene la topología cociente por la función $\phi_x:H(X)/H_x\to X$.

Definición 4.23. Una familia de cubiertas admisible $\mathfrak{O}$ de X es *razonable* si $C(X,X)$ es admisible punto finito y $\phi_x:H(X)/H_x\to X$ definida por $\phi_x(gH_x)=g(x)$ es una función abierta.

Teorema 4.24. *Si $(X,\mathfrak{O})$ es un espacio compacto de Hausdorff admisible y $\mathfrak{O}$ es razonable, entonces $\gamma_x:H(X)\to X$ dada por $\gamma_x(g)=g(x)$ es abierta para cada $x\in X$.*

Demostración. Sea $x\in X$. Sea $\pi_x:H(X)\to H(X)/H_x$ dada por $\pi_x(f)=fH_x$. Mostraremos que π_x es una función abierta.

Sea P abierto en $H(X)$. Sea $h \in (\pi_x^{-1}(\pi_x(P)))$. Entonces $\pi_x(h) \in \pi_x(P)$. Así, existe $f \in P$ tal que $\pi_x(f) = \pi_x(h)$. De donde $fH_x = \{f \circ k : k \in H_x\} = \{h \circ l : l \in H_x\} = hH_x$. Dado que $f \in P$, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathfrak{B}(f,\mathcal{U}) \cap H(X) \subseteq P$. Por otro lado, del hecho que $f \in hH_x$, existe $l \in H_x$ tal que $f = h \circ l$. Probaremos que $\mathfrak{B}(h,\mathcal{U}) \cap H(X) \subseteq (\pi_x^{-1}(\pi_x(P))$.

Sea $g \in \mathfrak{B}(h,\mathcal{U}) \cap H(X)$. Entonces $\mathcal{U} \in \hat{\rho}(h,g)$. Dado que $l \in H(X)$, por Lema 3.3, $\hat{\rho}(h,g) = \hat{\rho}(h \circ l, g \circ l) = \hat{\rho}(f, g \circ l)$. Así, $g \circ l \in \mathfrak{B}(f,\mathcal{U}) \subseteq P$. Por lo que $g \circ l \in P$. Afirmamos que $\pi_x(g) = \pi_x(g \circ l)$, es decir $gH_x = \{g \circ k : k \in H_x\} = \{g \circ l \circ j : j \in H_x\} = (g \circ l)H_x$.

Notemos que $g \circ k = g \circ 1_X \circ k = g \circ l \circ l^{-1} \circ k$. Dado que $l^{-1}, k \in H_x$, se tiene que $l^{-1} \circ k \in H_x$. Por lo que $gH_x \subseteq (g \circ l)H_x$.

Ahora, dado que $l, j \in H_x$, entonces $l \circ j \in H_x$. Así $(g \circ l)H_x \subseteq gH_x$. Por lo tanto $gH_x = \{g \circ k : k \in H_x\} = \{g \circ l \circ j : j \in H_x\} = (g \circ l)H_x$. Concluimos que π_x es abierta. Mas aún $\gamma_x = \phi_x \circ \pi_x$. Por lo tanto γ_x es abierta. □

Teorema 4.25. *Si $(X,\mathfrak{O})$ es un espacio compacto admisible homogéneo y $\mathfrak{O}$ es razonable, entonces tiene la propiedad admisible de Effros.*

Demostración. Por los teoremas 4.20 y 4.24, γ_x es abierta y suprayectiva para cada $x \in X$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Por $(A1)$, existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Entonces $\operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_X,\mathcal{W}) \cap H(X))$ es abierto de $H(X)$ que contiene a la función identidad. Sea $\mathcal{D} = \{\gamma_x(\operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_X,\mathcal{W}) \cap H(X))) : x \in X\}$. Notemos que $\bigcup \mathcal{D} \subseteq X$. Sea $y \in X$. Sabemos que $1_X \in \operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_X,\mathcal{W}) \cap H(X))$. Entonces $y = 1_X(y) = \gamma_y(1_X) \in \gamma_y(\operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_X,\mathcal{W}) \cap H(X))) \in \mathcal{D}$. De donde $y \in \bigcup \mathcal{D}$. Así, $\mathcal{D}$ es una cubierta abierta de X. Por Lema 2.13, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ para $\mathcal{D}$ que cumple que para cada A subconjunto de X tal que $\mathcal{V} \in D(A)$, existe $\gamma_x(\operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_X,\mathcal{W}) \cap H(X))) \in \mathcal{D}$ tal que $A \subseteq \gamma_x(\operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_X,\mathcal{W}) \cap H(X)))$. Sean $x, y \in X$ con $\mathcal{V} \in \rho(x,y)$. Se tiene que $\mathcal{V} \in D(\{x,y\})$. Luego, existe $w \in X$ tal que $x, y \in \gamma_w(\operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_x,\mathcal{W})) \cap H(X))$. Entonces existen $g, h \in \operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_X,\mathcal{W})) \cap H(X)$ tales que $g(w) = x$ y $h(w) = y$. Por Lema 3.3, $\hat{\rho}(g, 1_X) = \hat{\rho}(1_X, g^{-1})$ y $\mathcal{W} \in \hat{\rho}(h, 1_X)$. Así, $\mathcal{W} \in \hat{\rho}(1_X, g^{-1})$. Tenemos que $g^{-1} \in \operatorname{Int}(\mathfrak{B}(1_X,\mathcal{W}))$. Denotamos $f = h \circ g^{-1}$. Entonces $f(x) = h(g^{-1}(x)) = h(w) = y$. Por $(\hat{\rho}.4)$ de la Proposición 3.2, $\rho(f(z),z) = \rho(h \circ g^{-1}(z), 1_X(z)) \preceq 1 \cdot (\rho(h \circ g^{-1}(z), g^{-1}(z)) \cap \rho(g^{-1}(z), 1_X(z)))$. De los hechos que $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \in \hat{\rho}(h, 1_X) \cap \hat{\rho}(g^{-1}, 1_X)$, $\mathcal{W} \in \rho(h \circ g^{-1}(z), g^{-1}(z)) \cap \rho(g^{-1}(z), 1_X(z))$ y $(\rho.6)$ de la Proposición 2.10, se tiene que $\mathcal{U} \in \rho(f(z), z)$. □

Bibliografía

[1] R. W. M. Alves and A. Souza, *Hyperconvergence in topological dynamics*, Monatsh. Math. (por aparecer) (2021).

[2] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, 1989.

[3] Z. Frolík, *Generalizations of the G_δ-property of complete metric spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal **10** (1960), no. 3, 359–379.

[4] S. Macías, *Una introducción a los continuos homogéneos*, Revista integración, temas de matemáticas **29** (2011), no. 2, 109–126.

[5] D. Maya-Escudero and J. van Mill, *Continuos homogéneos*, de Topología y sus aplicaciones 4 (2016), 189–203.

[6] J. R. Munkres, *Topology: a First Course*, Prentice-Hall, 1974.

[7] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, 1992.

[8] G. S. Ungar, *On all kinds of homogeneous spaces*, Transactions of the American Mathematical Society (1975), 393–400.

[9] S. Willard, *General topology*, Dover, 2004.