Universidad Autónoma del Estado de México

FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Pseudo-contractibilidad en hiperespacios de continuos

T E S I S

que para obtener el título de:

Matemática

presenta:

Sheyla Reyes Medina

Directores de Tesis:

Dr. Félix Capulín Pérez

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

Cerrillo Piedras Blancas, Toluca, México 2022

Introducción

Uno de los conceptos que ha inquietado a los topólogos es el de contractibilidad. Intuitivamente un espacio es contráctil si se puede deformarse de manera continua hasta llevarlo a un sólo punto. Este concepto ha sido ampliamente estudiado por una cantidad importante de investigadores. Existe en la literatura un concepto relacionado a este, el cual es llamado pseudo-contractibilidad. En cierto modo generaliza la noción de contractibilidad. Este trabajo está enfocado principalmente en el estudio de este último, aplicado escencialmente a hiperespacios de continuos.
R. H. Bing introdujo la noción de pseudo-contractibilidad; sin embargo, fue W. Kuperberg el primer matemático que probó que las nociones de pseudo-contractibilidad y contractibilidad son diferentes. Por la naturaleza del ejemplo que el dio, el cual, en apariencia es más complejo de escribir y muy similar en cierto sentido a la curva del topólogo $sen(\frac{1}{x})$, preguntó lo siguiente: ¿Será la curva del topólogo pseudo-contráctil? En esta línea, H. Katsuura probó en [13] que la curva del topólogo no es pseudo-contráctil con espacio factor el mismo. En su mismo artículo probó que si Y es un continuo indescomponible no degenerado tal que cada una de sus composantes es arcoconexa y X es continuo que tiene arco-componentes densas, entonces X no es pseudo-contráctil con factor Y.
Algunas preguntas relacionadas con el tema son las siguientes:
Pregunta 1. ¿Es la curva del topólogo pseudo-contráctil con espacio factor el pseudoarco?
Pregunta 2. ¿Es el pseudoarco pseudo-contráctil con espacio factor el pseudoarco?
W. Debski probó en [25] que la curva del topólogo no es pseudo-contráctil. Por otra parte, M. Sobolewsky en [21] mostró que el único continuo encadenable pseudo-contráctil es el arco, con esto responde negativamente a la pregunta 2, pues como se sabe el pseudoarco es un continuo encadenable. Realmente no es mucho lo trabajado en este tema, pero lo publicado hasta el momento sobre el tema se puede consultar en [5], [2], [13] y [21].
Actualmente en [9] se probó que en hiperespacios como 2^X, $C(X)$, entre otros, los conceptos de pseudo-contractibilidad y contractibilidad coinciden. Realmente ver que las dos nociones en estos hiperespacios, es parte de un problema más general, a saber: determinar en que tipo de espacios topólogicos los conceptos de pseudo-contractibilidad y contractibilidad coinciden. Este trabajo de tesis está basado en el árticulo [9] y en donde se busca principalmente desarrollar a medida de lo posible, los resultados y ejemplos presentados en el. Aquí mostraremos una familia de hiperespacios en donde ambos conceptos coinciden, a saber los hiperespacios de g-crecimiento.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección daremos algunas definiciones y resultados básicos que se usarán a lo largo de este trabajo.

Definición 1.0.1 *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío.*

Definición 1.0.2 *Un* ***subcontinuo*** *de un continuo X es un subconjunto no vacío de X que es conexo y compacto.*

Definición 1.0.3 *Dado un continuo X, un* ***hiperespacio*** *de X es una colección específica de subconjuntos cerrados de X.*

Algunos de los hiperespacios más trabajados son los siguientes:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \textit{ es no vacío y cerrado}\}$, se conoce como el hiperespacio de subconjuntos cerrados de X;
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ es conexo}\}$, es llamado el hiperespacio de subcontinuos de X;
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ componentes}\}$, con $n \in \mathbb{N}$;
- $C_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene una cantidad finita de componentes}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(X)$;
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ puntos}\}$, llamado el n-ésimo producto simétrico de X, con $n \in \mathbb{N}$.

- $F_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene una cantidad finita de puntos}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$, conocido como el hiperespacio de subconjuntos finitos.

Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tienen las siguientes contenciones:
$C_1(X) = C(X)$, $F_1(X) \subseteq C(X) \subseteq C_n(X) \subseteq C_\infty(X) \subseteq 2^X$, $F_1(X) \subseteq F_n(X) \subseteq F_\infty(X) \subseteq C_\infty(X) \subseteq 2^X$ y $F_n(X) \subseteq C_n(X)$.
A estos hiperespacios los dotaremos con la topología generada por la métrica de Hausdorff. Veamos de que manera está definida esta métrica.

Definición 1.0.4 *Sea X un espacio métrico con métrica d. Dados $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$, definimos la* ***bola de radio** ε **con centro en*** *p como $B(\varepsilon, p) = \{x \in X : d(x,p) < \varepsilon\}$ y la* ***nube de radio epsilon con centro en*** *A, denotada por $N_d(\varepsilon, A)$, como $\{x \in X : \textit{existe } y \in A \textit{ tal que } d(x,y) < \varepsilon\} = \bigcup_{p \in A} B(\varepsilon, p)$.*

Definición 1.0.5 *Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x_0 \in X$. La* ***distancia de** x_0 **al subconjunto*** *A se define como $d(x_0, A) = inf\{d(x_0, x) : x \in A\}$.*

Definición 1.0.6 *Sean (X, d) un espacio métricp, A, B subconjuntos de X. La* ***distancia de** A **a*** *B se define como $d(A, B) = inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$.*

Definición 1.0.7 *Sean X un espacio topólogico y $B \subseteq X$, definimos el* ***diámetro de*** *B como $diam(B) = sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$.*

Definición 1.0.8 *Dado X un continuo definimos la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ de la siguiente manera $H(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)\}$.*

Proposición 1.0.9 *La función H es una métrica para 2^X.*

Demostración: Para probar que H es una métrica probaremos lo siguiente:

(1) $H(A, B)$ está bien definida,

(2) $H(A, B) \geq 0$ para todo $A, B \in 2^X$,

(3) $H(A, B) = H(B, A)$ para todo $A, B \in 2^X$,

(4) $H(A,B) = 0$ si y sólo si $A = B$,

(5) $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$.

Para probar (1) y (2) mostraremos primero que el $diam(X)$ existe. Notemos que $\{d(x,y) : x,y \in X\} \subseteq [0,\infty)$ y $diam(X) = sup\{d(x,y) : x,y \in X\}$. Sean $p \in X$ y $f_p : X \to [0,\infty)$ definida por $f_p(x) = d(p,x)$, se sabe que f_p es continua y como X es un continuo, X es compacto. De está manera f_p alcanza su valor máximo. $f_p(X)$ es un continuo no degenerado en $[0,\infty)$. Por lo que $f_p(X) = [0, d(p,x_0)]$ para algún $x_0 \in X$. Así para todo $x,y \in X$ se tiene que $d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,y) \leq 2d(p,x_0)$, lo que implica que el conjunto $\{d(x,y) : x,y \in X\}$ está acotado y es no vacío, pues para todo $x \in X d(x,x) = 0$. Por lo tanto $diam(X)$ existe.

Sean $A,B \in 2^X$. Definimos el conjunto $E(A,B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon,B) \text{ y } B \subseteq N(\varepsilon,A)\}$. De esta manera $H(A,B) = inf E(A,B)$. Para ver que $H(A,B)$ está bien definida, mostraremos que el conjunto $E(A,B)$ es diferente del vacío y está acotado inferiormente. Como para todo $x,y \in X$, $d(x,y) \leq diam(X) < diam(X)+1$, se tiene que $A \subseteq N(diam(X)+1, B)$ y $B \subseteq N(diam(X)+1, A)$. Así, $diam(X)+1 \in E(A,B)$. Claramente $E(A,B)$ está acotado inferiormente por 0. Por lo que $inf E(A,B)$ existe y por lo tanto $H(A,B) \geq 0$.

Es claro que (3) se sigue de que $E(A,B) = E(B,A)$.

Para mostrar (4) Supongamos que $H(A,B) = 0$. Mostraremos que $A = B$ probando que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Primero mostraremos que $A \subseteq B$. Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Por la definición de ínfimo existe $0 \leq \delta < \varepsilon$ tal que $\delta \in E(A,B)$. De esta manera si $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta < \varepsilon$, es decir $B(\varepsilon,a) \cap B \neq \emptyset$. Por lo que $a \in \overline{B}$. Dado que B es cerrado, $\overline{B} = B$. Así $a \in B$.

La otra contención se prueba de manera similar. De esta forma $A = B$.

Ahora supongamos que $A = B$ entonces $H(A,B) = H(A,A) = inf E(A,A) = inf([0,\infty)) = 0$. Por lo tanto $H(A,B) = 0$.

Para mostrar (5), sean $A,B,C \in 2^X$, $\eta > 0$ y $\delta = \frac{\eta}{2}$. Nótese que $H(A,B) < H(A,B) + \delta$. Así, existe $\varepsilon \in E(A,B)$ tal que $0 \leq H(A,B) \leq \varepsilon < H(A,B) + \delta$. De esta manera $A \subseteq N(\varepsilon,B)$. Así, dado $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon < H(A,B) + \delta$. Por otra parte, como $0 \leq H(B,C) < H(B,C)+\delta$, existe $\varepsilon' \in E(B,C)$ tal que $0 \leq H(B,C) \leq \varepsilon'$. De donde $B \subseteq N(\varepsilon', C)$, esto implica que para b existe $c \in C$ tal que $d(b,c) < \varepsilon' < H(B,C)+\delta$. Así, $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) < H(A,B) + \delta + H(B,C) + \delta = H(A,B) + H(B,C) + \eta$ de esta forma $A \subseteq N(H(A,B) + H(B,C) + \eta, C)$. De forma similar se puede probar que $C \subseteq N(H(A,B) + H(B,C) + \eta, A)$. Por lo que $H(A,B) + H(B,C) + \eta \in E(A,C)$. Así, $H(A,C) = inf E(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C) + \eta$. Por lo que $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C) + \eta$, para toda $\eta > 0$. Por lo tanto, $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$. ■

Lo anterior muestra que H es una métrica sobre 2^X, llamada la métrica de Hausdorff inducida por la métrica d.

A continuación mencionaremos algunos hechos que usaremos a lo largo del trabajo.

El siguiente lema es muy usado para mostrar que $H(A,B) < \varepsilon$; muchas veces lo usaremos sin siquiera mencionarlo.

Lema 1.0.10 *Sean $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$.*

Demostración: Supongamos que $H(A,B) < \varepsilon$. Por la definición de ínfimo existe $\varepsilon' \in E(a,b)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon' < \varepsilon$. De aquí, $A \subseteq N(\varepsilon', B) \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon', A) \subseteq N(\varepsilon, A)$. Supongamos ahora que $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. Sea $a \in A$. Como $A \subseteq N(\varepsilon, B)$, existe $b_a \in B$ tal que $d(a, b_a) < \varepsilon$. Consideremos $\delta_{b_a} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq d(a, b_a) < \delta_{b_a} < \varepsilon$. Entonces, $a \in B(\delta_{b_a}, b_a)$. Por lo tanto, $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B(\delta_{b_a}, a)$. Por la compacidad de A, existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n < \varepsilon$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\delta_i, b_{a_i})$. Sea $0 < \eta_1 = max\{\delta_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} < \varepsilon$. De lo anterior $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\delta_i, b_{j_i}) \subseteq N(\eta_1, B)$. Así, $A \subseteq N(\eta_1, B)$. De manera similar se puede encontrar $\eta_2 > 0$, tal que $\eta_2 < \varepsilon$ y $B \subseteq N(\eta_2, A)$. Haciendo $\eta = max\{\eta_1, \eta_2\} < \varepsilon$, tenemos $A \subseteq N(\eta, B)$ y $B \subseteq N(\eta, A)$. Por lo tanto $H(A,B) \leq \eta < \varepsilon$. ■

A continuación mencionaremos algunos hechos de algunos hiperespacios de X.

Proposición 1.0.11 *Sea X un continuo. Entonces el hiperespacio $F_1(X)$ es homeomorfo a X.*

Demostración: Sea $h : F_1(X) \to X$ una función definida por $h(\{x\}) = x$. Notemos que si $h(\{x\}) = h(\{y\})$, entonces $x = y$, por lo que h es inyectiva. Para probar que h es suprayectiva, observemos que para todo $x \in X$, $\{x\} \in F_1(X)$ es tal que $h(\{x\}) = x$, por lo tanto h es suprayectiva. Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Supongamos que $H(\{x\}, \{y\}) < \delta$, entonces $\{x\} \subseteq N(\delta, \{y\}) = B(\delta, y)$ y $\{y\} \subseteq N(\delta, \{x\}) = B(\delta, x)$. Así, $d(x, y) < \varepsilon$, por lo que h es continua. Además, como $F_1(X)$ es compacto y X es de Hausdorff, h es cerrada, lo que implica que h es un homeomorfismo. ■

Teorema 1.0.12 *El conjunto $F_\infty(X)$ es denso en 2^X.*

Demostración: Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Notemos que la familia $\{B(\varepsilon, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$, tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\varepsilon, a_i) = N(\varepsilon, \{a_1, \ldots, a_n\})$ y dado que $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq N(\varepsilon, A)$ se tiene por el Lema 1.0.10 que $H(A, \{a_1, \ldots, a_n\}) < \varepsilon$. Así, $\{a_1, \ldots, a_n\} \in B(\varepsilon, A) \cap F_\infty(X)$. Por lo tanto $F_\infty(X)$ es denso en 2^X. ■

Proposición 1.0.13 *Sea X un continuo. Si $g : X^n \to F_n(X)$ es la función definida como $g((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces g es continua y suprayectiva.*

Demostración: Como cada elemento de $F_n(X)$ se puede escribir en la forma $\{x_1, \ldots, x_m\}$ donde $m \leq n$, tenemos que si $y_i = x_i$ para toda $i \leq m$ y $y_j = x_m$ para toda $m+1 \leq j \leq n$, entonces $(y_1, \ldots, y_n) \in X^n$. De esta forma, $g((y_1, \ldots, y_n)) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Por lo que g es suprayectiva. Ahora demostraremos que g es continua. Consideremos a X^n con la métrica $D : X^n \times X^n \to [0, \infty)$ definida como $D((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = max\{d(x_i, y_i) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Sea $\varepsilon > 0$ y hagamos $\varepsilon = \delta$. Sean $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n) \in X^n$, tales que, $D((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) < \delta$. Notemos que $d(x_i, y_i) \leq D((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) < \varepsilon$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq N(\varepsilon, \{y_1, \ldots, y_n\})$ y $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})$. Por lo que $H(\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\}) < \varepsilon$. Por lo tanto g es continua. ■

Corolario 1.0.14 *Si X es un continuo, entonces $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración: Como X es un continuo, X^n es un continuo, lo que implica que $g(X^n) = F_n(X)$ es compacto y conexo. Dado que $F_n(X)$ es un subespacio de 2^X, $F_n(X)$ es métrico. Por lo tanto $F_n(X)$ es un continuo. ■

Teorema 1.0.15 *Si X un continuo entonces 2^X es conexo.*

Demostración: Usando el Teorema 1.0.12, el Corolario 1.0.14 y los hechos de que $F_1(X) \subseteq F_n(X)$ para toda n, $F_\infty(X) = \bigcup F_n(X)$ y del resultado general de que si A es conexo y $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ entonces B es conexo, se tiene que 2^X es conexo. ■

La prueba de que 2^X es compacto se puede consultar en [3, Teorema 3.5, p. 18] y [3, Corolario 3.6, p. 19].

Como consecuencia de lo anterior se tiene que 2^X es un continuo.

El siguiente resultado muestra algunos conjuntos abiertos y cerrados en 2^X que son muy usados.

Teorema 1.0.16 *Sea A un subconjunto de X, consideremos las familias:*
$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\}$, $D(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\}$ *y* $\phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}$.

(1) *Si A es abierto, entonces $\Gamma(A)$ y $D(A)$ son abiertos en 2^X.*

(2) *Si A es cerrado, entonces $\Gamma(A)$, $D(A)$ y $\phi(A)$ son cerrados en 2^X.*

Demostración: (1) Supongamos que A es abierto.

Primero demostraremos que $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in \Gamma(A)$. Como $B \subset A$ y A es abierto, para cada $b \in B$, existe $\delta_b > 0$, tal que $B(\delta_b, b) \subset A$. Así, $B \subseteq \bigcup_{b \in B} B(\delta_b, b) \subseteq A$, entonces $\mathcal{C} = \{B(\delta_b, b) : b \in B\}$ es una cubierta abierta de B. Dado que $B \in 2^X$, B es compacto en X, existe $\mathcal{C}' = \{B(\delta_b, b_i) : b_i \in B\}$ con $1 \leq i \leq n$ y $n \in \mathbb{N}$, una subcubierta finita de $\mathcal{C}$, esto es, $B \subseteq \bigcup_{b_i=1}^{n} B(\delta_{b_i}, b_i) \subseteq A$. Por el Lema del número de Lebesgue, existe $\delta > 0$ tal que para cada $b \in B$, $B(\delta, b) \subseteq B(\delta_{b_j}, b_j)$ para algún $b_j \in B$. De lo anterior, tenemos que $N(\delta, B) = \bigcup_{b \in B} B(\delta, b) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\delta_i, b_i) \subseteq A$. Mostraremos que $B_H(\delta, B) \subseteq A$. Si $R \in B_H(\delta, B)$, entonces $H(R, B) < \delta$. De aquí, $R \subset N(\delta, B) \subset A$, $R \in C(A)$, lo que implica que $B_H(\delta, B) \subset \Gamma(A)$. Por lo tanto $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X.

Ahora probaremos que $D(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in D(A)$. Como A es abierto en X y $B \cap A \subset A$ es un cerrado contenido en A procediendo como en la demostración de arriba existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, B \cap A) \subset A$. Veamos que $B_H(\delta, B) \subseteq D(A)$. Sea $T \in B_H(\delta, B)$, entonces $H(T,B) < \delta$ esto implica que $B \subset N(\delta, T)$. Sea $z \in B \cap A$, existe $s \in T$ tal que $d(z,s) < \delta$. De esta manera $s \in N(\delta, B \cap A) \subset A$, por lo que $T \cap A \neq \emptyset$ y $T \in D(A)$. Por lo tanto $D(A)$ es abierto en 2^X.

(2) Supongamos ahora que A es cerrado.

Notemos que: $2^X - \Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \cap (X - A) \neq \emptyset\} = D(X - A)$, $2^X - D(A) = \{B \in 2^X : B \subset (X - A)\} = \Gamma(X - A)$. Dado que A es cerrado en X, entonces $X - A$ es abierto en X. Por (1), $2^X - \Gamma(A)$ y $2^X - D(A)$ son abiertos en 2^X. Por lo tanto $\Gamma(A)$ y $D(A)$ son cerrados en 2^X.

Para demostrar que $\phi(A)$ es cerrado en 2^X. Veamos que $\phi(A) = \overline{\phi(A)}$. Sea $B \in \overline{\phi(A)}$ y supongamos que $B \notin \phi(A)$. Esto implica que $A \not\subseteq B$. Sea $x \in A$ tal que $x \notin B$. Como B es cerrado entonces $d(B,x) > 0$. Sea $\varepsilon = d(B,x)$. Dado que $B \in \overline{\phi(A)}$, tenemos que $\phi(A) \cap B_H(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Tomemos $E \in \phi(A)$ tal que $H(B,E) < \varepsilon$. Como $x \in A$ y $E \in \phi(A)$ se tiene que $x \in E$, de lo anterior existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$ y dado que $d(x,B) \leq d(x,y)$, lo que contradice la definición de $d(x,B)$. Por lo tanto, $B \in \phi(A)$. ■

Una herramienta muy usada en el hiperespacio 2^X son los arcos ordenados los cuales definimos a continuación.

Definición 1.0.17 *Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un* ***arco ordenado de** A **a** B **en** $C(X)$, *si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$.*

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [1, Teorema 6.10, p. 90], el cual garantiza que siempre hay arcos ordenados en $C(X)$.

Teorema 1.0.18 *Para cada $A, B \in C(X)$ tal que $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Definición 1.0.19 *Dados $A, B \in 2^X$ con $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0,1] \to 2^X$ es un* ***arco ordenado de** A **a** B **en** 2^X, *si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$.*

El siguiente resultado se puede consultar en [1, Teorema 6.15, p. 94], que garantiza la existencia de arcos ordenados en 2^X bajo ciertas condiciones.

Teorema 1.0.20 *Sean* $A, B \in 2^X$ *tales que* $A \subsetneq B$. *Entonces existe un arco ordenado de* A *a* B *en* 2^X *si y sólo si toda componente de* B *intersecta a* A.

Definición 1.0.21 *Sean* X *un espacio métrico y* $x, y \in X$. *Una* ***trayectoria*** *de* x *a* y *es una función continua* $f : [0, 1] \to X$ *tal que* $f(0) = x$ *y* $f(1) = y$.

Definición 1.0.22 *Un espacio topológico* X *es* ***conexo por trayectorias*** *si para cada* $x, y \in X$ *existe una trayectoria de* x *a* y.

Definición 1.0.23 *Cualquier espacio* X *que sea homeomorfo a* $[0, 1]$ *es llamado* ***arco***.

Definición 1.0.24 *Un espacio topológico* X *se dice* ***arco conexo*** *si admite un arco entre cualesquiera par de puntos diferentes de* X.

Observación 1.0.25 *Si* X *es un espacio arco conexo, entonces* X *es conexo por trayectorias.*

Observación 1.0.26 *No toda trayectoria es un arco, de esta manera no todo espacio conexo por trayectorias es arco conexo.*

Si un espacio X conexo por trayectorias es de Hausdorff, entonces X es arco conexo. Ver [24, Corolario 31.6, p. 222]

La prueba del siguiente teorema se puede consultar en [3, Teorema 14.9, p. 113]

Teorema 1.0.27 *Si* X *es un continuo, entonces* 2^X *y* $C(X)$ *son arco conexos.*

Otra prueba de este hecho, se verá en la siguiente sección, como consecuencia de la definición de hiperespacio de g-crecimiento y de la Proposición 2.0.18.

Definición 1.0.28 *Sean* X *un espacio topológico y* $\{A_n\}$ *una sucesión de subconjuntos no vacíos de* X. *Definimos el* ***límite inferior*** *y el* ***límite superior*** *en* X *de la sucesión* $\{A_n\}$ *de la siguiente manera:*

• $L_i(A_n) = \{x \in X :$ *para cada subconjunto abierto* U *de* X, *con* $x \in U$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $U \cap A_n \neq \emptyset$, *para toda* $n \geq N\}$.

• $L_s(B_n) = \{x \in X$: *para cada subconjunto abierto* U *de* X, *con* $x \in U$, *existe un conjunto infinito* $J \subset \mathbb{N}$ *tal que* $U \cap A_k \neq \emptyset$, *para toda* $k \in J\}$.

Si para algún $A \subseteq X$ *sucede que el* $L_i(A_n) = L_s(A_n) = A$, *diremos que la sucesión* $\{A_n\}$ *converge a* A *y escribiremos* $limA_n = A$.

De la definición de L_i y L_s se tiene que si $\{A_n\}$ es una sucesión de subconjuntos no vacíos de un espacio topológico X, entonces $L_i(A_n) \subseteq L_s(A_n)$.

Teorema 1.0.29 *Sean* X *un espacio topológico,* $\{A_n\}$ *una sucesión de subconjuntos no vacíos de* X. *Entonces:*

(1) $L_i(A_n)$ *es un subconjunto cerrado de* X *y*

(2) $L_s(A_n)$ *es un subconjunto cerrado de* X.

Demostración: (1) Basta con demostrar que $\overline{L_i(A_n)} \subseteq L_i(A_n)$. Sea $x \in \overline{L_i(A_n)}$ y sea U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$ entonces, $U \cap L_i(A_n) \neq \emptyset$. Esto implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para toda $n \geq N$. Por lo que $x \in L_i(A_n)$.
(2) Mostraremos ahora que $\overline{L_s(A_n)} \subseteq L_s(A_n)$. Sea $y \in \overline{L_s(A_n)}$ y sea U un conjunto abierto de X tal que $y \in U$, esto implica que $U \cap L_s(A_n) \neq \emptyset$. Entonces existe un conjunto infinito $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_k \neq \emptyset$, para cada $k \in J$. De aquí, $y \in L_s(A_n)$. ■

Teorema 1.0.30 *Sean* X, Y *espacios topológicos y sean* $\{A_n\}$ *y* $\{B_n\}$ *sucesiones de subconjuntos no vacíos de* X *y* Y *respectivamente. Entonces:*

(1) $L_i(A_n \times B_n) = L_i(A_n) \times L_i(B_n)$

(2) $L_s(A_n \times B_n) \subset L_s(A_n) \times L_s(B_n)$

(3) *Si* $\{A_n\}$ *y* $\{B_n\}$ *son sucesiones convergentes de subconjuntos no vacíos de* X *y* Y *respectivamente, entonces* $lim(A_n \times B_n) = limA_n \times limB_n$

Demostración: Para probar (1) mostraremos que $L_i(A_n \times B_n) \subseteq L_i(A_n) \times L_i(B_n)$ y $L_i(A_n) \times L_i(B_n) \subseteq L_i(A_n \times B_n)$.
Sean $(a, b) \in L_i(A_n \times B_n)$ y U, V abiertos en X y Y respectivamente, tales que $a \in U$ y

$b \in V$, entonces $(a,b) \in U \times V$ y $U \times V$ es un abierto en el producto $X \times Y$. De esta manera existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $(U \times V) \cap (A_n \times B_n) \neq \emptyset$, para toda $n \geq N$, esto implica que $U \cap A_n \neq \emptyset$ y $V \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Por lo que $a \in L_i(A_n)$ y $b \in L_i(B_n)$. Así, $(a,b) \in L_i(A_n) \times L_i(B_n)$.

Ahora sea $(a,b) \in L_i(A_n) \times L_i(B_n)$, es decir, $a \in L_i(A_n)$ y $b \in L_i(B_n)$. Sea W un abierto en $X \times Y$. Entonces, existe $U \times V$ un abierto básico en $X \times Y$ tal que $(a,b) \in U \times V$, $a \in U$ y $b \in V$ y $(U \times V) \subseteq W$. De esta forma, existen N, $M \in \mathbb{N}$ tales que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$ y $V \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq M$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $N \geq M$, entonces $(U \cap A_n) \times (V \cap B_n) \neq \emptyset$, para toda $n \geq N$. Así, $(U \times V) \cap (A_n \times B_n) \neq \emptyset$, para toda $n \geq N$. De donde $W \cap (A_n \times B_n) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(a,b) \in L_i(A_n \times B_n)$.

Para mostrar (2) Sean $(a,b) \in L_s(A_n \times B_n)$ y U, V abiertos en X y Y respectivamente tales que $a \in U$ y $b \in V$, entonces $(a,b) \in U \times V$, de esta manera existe un conjunto infinito $J \subset \mathbb{N}$, tal que $(U \times V) \cap (A_k \times B_k) \neq \emptyset$ para cada $k \in J$, lo que implica que $U \cap A_k \neq \emptyset$ y $V \cap B_k \neq \emptyset$ para cada $k \in J$. Por lo que $a \in L_s(A_n)$ y $b \in L_s(B_n)$. Así $(a,b) \in L_s(A_n) \times L_s(B_n)$.

Por último, supongamos que $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ son sucesiones convergentes a subconjuntos cerrados no vacíos de X y Y respectivamente. Por (2), $L_s(A_n \times B_n) \subseteq L_s(A_n) \times L_s(B_n) = L_i(A_n) \times L_i(B_n) = L_i(A_n \times B_n)$. Así $L_s(A_n \times B_n) \subseteq L_i(A_n \times B_n)$ por lo que $L_s(A_n \times B_n) = L_i(A_n \times B_n)$, aplicando (1) y (2), concluimos que $lim(A_n \times B_n) = limA_n \times limB_n$. ■

Teorema 1.0.31 *Sea $\{A_n\}$ una sucesión de elementos en 2^X. Se tiene que:*

(1) *$x \in L_i(A_n)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ de X tal que x_n converge a x y $x_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

(2) *$x \in L_s(A_n)$ si y sólo si existen una sucesión de numeros naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tales que x_{n_k} converge a x.*

Demostración: Primero demostraremos (1)

Supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}$ de X tal que x_n converge a x. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_n, x) < \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \in B_\varepsilon(x)$ y $x_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De esta manera $x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A_n$ para toda $n > N$. Así, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n > N$. Por lo tanto $x \in L_i(A_n)$.

Ahora supongamos $x \in L_i(A_n)$ fijo y $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = d_X(x,y)$ y $A_n \in 2^X$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que A_n es compacto en X para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces f alcanza un mínimo en A_n para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir existe $x_n \in A_n$ tal que $f(x_n) = min\{d(x,y) : y \in A_n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in A_n$ de tal forma que $d_X(x_n, x) = min\{d(x,y) : y \in A_n\}$. Ahora para probar que x_n converge a x. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x \in L_i(A_n)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n > N$. De manera que para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d_X(x, a_n) < \varepsilon$, pero $d_X(x_n, x) = min\{d(x,y) : y \in A_n\} \leq d_X(x, a_n) < \varepsilon$ para toda $n > N$. Así, $d(x_n, x) < \varepsilon$, para toda $n > N$. Por lo tanto x_n converge a x.

Para probar (2)

Supongamos que $x \in L_s(A_n)$. Entonces, para $\varepsilon = 1$ existe un conjunto infinito $J_1 \subseteq \mathbb{N}$, tal que $B_1(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in J_1$. Tomando $n_1 \in J_1$ existe $x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1}$. Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe un conjunto infinito $J_2 \subseteq \mathbb{N}$, tal que $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in J_2$. Como J_2 es infinito, podemos tomar $n_2 \in J_2$ tal que $n_2 > n_1$ y además un punto $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_{n_2}$. Continuando con este proceso construimos una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n\}$ y de puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Dado que $\frac{1}{k}$ converge a 0, concluimos que x_{n_k} converge a x.

Ahora supongamos que existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tales que x_{n_k} converge a x. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$, entonces $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Así, $B_\varepsilon(x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para un número infinito de k. Por lo que $x \in L_s(A_{n_k} \subseteq L_s(A_n)$. Por lo tanto $x \in L_s(A_n)$. ■

El siguiente resultado es fundamental dentro de la Teoría de Continuos, combina la convergencia de sucesiones de subconjuntos mediante límite inferior y límite superior con la métrica de Hausdorff H. Se deja la referencia [22, Teorema 4.11, p. 57] para consultar la prueba.

Este hecho se usará indistintamente sin hacer referencia a ello.

Teorema 1.0.32 *Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}$ una sucesión de subconjuntos compactos de X. Entonces, $limA_n = A$ si y sólo si la sucesión $\{A_n\}$ converge a A en 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff.*

Teorema 1.0.33 *Sea $f : X \to Y$ un función entre espacios topológicos. Si X es métrico entonces f es continua en X si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a x, se tiene que $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$.*

Demostración: Supongamos que f es continua.
Sea V un abierto en Y tal que $f(x) \in V$. Dado que f es continua, tenemos que $f^{-1}(V)$ es un abierto en X. Además, $x \in f^{-1}(V)$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para cada $n \geq m$. Esto implica que $f(x_n) \in V$ para cada $n \geq m$. Por lo tanto $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$.
Supongamos que f no es continua en algún $x \in X$. Entonces existe un abierto U en Y tal que $f(x) \in U$ y para cada abierto V en X tal que $x \in V$ se cumple que $f(V) \cap (Y - U) \neq \emptyset$. Ahora, como X es métrico, X es primero numerable. Así, existe una base local numerable $\mathcal{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ para X en x tal que $B_{n+1} \subseteq B_n$. Dado que $x \in B_n$ y B_n es un abierto en X, se tiene que $f(B_n) \cap B(Y - U) \neq \emptyset$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $y_n \in f(B_n) \cap (Y - U)$ y $x_n \in B_n$ tal que $f(x_n) = y_n$. Notemos que si $k \geq m$, entonces $x_k \in B_m$. Así, $\{x_n\}$ converge a x. Veamos que $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$. Tenemos que U es un abierto de Y, $f(x) \in U$ y $f(x_n) = y_n \in (Y - U)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto es una contradicción. Por lo tanto f es continua en X. ■

Definición 1.0.34 *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es un **encaje** si $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo. En tal caso diremos que X está encajado en Y.*

Dado un continuo X, un hiperespacio de X contenido en 2^X definido bajo cierto conjunto P de propiedades será denotado por $H(X)$.

Lema 1.0.35 *Sean X y K continuos. La función $e : 2^X \times 2^K \to 2^{X \times K}$ definida por $e((A, B)) = A \times B$ es un encaje que satisface:*

(1) *$e(H(X) \times H(K)) \subset H(X \times K)$ para cada $H(-) \in \{C(-), C_\infty(-), F_\infty(-)\}$.*

(2) *$e(C_n(X) \times C_m(K)) \subset C_{nm}(X \times K)$, para toda $n \geq 1, m \geq 1$.*

(3) *$e(F_n(X) \times F_m(K)) \subset F_{nm}(X \times K)$ para todo $n \geq 1$ y $m \geq 1$.*

(4) $e(H(X) \times F_1(K)) \subset H(X \times K)$ *para cada* $H(-) \in \{C_n(-), C_\infty(-), F_\infty(-)\}$.

(5) $e(F_1(X) \times H(K)) \subset H(X \times K)$ *para cada* $H(-) \in \{C_n(-), C_\infty(-), F_\infty(-)\}$.

Demostración: Sean A, B subconjuntos cerrados de X y K respectivamente, entonces $A \times B$ es un subconjunto cerrado del producto $X \times K$, por lo que e está bien definida. Para demostrar que e es un encaje basta con demostrar que e es continua e inyectiva. Ya que si e es una función continua entre continuos entonces e es cerrada. Sean A, A' en 2^X y B, B' en 2^K. Supongamos que $(A, B) \neq (A', B')$, entonces $A \neq A'$ o $B \neq B'$, lo que implica que $A \times B \neq A' \times B'$, así e es inyectiva. Para la continuidad sea $\{(A_n, B_n)\}n \in \mathbb{N}$ una sucesión tal que $(A_n, B_n) \to (A, B)$. Por el Teorema 1.0.30, $A_n \times B_n \to A \times B$. Así e es una función continua.

Demostraremos ahora de (1) a (5).

Para demostrar (1), demostraremos que $e(C(X) \times C(K)) \subset C(X \times K)$. Si $e((A, B)) \in e(C(X) \times C(K))$, entonces $A \in C(X)$ y $B \in C(K)$, es decir, A y B son conexos en X y K respectivamente, lo que implica que $A \times B$ es conexo en $X \times K$. Así $e((A, B)) \in C(X \times K)$. Ahora bien, si $e((A, B)) \in e(C_\infty(X) \times C_\infty(K))$, entonces $A \in C_\infty(X)$ y $B \in C_\infty(K)$, es decir, A y B tienen una cantidad finita de componentes de X y K respectivamente, lo que implica que $A \times B$ tiene una cantidad finita de componentes en $X \times K$. Así $e((A, B)) \in C_\infty(X \times K)$. De manera análoga se muestra que $e(F_\infty(X) \times F_\infty(K)) \subset F_\infty(X \times K)$.

Para demostar (2), si $e((A, B)) \in e(C_n(X) \times C_m(K))$, entonces $A \in C_n(X)$ y $B \in C_m(K)$, es decir, A tiene a lo más n componentes en X y B tiene a lo más m componentes en K, lo que implica que $A \times B$ tiene a lo más $n \times m$ componentes en $X \times K$, así $e((A, B)) \in C_{nm}(X \times K)$.

De manera análoga a (2) se muestra (3).

Para mostrar (4), si $e((A, B)) \in e(C_n(X) \times F_1(K))$, entonces $A \in C_n(X)$ y $B \in F_1(K)$, es decir, A tiene a lo más n componentes en X y B es un conjunto unipuntual en K, lo que implica que $A \times B$ tiene a lo más n componentes en $X \times K$. Así $e((A, B)) \in C_n(X \times K)$. Finalmente, demostraremos que $e(F_\infty(X) \times F_1(K)) \subset F_\infty(X \times K)$. Si $e((A, B)) \in e(F_\infty(X) \times F_1(K))$, entonces $A \in F_\infty(X)$ y $B \in F_1(K)$, es decir, A tiene una cantidad finita de puntos en X y B es un conjunto unipuntual en K, lo que implica que $A \times B$ tiene una cantidad finita de puntos en $X \times K$. Así, $e((A, B)) \in F_\infty(X \times K)$. De manera análoga se puede demostrar que $e(C_\infty(X) \times F_1(K)) \subset C_\infty(X \times K)$ y de manera análoga a (4) se puede demostrar (5). ■

Una condición importante que nos determina también la continuidad de una función entre espacios métricos, nos la da la siguientes definición.

Definición 1.0.36 *Sean E y F espacios métricos. Una función $f : E \to F$ es de **Lipschitz**, cuando existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Md(x, y)$ para toda x,$y \in E$.*
Cuando $M = 1$, se dice que f es no expansiva.

Observación 1.0.37 *Toda función de Lipschitz es uniformemente continua.*

La siguiente función es muy usada en la Teoría de Hiperespacios de Continuos.

Dado un continuo X, definimos la siguiente función $\cup : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\cup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$, la cual es llamada la función unión.

Para la siguiente prueba H^2 denotará la métrica de Hausdorff para 2^{2^X} inducida por la métrica de Hausdorff H en 2^X.

Lema 1.0.38 *La función unión $\cup$ definida en 2^{2^X} es una función continua. Más aún, es no expansiva.*

Demostración: Primero mostraremos que $\cup$ está bien definida. Para mostrar que $\bigcup \mathcal{A}$ es cerrado, sea $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$, si $z_0 \in X$ es un punto límite de $\bigcup \mathcal{A}$, existe una sucesión $\{z_i\}$ convergente a z_0, tal que $z_i \in \bigcup \mathcal{A}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $D_i \in \mathcal{A}$, tal que $z_i \in D_i$. Ya que $\mathcal{A}$ es compacto, existe una subsucesión $\{D_{i_j}\}$ de $\{D_i\}$, tal que $\{D_{i_j}\}$ converge a $D_0 \in \mathcal{A}$. Dado que $z_{i_j} \in D_{i_j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\{z_{i_j}\}$ converge a z_0, entonces $z_0 \in D_0 \in \mathcal{A}$. Así, $z_0 \in \bigcup \mathcal{A}$. Esto demuestra que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado de X y por lo tanto compacto. Ya que $\mathcal{A}$ es una colección no vacía de conjuntos no vacíos, $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$. Por lo tanto $\cup$ es una función. Teniendo en cuenta que $\bigcup\{A\} = A$ para cada $A \in 2^X$, tenemos que $\cup$ es una función suprayectiva de 2^{2^X} en 2^X.

Para la continuidad probaremos que $\cup$ es de Lipschitz. Sean $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \in 2^{2^X}$ diferentes y $A_1 = \bigcup \mathcal{A}_1$ y $A_2 = \bigcup \mathcal{A}_2$, A_1 y $A_2 \in 2^X$. Si $H(A_1, A_2) = 0$ entonces $H(A_1, A_2) \leq$

$H^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$. Ahora, supongamos que $H(A_1, A_2) > 0$. Sea $\eta = H(A_1, A_2) > 0$. Por el Lema 1.0.10, $A_1 \not\subseteq N(\eta, A_2)$ o $A_2 \not\subseteq N(\eta, A_1)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $A_1 \not\subseteq N(\eta, A_2)$. Entonces, existe $p \in A_1$ tal que $d(p, x) \geq \eta$ para toda $x \in A_2$. Dado que $p \in A_1 = \bigcup \mathcal{A}_1$, existe $D_1 \in \mathcal{A}_1$ tal que $p \in D_1$ y $D_1 \not\subseteq N(\eta, D)$ para cualquier $D \in \mathcal{A}_2$, lo que implica que $H(D_1, D) \geq \eta$ para cualquier $D \in \mathcal{A}_2$. Así, $D_1 \notin N_H(\eta, \mathcal{A}_2)$. Como $D_1 \in \mathcal{A}_1$ se tiene que $\mathcal{A}_1 \not\subseteq N_H(\eta, \mathcal{A}_2)$. Dado que H^2 está definida en términos de H se tiene que $H^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \geq \eta$. De esta manera, $H(\bigcup \mathcal{A}_1, \bigcup \mathcal{A}_2) = H(A_1, A_2) = \eta \leq H^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$. Por lo tanto $\cup$ es de Lipschitz no expansiva y por la Observación 1.0.37, $\cup$ es uniformemente continua. ■

Capítulo 2

Hiperespacios de g-crecimiento

En está sección definimos a los hiperespacios de g-crecimiento, daremos ejemplos y propiedades generales de este tipo de hiperespacios. El estudio de este tipo de hiperespacios es la parte central de este trabajo, así como su relación con la teoría de pseudo-homotopías.

Definición 2.0.1 *Sea X un continuo, un subconjunto no vacío $\mathcal{H}$ de 2^X es un* ***hiperespacio de g-crecimiento*** *de X si dado $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, se tiene que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{H}$.*

Teorema 2.0.2 *El hiperespacio 2^X es un hiperespacio de g-crecimiento.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$, tal que $\mathcal{A} \cap 2^X \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A} \subset 2^X$ se tiene que $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$. Por lo tanto 2^X es un hiperespacio de g-crecimiento. ■

Teorema 2.0.3 *El hiperespacio $C(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Mostraremos primero que $\bigcup \mathcal{A}$ es compacto. Como $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X tenemos que $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. Por el Lema 1.0.38, $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto compacto de X. Ahora mostraremos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de X. Supongamos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto disconexo de X. Dado que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado en X, existen H y K conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos en X tales que $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$. Sea $A \in \mathcal{A} \cap C(X)$. Como A es conexo en X y dado que $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$, entonces $A \subset H$ o $A \subset K$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \subset H$. Definamos $\mathcal{A}_1 = \{L \in \mathcal{A} : L \subset H\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{L \in \mathcal{A} : L \cap K \neq \emptyset \}$.Ya que $A \in \mathcal{A}$

y $A \subset H$, $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. Dado que $K \neq \emptyset$ y $K \subset \bigcup \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.0.16, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son subconjuntos cerrados en 2^X. Como H y K son ajenos, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son ajenos y como $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$ se tiene que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Así, $\mathcal{A}$ es disconexo en 2^X, lo cual es una contradicción. Por lo que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de X. ■

Proposición 2.0.4 *El hiperespacio $C_n(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Si suponemos que $\bigcup \mathcal{A} \notin C_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ tiene al menos $n+1$ componentes distintas, digamos $B_1, \ldots, B_{n+1}$ los cuales son conjuntos no vacíos cerrados ajenos cuya unión es $\mathcal{A}$. Sea $L \in \mathcal{A} \cap C_n(X)$, existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $L \cap B_i = \emptyset$. Sean $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : A \cap B_i \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : A \cap B_i = \emptyset\}$, por el Teorema 1.0.16, $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ son cerrados ajenos y no vacíos en 2^X y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A} \in C_n(X)$. ■

Teorema 2.0.5 *El hiperespacio $C_\infty(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$, tal que $\mathcal{A} \cap C_\infty(X) \neq \emptyset$. Sea $B \in \mathcal{A} \cap C_\infty(X)$, B tiene una cantidad finita de componentes, digamos m, esto implica que $B \in C_m(X) \cap \mathcal{A}$. Así por la proposición anterior $\bigcup \mathcal{A} \in C_m(X) \subseteq C_\infty(X)$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A} \in C_\infty(X)$. ■

Teorema 2.0.6 *Sean $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Los hiperespacios $2_p^X = \{A \in 2^X : p \in A\}$, $C(X,p) = \{A \in C(X) : p \in A\}$ y $C_n(X,p) = \{A \in C_n(X) : p \in A\}$ son hiperespacios de g-crecimiento.*

Demostración: Mostraremos primero que 2_p^X es un hiperespacio de g-crecimiento. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap 2_p^X \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{A} \cap 2_p^X$, entonces $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ y $p \in A$. Lo que implica que $p \in \bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A} \in 2_p^X$.

Para mostrar que $C(X,p)$ es un hiperespacio de g-crecimiento. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C(X,p) \neq \emptyset$. Sea $B \in \mathcal{A} \cap C(X,p)$, entonces $B \in C(X)$ y $p \in B$, esto implica que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, así $\bigcup \mathcal{A} \in C(X)$. Ahora como $B \in \mathcal{A}$, se tiene que $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, por lo tanto $p \in \bigcup \mathcal{A}$. Así $\bigcup \mathcal{A} \in C(X,p)$.

Por último mostraremos que $C_n(X,p)$ es un hiperespacio de g-crecimiento. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C_n(X,p) \neq \emptyset$. Sea $D \in \mathcal{A} \cap C_n(X,p)$, entonces $D \in C_n(X)$ y $p \in D$, esto implica que $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Así, $\bigcup \mathcal{A} \in C_n(X)$. Ahora como $D \in \mathcal{A}$, se tiene que $D \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Así $p \in \bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in C_n(X,p)$. ■

Teorema 2.0.7 *Sea $\varepsilon > 0$. El hiperespacio $\mathcal{D} = \{B \in 2^X : H(X,B) \leq \varepsilon\}$ es de g-crecimiento.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}$, entonces $H(X,A) \leq \varepsilon$. Sean $E = \{\delta > 0 : A \subseteq N(\delta, X)$ y $X \subseteq N(\delta, A)\}$ y $E' = \{\delta' > 0 : \bigcup \mathcal{A} \subseteq N_{\delta'}(X)$ y $X \subseteq N_{\delta'}(\bigcup \mathcal{A})\}$. Mostraremos que $E \subseteq E'$. Sea $\delta \in E$. Notemos primero que $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X = N_\delta(X)$ y como $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, se tiene que $X \subseteq N_\delta(A) \subseteq N_\delta(\bigcup \mathcal{A})$. Así $E \subseteq E'$. De esta manera $H(\bigcup \mathcal{A}, X) = inf E' \leq inf E = H(A,X) \leq \varepsilon$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{D}$. ■

Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X. El símbolo $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ denota el conjunto $\{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ *para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

Teorema 2.0.8 *Sean $U_1, U_2, \ldots, U_m$ conjuntos tales que $X = \bigcup_{n=1}^{m} U_n$, entonces $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$ es un hiperespacio de g-crecimiento.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$, entonces $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} U_n$ y $A \cap U_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. De aquí, $(\bigcup \mathcal{A}) \cap U_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Además, $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X = \bigcup_{n=1}^{m} U_n$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$. ■

Definición 2.0.9 *Sea X un continuo. Una **función de Whitney** para 2^X es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que:*

(1) $\mu(\{x\}) = 0$ *para toda* $x \in X$,

(2) *Para* $A, B \in 2^X$, *si* $A \subsetneq B$, *entonces* $\mu(A) < \mu(B)$.

[3, Teorema 13.4, p. 107] garantiza la existencia de funciones de Whitney para cualquier hiperespacio $H(X)$ de X. De hecho se prueba que existen funciones de Whitney para 2^X y la restrincción en cada hiperespacio $H(X)$ es una función de Whitney para $H(X)$.

Teorema 2.0.10 *Sea $\mu : 2^X \to [0,1]$ una función de Whitney. Entonces $\mu^{-1}([t,1])$ para $t \in [0,1]$ es un hiperespacio de g-crecimiento.*

Demostración: Sean $t \in [0,1]$ y $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \mu^{-1}([t,1]) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{A} \cap \mu^{-1}([t,1])$, entonces $\mu(A) \in [t,1]$, esto es $t \leq \mu(A) \leq 1$. Como $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ y μ es una función de Whitney, entonces $\mu(A) < \mu(\bigcup \mathcal{A})$, esto implica que $t < \mu(\bigcup \mathcal{A}) \leq 1$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A} \in \mu^{-1}([t,1])$ cuando $t \in [0,1]$. ■

Teorema 2.0.11 *Sean X un continuo y $A \in C(X)$. Si μ es una función de Whitney para 2^X, entonces $\mu \mid_{C(A)}$ es una función de Whitney para $C(A)$.*

Demostración: Dado que μ es una función continua, $\mu \mid_{C(A)}$ es una función continua. Ahora sea $x \in A$, como $\mu \mid_{C(A)} (\{x\}) = \mu(\{x\})$ y $\mu(\{x\}) = 0$ entonces $\mu \mid_{C(A)} (\{x\}) = 0$. Por último, sean $B, C \in C(A)$ tales que $B \subsetneq C$. Ya que $\mu \mid_{C(A)} (B) = \mu(B)$, $\mu \mid_{C(A)} (C) = \mu(C)$ y $\mu(B) < \mu(C)$, entonces $\mu \mid_{C(A)} (B) < \mu \mid_{C(A)} (C)$. Por lo tanto $\mu \mid_{C(A)}$ es una función de Whitney para $C(A)$. ■

Se sabe que si μ es una función de Whitney para $C(X)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un subcontinuo de 2^X. Ver [1, Teorema 8.3, p. 111] y además se sabe por [1, Lema 8.1, p. 109] que $\bigcup \mu^{-1}(t) = X$.

Proposición 2.0.12 *Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X. Si μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0,1]$, entonces $\mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{H}$ si y sólo si $\mu^{-1}([t,1]) \subseteq \mathcal{H}$.*

Demostración: Supongamos que $\mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{H}$. Sea $A \in \mu^{-1}((t,1])$, $\mu \mid_{C(A)}$ es una función de Whitney para $C(A)$ y $(\mu \mid_{C(A)}^{-1})(t) = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$, se tiene que $(\mu \mid_{C(A)}^{-1})(t) = \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subset A\} \in C(2^X)$ y $\mathcal{H} \bigcap \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subset A\} \neq \emptyset$. De esta manera, como $A = \bigcup \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subset A\}$, obtenemos que $A \in \mathcal{H}$ por definición de hiperespacio de g-crecimiento. Por lo tanto $\mu^{-1}([t,1]) \subseteq \mathcal{H}$.
La otra implicación es inmediata. ■

Corolario 2.0.13 *Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento. Entonces $F_1(X) \subseteq \mathcal{H}$ si y sólo si $C(X) \subseteq \mathcal{H}$.*

Demostración: Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Como $\mu^{-1}(0) = \{A \in C(X) : \mu(A) = 0\}$, entonces $F_1(X) = \mu^{-1}(0)$ y dado que $\mu^{-1}([0,1]) = C(X)$. Por la Proposición 2.0.12 queda demostrado este colorario. ■

A continuación probaremos algunas propiedades generales de los hiperespacios de g-crecimiento.

Teorema 2.0.14 *Sea X un continuo. Si $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X, entonces $X \in \mathcal{H}$.*

Demostración: Nótese que $2^X \in C(2^X)$ y $2^X \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento entonces $X = \bigcup 2^X \in \mathcal{H}$. ■

Teorema 2.0.15 *La intersección de una familia arbitraria de hiperespacios de g-crecimiento es también un hiperespacio de g-crecimiento.*

Demostración: Sea $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ una familia de hiperespacios de g-crecimento. Sea $\mathcal{B} \in C(2^X)$, tal que $\mathcal{B} \cap (\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i) \neq \emptyset$, de aquí $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_i \neq \emptyset$, para cada $i \in I$. Dado que cada $\mathcal{A}_i$ es un hiperespacio de g-crecimiento, entonces $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}_i$ para cada $i \in I$, es decir $\bigcup \mathcal{B} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ es un hiperespacio de g-crecimiento. ■

Definición 2.0.16 *Sea $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ no vacío. $\mathcal{G}$ es un **hiperespacio de crecimiento** de X si $\mathcal{G}$ es un subespacio cerrado, tal que si $B \in 2^X$ y $A \in \mathcal{G}$ con $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A, entonces $B \in \mathcal{G}$.*

Teorema 2.0.17 *Cada hiperespacio de crecimiento es un hiperespacio de g-crecimiento.*

Demostración: Sea $\mathcal{G}$ un hiperespacio de crecimiento y sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Dado que $\mathcal{A} \in C(2^X)$, $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$.
Sea $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{G}$, existe $\alpha : [0,1] \to C(2^X)$ un arco ordenado de $\{A\}$ a $\mathcal{A}$ en $C(2^X)$. Definimos $\beta' : [0,1] \to 2^X$ como $\beta'(t) = \bigcup \alpha(t)$. Por el Lema 1.0.38, β' es continua, $\beta'(0) = A$ y $\beta'(1) = \bigcup \mathcal{A}$, $\beta'(s) \leq \beta'(t)$ cuando $s < t$. De esta forma β' es una trayectoria de A a $\bigcup \mathcal{A}$ en 2^X. Dado que 2^X es de Hausdorff podemos definir a partir de β' un arco en $\beta'([0,1]) \subseteq 2^X$, más aún, un arco ordenado $\beta : [0,1] \to 2^X$ tal que $\beta(0) = A$ y $\beta(1) = \bigcup \mathcal{A}$,

por el Teorema 1.0.20, cada componente de $\bigcup \mathcal{A}$ intersecta a A. Así, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es un hiperespacio de g-crecimiento. ■

Proposición 2.0.18 *Todo hiperespacio de g-crecimiento de un continuo es conexo por trayectorias.*

Demostración: Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X.
Para demostrar que $\mathcal{H}$ es arco conexo, es suficiente demostrar que todo arco ordenado de cualquier elemento de $\mathcal{H}$ a X está contenido en $\mathcal{H}$. Sea $G \in \mathcal{H}$, por el Teorema 1.0.20, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to 2^X$ de G a X. Ahora si $t \in [0,1]$, entonces $\alpha([0,t]) \in C(2^X)$ y satisface que $G \in \mathcal{H} \bigcap \alpha([0,t])$ y $\alpha(t) = \bigcup \alpha([0,t])$. Dado que $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento, $\alpha(t) \in \mathcal{H}$, es decir $\alpha([0,1]) \subset \mathcal{H}$ para toda $t \in [0,1]$. Así $\mathcal{H}$ es arco conexo y por la Observación 1.0.25, $\mathcal{H}$ es conexo por trayectorias. ■

Corolario 2.0.19 *Si X es un continuo entonces 2^X y $C(X)$ son arco-conexos.*

Definición 2.0.20 *Sea X un espacio topológico conexo. Decimos que X tiene la **propiedad b)** si para cada función continua $f : X \to S^1$ donde S^1 es la circunferencia unitaria en el plano complejo, existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = \exp \circ h$, donde $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ está definida por $\exp(t) = (\cos(t), \sin(t)) = e^{it}$.*

Definición 2.0.21 *Un espacio conexo X es **unicoherente** si para cuales quiera A y B son subconjuntos cerrados conexos de X tales que $X = A \cup B$, entonces $A \cap B$ es conexo.*

Proposición 2.0.22 *La propiedad $b)$ es una propiedad topológica.*

Demostración: Si X es un espacio topológico conexo que tiene la propiedad $b)$ y Y un espacio topológico homeomorfo a X, entonces Y es conexo.
Por otra parte, sean $g : X \to Y$ un homeomorfismo y $f' : Y \to S^1$ una función continua. Notemos que $f' \circ g : X \to S^1$. Como X tiene la propiedad $b)$, existe $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $f' \circ g = \exp \circ h$. Sea $h' : Y \to \mathbb{R}$ definida por $h' = h \circ g^{-1}$, veamos que $\exp \circ h' = \exp \circ h \circ g^{-1} = f' \circ g \circ g^{-1} = f'$. Por lo tanto Y tiene la propiedad $b)$. ■

Lema 2.0.23 *Sea X un espacio topológico. Si X es conexo y $\phi_1, \phi_2 : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $e^{i\phi_1(x)} = e^{i\phi_2(x)}$ para cada $x \in X$, entonces existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi_1(x) - \phi_2(x) = 2k\pi$ para cada $x \in X$.*

Demostración: Sea $x \in X$. Entonces $e^{i(\phi_1(x)-\phi_2(x))} = (1,0)$, además $\cos(\phi_1(x) - \phi_2(x)) = 1$ y $\mathrm{sen}(\phi_1(x) - \phi_2(x)) = 0$. Por la conexidad de X y la continuidad de las funciones ϕ_1 y ϕ_2, existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi_1(x) - \phi_2(x) = 2k\pi$. ■

Teorema 2.0.24 *Cada espacio métrico conexo que tiene la propiedad b) es unicoherente.*

Demostración: Sea X un espacio métrico conexo que tiene la propiedad b).

Supongamos que X no es unicoherente. Entonces existen $A, B \subset X$ cerrados conexos tales que $X = A \cup B$ con $A \cap B$ disconexo. Entonces existen $P_1, P_2 \subset X$ cerrados ajenos no vacios tales que $A \cap B = P_1 \cup P_2$.

Definimos a las funciones $\psi : X \to \mathbb{R}$ y $f : X \to S^1$ como sigue:

$$\psi(x) = \pi \tfrac{d(x,P_1)}{d(x,P_1)+d(x,P_2)} \text{ para todo } x \in X;$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\psi(x)} & si \quad x \in A \\ \\ e^{-i\psi(x)} & si \quad x \in B \end{cases}$$

Si $x \in A \cap B = P_1 \cup P_2$, entonces $x \in P_1$ o $x \in P_2$. Si $x \in P_1$, entonces $\psi(x) = 0$ y si $x \in P_2$ entonces $\psi(x) = \pi$. Así, $e^{i\psi(x)} = e^{-i\psi(x)}$ para toda $x \in A \cap B$. Por [19, Teorema 18.3, p. 123], f es continua en X. Dado que X tiene la propiedad b), existe una función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\phi(x)}$ para cada $x \in X$, esto implica que $f(x) = e^{i\phi(x)} = e^{i\psi(x)}$ para cada $x \in A$ y $f(x) = e^{i\phi(x)} = e^{-i\psi(x)}$ para cada $x \in B$. Como A y B son conexos, por el Lema 2.0.23, se tiene que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\psi(x) = \phi(x) + 2k_1\pi \text{ en } A \text{ y } -\psi(x) = \phi(x) + 2k_2\pi \text{ en } B$$

Por lo tanto $\psi(x) = \pi(k_1 - k_2)$ en $A \cap B$ lo cual es una contradicción. Luego $A \cap B$ es conexo. Por lo tanto X es unicoherente. ■

Teorema 2.0.25 *Todo hiperespacio de g-crecimiento de un continuo tiene la propiedad b).*

Demostración: Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X.

Consideremos para cada $A \in \mathcal{H}$, el conjunto $K_A = \{B \in \mathcal{H} : A \subseteq B\}$, podemos usar argumentos similares a los de [15, prueba del Lema 13, p. 2004] para probar que $\mathcal{H}$ tiene la propiedad b).

De la Proposición 2.0.18 y de los Teoremas 2.0.24 y 2.0.25 se obtiene el siguiente Corolario.

Corolario 2.0.26 *Todo hiperespacio de g-crecimiento de un continuo es unicoherente.*

Capítulo 3

Pseudo-homotopías en hiperespacios

En esta sección daremos resultados generales de pseudo-homotopías en hiperespacios. De aquí en adelante I denotará el intervalo $[0, 1]$.

Definición 3.0.1 *Sean X y Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Decimos que f es **homotópica** a g (o f y g son homotópicas), si existe una función continua $H : X \times I \to Y$ que satisface $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para cada $x \in X$.*

A la función H se le llama homotopía. Escribiremos $f \simeq g$ para decir que f y g son homotópicas.

Definición 3.0.2 *Sean X y Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Decimos que f es **pseudo-homotópica** a g (o f y g son pseudo-homotópicas), si existen un continuo K, puntos $a, b \in K$ y una función continua $G : X \times K \to Y$ que satisface $G(x, a) = f(x)$ y $G(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$.*

La función G es llamada pseudo-homotopía entre f y g con espacio factor K. Escribiremos $f \simeq_K g$ para decir que f es pseudo-homotópica a g con espacio factor K.

Teorema 3.0.3 *Sea X un espacio topológico. Si $Id_X \simeq \boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{a}$ una función constante en X, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración: Dado que $Id_X \simeq \mathbf{a}$ con $\mathbf{a}$ una función constante. Entonces existe $H : X \times I \to X$ una función continua tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = a$ donde $\mathbf{a}(x) = a$ para

cada $x \in X$.
Sea $z \in X$. Definimos $f_z : I \to X$ dada por $f_z(t) = H(z,t)$. Se tiene que f_z es continua, además que $f_z(0) = z$ y $f_z(1) = a$. Por lo que f_z es una trayectoria que une el punto a con el punto z. De esta manera para cada b y $c \in X$, podemos definir una trayectoria a partir de f_b y de f_c pasando por a. ■

De las definiciones de homotopía y pseudo-homotopía se obtiene la siguiente observación.

Observación 3.0.4 *Si f es homotópica a g, entonces f es pseudo-homotópica a g.*

El regreso a esta observación no es cierto como lo demostró W. Kuperberg. Veamos como se describe el ejemplo para lo cual lo anterior no se cumple.

Ejemplo 3.0.5 *Sean $\mathbb{C}$ el plano complejo, $X_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{t+2}{t+1}e^{it}$ con $t \in [0,\infty)\}$ la espiral que se aproxima al círculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} :\| z \|= 1\}$ y $D^2 = \{z \in \mathbb{C} :\| z \|\leq 1\}$. Sea $X = X_0 \cup D^2$ el continuo de Kuperberg y sea $C = X_0 \cup S^1 \cup X_1$ con $X_1 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0$ y $0 \leq Re(z) \leq 1\}$. C es el espacio factor para el cual X es pseudo-contráctil.*

Para probarlo definamos las siguientes funciones:

- $H_1 : X_0 \times X_0 \to X_0$ tal que $H_1(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, \frac{t'+2}{t'+1}e^{it'}) = \frac{t+t'+2}{t+t'+1}e^{i(t+t')}$
- $H_2 : D^2 \times X_0 \to D^2$ tal que $H_2(z, \frac{t+2}{t+1}e^{it}) = ze^{it}$
- $H_3 : D^2 \times (S^1 \cup X_1) \to D^2$ tal que $H_3(z,w) = zw$
- $H_4 : X_0 \times (S^1 \cup X_1) \to D^2$ tal que $H_4(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, w) = we^{it}$

Para demostrar que H_1 es continua notemos que $[0,\infty)$ es homeomorfo a X_0 entonces existe un homeomorfismo $h : [0,\infty) \to X_0$ tal que $h(t) = \frac{t+2}{t+1}e^{it}$ para todo $t \in [0,\infty)$, esto implica que para cada $z \in X_0$ existe un único $t \in [0,\infty)$ tal que $h(t) = z$.
Sea $F : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $F(t,t') = t + t'$. Observemos que $H_1(z,c) = h(F(h^{-1}(z), h^{-1}(C)))$, dado que h, h^{-1} y F son continuas entonces H_1 es continua.

De forma similar se puede demostrar la continuidad de H_2, H_3 y H_4.

Definimos $H : X \times C \to X$ dada por:

$$H(z,c) = \begin{cases} H_1(z,c) & \text{si } (z,c) \in X_0 \times X_0 \\ H_2(z,c) & \text{si } (z,c) \in D^2 \times X_0 \\ H_3(z,c) & \text{si } (z,c) \in D^2 \times (S^1 \cup X_1) \\ H_4(z,c) & \text{si } (z,c) \in X_0 \times (S^1 \cup X_1) \end{cases} \tag{3.1}$$

Como H_1, H_2, H_3 y H_4 son continuas, entonces H es continua. Ahora, si $t = 0$ entonces $h(0) = (2,0) \in C$, notemos que $H_1(z, f(0)) = z$ y $H_2(z, f(0)) = z$ para toda $z \in X$. Por lo que $H(z, h(0)) = z$ para toda $z \in X$.

Si $c = (0,0) \in C$, entonces $H_3(z,c) = (0,0)$ y $H_4(z,c) = (0,0)$ para toda $z \in X$. De esta manera $H(z,c) = (0,0)$ para toda $z \in X$.

Sean $K \in C(X \times X)$ tal que $K(z) = z_0$ donde $z_0 = (0,0)$, $a = (2,0), b = (0,0) \in C$. Por lo tanto $Id_X \simeq_C K$.

Afirmación X no es conexo por trayectorias.

Vamos a probar que toda trayectoria que contenga al punto $(1,0)$ se queda contenida en el disco D^2. Sea $\alpha : I \to X$ una trayectoria tal que $\alpha(0) = (1,0)$, dado que D^2 es cerrado en X y α es continua, $\alpha^{-1}(D^2)$ es cerrado en I. Veamos ahora que $\alpha^{-1}(D^2)$ es abierto en I. Sea $t_0 \in \alpha^{-1}(D^2)$, esto es sea $t_0 \in [0,1]$ tal que $\alpha(t_0) = y_0 \in D^2$. Si $y_0 \in int(D^2)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{y_0}) \subseteq D^2$. Por la continuidad existe $\delta > 0$ tal que $t_0 \in U = B_\delta(t_0) \cap [0,1] = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1]$ y $f(U) \subseteq B_\varepsilon(y_0) \subseteq D^2$.

Si $y_0 \in Fr(D^2)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y_0) \cap X$ tiene una infinidad de componentes, una de las cuales es $B_\varepsilon(y_0) \cap D^2$. De igual manera, existe $\delta > 0$ tal que $t_0 \in U = B_\delta(t_0) \cap [0,1]$ y $f(U) \subseteq B_\varepsilon(y_0) \cap X$. Como U es conexo y $y_0 = f(t_0) \in f(U) \cap D^2$, $f(t_0) \in B_\varepsilon(y_0) \cap D^2$. Así $f(U)$ es un conexo que contine a y_0 y que intersecta a la componente $B_\varepsilon(\bar{y_0}) \cap D^2$. Por lo tanto $f(U) \subseteq B_\varepsilon(y_0) \cap D^2 \subseteq D^2$. De está manera tenemos que $f^{-1}(D)$ es abierto, cerrado y no vacío de I, y dado que I es conexo, $f^{-1}(D) = I$. Así, no es posible unir un punto de D^2 con un punto de la espiral X_0 por medio de una trayectoria. Por lo que X no es conexo por trayectorias. Por el Teorema 3.0.3 la identidad en X no es homotópica a toda función constante en X. ■

Proposición 3.0.6 *Si el espacio factor K es arco conexo, entonces $f \simeq_K g$ es equivalente a $f \simeq g$.*

Demostración: Si que $f \simeq_K g$ entonces existen puntos $a, b \in K$ y $G : X \times K \to Y$ continua tal que $G(x, a) = f(x)$ y $G(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$. Como K es arco-conexo, existe un arco C con puntos finales a y b, es decir existe $\alpha : I \to C$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$ un homeomorfismo. Sea $g : X \times I \to X \times K$ cumpliendo $g(x, t) = (x, \alpha(t))$ para todo $x \in X$ y $t \in I$. Notemos que g es continua ya que Id_X y $\alpha(t)$ son continuas. Definimos $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, t) = G(g(x, t)) = G(x, \alpha(t))$ para toda $x \in X$ y $t \in I$, dado que G y g son continuas entonces H es continua. Así $H(x, 0) = G(x, \alpha(0)) = G(x, a) = f(x)$ y $H(x, 1) = G(x, \alpha(1)) = G(x, b) = g(x)$. Por lo tanto $f \simeq g$.
La implicación inversa se tiene por la Observación 3.0.4. ■

Teorema 3.0.7 *Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función. Si f es continua entonces $2^f : 2^X \to 2^Y$ dada por $2^f(A) = f(A)$ está bien definida y es continua.*

Demostración: Sea $A \in 2^X$. Dado que X, Y son continuos, entonces f es una función cerrada, esto implica que $f(A) \in 2^X$. Por lo que 2^f está bien definida.
Para demostrar que 2^f es continua, tomemos $\varepsilon > 0$. Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$ para toda $x, y \in X$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \delta$. Veamos que $H(2^f(A), 2^f(B)) = H(f(A), f(B)) < \varepsilon$. Sean $a' \in f(A)$ y $a \in A$ tal que $f(a) = a'$. Como $A \subseteq N(\delta, B)$ tenemos que existe $b \in B$ tal que $d_X(a, b) < \delta$. Luego $d_Y(f(a), f(b)) = d_Y(a', f(b)) < \varepsilon$. Por lo que $a' \in N(\varepsilon, f(B))$, de esto $f(A) \subseteq N(\varepsilon, f(B))$. De manera similar se puede probar que $f(B) \subseteq N(\varepsilon, f(A))$. De lo anterior se tiene que $H(2^f(A), 2^f(B)) < \varepsilon$. Por lo tanto 2^f es continua. ■

Proposición 3.0.8 *Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función. Si f es continua entonces $C(f) : C(X) \to C(Y)$ dada por $C(f)(K) = f(K)$ está bien definida y es continua.*

Demostración: Dado que $C(f) = 2^f|_{C(f)}$, por el Teorema 3.0.7, 2^f es continua, así $C(f)$ es continua.
Para demostrar que $C(f)$ está bien definida sea $A \in C(X)$. Entonces $A \in 2^X$ y A es conexo, esto implica que $f(A) \in 2^Y$. Ahora, si $f(A)$ es disconexo en Y, entonces existen

$H \neq \emptyset$ y $K \neq \emptyset$ subconjuntos cerrados en Y tales que $f(A) = H \cup K$, de esta manera $A \subseteq f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K)$, lo que implica que $f^{-1}(H) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(K) \neq \emptyset, f^{-1}(H) \cap A \neq \emptyset$ y $f^{-1}(K) \cap A \neq \emptyset$ y $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(K)$ son subconjuntos cerrados en X, lo que contradice el hecho de que A es conexo en X. Así, $f(A) \in C(Y)$. Por lo tanto $C(f)$ está bien definida. ■

Teorema 3.0.9 *Sean X, Y, K continuos, $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de Y y $G : X \times K \to \mathcal{H}$ una función continua. Definimos la función $\widehat{G} : X \times C(K) \to \mathcal{H}$ por $\widehat{G}(x, B) = \bigcup G(\{x\} \times B)$. Cada una de las siguientes condiciones se cumple:*

(1) *$\widehat{G}$ está bien definida y es continua.*

(2) *$\widehat{G}(x, \{t\}) = G(x, t)$ para cada $(x, t) \in X \times K$.*

(3) *Si $t \in T \in C(K)$ y $G(x, t) \in \mathcal{H}'$ para algún $\mathcal{H}'$ hiperespacio de g-crecimiento de Y contenido en $\mathcal{H}$, entonces $\widehat{G}(x, T) \in \mathcal{H}'$.*

Demostración: Para demostrar (1) si $x \in X$ y $B \in C(K)$, entonces $\{x\} \times B$ es un continuo en $X \times K$ lo que implica que $G(\{x\} \times B)$ es un continuo en $\mathcal{H} \subseteq 2^Y$, además $G(\{x\} \times B) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ pues $G(x, b) \in \mathcal{H}$. Dado que $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento concluimos que $\bigcup G(\{x\} \times B) \in \mathcal{H}$. Por lo que $\widehat{G}$ está bien definida.

Para demostrar que $\widehat{G}$ es continua, sea $C(G) : C(X \times K) \to C(2^Y)$ tal que $C(G)(D) = G(D)$ la función inducida de G, la cual por la Proposición 3.0.8, es continua. Sea $\mathcal{A} = \{\{x\} \times B : x \in X, B \in C(K)\} \subseteq C(X \times K)$, la función $F = C(G)\,|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(2^Y) \subseteq 2^{2^Y}$ es continua y considerando $\cup : 2^{2^Y} \to 2^Y$ definida en el Lema 1.0.38, la composición $\cup \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{H} \subseteq 2^Y$ es continua. Note que $e : X \times C(K) \to \mathcal{A} \subseteq C(X \times K)$ tal que $e(x, B) = \{x\} \times B$ es un encaje. Así, $\widehat{G} = \cup \circ F \circ e$ es continua.

Para demostrar (2) sea $(x, t) \in X \times K$, tenemos que $\widehat{G}(x, \{t\}) = \bigcup G(\{x\} \times \{t\}) = G(x, t)$.

Para demostrar (3) sea $t \in T \in C(K)$ y $G(x, t) \in \mathcal{H}'$ para algún $\mathcal{H}'$ hiperespacio de g-crecimiento de Y contenido en $\mathcal{H}$. Notemos que $G(\{x\} \times T) \in C(2^Y)$. Además $G(x, t) \in G(\{x\} \times T)$ lo que implica que $G(\{x\} \times T) \cap \mathcal{H}' \neq \emptyset$. Dado que $\mathcal{H}'$ es un hiperespacio de g-crecimiento de Y, concluimos que $\bigcup G(\{x\} \times T) = \widehat{G}(x, T) \in \mathcal{H}'$. ■

Teorema 3.0.10 *Sean X, Y continuos y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de Y. Si $f, g : X \to \mathcal{H}$ son funciones continuas, entonces f y g son pseudo-homotópicas si y sólo si f y g son homotópicas.*

Demostración: Si f y g son pseudo-homotópicas, entonces existe un continuo K, puntos $a, b \in K$ y una función continua $G : X \times K \to \mathcal{H}$ tal que $G(x, a) = f(x)$ y $G(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$. Por el Teorema 3.0.9 obtenemos que $\widehat{G}(x, \{a\}) = f(x)$ y $\widehat{G}(x, \{b\}) = g(x)$ para cada $x \in X$. De esta manera tenemos una pseudo-homotopía entre f y g con factor arco conexo y ya que $C(K)$ es un continuo arco conexo, concluimos que f y g son homotópicas por la Proposición 3.0.6.

La implicación inversa se tiene por la Observación 3.0.4. ■

Para un continuo X, $H(X)$ denota un hiperespacio contenido en 2^X.

Sean X, Y continuos. Para dos hiperespacios $H(X)$ y $H(Y)$ contenidos en 2^X y 2^Y respectivamente, estaremos pensando que existe un conjunto de propiedades P que los define, es decir, $H(X) = \{A \in 2^X : A\ satisface\ P\}$ y $H(Y) = \{B \in 2^Y : B\ satisface\ P\}$.

Por ejemplo: $F_n(-)$, $C_n(-)$, 2^-, $F_\infty(-)$, $C_\infty(-)$.

Definición 3.0.11 *Sean X, Y continuos y $H(X)$, $H(Y)$ hiperespacios de X y Y respectivamente. Si para toda función continua $f : X \to Y$ la imagen $f(A) \in H(Y)$ para cada $A \in H(X)$ y esta asignación es continua, diremos que $H(X)$ admite funciones H-inducidas.*

La función H-inducida de f es representada por $H(f) : H(X) \to H(Y)$ definida por $H(f)(A) = f(A)$.

Ejemplo 3.0.12 *Mostraremos algunos hiperespacios que admiten funciones H-inducidas.*

1. *Por el Teorema 3.0.7, 2^X admite funciones 2^X-inducidas.*

2. *Por la Propocisión 3.0.8, $C(X)$ admite funciones $C(X)$-inducidas.*

3. *$C_n(X)$ admite funciones $C_n(X)$-inducidas.*

   Sean X, Y continuos, $f : X \to Y$ una función continua y $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$

dada por $C_n(f)(K) = f(K)$.

Para mostrar que $C_n(X)$ *admite funciones* H*-inducidas. Notemos que* $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$ *y dado que* 2^f *es continua, entonces* $C_n(f)$ *es continua.*

Ahora, sea $A \in C_n(X)$. *Entonces* $A \in 2^X$ *y* A *tiene a lo más* n *componentes con* $n > 1$, *por lo que* $f(A) \in 2^Y$.

Como cada componente C *de* A *es conexa y* f *es continua,* $f(C)$ *es un conexo, nótese que puede ocurrir que para algunas componentes de* A *las imágenes pueden intersectarse y cuya unión de todas las que se intersectan forman una componente en* $f(A)$. *Así,* $f(A)$ *tiene a lo más* n *componentes. Por lo tanto* $C_n(X)$ *admite funciones* $C_n(X)$*-inducidas.*

4. $C_\infty(X)$ *admite funciones* H*-inducidas.*

   Sean X, Y *continuos,* $f : X \to Y$ *una función continua y* $C_\infty(f) : C_\infty(X) \to C_\infty(Y)$ *dada por* $C_\infty(f)(K) = f(K)$.

   Notemos que $C_\infty(f) = 2^f|_{C_\infty(X)}$ *y dado que* 2^f *es continua, entonces* $C_\infty(f)$ *es continua.*

   Ahora, sea $A \in C_\infty(X)$. *Entonces* $A \in 2^X$ *y* A *tiene una cantidad finita de componentes, así que* $f(A) \in 2^Y$.

   Como cada componente C *de* A *es conexa y* f *es continua, entonces* $f(C)$ *es un conexo, nótese que puede ocurrir que para algunas componentes de* A *las imágenes pueden intersectarse y cuya unión de todas las que se intersectan forman una componente en* $f(A)$. *Así,* $f(A)$ *tiene una cantidad finita de componentes. Por lo tanto* $C_\infty(X)$ *admite funciones* $C_\infty(X)$*-inducidas.*

5. $F_n(X)$ *admite funciones* $F_n(X)$*-inducidas.*

   Sean X, Y *continuos,* $f : X \to Y$ *una función continua y* $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ *dada por* $F_n(f)(K) = f(K)$.

   Dado que $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$ *y dado que* 2^f *es continua,* $F_n(f)$ *es continua.*

   Ahora, sea $A \in F_n(X)$. *Entonces* $A \in 2^X$ *y* A *tiene a lo más* n *puntos para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $f(A) \in 2^Y$.

   Como A *tiene a lo más* n *puntos,* $f(A)$ *tiene a lo más* n *puntos. Por lo tanto* $F_n(X)$

admite funciones $F_n(X)$-inducidas.

6. *$F_\infty(X)$ admite funciones $F_\infty(X)$-inducidas.*

   Sean X, Y continuos, $f : X \to Y$ una función continua y $F_\infty(f) : F_\infty(X) \to F_\infty(Y)$ dada por $F_\infty(f)(K) = f(K)$.

   Dado que $F_\infty(f) = 2^f|_{F_\infty(X)}$ y dado que 2^f es continua, entonces $F_\infty(f)$ es continua.

   Ahora, sea $A \in F_\infty(X)$. Entonces $A \in 2^X$ y A tiene una cantidad finita de puntos, por lo que $f(A) \in 2^Y$.

   Como A tiene una cantidad finita de puntos, entonces $f(A)$ tiene una cantidad finita de puntos. Por lo tanto $F_\infty(X)$ admite funciones $F_\infty(X)$-inducidas. ■

NOTA: La notación 2^f, $C(f)$, $C_n(f)$, $C_\infty(f)$, $F_n(f)$ y $F_\infty(f)$ representa las funciones H-inducidas entre cualquier par de hiperespacios 2^X y 2^Y, $C(X)$ y $C(Y)$, $C_n(X)$ y $C_n(Y)$, $C_\infty(X)$ y $C_\infty(Y)$, $F_n(X)$ y $F_n(Y)$ y $F_\infty(X)$ y $F_\infty(Y)$, respectivamente.

De aquí en adelante vamos a suponer que si X es un continuo, todo hiperespacio $H(X)$ admite funciones H-inducidas.

Definición 3.0.13 *Decimos que el hiperespacio $H(X)$ tiene la **propiedad e** si la función $e : H(X) \times K \to H(X \times K)$ dada por $e(A, x) = A \times \{x\}$ es un encaje.*

Teorema 3.0.14 *Los hiperespacios $2^X, C_\infty(X), F_\infty(X), C_n(X), F_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tienen la propiedad e.*

Demostración: Primero demostraremos que la función $e : H(X) \times K \to H(X \times K)$ dada por $e(A, x) = A \times \{x\}$ es inyectiva y enunciaremos una observación. Esto nos ayudará a demostrar que $2^X, C_\infty(X), F_\infty(X), C_n(X), F_n(X)$ tienen la propiedad e.

Para mostrar que e es inyectiva. Sean A, $A' \in 2^X$ y x, $x' \in K$ supongamos que $(A, x) \neq (A', x')$, entonces $A \neq A'$ o $x \neq x'$, esto implica que $A \times \{x\} \neq A' \times \{x'\}$. Así, e es inyectiva.

Observación: Si $\{(A_n, x_n)\}$ una sucesión tal que $(A_n, x_n) \to (A, x)$. Por el Teorema 1.0.30, $A_n \times \{x_n\} \to A \times \{x\}$.

Ahora, demostraremos que 2^X tiene la propiedad e.

Sea $e : 2^X \times K \to 2^{X \times K}$ dada por $e(A, x) = A \times \{x\}$. Para demostrar que e está bien definida, notemos que si $A \in 2^X$, $x \in K$ y dado que K es un espacio T_1 entonces $\{x\}$ es cerrado. Por lo tanto $A \times \{x\}$ es cerrado y por la Observación e es continua.

Dado que e es una función definida entre continuos y es continua e es cerrada. Además, tenemos que e es inyectiva. Por lo tanto e es un encaje.

Para demostrar que $F_\infty(X)$ tiene la propiedad e.

Sea $e : F_\infty(X) \times K \to F_\infty(X \times K)$ dada por $e(A, x) = A \times \{x\}$. Primero mostraremos que e está bien definida, dados $A \in F_\infty(X)$ y $x \in K$ se tiene que $A \in 2^X$ y dado que K es un espacio T_1, $\{x\}$ es cerrado, de está manera $A \times \{x\}$ es cerrado. Además, A tiene una cantidad finita de puntos, lo cual implica que $A \times \{x\}$ tiene una cantidad finita de puntos. Así $A \times \{x\} \in F_\infty(X \times K)$ y por la Observación e es continua.

Dado que e está definida entre continuos y es continua entonces e es cerrada. Además, tenemos que e es inyectiva. Por lo tanto e es un encaje.

De manera similar podemos demostrar que $C_\infty(X)$ tiene la propiedad e.

Ahora mostraremos que para todo $n \in \mathbb{N} C_n(X)$ tiene la propiedad e.

Sea $e : C_n(X) \times K \to C_n(X \times K)$ dada por $e(A, x) = A \times \{x\}$. Primero mostraremos que e está bien definida, dados $A \in C_n(X)$ y $x \in K$, se tiene que $A \in 2^X$ y dado que K es un espacio T_1 entonces $\{x\}$ es cerrado, de esta manera $A \times \{x\}$ es cerrado. Además, A tiene a lo más n componentes en X, lo que implica que $A \times \{x\}$ tiene a lo más n componentes en $X \times K$. Así, $A \times \{x\} \in C_n(X \times K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por la Observación e es continua.

Dado que e está definida entre continuos y es continua obtenemos que e es cerrada. Además, tenemos que e es inyectiva. Por lo tanto e es un encaje.

De manera similar se demuestra que $F_n(X)$ tiene la propiedad e para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.0.15 *Sean X, Y, K continuos, $H(X)$ un hiperespacio que tiene la propiedad e y $G : X \times K \to Y$ una función continua. Definimos $\widetilde{G} : H(X) \times K \to H(Y)$ por $\widetilde{G}((A, t)) = G(A \times \{t\})$. Entonces la función $\widetilde{G}$ está bien definida y es continua.*

Demostración: Notemos que $\widetilde{G} = H(G) \circ e$, donde e es el encaje de $H(X) \times K$ a $H(X \times K)$ dado en la Definición 3.0.13. Así, $\widetilde{G}$ está bien definida y es continua. ■

Bajo el supuesto de que los hiperespacios de continuos tienen la propiedad e, mostraremos que si dos funciones continuas entre continuos son pseudo-homotópicas, sus funciones H-inducidas son pseudo-homotópicas también.

Teorema 3.0.16 *Sean X, Y continuos, $H(X)$, $H(Y)$ dos hiperespacios de X y Y respectivamente y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Si f y g son pseudo-homotópicas entonces $H(f)$ y $H(g)$ son pseudo-homotópicas, y si $H(Y)$ es un hiperespacio de g-crecimiento, entonces $H(f)$ y $H(g)$ son homotópicas.*

Demostración: Dado que f y g son pseudo-homotópicas, entonces existen un continuo K, dos puntos $a, b \in K$ y una función continua $G : X \times K \to Y$ tales que $G(x, a) = f(x)$ y $G(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$. Por el Teorema 3.0.15, existe una función continua $\widetilde{G}$ la cual satisface que $\widetilde{G}(S, a) = G(S, \{a\}) = f(S) = H(f)(S)$ y $\widetilde{G}(S, b) = G(S, \{b\}) = g(S) = H(g)(S)$. Así $\widetilde{G}$ es una pseudo-homotopía entre $H(f)$ y $H(g)$ con espacio factor K.
Si $H(Y)$ es un hiperespacio de g-crecimiento, entonces por el Teorema 3.0.10, $H(f)$ y $H(g)$ son homotópicas. ■

NOTA: Dado un espacio topológico X, denotamos por Id_X a la función identidad definida en X.

Teorema 3.0.17 *Sean X, Y, Z continuos, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos funciones continuas y $H(X)$, $H(Y)$, $H(Z)$ hiperespacios de X, Y y Z respectivamente. Si $H(f)$, $H(g)$, $H(g \circ f)$ y $H(Id_X)$ son las funciones inducidas de f, g, $g \circ f$ y Id_X respectivamente, entonces:*

(1) $H(g \circ f) = H(g) \circ H(f)$

(2) $H(Id_X) = Id_{H(X)}$

Demostración: Para mostrar (1) notemos que $H(g \circ f)$ y $H(g) \circ H(f)$ tienen el mismo dominio y codominio. Ahora, sea $A \in H(X)$. Veamos que $H(g \circ f)(A) = (g \circ f)(A)$ y $(H(g) \circ H(f)) = H(g(f(A))) = (g \circ f)(A)$. Por lo tanto $H(g \circ f) = H(g) \circ H(f)$.
Para mostrar (2) Notemos primero que $H(Id_X)$ y $Id_{H(X)}$ tienen el mismo dominio y codominio. Ahora, sea $B \in H(X)$, tenemos que $H(Id_X)(B) = Id_X B = B = Id_{H(X)}(B)$.
■

Definición 3.0.18 *Dado un continuo X, $G(X)$, $H(X)$ dos hiperespacios de X tales que $G(X) \subseteq H(X)$. El **hiperespacio cociente Q(X)** para X es el espacio cociente de la forma $H(X)/G(X)$ obtenido identificando el hiperespacio $G(X)$ a un punto.*

Definición 3.0.19 *Decimos que un hiperespacio cociente $Q(X)$ es un **hiperespacio cociente de g-crecimiento** para X si $H(X)$ y $G(X)$ son hiperespacios de g-crecimiento.*

Definición 3.0.20 *Sean $\rho_x : H(X) \to Q(X)$ y $\rho_y : H(Y) \to Q(Y)$ funciones cocientes. La función **q-inducida** de una función entre continuos $f : X \to Y$ es la función $Q(f) : Q(X) \to Q(Y)$ la cual cumple $Q(f) \circ \rho_x = \rho_y \circ H(f)$.*

Ejemplo 3.0.21 *Si $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, $F_m^n(X), HS_n(X)$ y $C_m^n(X)$ denotan los espacios cocientes $F_n(X)/F_m(X), C_n(X)/F_n(X)$ y $C_n(X)/C_m(X)$ respectivamente y en estos casos podemos definir las funciones q-inducidas.*

Para mostrar que en $F_m^n(X)$ podemos definir funciones q-inducidas notemos que $F_m(X) \subseteq F_n(X)$. Sean $\rho_x : F_n(X) \to F_m^n(X)$ y $\rho_y : F_n(Y) \to F_m^n(Y)$. Entonces $Q(f) \circ \rho_x : F_n(X) \to F_m^n(Y)$ y $\rho_y \circ F_n(f) : F_n(X) \to F_m^n(Y)$. Por lo que $Q(f) \circ \rho_x$ y $\rho_y \circ F_n(f)$ tienen el mismos dominio y codominio.

Dado $A \in F_n(X)$, tenemos que $A \in F_m(X)$ o $A \notin F_m(X)$. Si $A \in F_m(X)$ entonces $\rho_x(A) = F_m(X)$, con lo que $Q(f) \circ \rho_x(A) = Q(f)(F_m(X)) = F_m(X) = \rho_y(f(A)) = \rho_y \circ F_n(f)(A)$. Por otro lado, si $A \notin F_m(X)$ entonces $\rho_x(A) = \{A\}$, con lo que $Q(f) \circ \rho_x(A) = Q(f)(\{A\}) = \{f(A)\} = \rho_y(f(A)) = \rho_y \circ F_n(f)(A)$. Por lo tanto, en $F_m^n(X)$ podemos definir funciones q-inducidas.

De manera similar podemos mostrar que en $C_m^n(X)$ podemos definir funciones q-inducidas.

Para mostrar que en $HS_n(X)$ podemos definir funciones q-inducidas recordemos que $F_n(X) \subseteq C_n(X)$. Sean $\rho_x : C_n(X) \to HS_n(X)$ y $\rho_y : C_n(Y) \to HS_n(Y)$. Entonces $Q(f) \circ \rho_x : C_n(X) \to HS_n(Y)$ y $\rho_y \circ C_n(f) : C_n(X) \to HS_n(Y)$. Por lo que $Q(f) \circ \rho_x$ y $\rho_y \circ C_n(f)$ tienen el mismos dominio y codominio.

Dado $A \in C_n(X)$, se tiene que $A \in F_n(X)$ o $A \notin F_n(X)$. Si $A \in F_n(X)$ entonces $\rho_x(A) = F_n(X)$, con lo que $Q(f) \circ \rho_x(A) = Q(f)(F_n(X)) = F_n(X) = \rho_y(f(A)) = \rho_y \circ C_n(f)(A)$. Por otro lado, si $A \notin F_n(X)$, entonces $\rho_x(A) = \{A\}$, con lo que $Q(f) \circ \rho_x(A) = Q(f)(\{A\}) =$

$\{f(A)\} = \rho_y(f(A)) = \rho_y \circ C_n(f)(A)$. *Por lo tanto en* $HS_n(X)$ *podemos definir funciones* q*-inducidas.* ■

Vamos a suponer que si X es un continuo, todo hiperespacio cociente $Q(X)$ admite funciones q-inducidas.

Definición 3.0.22 *Decimos que el* ***hiperespacio cociente*** $Q(X) = H(X)/G(X)$ *tiene la* ***propiedad e*** *si* $H(X)$ *y* $G(X)$ *tienen la propiedad e.*

Proposición 3.0.23 *Sean* X, Y, Z *continuos y* $Q(X)$ *un hiperespacio cociente para* X. *Si* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *son funciones continuas, entonces:*

(1) $Q(g \circ f) = Q(g) \circ Q(f)$.

(2) $Q(Id_X) = Id_{Q(X)}$

Demostración: Para mostrar (1) notemos que $Q(g) \circ Q(f) \circ \rho_x$ y $\rho_z \circ H(g) \circ H(f)$ tienen el mismo dominio y codominio. Ahora, tenemos $Q(g) \circ Q(f) \circ \rho_x = Q(g) \circ \rho_y \circ H(f) = \rho_z \circ H(g) \circ H(f)$. Por otro lado, $Q(g \circ f) \circ \rho_x = \rho_z \circ H(g \circ f) = \rho_z \circ H(g) \circ H(f) = Q(g) \circ Q(f) \circ \rho_x$, de está manera $Q(g \circ f) = Q(g) \circ Q(f)$.
Para mostrar (2) notemos que $H(Id_X)(B) = B$ para todo $B \in H(X)$. Así $Q(Id_X)(\rho_X(B)) = \rho_X(H(Id_X)(B)) = \rho_X(B) = Id_{Q(X)}(\rho_X(B))$. Por lo tanto $Q(id_X) = Id_{Q(X)}$. ■

Definición 3.0.24 *Sean* X, Y *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función continua. Si existe una función continua* $g : Y \to X$ *tal que* $f \circ g = Id_Y$, *se dice que* f *es una* ***identificación***.

Teorema 3.0.25 ***(Teorema de la transgresión)***. *Sean* $p : X \to Y$ *una identificación y* $h : X \to Z$ *una función continua. Si* h *es una función constante en cada fibra* $p^{-1}(y)$. *Entonces:*

(1) $h \circ p^{-1} : Y \to Z$ *es continua y además, el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, "hp^{-1}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

(2) *$h \circ p^{-1} : Y \to Z$ es una función abierta (cerrada) si y sólo si $h(U)$ es abierto (cerrado) cuando U es un conjunto abierto (cerrado) tal que $U = p^{-1} \circ p(U)$.*

Demostración: Para demostrar (1) notemos que para cada $x \in X$, $p^{-1} \circ p(x)$ es la fibra que contiene a x y dado que h es constante en cada fibra, tenemos que $h(x) = h \circ p^{-1} \circ p(x) = (h \circ p^{-1}) \circ p(x)$, es decir $h = h \circ p^{-1} \circ p$. Como h es continua entonces por [14, Teorema 3.1, p. 123], $h \circ p^{-1}$ es continua.
Para demostrar (2) sea $V \subseteq Y$ un conjunto abierto; entonces $U = p^{-1}(V)$ es un abierto en X y dado que $U = p^{-1} \circ p(U)$ entonces $h(U) = h \circ p^{-1} \circ p(U) = h \circ p^{-1}(V)$. ■

Teorema 3.0.26 *Sean X, Y continuos y $Q(X) = H(X)/G(X)$ un hiperespacio cociente para X que tiene la propiedad e. Las funciones q-inducidas de las funciones pseudo-homotópicas son pseudo-homotópicas y si $Q(Y) = H(Y)/G(Y)$ es un hiperespacio cociente de g-crecimiento para Y, entonces las funciones q-inducidas de las funciones pseudo-homotópicas son homotópicas.*

Demostración: Dadas $f, g : X \to Y$ funciones pseudo-homotópicas, existen K un continuo, puntos $a, b \in K$ y una función continua $M : X \times K \to Y$ que satisfacen $M(x, a) = f(x)$ y $M(x, b) = g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces la función $\widetilde{M} : H(X) \times K \to H(Y)$ definida por $\widetilde{M}(A, t) = M(A \times \{t\})$ satisface que $\widetilde{M}(A, a) = H(f)(A)$ y $\widetilde{M}(A, b) = H(g)(A)$ para cada $A \in H(X)$. Dado que $G(X)$ tiene la propiedad e, $\widetilde{M}(G(X) \times K) \subseteq G(Y)$. Por el Teorema 3.0.25, existe $L : Q(X) \times K \to Q(Y)$ tal que $L(\rho_X(A), t) = \rho_Y(\widetilde{M}(A, t))$. Notemos que $L(\rho_X(A), a) = \rho_Y(\widetilde{M}(A, a)) = \rho_Y(H(f)(A)) = Q(f)(A)$ y $L(\rho_Y(A), b) = Q(g)(A)$ para cada $A \in H(X)$. Así $Q(f)$ y $Q(g)$ son pseudo-homotópicas.
Ahora, si $H(Y)$ y $G(Y)$ son hiperespacios de g-crecimiento de Y. Entonces, $S : H(X) \times C(K) \to H(Y)$ definida por $S(A, T) = \bigcup \widetilde{M}(\{A\} \times T)$ está bien definida y es continua. Además, $S(A, \{a\}) = H(f)(A)$, $S(A, \{b\}) = H(g)(A)$ para cada $A \in H(X)$ y $S(B, \{a\}) = \widetilde{M}(B, a) = H(f)(B) = f(B) \in G(Y)$, $S(B, \{b\}) = \widetilde{M}(B, b) = H(g)(B) = g(B) \in G(Y)$ para cada $B \in G(X)$. Ahora, sea $l : [0, 1] \to C(K)$ tal que $l(0) = \{a\}$, $l(1) = \{b\}$ y $l(s) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ para cada $s \in [0, 1]$. Entonces, si $(B, s) \in G(X) \times [0, 1]$ tenemos que $\widetilde{M}(\{B\} \times l(s)) \in C(2^X)$ y $\widetilde{M}(\{B\} \times l(s)) \cap G(Y) \neq \emptyset$. Dado que $G(Y)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de Y tenemos que $S(G(X) \times l([0, 1])) \subseteq G(Y)$. Por el Teorema

3.0.25, existe $R : Q(X) \times [0,1] \to Q(Y)$ tal que $R(\rho_X(A), s) = \rho_Y(S(A, l(s)))$. Observemos que $R(\rho_X(A), 0) = \rho_Y(S(A, l(0))) = \rho_Y(S(A, a)) = \rho_Y(H(f)(A)) = Q(f)(\rho_X(A))$ y $R(\rho_X(A), 1) = \rho_Y(S(A, l(1))) = \rho_Y(S(A, b)) = \rho_Y(H(g)(A)) = Q(g)(\rho_X(A))$. Por lo tanto $Q(f)$ y $Q(g)$ son homotópicas. ■

Capítulo 4

Pseudo-contractibilidad en hiperespacios

En esta sección daremos resultados generales de contractibilidad y pseudo-contractibilidad en hiperespacios. Determinaremos en que tipo de hiperespacios la pseudo-contractibilidad es equivalente a la contractibilidad.

Definición 4.0.1 *Un espacio topológico X se dice que es* ***contráctil*** *siempre que exista una homotopía entre la función identidad en X y una función constante en X.*

Definición 4.0.2 *Un espacio topológico X se dice que es* ***pseudo-contráctil*** *siempre que exista una pseudo-homotopía entre la función identidad en X y una función constante en X.*

Observación 4.0.3 *Todo espacio contráctil es pseudo-contráctil.*

Pero no todo espacio pseudo-contráctil es contráctil. Ver el Ejemplo 3.0.5.

Definición 4.0.4 *Se dice que un espacio topológico X es:*

a) ***contráctil con respecto a*** *un espacio topológico Y si cada función continua $f : X \to Y$ es homotópica a una función constante en Y.*

b) ***pseudo-contráctil con respecto a*** *un espacio topológico Y si cada función continua $f : X \to Y$ es pseudo-homotópica a una función constante en Y.*

Teorema 4.0.5 *La pseudo-contractibilidad es una propiedad topológica.*

Demostración: Sean X un espacio topológico pseudo-contráctil y Y un espacio topológico homeomorfo a X. Dado que X es pseudo-contráctil, existen un continuo K, puntos $a, b \in K$ y una función continua $H : X \times K \to X$ tales que $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = x_0$ para toda $x \in X$ y algún $x_0 \in X$. Como X y Y son homeomorfos, existe $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Sea $G : Y \times K \to Y$ definida por $G(y, t) = f \circ H(f^{-1}(y), t)$, G está bien definida y es continua. Además $G(y, a) = f \circ H(f^{-1}(y), a) = f(H(f^{-1}(y), a)) = f(f^{-1}(y)) = y$ y $G(y, b) = f \circ H(f^{-1}(y), b) = f(H(f^{-1}(y), b)) = f(x_0)$ el cual es un valor constante en Y. Por lo tanto Y es pseudo-contráctil. ■

Definición 4.0.6 *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$. Definimos la* ***función inclusión*** *$i : A \to X$ por $i(a) = a$ para toda $a \in A$.*

Definición 4.0.7 *Decimos que un subespacio Y de X es* ***pseudo-contráctil en*** *X si la función inclusión de Y a X es pseudo-homotópica a una función constante en X.*

Definición 4.0.8 *Decimos que un subespacio Y de X es* ***contráctil en*** *X si la función inclusión de Y a X es homotópica a una función constante en X.*

Teorema 4.0.9 *Sean X, Y espacios topológicos. Si $Y \subseteq X$ y X es pseudo-contráctil entonces Y es pseudo-contráctil en X.*

Demostración: Como X es pseudo-contráctil, existen un continuo K, puntos $a, b \in K$ y $H : X \times K \to X$ una función continua tales que $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = x_0$ para toda $x \in X$ y algún $x_0 \in X$. Sea $i : Y \to X$ la función inclusión. Definimos $G : Y \times K \to X$ por $G(x, t) = H(i(x), t)$. Notemos que G está bien definida y dado que H es continua, G es continua. Ahora $G(y, a) = H(i(y), a) = H(y, a) = y$ y $G(y, b) = H(i(y), b) = H(y, b) = x_0$. Por lo tanto, Y es pseudo-contráctil en X. ■

Observación 4.0.10 *Cada subespacio Z de un subespacio pseudo-contráctil Y de un espacio X es pseudo-contráctil en X.*

Observación 4.0.11 *Si $Y \subseteq X$ y Y es pseudo-contráctil con respecto a X, entonces Y es pseudo-contráctil en X.*

Observación 4.0.12 *Cualquier subespacio Z de un espacio contráctil X es contráctil en X y cada subespacio Z de un subespacio contráctil Y de un espacio X es contráctil en X.*

Teorema 4.0.13 *Sea X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X. Entonces $\mathcal{H}$ es pseudo-contráctil si y sólo si $\mathcal{H}$ es contráctil.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{H}$ es pseudo-contráctril. Entonces, existe una pseudo-homotopía entre la función identidad en $\mathcal{H}$ y c donde c es una función constante en $\mathcal{H}$. Dado que $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento, por el Teorema 3.0.10, existe una homotopía entre la función identidad en $\mathcal{H}$ y c. Por lo tanto $\mathcal{H}$ es contráctil.
Supongamos que $\mathcal{H}$ es contráctil, por la Proposición 4.0.3, $\mathcal{H}$ es pseudo-contráctil. ■

Teorema 4.0.14 *Sea X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X que contiene a $F_1(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) 2^X *es contráctil.*

(2) $F_1(X)$ *es contráctil en* 2^X.

(3) $\mathcal{H}$ *es contráctil.*

(4) $F_1(X)$ *es contráctil en* $\mathcal{H}$.

(5) $\mathcal{H}$ *es pseudo-contráctil.*

(6) $F_1(X)$ *es pseudo-contráctil en* $\mathcal{H}$.

Demostración: Primero mostraremos que (2) implica (1). Suponiendo que $F_1(X)$ es contráctil en 2^X, existe una función continua $F : F_1(X) \times [0,1] \to 2^X$ tal que $F(\{a\},0) = \{a\}$, $F(\{a\},1) = C$ donde C es una función constante en 2^X.
Definimos para $A \in 2^X$, $\mathcal{F}(A,t) = \{F(\{a\},t) : a \in A\} = F(A \times \{t\})$. Dado que F es una función continua de $F_1(X) \times [0,1] \to 2^X$, se tiene que $\mathcal{F}(A,t)$ es continua y $\mathcal{F} : 2^X \times [0,1] \to 2^{2^X}$.
Para $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ sabemos que la función union, $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup A \subseteq X$, es una función continua de 2^{2^X} en 2^X. Sea $H : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ definida por $H(A,t) = \sigma(\mathcal{F}(A,t))$. Por la

continuidad de σ y $\mathcal{F}$, H es continua. Además, $H(A,0) = \sigma(A,0) = F(A \times \{0\}) = A$ y $H(A,1) = \sigma(A,1) = F(A \times \{1\}) = K$ donde K es una función constante en 2^X. Por lo tanto (2) implica (1).

Por la Observación 4.0.12, (1) implica (2).

Por el Teorema 4.0.13, tenemos la equivalencia entre (3) y (5).

Las afirmaciones (3) y (5) implican (4) y (6) respectivamente.

Para demostrar que (3) implica (2). Supongamos que $\mathcal{H}$ es contráctil. Como que $F_1(X) \subseteq \mathcal{H}$, por el Teorema 4.0.12, $F_1(X)$ es contráctil en 2^X. Así, (3) implica (2).

Para probar que (1) implica (3). Supongamos que 2^X es contráctil. Entonces, existe una función continua $L : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ tal que $L(A,0) = A$ y $L(A,1) = X$ para cada $A \in 2^X$. Definimos $M : \mathcal{H} \times [0,1] \to \mathcal{H}$ tal que $M(A,t) = \bigcup L(\{A\} \times [0,t])$ para cada $(A,t) \in \mathcal{H} \times [0,1]$. Probaremos que M está bien definida. Sea $(A,t) \in \mathcal{H} \times [0,1]$. La continuidad de L implica que $L(\{A\} \times [0,t]) \in C(2^X)$. Dado que $A \in L(\{A\} \times [0,t]) \cap \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X, $\bigcup L(\{A\} \times [0,t]) = M(A,t) \in \mathcal{H}$. La continuidad de M se sigue de la continuidad de L y el Teorema 2.0.3. Notemos que $M(A,0) = A$ y $M(A,1) = X$ para cada $A \in \mathcal{H}$. Por lo que $\mathcal{H}$ es contráctil. Por lo tanto, (1) implica (3).

Ahora, probaremos que (6) implica (4). Supongamos que $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $\mathcal{H}$. Sea $i : F_1(X) \to \mathcal{H}$ la función inclusión, entonces i es pseudo-homotópica a C donde C es una función constante en $\mathcal{H}$. Por el Teorema 3.0.10, tenemos que i es homotópica a C. Por lo que $F_1(X)$ es contráctil en $\mathcal{H}$. Por lo tanto (6) implica (4).

(4) implica (6) es inmediato. ■

Notemos que la condición $F_1(X) \subset \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento es necesaria para tener que la contractibilidad de el hiperespacio $\mathcal{H}$ implica la contractibilidad de 2^X.

Teorema 4.0.15 *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces el espacio $C_n(X,K) = \{A \in C_n(X) : K \subseteq A\}$ es contráctil para cada $K \in 2^X$.*

Demostración: Sea $K \in 2^X$. Por el Teorema 1.0.20, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = K$ y $\alpha(1) = X$. Sea $H : C_n(X,K) \times [0,1] \to C_n(X,K)$ una función tal que

$H(A,t) = \alpha(t) \cup A$.

Probaremos que $H(C_n(X,K) \times [0,1]) \subseteq C_n(X,K)$. Sea $A \in C_n(X,K)$ y $t \in [0,1]$. Por el Teorema 1.0.20, cada componente de K intersecta a $\alpha(t)$ para cada $t \in [0,1]$. Dado que $K \subseteq A$, cada componente de A intersecta a $\alpha(t)$. Así, $\alpha(t) \cup A$ tiene a lo más n componentes. Por lo que H es una función continua. Notemos que $H(A,0) = \alpha(0) \cup A = A$ y $H(A,1) = \alpha(1) \cup A = X$ para cada $A \in C_n(X,K)$. Por lo tanto $C_n(X,K)$ es contráctil. ■

Como consecuencia de este resultado tenemos que si X es un continuo y $p \in X$, entonces el hiperespacio $C(X,p) = \{A \in C(X) : p \in A\}$ es contráctil.

Por otro lado $C(X,p)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X tal que $F_1(X) \nsubseteq C(X,p)$ ya que $C(X,p) \cap F_1(X) = \{p\}$.

Finalmente, tomamos un continuo X tal que 2^X no es contráctil (ver [3, p. 158] para la existencia de tal continuo). Tenemos que la contractibilidad de un hiperespacio de g-crecimiento no implica la contractibilidad de 2^X.

Definición 4.0.16 *Diremos que X es* ***hereditariamente unicoherente*** *si todo subcontinuo de X es unicoherente.*

Definición 4.0.17 *Si X es un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente diremos que es un* ***dendroide****.*

Definición 4.0.18 *Un espacio topológico X es* ***localmente conexo en un punto*** *$p \in X$ si para todo abierto U que contiene a p, existe un abierto conexo V tal que $p \in V \subset U$.*

Definición 4.0.19 *Diremos que X* ***contiene circunferencias*** *si existe un encaje de S^1 en X.*

Definición 4.0.20 *Una* ***dendrita*** *es un continuo localmente conexo que no contiene circunferencias.*

Definición 4.0.21 *Un continuo X tiene* ***la propiedad de Kelley en un punto*** *$p \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que para todo $b \in B(\delta, p)$ y para todo $A \in C(X)$ con $p \in A$, existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$.*

Definición 4.0.22 *Sean X un continuo y K un subconjunto cerrado, propio y no vacío de X. Diremos que K es un R^3-**conjunto** en X, si existen un subconjunto abierto y propio U de X tal que $K \subset U$ y una sucesión $\{C_n\}$ de componentes de U que satisface que $K = L_i(C_n)$.*

Ejemplo 4.0.23 *Existe un dendroide X tal que $C(X)$ no es contráctil pero $C(X)-\{\{p\}\}$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X que es contráctil para cierta $p \in X$.*

Para la prueba, sean X un dendroide, Y, W subcontinuos propios de X y $p \in X$ que satisfacen:

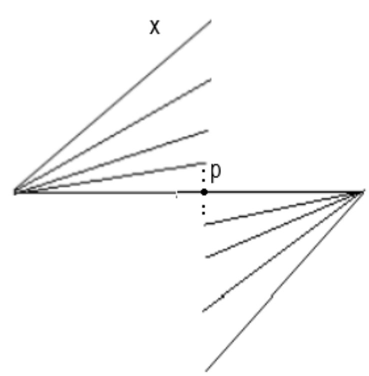
(1) $X = Y \cup W$;

(2) $Y \cap W = \{p\}$;

(3) X no tiene la propiedad de Kelley en p;

(4) Y y W tienen la propiedad de Kelley;

(5) $\{p\}$ es un R^3-conjunto de X.



Un ejemplo es la figura de arriba.
Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ tal que $\mu(Y) = \mu(W) = \frac{1}{2}$ una función de Whitney.
Definimos $F : C(Y) \times [0, \frac{1}{2}] \to C(Y)$ y $G : C(W) \times [0, \frac{1}{2}] \to C(W)$ dadas por:

$$F(A,t) = \bigcup\{B \in C(Y) : \mu(B) = t, B \cap A \neq \emptyset\},$$
$$G(A,t) = \bigcup\{B \in C(W) : \mu(B) = t, B \cap A \neq \emptyset.$$

Como Y y W tienen la propiedad de Kelley, las funciones F y G son continuas. Sea $\mathcal{B} = \{B \in C(X) - \{\{p\}\} : B \cap Y \neq \emptyset, B \cap W \neq \emptyset$. Definimos $L : (C(X) - \{\{p\}\}) \times [0,1] \to C(X) - \{\{p\}\}$ dada por:

$$L(A,t) = \begin{cases} F(A,t) & si \quad (A,t) \in C(Y) \times [0, \frac{1}{2}], \\ \\ Y \cup G(\{p\}, t - \frac{1}{2}) & si \quad (A,t) \in C(Y) \times [\frac{1}{2}, 1], \\ \\ G(A,t) & si \quad (A,t) \in C(W) \times [0, \frac{1}{2}], \\ \\ W \cup F(\{p\}, t - \frac{1}{2}) & si \quad (A,t) \in C(W) \times [\frac{1}{2}, 1], \\ \\ F(A \cap Y, \frac{\mu(A\cap Y)}{\mu(A)} t) \cup G(A \cap W, \frac{\mu(A\cap W)}{\mu(A)} t) & si \quad (A,t) \in \mathcal{B} \times [0,1]. \end{cases}$$

Entonces $L(A,0) = A$ y $L(A,1) = X$ para cada $A \in C(X) - \{\{p\}\}$. ■

Teorema 4.0.24 *Si X es un continuo pseudo-contráctil y $H(X)$ es un hiperespacio que tiene la propiedad e, entonces $H(X)$ es pseudo-contráctil, y si $H(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X, entonces $H(X)$ es contráctil.*

Demostración: Dado que X es un continuo pseudo-contráctil, Id_X es pseudo-homotópica a una función constante en X. Por el Teorema 3.0.16, la función inducida $H(Id_X)$ es pseudo-homotópica a una función constante en $H(X)$, por el Teorema 3.0.17, Id_X es pseudo-homotópica a una función constante en $H(X)$. Así, $H(X)$ es pseudo-contráctil. Ahora, si $H(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X entonces, por el Teorema 4.0.13, $H(X)$ es contráctil. ■

Definición 4.0.25 *Sea $A \subset X$ cerrado. Una* ***retracción*** *de X en A es una función continua $r : X \to A$ tal que $r|_A$ es la función identidad de A. Si existe tal función r, decimos que A es un retracto de X.*

Definición 4.0.26 *Decimos que Z es un* ***retracto por pseudo-deformación*** *de X si existe una retracción $r : X \to Z$ y un continuo K tal que $r \simeq_K Id_X$.*

Definición 4.0.27 *Diremos que el conjunto Z es un* ***retracto fuerte por pseudo-deformación*** *de X si existen una retracción $r : X \to Z$, un continuo K, puntos $a, b \in K$ y una función continua $G : X \times K \to X$ tales que $G(x, a) = x$, $G(x, b) = r(x)$ para cada $x \in X$, y $G(z, t) = z$ para cada $z \in Z$ y cada $t \in K$.*
La función G es llamada retracción fuerte por pseudo-deformación.

Teorema 4.0.28 *Sea X un espacio topológico pseudo-contráctil. Si A es un retracto de X, entonces A es pseudo-contráctil.*

Demostración: Como X es un espacio pseudo-contráctil, existen un continuo C, puntos $a, b \in C$, $x_0 \in X$ y $H : X \times C \to X$ una función continua que satisface $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = x_0$ para cada $x \in X$. Dado que A es un retracto de X, existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(y) = y$ para cada $y \in A$. Sea $a_0 = r(x_0) \in A$. Consideremos la función $i : A \times C \to X \times C$ definida por $i(y, c) = (y, c)$. Ahora consideremos la función $G : A \times C \to A$ definida por $G(y, c) = (r \circ H \circ i)(y, c)$, G es continua por ser composición de funciones continuas, además cumple que $G(y, a) = (r \circ H \circ i)(y, a) = r(H(i(y, a))) = r(H(y, a)) = r(y) = y$, para toda $y \in A$ y $G(y, b) = (r \circ H \circ i)(y, b) = r(H(i(y, b))) = r(H(y, b)) = r(x_0) = a_0$, para toda $y \in A$. Por lo tanto G es una pseudo-homotopía entre la función identidad en A y una función constante. ■

La prueba del siguiente Teorema es similar a la del Teorema 4.0.28.

Teorema 4.0.29 *Sea X un espacio topológico contráctil. Si A es un retracto de X, entonces A es contráctil.*

Teorema 4.0.30 *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ funciones continuas. Si $f \simeq_C g$, entonces $h \circ f \simeq_C h \circ g$.*

Demostración: Como $f \simeq_C g$, existen puntos $a, b \in C$ y $H : X \times C \to Y$ una función continua tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para todo $x \in X$. Definimos $G : X \times C \to Z$ tal que $G(x, c) = (h \circ H)(x, c)$. Por la continuidad de h y H tenemos que G es continua. Notemos que $G(x, a) = h(H(x, a) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$ y $G(x, b) = h(H(x, b) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$ para cada $x \in X$. Por lo tanto $h \circ f \simeq_C h \circ g$.■

Los siguientes resultados muestran algunos casos donde la pseudo-contractibilidad y la contractibilidad son equivalentes. Adicionalmente probaremos algunos casos donde la pseudo-contractibilidad de un espacio implica la pseudo-contractibilidad de otros.

Proposición 4.0.31 *Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X tal que $F_1(X) \subseteq \mathcal{H}$ y $F_1(X)$ es un retracto de $\mathcal{H}$. Si Y es pseudo-contráctil en X, entonces Y es contráctil en X.*

Demostración: Consideremos las siguientes funciones $i : Y \to X$ la función inclusión, $j : X \to \mathcal{H}$ un encaje definido por $j(x) = \{x\}$, $r : \mathcal{H} \to F_1(X)$ una retracción y $h : F_1(X) \to X$ el homeomorfismo definido por $h(\{x\}) = x$. Por hipótesis i es pseudo-homotópica a una función constante en X. Entonces, por el Teorema 4.0.30, $j \circ i : Y \to \mathcal{H}$ es pseudo-homotópica a una función constante, aplicando el Teorema 3.0.10, tenemos que $j \circ i$ es homotópica a una función constante, usando de nuevo el Teorema 3.0.10, $i = h \circ r \circ j \circ i$ es homotópica a una función constante. ■

Proposición 4.0.32 *Sea X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X tal que $F_1(X) \subseteq \mathcal{H}$. Si $F_1(X)$ es un retracto de $\mathcal{H}$, entonces X es pseudo-contráctil si y sólo si X es contráctil.*

Demostración: Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces, por el Teorema 4.0.24, $\mathcal{H}$ es contráctil. Por el Teorema 4.0.29, $F_1(X)$ es contráctil. Por la Proposición 1.0.11 y el Teorema 4.0.5, X es contráctil.
Ahora supongamos que X es contráctil, por la Observación 4.0.3, X es pseudo-contráctil. Otra prueba es usando la Proposición 4.0.31 con $X = Y$. ■

Proposición 4.0.33 *Sea X un continuo. Entonces $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $F_\infty(X)$ si y sólo si $F_\infty(X)$ es pseudo-contráctil.*

Demostración: Supongamos que $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $F_\infty(X)$, entonces existen un continuo C, puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : F_1(X) \times C \to F_\infty(X)$ tales que $H(\{k\}, a) = \{k\}$ y $H(\{k\}, b) = A_0$ para algún $A_0 \in F_\infty(X)$ y cada $\{k\} \in F_1(X)$. Consideremos la función $G : F_\infty(X) \times C \to F_\infty(X)$ definida por $G(K, c) = \bigcup\{H(\{k\}, c) :$

$k \in K\}$. Dado que K es un subconjunto finito de X, entonces $G(K,c) \in F_\infty(X)$. Por el Lema 1.0.38, G está bien definida.

Para mostrar que G es continua. Sean $\varepsilon > 0$, $A, B \in F_\infty(X)$ y $s, t \in C$ tales que $H_d(A,B) < \delta$ y $d(s,t) < \delta$. Si $p' \in G(A,t)$, entonces existe $p \in A$ tal que $p' \in H(\{p\},t)$. Como $A \subseteq N_\delta(B)$, existe $q \in B$ tal que $d(p,q) < \delta$. Así $H_d(\{p\},\{q\}) < \delta$. Por otro, lado ya que $d(t,s) < \delta$ tenemos que $H_d(H(\{p\},t), H(\{q\},s)) < \varepsilon$. Por lo que $p' \in H(\{p\},t) \subseteq N_\varepsilon(H(\{q\},s)) \subseteq N_\varepsilon(G(B,s))$. De esta manera $p' \in N_\varepsilon(G(B,s))$ Por lo tanto $G(A,t) \subseteq N_\varepsilon(G(B,s))$. Análogamente, $G(B,s) \subseteq N_\varepsilon(G(A,t))$.

Ahora tenemos que $G(K,a) = \bigcup\{H(\{k\},a) : k \in K\} = \bigcup\{\{k\} : k \in K\} = K$ y $G(K,b) = \bigcup\{H(\{k\},b) : k \in K\} = A_0$ para cada $K \in F_\infty(X)$. Por lo tanto, $F_\infty(X)$ es pseudo-contráctil.

Supongamos que $F_\infty(X)$ es pseudo-contráctil. Dado que $F_1(X) \subseteq F_\infty(X)$, entonces $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $F_\infty(X)$. ■

Teorema 4.0.34 *Sea X un continuo y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X que tiene la propiedad e tal que $F_1(X) \subset \mathcal{H}(X) \subset F_\infty(X)$. Si $F_1(X)$ es un retracto de $F_\infty(X)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X es pseudo-contráctil.*

(2) *$\mathcal{H}(X)$ es pseudo-contráctil.*

(3) *$F_\infty(X)$ es pseudo-contráctil.*

Demostración: La prueba de (1) implica (2) es consecuencia del Corolario 4.0.24.

Para mostrar que (2) implica (3). Notemos que $F_1(X) \subset \mathcal{H}(X) \subset F_\infty(X)$ y $\mathcal{H}(X)$ es pseudo-contráctil, así $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $\mathcal{H}(X)$ y por lo tanto en $F_\infty(X)$. Por la Proposición 4.0.33, $F_\infty(X)$ es pseudo-contráctil.

La prueba de (3) implica (1) es consecuencia de los Teoremas 4.0.28 y 4.0.5. ■

Teorema 4.0.35 *Sean X un continuo, $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de g-crecimiento de X, $F_1(X) \subset \mathcal{H}(X)$ y $G(X)$ un hiperespacio tal que $F_1(X) \subseteq G(X) \subseteq \mathcal{H}(X) \cap F_\infty(X)$. Si $G(X)$ es un retracto de $\mathcal{H}(X)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) 2^X *es contráctil.*

(2) $\mathcal{H}(X)$ *es contráctil.*

(3) $G(X)$ *es contráctil.*

(4) $F_\infty(X)$ *es contráctil.*

Demostración: Por el Teorema 4.0.14 tenemos la equivalencia entre (1) y (2).
Por el Teorema 4.0.29, tenemos que (2) implica (3).
Para mostrar que (3) implica (4). Notemos que $G(X)$ es contráctil y $F_1(X) \subseteq G(X)$, entonces $F_1(X)$ es contráctil en $G(X)$. Además, como $G(X) \subset F_\infty(X)$, $F_1(X)$ es contractil en $F_\infty(X)$. Por [3, Ejercicio 78.49, p. 408], concluimos que $F_\infty(X)$ es contráctil.
Para mostrar que (4) implica (1). Notemos que $F_\infty(X)$ es contráctil entonces $F_1(X)$ es contráctil en $F_\infty(X)$. Dado que $F_\infty(X) \subset 2^X$, $F_1(X)$ es contráctil en 2^X. Por el Teorema 4.0.14, 2^X es contráctil. ■

Sabemos, por el Teorema 4.0.24, que si X es un continuo pseudo-contráctil entonces cada hiperespacio $H(X)$ que tiene la propiedad e es pseudo-contráctil. El siguiente resultado da una condición que asegura la contractibilidad de $H(X)$ y $F_\infty(X)$.

Corolario 4.0.36 *Sea X un continuo, $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de g-crecimiento de X que contiene a $F_1(X)$ y $H(X)$ un hiperespacio tal que $F_1(X) \subseteq H(X) \subseteq \mathcal{H}(X) \cap F_\infty(X)$. Si X es pseudo-contráctil y $H(X)$ es un retracto de $\mathcal{H}(X)$, entonces $H(X)$ y $F_\infty(X)$ son contráctiles.*

Demostración: Como X es pseudo-contráctil y $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X, entonces por el Teorema 4.0.24, $\mathcal{H}(X)$ es contráctil. Así, por el Teorema 4.0.35 $H(X)$ y $F_\infty(X)$ son contráctiles. ■

Corolario 4.0.37 *Sean X un continuo, $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de g-crecimiento de X que contiene a $F_1(X)$ y $H(X)$ un hiperespacio tal que $F_1(X) \subseteq H(X) \subseteq \mathcal{H}(X) \cap F_\infty(X)$. Si $H(X)$ es un retracto de $\mathcal{H}(X)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $F_\infty(X)$ *es pseudo-contráctil.*

(2) $F_\infty(X)$ *es contráctil.*

(3) $H(X)$ *es pseudo-contráctil.*

(4) $H(X)$ *es contráctil.*

Demostración: Por la Observación 4.0.3, (2) implica (1) y (4) implica (3).
Mostraremos que (3) implica (4). Dado que $F_1(X) \subseteq H(X) \subseteq 2^X$ y $H(X)$ es pseudo-contráctil, $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X. Por el Teorema 4.0.14, 2^X es contráctil. Por el Teorema 4.0.35, concluimos que $H(X)$ es contráctil.
Por el Teorema 4.0.35, (2) y (4) son equivalentes.
Para mostrar que (1) implica (4). Notemos $F_\infty(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X. Por el Teorema 4.0.14, 2^X es contráctil. Por el Teorema 4.0.35, concluimos que $H(X)$ es contráctil. ■

Teorema 4.0.38 *Sean X un continuo, $H(X)$ un hiperespacio que tiene la propiedad e tal que $F_1(X) \subseteq H(X) \subseteq F_\infty(X)$. Si $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X que contiene a $F_1(X)$ y $F_1(X)$ es un retracto de $\mathcal{H}(X)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X *es contráctil.*

(2) X *es pseudo-contráctil.*

(3) 2^X *es contráctil.*

(4) $\mathcal{H}(X)$ *es contráctil.*

(5) $H(X)$ *es contráctil.*

(6) $H(X)$ *es pseudo-contráctil.*

Demostración: Por la Proposición 4.0.32, (1) y (2) son equivalentes. Por el Teorema 4.0.24, (2) implica (6). Por el Teorema 4.0.14, hay una equivalencia entre (3) y (4). Para mostrar que (5) implica (3). Supongamos que $H(X)$ es contráctil, entonces $F_1(X)$ es contractil en 2^X. Por el Teorema 4.0.14 concluimos que 2^X es contráctil.

Para mostrar que (4) implica (1). Supongamos que $\mathcal{H}(X)$ es contráctil, dado que $F_1(X)$ es un retracto de $\mathcal{H}(X)$, $F_1(X)$ es contráctil y como $F_1(X)$ es homeomorfo a X, X es contráctil.

Para mostrar que (6) implica (3). Si $H(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X. Por el Teorema 4.0.14, 2^X es contráctil.

Para mostrar que (1) implica (6). Si X es contráctil, entonces X es pseudo-contráctil. Por el Teorema 4.0.24, $H(X)$ es pseudo-contráctil. De manera similar podemos demostrar que (1) implica (5). ■

Teorema 4.0.39 *Sean X, Y continuos, $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de Y. Entonces X es pseudo-contráctil con respecto a $\mathcal{H}$ si y sólo si X es contráctil con respecto a $\mathcal{H}$.*

Demostración: Supongamos que X es pseudo-contráctil con respecto a $\mathcal{H}$. Así, si $f : X \to \mathcal{H}$ una función continua, entonces f es pseudo-homotópica a una función constante en $\mathcal{H}$. Por el Teorema 3.0.10, f es homotópica a una función constante $\mathcal{H}$. De esta manera X es contráctil con respecto a $\mathcal{H}$.

Supongamos que X es contráctil con respecto a $\mathcal{H}$. Si $f : X \to \mathcal{H}$ una función continua, entonces f es homotópica a una función constante en $\mathcal{H}$, por lo que f es pseudo-homotópica a una función constante en $\mathcal{H}$. Por lo tanto X es pseudo-contráctil con respecto a $\mathcal{H}$. ■

Los últimos teoremas de esta sección dan una relación entre la pseudo-contractibilidad de un continuo y la pseudo-contractibilidad de su hiperespacio cociente con la propiedad e.

Corolario 4.0.40 *Si X es un continuo pseudo-contráctil, entonces cada hiperespacio cociente $Q(X)$ con la propiedad e es pseudo-contráctil, y si $Q(X)$ es un hiperespacio cociente de g-crecimiento, entonces $Q(X)$ es contráctil.*

Demostración: Como X es pseudo-contráctil, entonces la función Id_X es pseudo-homotópica a una función constante en X. Por el Teorema 3.0.26, $Q(Id_X)$ la función q-inducida es pseudo-homotópica a una función constante en $Q(X)$, finalmente, ya que $Q(Id_X) = Id_{Q(X)}$ concluimos que $Q(X)$ es pseudo-contráctil.

Ahora si $Q(X)$ es un hiperespacio cociente de g-crecimiento. Por el Teorema 3.0.26, $Q(X)$ es contráctil. ■

En particular $F_n^m(X)$ y $HS_n(X)$ son pseudo-contráctiles y $C_n^m(X)$ es contráctil si X es pseudo-contráctil.

Corolario 4.0.41 *Sean X un continuo y $H(X)$ un hiperespacio que tiene la propiedad e tal que $F_1(X) \subset H(X) \subset F_\infty(X)$. Si $F_1(X)$ es un retracto de $F_\infty(X)$ y $H(X)$ es pseudo-contráctil, entonces cada hiperespacio cociente $Q(X)$ con la propiedad e es pseudo-contráctil.*

Demostración: Como $H(X)$ es pseudo-contráctil, por el Teorema 4.0.34 tenemos que X es pseudo-contráctil. Así, por el Corolario 4.0.40 concluimos que $Q(X)$ es pseudo-contráctil. ■

Teorema 4.0.42 *Sean X, Y espacios tales que Y es un subespacio cerrado de X. Si Y es un retracto fuerte por pseudo-deformación de X, entonces el cociente X/Y es pseudo-contráctil.*

Demostración: Como Y es un retracto fuerte por pseudo-deformación de X, existen un continuo K, puntos $a, b \in K$ y una función continua $G : X \times K \to X$ tales que $G(x, a) = x$, $G(x, b) = r(x)$ para cada $x \in X$ y $G(a, t) = a$ para cada $a \in Y$ y $t \in K$. Sean $q : X \to X/Y$ la función cociente. Sea $G' : X/Y \times K \to X/Y$ dada por $G'(\mathbf{x}, t) = Y$ si $\mathbf{x} = Y$ y $G'(\mathbf{x}, t) = q(G(q^{-1}(\mathbf{x}, t))$ si $\mathbf{x} \neq Y$. Dado que G y q son continuas, entonces G' es continua. Notemos que $G'(\mathbf{x}, a) = \mathbf{x}$ y $G'(\mathbf{x}, b) = Y$. Por lo tanto X/Y es pseudo-contráctil. ■

Corolario 4.0.43 *Sean X un continuo, $G(X)$ y $H(X)$ hiperespacios. Si $G(X)$ es un retracto fuerte por pseudo-deformación de $H(X)$, entonces el cociente $Q(X)$ es pseudo-contráctil.*

Demostración: La prueba se sigue del Teorema 4.0.42 con $G(X) = Y$ y $H(X) = X$. ■

Capítulo 5

Hiperespacios pseudo-homotópicamente equivalentes y pseudo-contráctibilidad

En este capítulo determinaremos la relación que hay entre los espacios pseudo-contráctiles y sus espacios homotópicamente equivalentes.

Definición 5.0.1 *Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que Y es* ***semi pseudo-homotópicamente equivalente*** *a X, si existe un continuo C y dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq_C Id_Y$.*

Escribiremos $Y \approx_P^{SE} X$ para decir que Y es semi pseudo-homotópicamente equivalente a X.

Definición 5.0.2 *Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que Y es* ***semi homotópicamente equivalente*** *a X, si existen dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq Id_Y$.*

Escribiremos $Y \approx^{SE} X$ para decir que Y es semi homotópicamente equivalente a X.

Definición 5.0.3 *Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que X y Y son* ***pseudo-homotópicamente equivalentes*** *(o tienen el mismo tipo de pseudo-homotopía), si existen continuos C y D y dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq_C Id_Y$ y $g \circ f \simeq_D Id_X$.*

Escribiremos $X \approx_P^E Y$ para decir que X y Y son pseudo-homotópicamente equivalentes.

Definición 5.0.4 *Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que X y Y son **homotópicamente equivalentes** (o tienen el mismo tipo de homotopía), si existen dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq Id_Y$ y $g \circ f \simeq Id_X$.*

Escribiremos $X \approx^E Y$ para decir que X y Y son homotópicamente equivalentes.

Teorema 5.0.5 *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es pseudo-contráctil y $Y \approx_P^{SE} X$, entonces Y es pseudo-contráctil.*

Demostración: Dado que X es pseudo-contráctil, entonces $Id_X \simeq_C x_0$ donde x_0 es una función constante en X.
Como $Y \approx_P^{SE} X$, existen dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ y un continuo K tales que $f \circ g \simeq_K Id_Y$. Como $f = f \circ Id_X \simeq_C f \circ x_0$ y $y_0 = f \circ x_0 : X \to Y$ es una función constante. De manera que $f \circ g \simeq_C y_0 \circ g$, así existe un continuo D que satisface $Id_Y \simeq_D y_0 \circ g$. Por lo tanto Y es pseudo contráctil. ■

De manera similar podemos demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 5.0.6 *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es contráctil y $Y \approx^{SE} X$, entonces Y es contráctil.*

Teorema 5.0.7 *Sean X, Y continuos y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de Y. Si $\mathcal{H} \approx_P^{SE} X$, entonces $\mathcal{H} \approx^{SE} X$.*

Demostración: Dado que $\mathcal{H} \approx_P^{SE} X$, existen dos funciones continuas $g : \mathcal{H} \to X$ y $f : X \to \mathcal{H}$ y un continuo C tales que $f \circ g \simeq_C Id_{\mathcal{H}}$. Por el Teorema 3.0.10, tenemos que $f \circ g \simeq Id_{\mathcal{H}}$. Por lo tanto $\mathcal{H} \approx^{SE} X$. ■

Del Teorema 5.0.8 al Corolario 5.0.17 asumiremos que los hiperespacios tienen la propiedad e.

Teorema 5.0.8 *Sean X, Y continuos. Si $Y \approx_P^{SE} X$ y $H(X)$ es un hiperespacio de X, entonces $H(Y) \approx_P^{SE} H(X)$ y si $H(Y)$ y $H(X)$ son hiperespacios de g-crecimiento, entonces $H(Y) \approx^{SE} H(X)$.*

Demostración: Como $Y \approx_P^{SE} X$, existen un continuo C y dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq_C Id_Y$.
Dado que $f \circ g \simeq_C Id_Y$, por el Teorema 3.0.16, se tiene que $H(f \circ g) \simeq_C H(Id_Y)$. Por el Teorema 3.0.17, tenemos que $H(f) \circ H(g) \simeq_C Id_{H(Y)}$. Por lo tanto, $H(Y) \approx_P^{SE} H(X)$.
Ahora bien, si $H(Y)$ y $H(X)$ son hiperespacios de g-crecimiento entonces, por el Teorema 3.0.16, $H(Y) \approx^{SE} H(X)$. ■

Corolario 5.0.9 *Sean X y Y continuos. Si $Y \approx_P^{SE} X$ y $Q(X)$ es un hiperespacio cociente de X, entonces $Q(Y) \approx_P^{SE} Q(X)$, y si $Q(Y)$ y $Q(X)$ son hiperespacios cocientes de g-crecimiento, entonces $Q(Y) \approx^{SE} Q(X)$.*

Demostración: Dado que $Y \approx_P^{SE} X$, existen un continuo C y dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq_C Id_Y$. Por el Teorema 3.0.26, $Q(f \circ g) \simeq_C Q(Id_Y)$. Por el Teorema 3.0.23, $Q(f) \circ Q(g) \simeq_C Id_{Q(Y)}$. Por lo tanto $Q(Y) \approx_P^{SE} Q(X)$.
Ahora, si $Q(Y)$ y $Q(X)$ son hiperespacios de g-crecimiento entonces, por el Teorema 3.0.26, $Q(Y) \approx^{SE} Q(X)$. ■

Corolario 5.0.10 *Sean X y Y continuos. Si $Y \approx_P^{E} X$ y $H(X)$ es un hiperespacio de X. Entonces, $H(Y) \approx_P^{E} H(X)$. Y si $H(Y)$ y $H(X)$ son hiperespacios de g-crecimiento, entonces $H(Y) \approx^{E} H(X)$.*

Demostración: Como $Y \approx_P^{E} X$, existen continuos C, D y dos funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g \simeq_C Id_Y$ y $g \circ f \simeq_D Id_X$. Por el Teorema 3.0.16, $H(f \circ g) \simeq_C H(Id_Y)$ y $H(g \circ f) \simeq_D H(Id_X)$. Por el Teorema 3.0.17, $H(f) \circ H(g) \simeq_C Id_{H(Y)}$ y $H(g) \circ H(f) \simeq_D Id_{H(X)}$. Así, $H(Y) \approx_P^{E} H(X)$.
Ahora, si $H(Y)$ y $H(X)$ son hiperespacios de g-crecimiento entonces, por el Teorema 3.0.16, $H(Y) \approx^{E} H(X)$. ■

Lo inverso del Corolario 5.0.10 no es válido.
Si $X = [0, 1]$ y $Y = S^1$. Tenemos que $2^Y \approx^E 2^X$ y $C(X) \approx^E C(Y)$ porque son homeomorfos. Sin embargo, Y no es pseudo-homotópicamente equivalente a X.

Corolario 5.0.11 *Sean X, Y continuos. Si $Y \approx_P^E X$ y $Q(X)$ es un hiperespacio cociente de X, entonces $Q(Y) \approx_P^E Q(X)$ y si $Q(Y)$ y $Q(X)$ son hiperespacios cocientes de g-crecimiento, entonces $Q(Y) \approx^E Q(X)$.*

Demostración: Dado que $Y \approx_P^E X$, existen continuos C, D y dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq_C Id_Y$ y $g \circ f \simeq_D Id_X$. Por el Teorema 3.0.26, $Q(f \circ g) \simeq_C Q(Id_Y)$ y $Q(g \circ f) \simeq_D Q(Id_X)$. Por el Teorema 3.0.23, $Q(f) \circ Q(g) \simeq_C Id_{Q(Y)}$ y $Q(g) \circ Q(f) \simeq_D Id_{Q(X)}$. Por lo tanto $Q(Y) \approx_P^E Q(X)$.
Ahora, si $Q(Y)$ y $Q(X)$ son hiperespacios de g-crecimiento entonces, por el Teorema 3.0.26, $Q(Y) \approx^E Q(X)$. ■

Corolario 5.0.12 *Sean X, Y continuos tales que $Y \approx_P^{SE} X$ y sea $H(X)$ un hiperespacio de X. Si $H(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $H(Y)$ es pseudo-contráctil y si $H(X)$ y $H(Y)$ son hiperespacios de g-crecimiento y $H(X)$ es contráctil, entonces $H(Y)$ es contráctil.*

Demostración: Dado que $Y \approx_P^{SE} X$, por el Teorema 5.0.8, $H(Y) \approx_P^{SE} H(X)$. Como $H(X)$ es pseudo-contráctil, por el Teorema 5.0.5, $H(Y)$ es pseudo-contráctil.
Ahora, si $H(X)$ y $H(Y)$ son hiperespacios de g-crecimiento entonces, por el Teorema 5.0.8, $H(Y) \approx^{SE} H(Y)$ y por el Teorema 5.0.6, $H(Y)$ es contráctil. ■

Corolario 5.0.13 *Sea X, Y continuos y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X. Si X es pseudo-contráctil y $Y \approx_P^{SE} \mathcal{H}$, entonces Y es contráctil.*

Demostración: Por el Teorema 4.0.24, $\mathcal{H}$ es contráctil. Así, Y es contráctil. ■

El siguiente corolario se deriva del Corolario 5.0.13

Corolario 5.0.14 *Sea X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X. Si $X \approx_P^{SE} \mathcal{H}$, entonces X es pseudo-contráctil si y sólo si X es contráctil.*

Corolario 5.0.15 *Sean X, Y continuos y $Q(X)$ un hiperespacio cociente de X. Si $Y \approx_P^{SE} X$ y $Q(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $Q(Y)$ es pseudo-contráctil.*

Demostración: Dado que $Y \approx_P^{SE} X$, por el Corolario 5.0.9, $Q(Y) \approx_P^{SE} Q(X)$. Ahora, como $Q(X)$ es pseudo-contráctil, por el Teorema 5.0.5, $Q(Y)$ es pseudo-contráctil. ■

Corolario 5.0.16 *Sean X, Y continuos. Si $Y \approx_P^E X$ y $H(X)$ es un hiperespacio de X. Entonces $H(X)$ es pseudo-contráctil si y sólo si $H(Y)$ es pseudo-contráctil y si $H(X)$ y $H(Y)$ son hiperespacios de g-crecimiento, entonces la pseudo-contractibilidad de un hiperespacio implica la contractibilidad del otro hiperespacio.*

Demostración: Supongamos que $H(X)$ es pseudo-contráctil. Como $Y \approx_P^E X$, por el Corolario 5.0.10, $H(Y) \approx_P^E H(X)$. Como $H(X)$ es pseudo-contráctil y $Y \approx_P^E X$, $H(Y)$ es pseudo-contráctil.
Supongamos que $H(Y)$ es pseudo-contráctil. Como $Y \approx_P^E X$, por el Corolario 5.0.10, $H(Y) \approx_P^E H(X)$. Como $H(Y)$ es pseudo-contráctil y $Y \approx_P^E X$, $H(X)$ es pseudo-contráctil.
Ahora, si $H(X)$ y $H(Y)$ son hiperespacios de g-crecimiento, entonces por el Corolario 5.0.10, $H(X) \approx^E H(Y)$, la pseudo-contractibilidad de un hiperespacio implica la contractibilidad del otro hiperespacio. ■

Corolario 5.0.17 *Sean X, Y continuos. Si $Y \approx_P^E X$ y $Q(X)$ es un hiperespacio cociente de X, entonces $Q(Y)$ es pseudo-contráctil si y sólo si $Q(X)$ es pseudo-contráctil.*

Demostración: Supongamos que $Q(X)$ es pseudo-contráctil. Como $Y \approx_P^E X$, por el Corolario 5.0.11, $Q(Y) \approx_P^E Q(X)$, así $Q(Y)$ es pseudo-contráctil.
Supongamos que $Q(Y)$ es pseudo-contráctil. Como $Y \approx_P^E X$, por el Corolario 5.0.11, $Q(Y) \approx_P^E Q(X)$. Por lo tanto $Q(X)$ es pseudo-contráctil. ■

Bibliografía

[1] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[2] A. Illanes, *Pseudo-homotopies of the pseudo-arc*, Comment. Math. Univ. Carolin. **53** (2012), 629-635.

[3] A. Illanes y S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Dekker, New York y Basel, 1999.

[4] B. S. Baik, K. Hur y C. J. Rhee, R^i- *sets and contractibility*, J. Korean Math. Soc. **23** (1997), 309-319.

[5] D. Bellamy, *A null pseudohomotopic map onto a pseudo-arc*, Topology Proc. **11** (1986), 1-5.

[6] D. G. Paulowich, *Weak contractibility and hyperspaces*, Fund. Math. **94** (1977), 41-47.

[7] D. W. Curtis, *Growth hyperspaces of Peano continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **238** (1978), 271-283.

[8] D. W. Curtis y N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to* $\aleph_0$*-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. **19** (1985), 251-260.

[9] F. Capulín, E. Castañeda-Alvarado L. Juárez-Villa y D. Maya-Escudero, *Pseudo-homotopies between maps on g-growth hyperspaces of continua*, Colloq. Math, 2020.

[10] F. Capulín, L. Juárez-Villa y F. Orozco-Zitli, *General properties of pseudo-contractibility*, Topology Appl. **247** (2018), 57-71.

[11] F. Capulín, L. Juárez-Villa y F. Orozco-Zitli, R^i*-set, pseudo-contractibility and weak contractibility on hyperspaces of continua*, Glas. Mat. **53** (2018), 359-370.

[12] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1942.

[13] H. Katsuura, *Pseudocontraction and homotopy of the sin*$(1/x)$ *curve*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 1129-1138.

[14] J. Dugundji, *Topology*, Allyn y Bacon, 1966. bibitem2 J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado y J. A. Martínez-Cortez, *On the hyperspace* $C_n(X)/C_{n_K}(X)$, Comment. Math. Univ. Carolin. **62** (2021), 201-224.

[15] J. G. Anaya, *Making holes in hyperspaces*, Topology Appl. **154** (2007), 2000-2008.

[16] J. J. Charatonik y A. Illanes, *N-sequences and contractibility in hyperspaces*, Houston J. Math. **32** (2006), 745-756.

[17] J. J. Charatonik y P. Pellicer-Covarrubias, *Retractions and contractibility in hyperspaces*, Topology Appl. **154** (2007), 333-338.

[18] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math Soc. **52** (1942), 22-36.

[19] J. Munkres,*Topología*, Prentice Hall, segunda edición, Madrid, 2002.

[20] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, 1966.

[21] M. Sobolewski, *Pseudo-contractibility of chainable continua*, Topology Appl. **154** (2007), 2983-2987.

[22] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory An Introduction*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. **158**, Dekker, Inc, New York, 1992.

[23] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. **49**, Dekker, New York, 1978.

[24] S. WILLARD, *General Topology*, Addison-Wesley, Massachussetts USA, 1970.

[25] W. DEBSKI, *Pseudo-contractibility of the sin$(1/x)$-curve*, Houston J. Math. **20** (1994), 365-367.