

UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE PLANEACIÓN URBANA Y REGIONAL

ESTADÍSTICA II

Modelos de Series de Tiempo

POR:

LUIS CONRADO TOLEDO VEGA

FECHA DE ELABORACIÓN:

1ra quincena de Marzo de 2015

Guión explicativo

El presente material didáctico constituye un apoyo para la presentación de los elementos teóricos y prácticos del método de los modelos de series de tiempo en la unidad de Estadística II, perteneciente a la Licenciatura en Ciencias Ambientales.

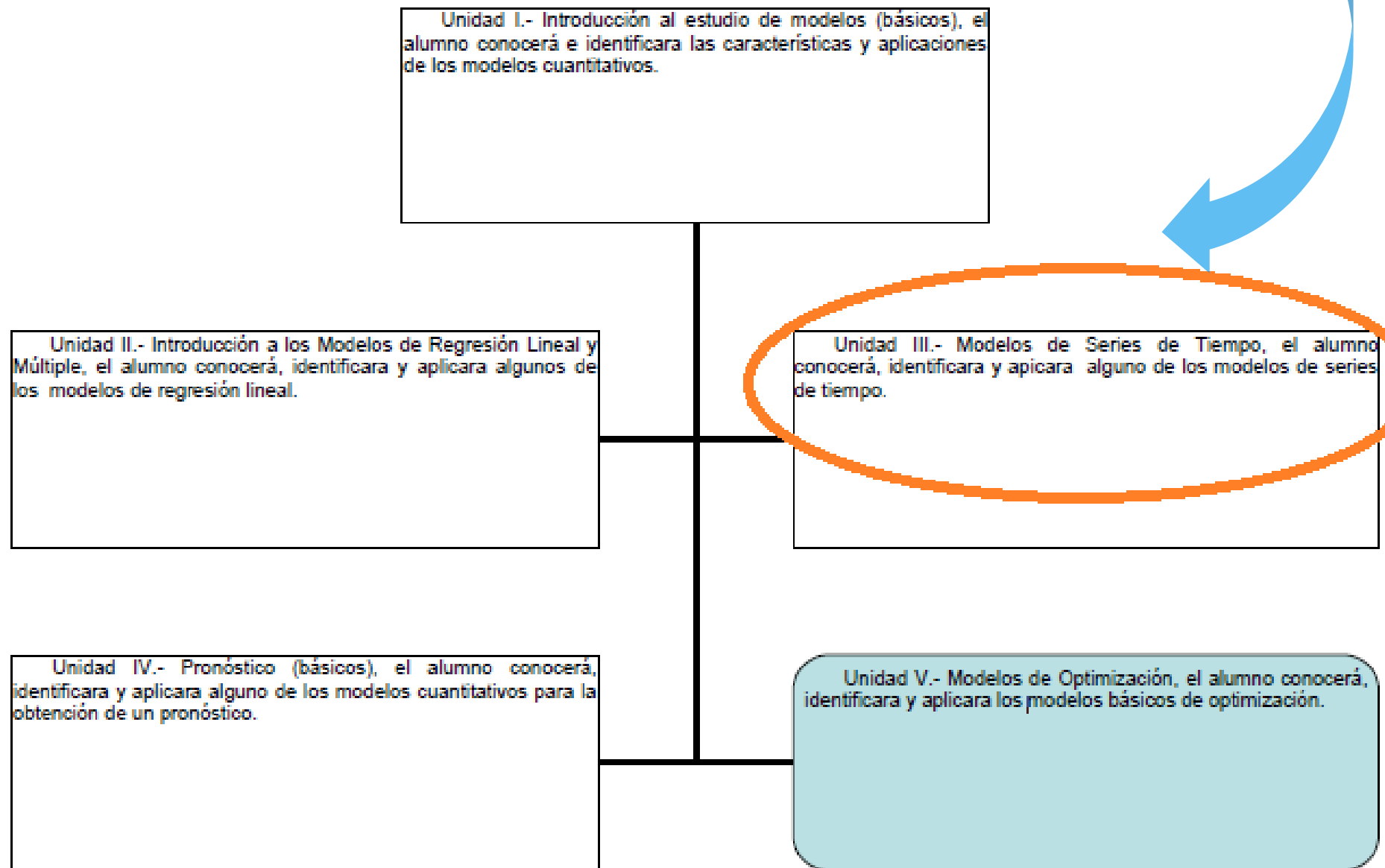
El material proyectable se desarrollo en este año, en el periodo 2015 A, contribuye a la capacidad de comprensión de la metodología que permite comprender el comportamiento de las tendencias de variables ambientales a lo largo del tiempo y poder hacer pronósticos en el futuro de la misma serie de tiempo. Para su posterior análisis y explotación en casos prácticos y aplicaciones reales, como parte fundamental en la solución de múltiples problemas que resultan del análisis de datos en las Ciencias Ambientales.

Para el desarrollo del tema se consultaron diversas fuentes, resultando que donde mejor se explican los conceptos teóricos es en los libros de Estadística inferencial incluidos en la bibliografía del programa de la Unidad de Aprendizaje.

Series de tiempo

Con ejemplos de métodos de suavización

Ubicación dentro del plan de estudios



Series de tiempo

Una serie temporal, cronológica, histórica o de tiempo es una serie estadística en la que cada uno de los valores de la variable está referido a un *instante* o aun *periodo de tiempo*.

Tiempo	Variable
Ene	72
Feb	80
Mar	22
Abr	9
May	163
Jun	65
Jul	187
Ago	319
Sep	236

Series de tiempo

Es un conjunto de valores observados durante una serie de periodos temporales, secuencialmente ordenada.

Son variables estadísticas bidimensionales en donde el tiempo es la variable independiente, y la otra es la variable dependiente.

Variable Independiente	Variable dependiente
Año	Variable ambiental
5	319
10	325
15	330
20	338
25	345
30	354
35	359
40	370

Series de tiempo

Los valores de una serie cronológica referidos a instantes son:

cantidades, *stocks* o niveles.

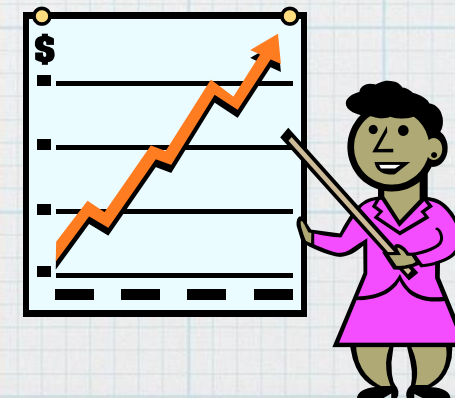
Los valores de una serie cronológicas referidos a periodos de tiempo son:

flujos o corrientes.

Análisis de una serie cronológica

Es el procedimiento por el cual se identifican y aíslan los factores relacionados con el tiempo que influyen en los valores observados en las series de tiempo.

Una vez identificados estos factores pueden contribuir a la interpretación de valores históricos de series de tiempo y a pronosticar valores futuros de series de tiempo.



Análisis de una serie cronológica

Se construyen modelos de series de tiempo para:

- **Obtención del mecanismo o leyes que generan.**
- **Estudio de su evolución futura o predicción.**

Se realiza: Analizando los componentes o factores que determinan los resultados de la información.

Análisis de una serie cronológica

PERIODOS DE UNA SERIE

Generalmente los periodos son constantes en el tiempo.

(mensual, trimestral, anual).

Diferencia entre cada dos niveles en el caso de un nivel.

Periodo de referencia en el caso de un flujo.

Análisis de una serie cronológica

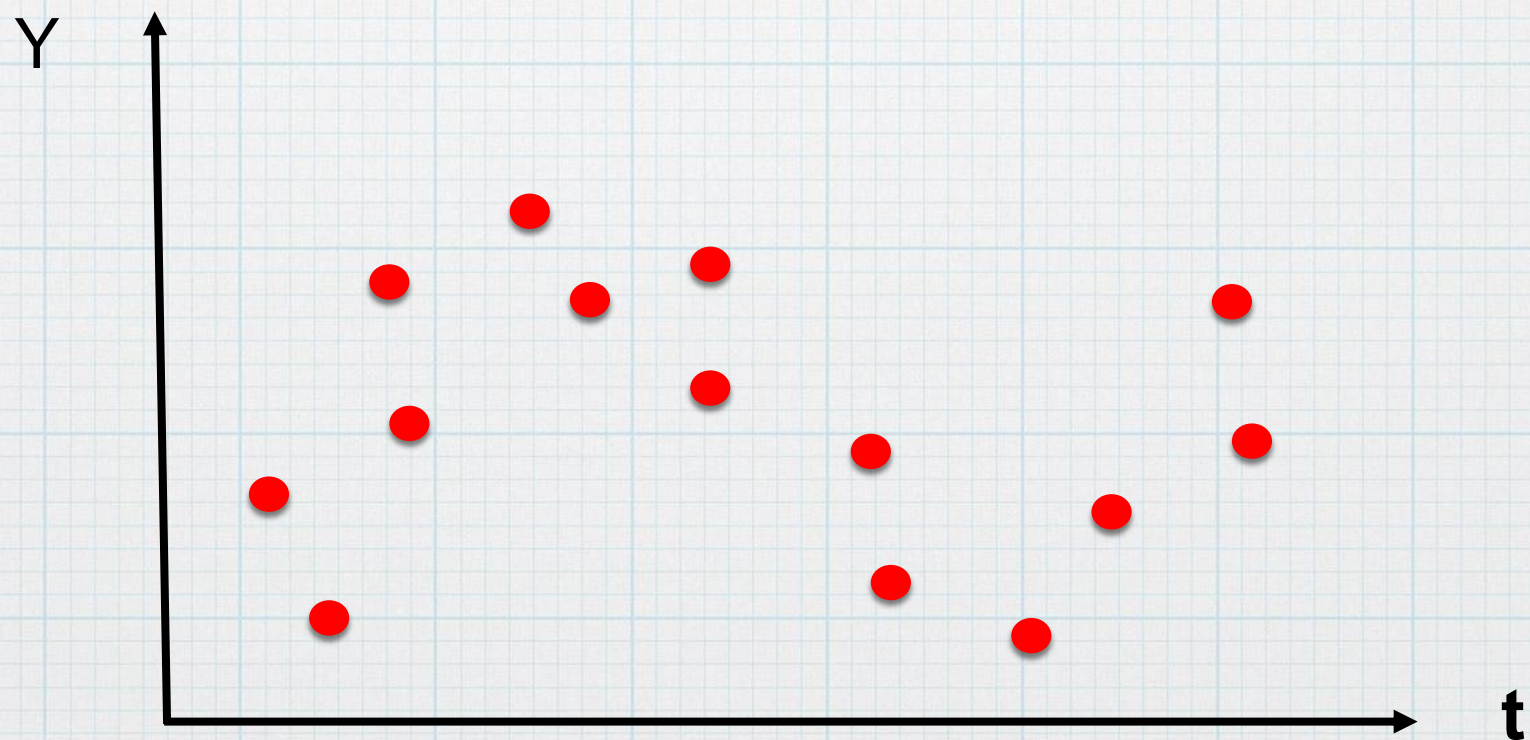
DESCRIPCIÓN NUMÉRICA DE UNA SERIE CRONOLÓGICA

Mediante una tabla de dos columnas. Una de ellas para el tiempo t y la otra para los valores de la otra variable $y(t)$.

t	$Y(t)$
5	319
10	325
15	330
20	338

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Una serie de tiempo se representa gráficamente mediante ejes coordenados cartesianos, en donde en el eje X (eje horizontal) se sitúa el valor del tiempo y en el eje Y (eje vertical) la otra variable o los valores de la serie de tiempo.



REPRESENTACIÓN GRAFICA

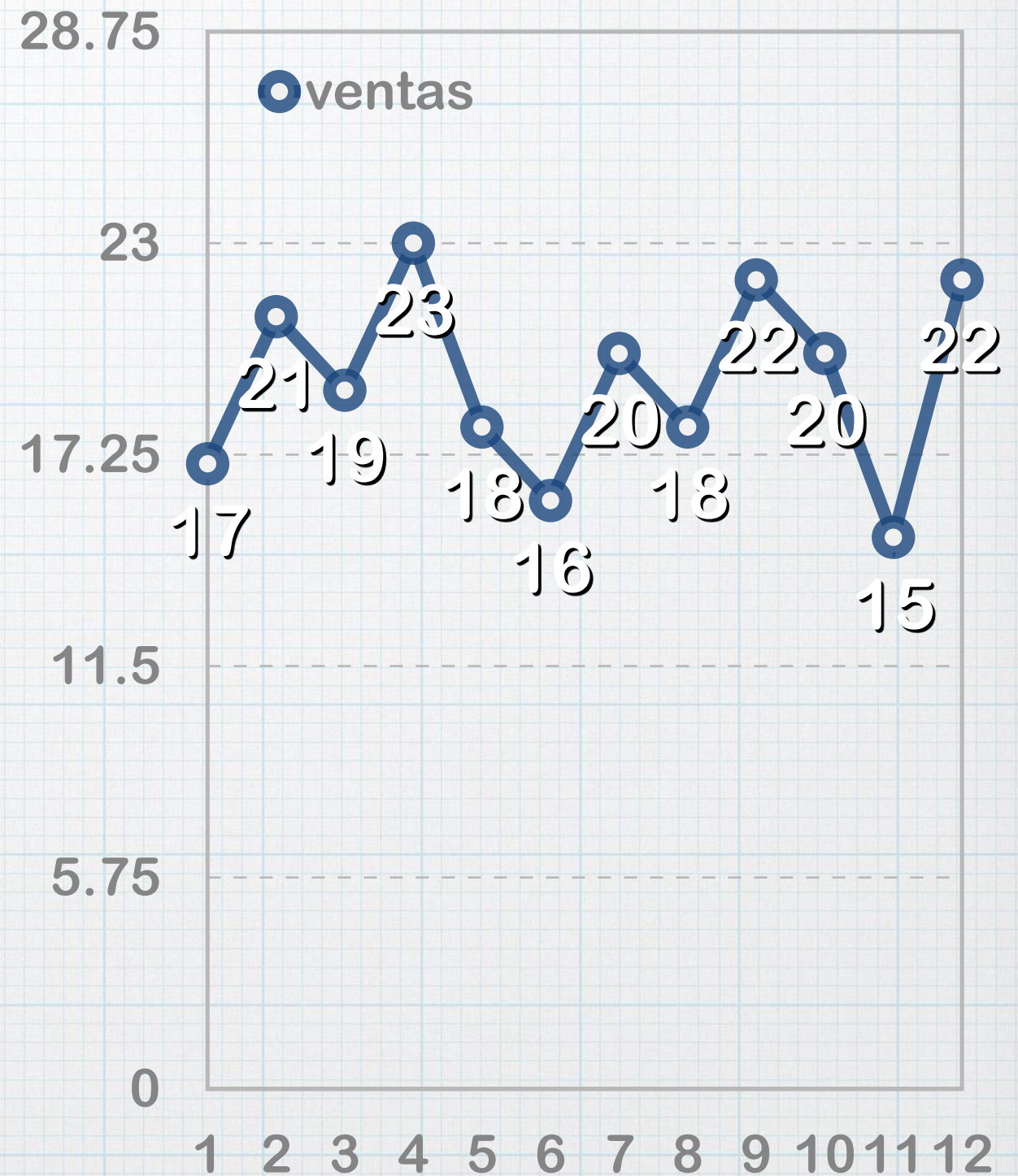
Mediante una tabla de doble entrada una para los años y otra para las partes K del año situando en el punto de intersección el valor correspondiente muy adecuada para estudiar estacionalidades.

t	$Y(t)$
5	319
10	325
15	330
20	338



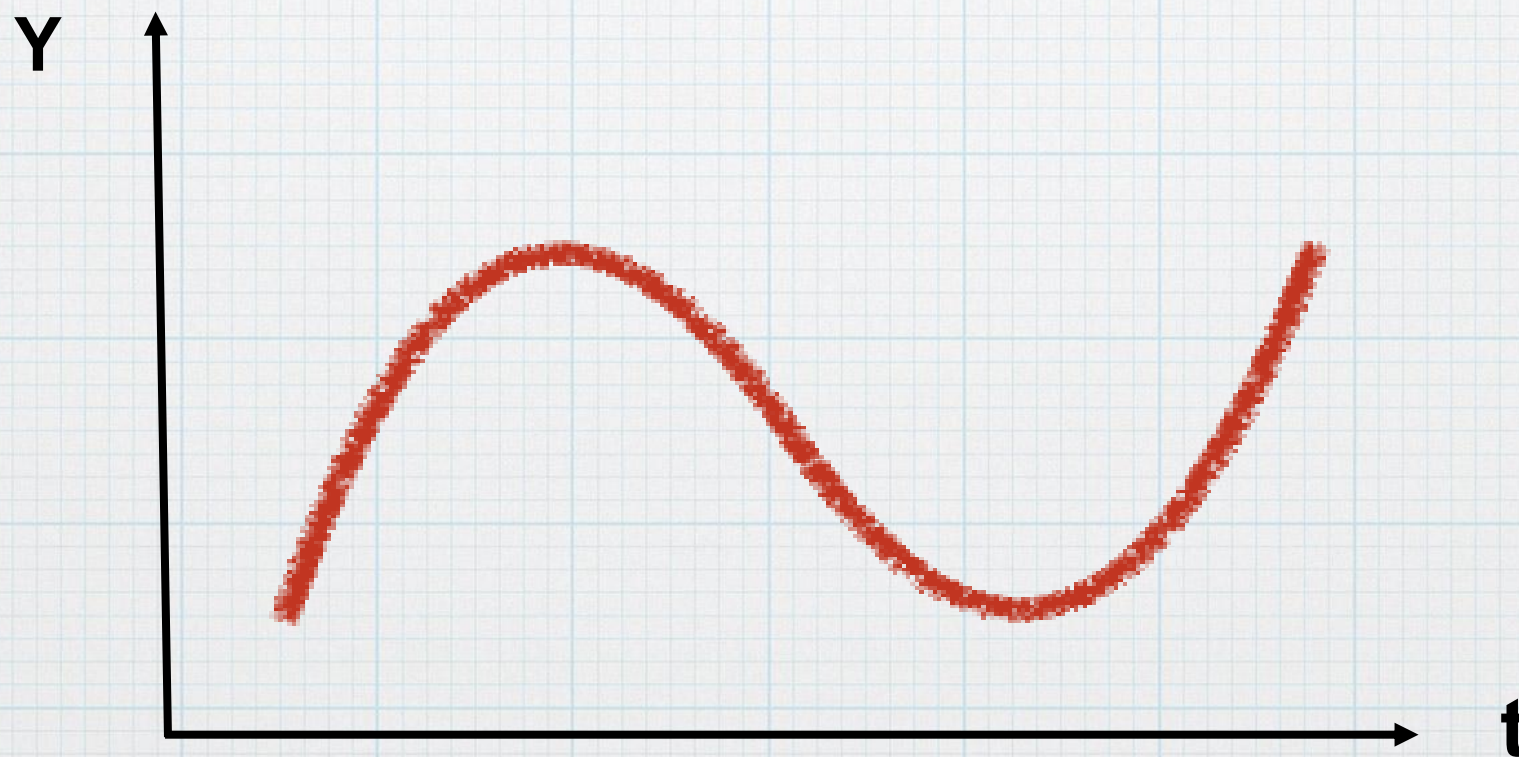
REPRESENTACIÓN GRAFICA

Se determinan las variaciones en el periodo total de tiempo del que se tienen observaciones y/o se predice el posible comportamiento en el futuro.



REPRESENTACIÓN GRAFICA

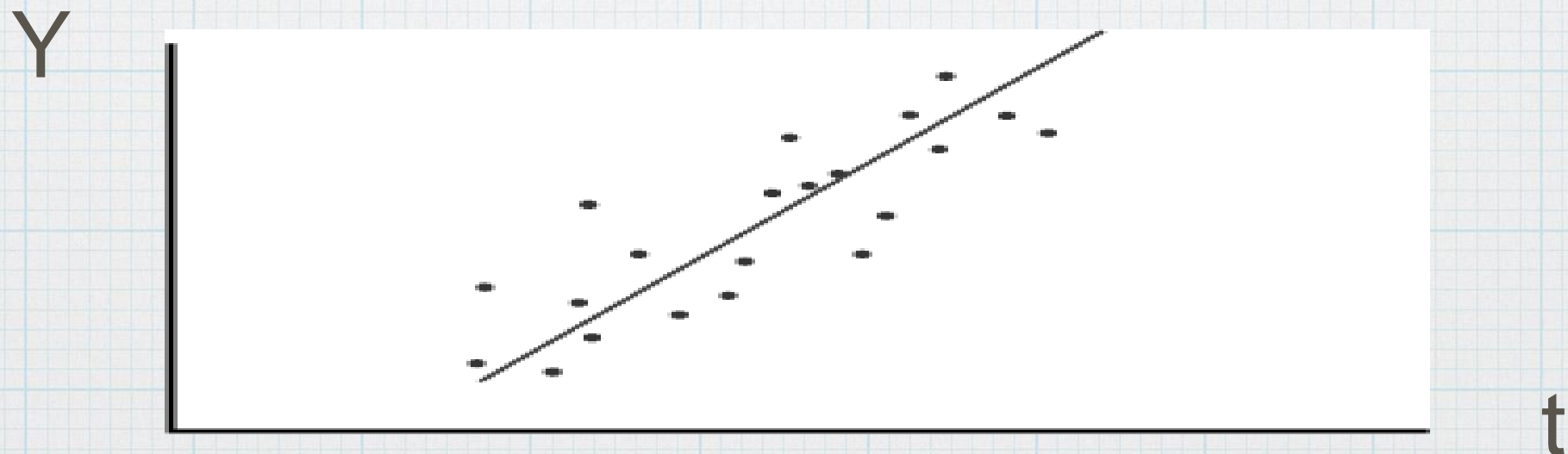
Las variaciones de la serie son debidas a muchos factores y causas superpuestas entre las que están las llamadas *componentes* o *factores* de una serie *temporal* o *cronológica*.



Componentes o factores de una serie temporal o cronológica.

El método clásico para el análisis de series de tiempo identifica cuatro componentes:

TENDENCIA (T).- El movimiento general a largo plazo de los valores de la serie de tiempo (Y) sobre un extenso periodo de años.



Componentes o factores de una serie temporal o cronológica.

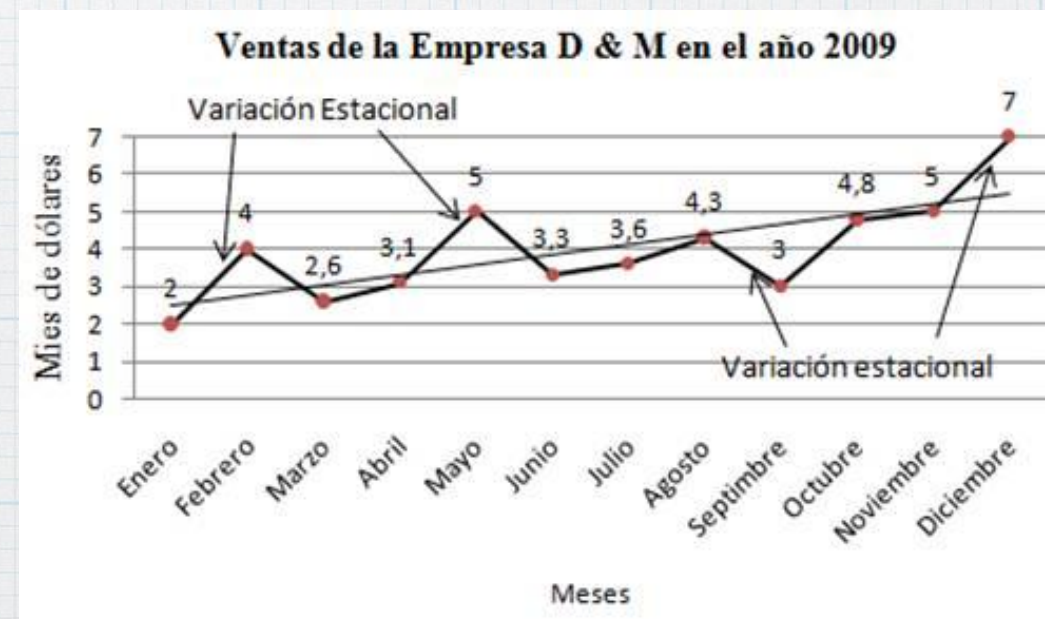
FLUCTUACIONES CÍCLICAS (C).- Movimientos ascendentes y descendentes respecto de las tendencias recurrentes, con una duración de varios años.

Un ejemplo de este tipo de variación son los ciclos comerciales cuyos períodos recurrentes dependen de la prosperidad, recesión, depresión y recuperación, las cuales no dependen de factores como el clima o las costumbres sociales.



Componentes o factores de una serie temporal o cronológica.

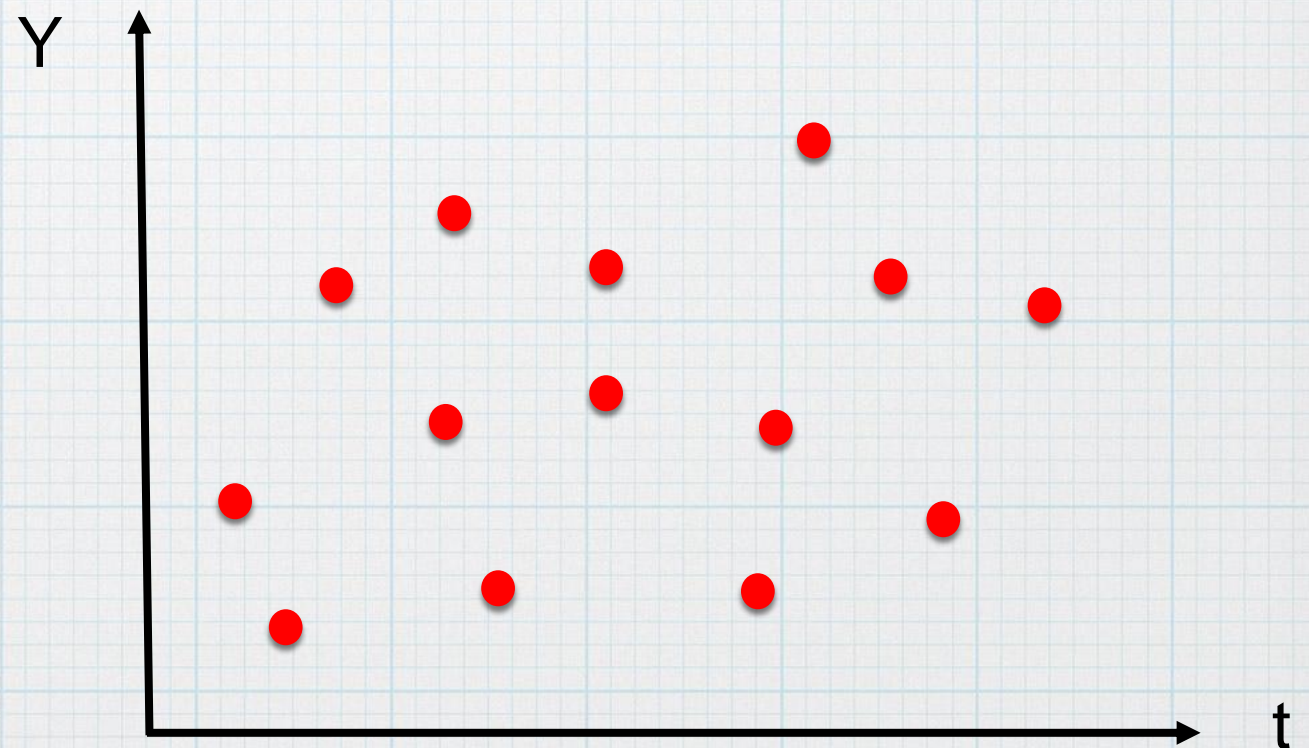
VARIACIONES ESTACIONALES (E).- Movimientos ascendentes y descendentes respecto de la tendencia que se consuman en el término de un año y se repiten anualmente, estas variaciones suelen identificarse con base en datos mensuales o trimestrales.



Componentes o factores de una serie temporal o cronológica.

VARIACIONES IRREGULARES (I).- Las variaciones erráticas respecto de la tendencia que no puedan atribuirse a las influencias cíclicas o estacionales.

Esta se debe a factores a corto plazo, imprevisibles y no recurrentes que afectan a la serie de tiempo



PRONÓSTICOS BASADOS EN PROMEDIOS MÓVILES

El promedio móvil sirve para pronosticar valores de datos del siguiente periodo de la serie de tiempo, pero no los datos de periodos mas distantes a futuro.

Sirve más bien para pronosticar cuando en los datos no está presenta la influencia de una tendencia, cíclica o estacional, situación improbable.

Este procedimiento sirve para promediar el componente irregular de los datos mas recientes de una serie de tiempo.

PRONÓSTICOS BASADOS EN PROMEDIOS MÓVILES

Es el promedio de los n valores de datos más recientes de una serie de tiempo. Este procedimiento se expresa como:

$$PM = \frac{\sum n \text{ valores mas recientes}}{n}$$

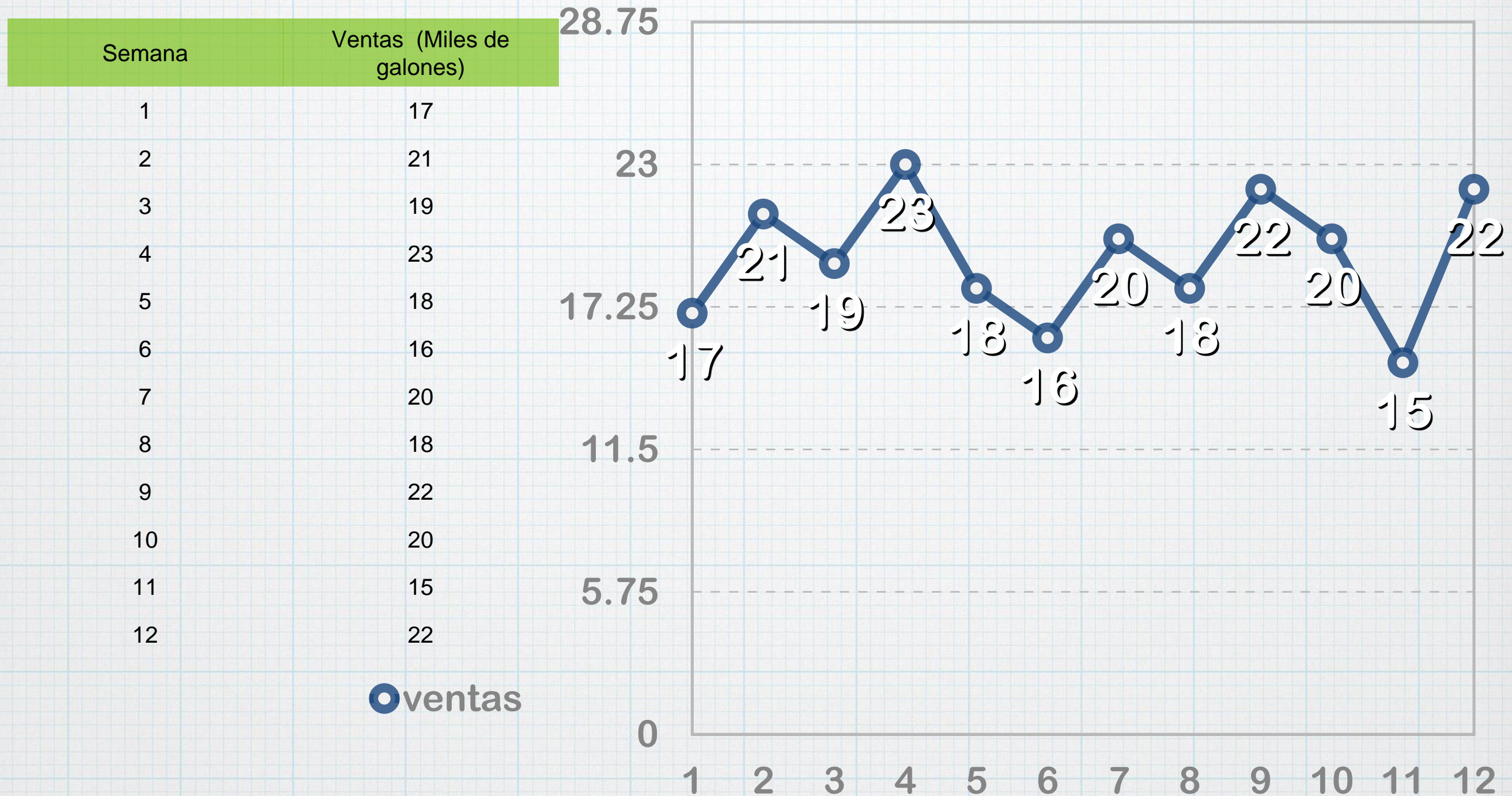
A medida de que se dispone del nuevo valor de un dato de una serie de tiempo, la nueva observación reemplaza a la antigua en la serie de n valores como base para determinar el nuevo promedio, lo que explica que se llame promedio móvil.

Ejemplo: Los siguientes datos muestran el número de galones de gasolina vendidos por un distribuidor en las últimas 12 semanas.

Datos de la serie de tiempo de las ventas de gasolina

Semana	Ventas (Miles de galones)
1	17
2	21
3	19
4	23
5	18
6	16
7	20
8	18
9	22
10	20
11	15
12	22

Datos de la serie de tiempo de las ventas de gasolina



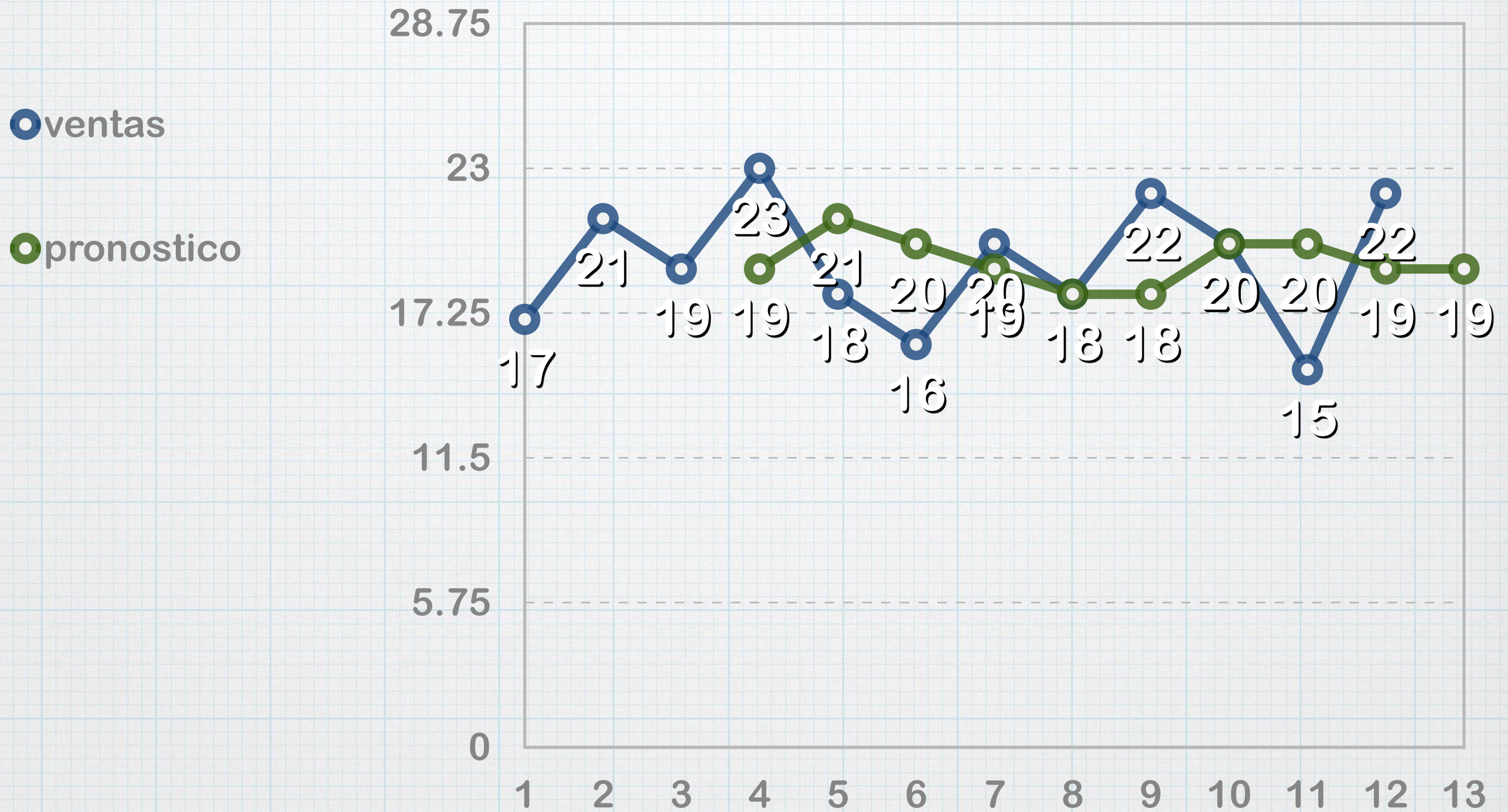
Hacer pronósticos por los métodos de promedios móviles y de suavización para la semana 13

Para utilizar promedios móviles ponderados, utilizaremos un promedio móvil de 3 semanas, para $n = 3$

Pronóstico de la i-ésima semana con Promedios móviles para 3 años
$(17+21+19)/3 = 19$
$(21+19+23)/3 = 21$
$(19+23+18)/3 = 20$
$(23+18+16)/3 = 19$

Semana	Ventas (Miles de galones)	Pronóstico, promedio movil	Error de pronóstico al cuadrado
1	17		
2	21		
3	19		
4	23	19	23
5	18	21	16
6	16	20	9
7	20	19	16
8	18	18	1
9	22	18	0
10	20	20	16
11	15	20	25
12	22	19	9
13	?	19	

Datos de la serie de tiempo de las ventas de gasolina con pronósticos



ERROR DE PRONÓSTICO

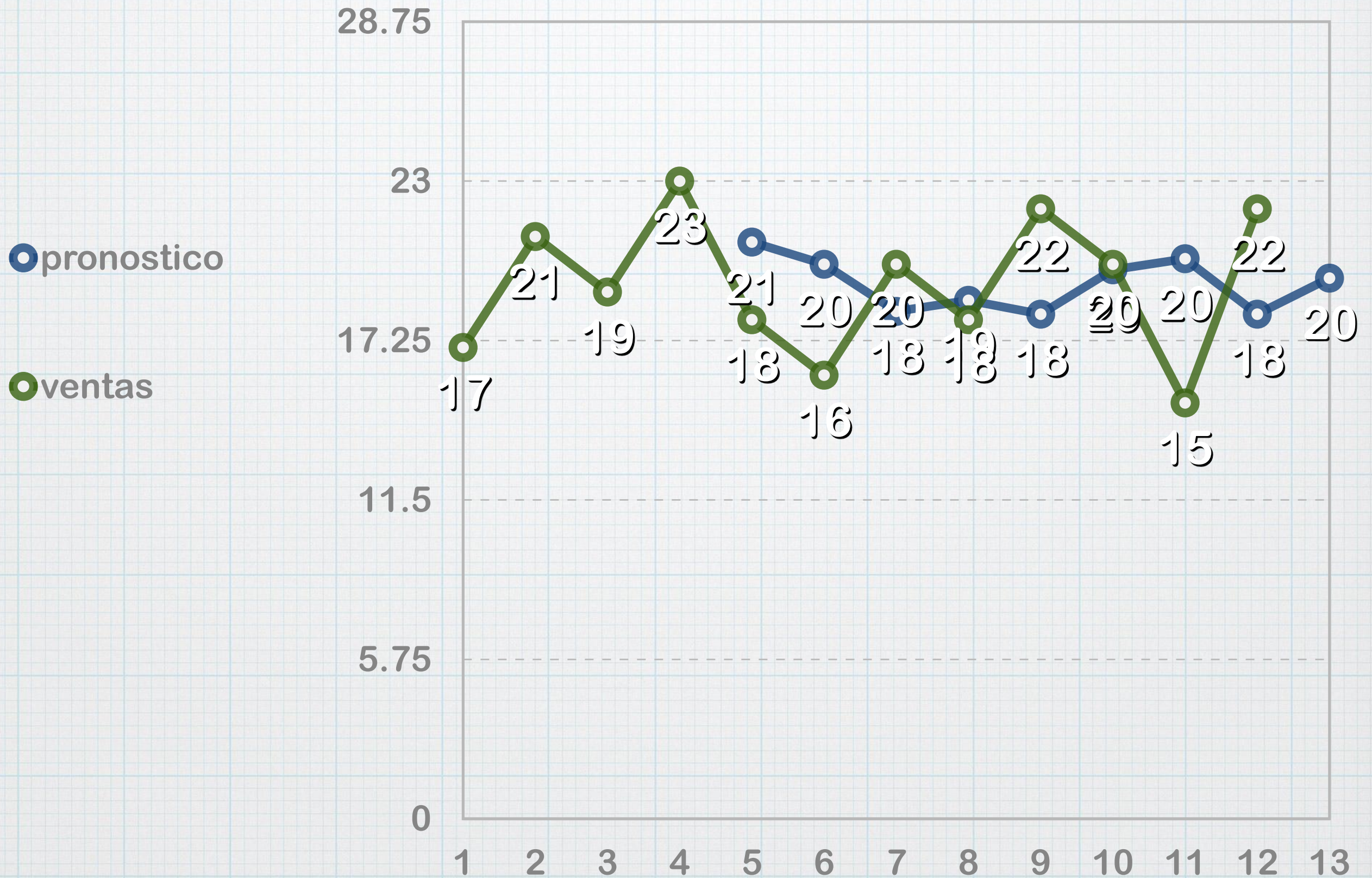
Es una consideración de importancia al seleccionar el método de pronóstico. Debemos seleccionar aquel método que produzca que el promedio de la suma de los errores al cuadrado sea mínimo.

$$\begin{aligned} \text{Promedio de la suma de los errores al cuadrado} \\ = 92 / 9 = 10.22 \end{aligned}$$

$$\text{MSE} = 10.22$$

Datos de la serie de tiempo de las ventas de gasolina

Con pronósticos para n = 4



Promedios móviles ponderados

El uso de éste método, se utilizará la primera parte del ejemplo anterior de la venta de gasolina.

El método consiste en asignar un factor de ponderación distinto para cada dato.

Generalmente, a la observación o dato más reciente a partir del que se quiere hacer el pronóstico, se le asigna el mayor peso, y este peso disminuye en los valores de datos más antiguos. En este caso, para pronosticar las ventas de la cuarta semana, el cálculo se realizaría de la siguiente manera:

$$\text{pronóstico para la cuarta semana} = \frac{1}{6}(17) + \frac{2}{6}(21) + \frac{3}{6}(19) = 19.33 \text{ galones}$$

Promedios móviles ponderados

Para los datos del ejemplo anterior tenemos:

Semana	Valor de la serie de tiempo (miles de galones)	Pronóstico de la i-ésima semana con Promedios móviles para 3 años
1	17	
2	21	
3	19	
4	23	19.33
5	18	21.33
6	16	19.83
7	20	17.83
8	18	18.33
9	22	18.33
10	20	20.33
11	15	20.33
12	22	

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL

Es un método de pronóstico basado en el uso de promedios móviles ponderados, no son promedios en los que se ponderan por igual los valores de datos precedentes, la base de ponderación es exponencial, por lo que se concede la mayor ponderación al valor correspondiente al periodo inmediatamente anterior al periodo de pronóstico y las ponderaciones decrecen exponencialmente para los valores de datos de periodos anteriores.

El siguiente modelo sirve para representar la determinación de ponderaciones exponencialmente decrecientes.

Sea α una constante de suavización.

Para hacer pronósticos, inicialmente se requiere de un valor “semilla”

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL

El modelo matemático de suavización exponencial es:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha(Y_t - \hat{Y}_t)$$

Donde:

\hat{Y}_{t+1} = Pronóstico para el siguiente periodo

\hat{Y}_t = Pronóstico para el periodo más reciente

α = Constante de suavización ($0 \leq \alpha \leq 1$)

Y_t = Valor real para el periodo más reciente

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL

La suavización exponencial solo puede usarse para pronosticar el valor para el periodo siguiente en la serie de tiempo, no para varios periodos futuros.

Cuanto más cerca de 1.0 se fije el valor de la constante de suavización, tanto más dependerá el pronóstico de los resultados más recientes.

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL

Si la serie de tiempo contiene una variabilidad aleatoria sustancial, se preferirá un valor pequeño como constante de suavización, mientras que para una variabilidad pequeña, valores más elevados de α tienen la ventaja de ajustar con rapidez.

Escogeremos el valor de α que minimice al MSE.

Ejemplo: considere los datos del ejemplo anterior para hacer pronósticos hasta la semana 13. Utilizar una constante de suavización de $\alpha = 0.2$

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL

Semana (t)	galores/semana Valor (Yi)	Pronóstico Ft
1	17	$F_1 = Y_1 = 17.00$
2	21	$F_2 = F_1 = 17.00$
3	19	$F_3 = \alpha Y_2 + (1-\alpha)F_2 = 17.80$
4	23	$F_4 = \alpha Y_3 + (1-\alpha)F_3 = 18.04$
5	18	$F_5 = \alpha Y_4 + (1-\alpha)F_4 = 19.03$
6	16	$F_6 = \alpha Y_5 + (1-\alpha)F_5 = 18.83$
7	20	$F_7 = \alpha Y_6 + (1-\alpha)F_6 = 18.26$
8	18	$F_8 = \alpha Y_7 + (1-\alpha)F_7 = 18.61$
9	22	$F_9 = \alpha Y_8 + (1-\alpha)F_8 = 18.49$
10	20	$F_{10} = \alpha Y_9 + (1-\alpha)F_9 = 19.19$
11	15	$F_{11} = \alpha Y_{10} + (1-\alpha)F_{10} = 19.35$
12	22	$F_{12} = \alpha Y_{11} + (1-\alpha)F_{11} = 18.48$

OTROS MÉTODOS DE PRONÓSTICO DE SERIES DE TIEMPO

Métodos de suavización más complejos incorporan más influencias y permiten obtener pronósticos para varios periodos futuros.

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL LINEAL

Usa una ecuación de tendencia lineal basada en los datos de la serie de tiempo. Sin embargo a diferencia de la ecuación de tendencia simple, los valores de la serie se ponderan exponencialmente con base a una constante de suavización que puede variar de 0 a 1.0

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL DE HOLT

Usa una ecuación de tendencia lineal basada en el empleo de dos constantes de suavización: una para estimar el nivel actual de los valores de la serie de tiempo y otra para estimar la pendiente.

OTROS MÉTODOS DE PRONÓSTICO DE SERIES DE TIEMPO

SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL DE WINTER

Incorpora influencias estacionales en el pronóstico. En este caso se hace uso de tres constantes de suavización: una para estimar el nivel actual de los valores de la serie de tiempo, la segunda para estimar la pendiente de la línea de tendencia y la tercera para estimar el factor estacional por emplear como multiplicador.

MODELOS AUTOREGRESIVOS INTEGRADOS Y DE PROMEDIO MÓVIL (ARIMA)

Son una categoría de métodos de pronóstico en los que valores previamente observados en la serie de tiempo se usan como variables independientes en modelos de regresión. El método de más amplio uso de ésta categoría es el Método de Box – Jenkins. Estos métodos hacen uso explícito de la existencia de autocorrelación (correlación de una variable rezagada uno o más periodos, consigo mismo) en las series de tiempo.

Ejercicio: El comportamiento de la precipitación y la humedad relativa durante el año 2014, para una Cuenca en la costa del país se muestra en la siguiente tabla:

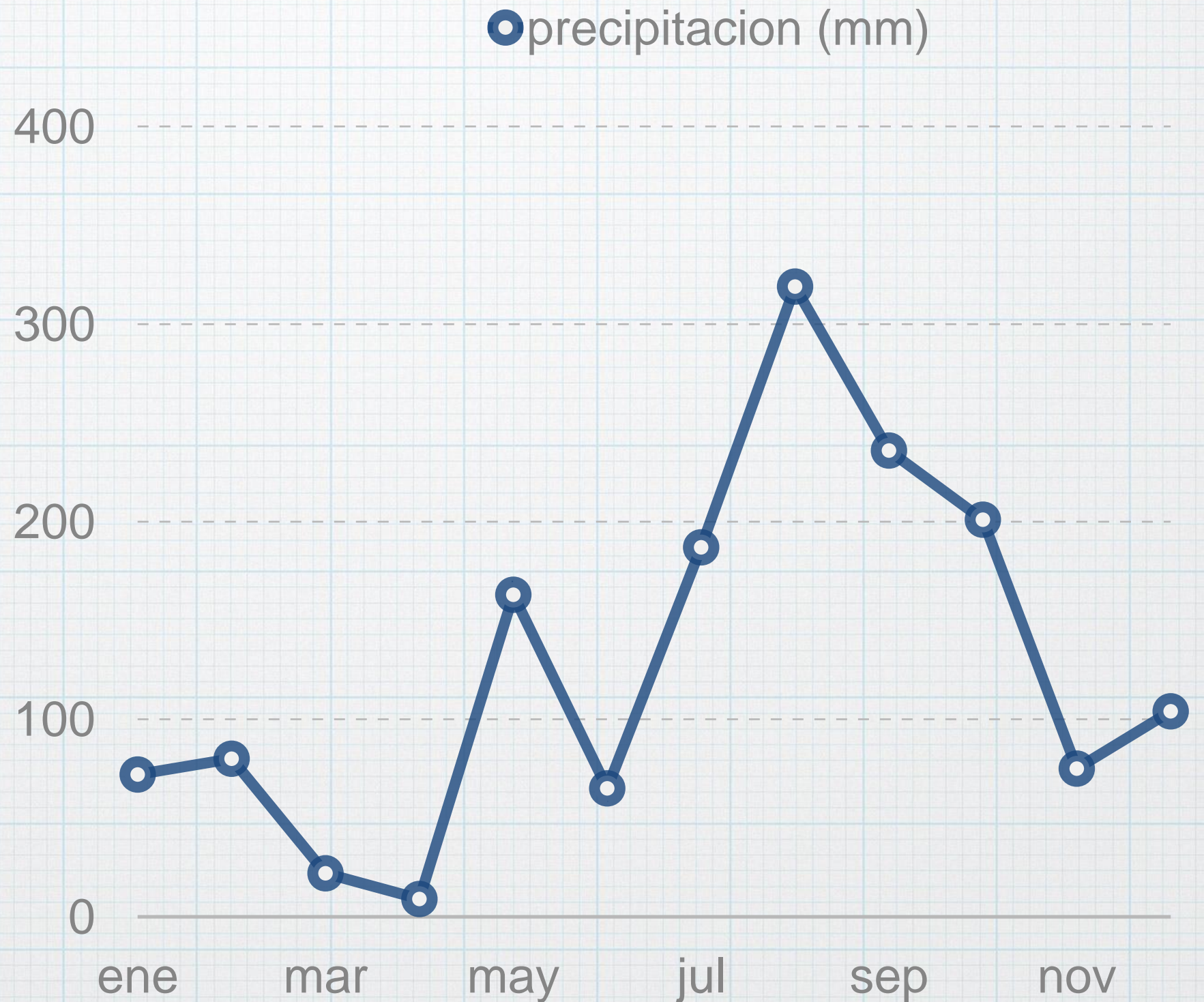
Meses	Precipitación (mm)	Humedad relativa (%)
Ene	72	94
Feb	80	91
Mar	22	86
Abr	9	90
May	163	95
Jun	65	88
Jul	187	99
Ago	319	95
Sep	236	90
Oct	201	93
Nov	75	87
Dic	104	90

Aplicar los métodos de promedios móviles para tener gráficas mas suaves y hacer pronósticos para el siguiente periodo (enero, 2015)

Grafica Precipitación

Meses	Precipitación (mm)
-------	--------------------

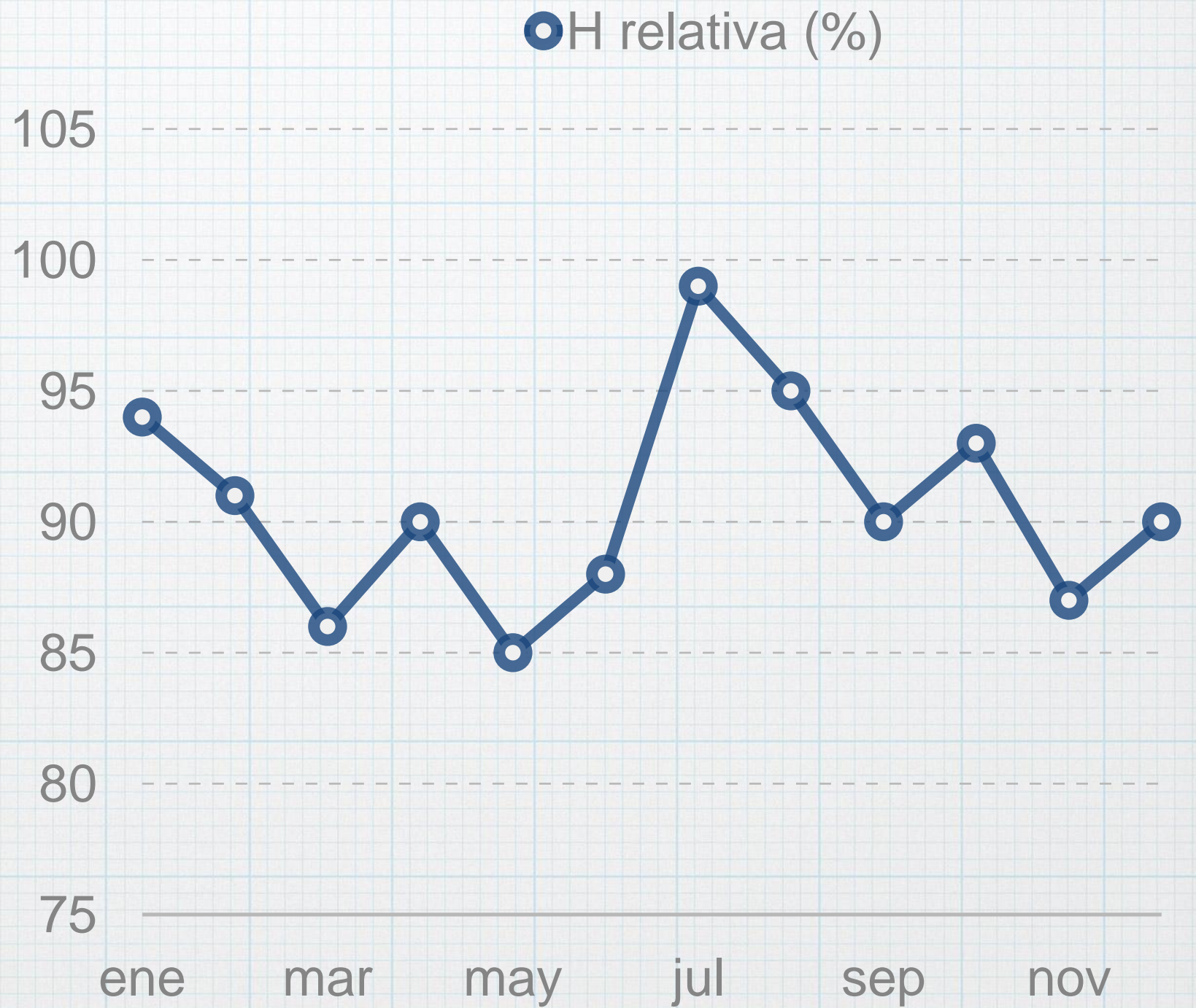
Ene	72
Feb	80
Mar	22
Abr	9
May	163
Jun	65
Jul	187
Ago	319
Sep	236
Oct	201
Nov	75
Dic	104



Grafica Humedad Relativa

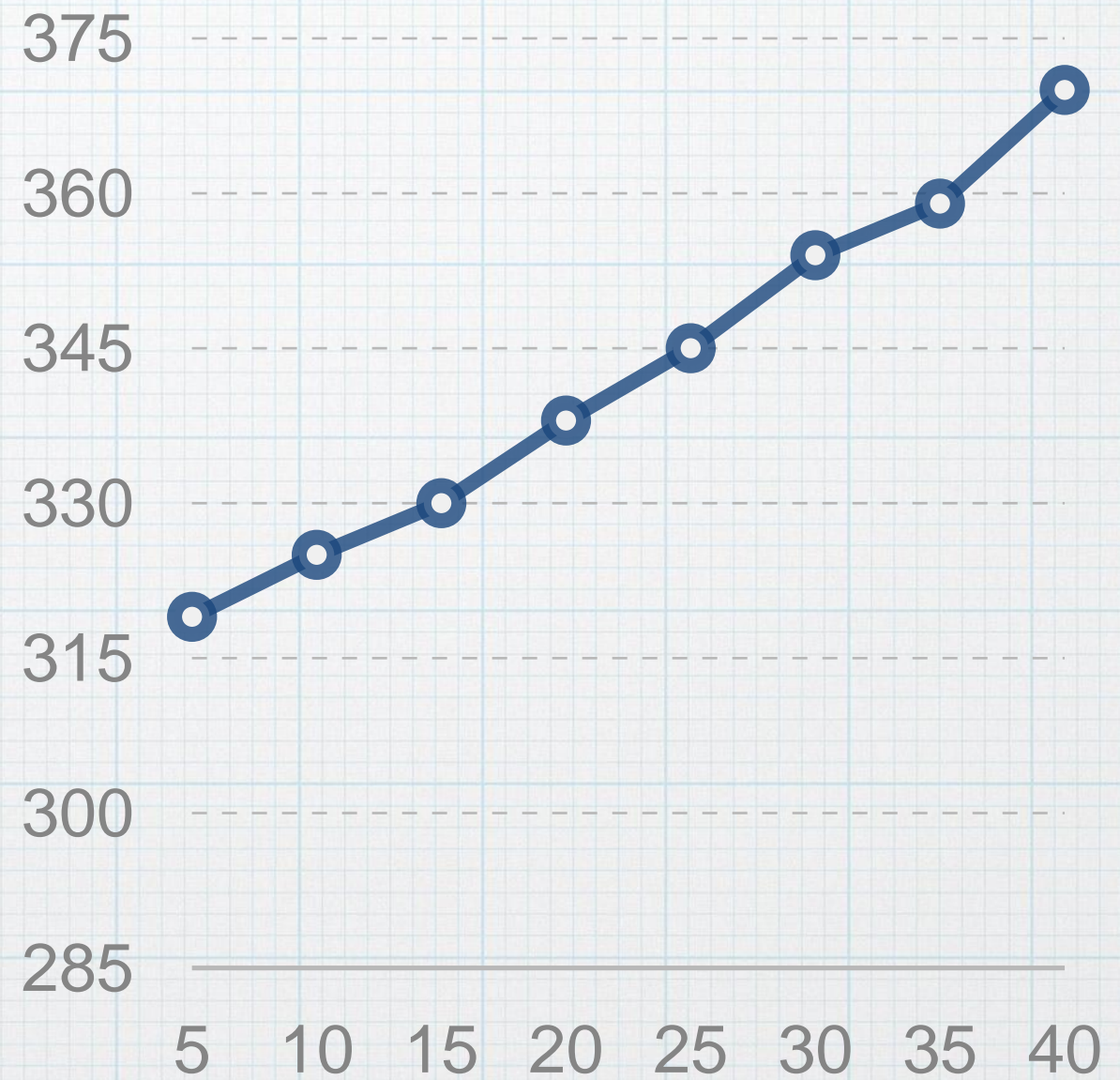
Meses	Humedad relativa (%)
-------	----------------------

Ene	94
Feb	91
Mar	86
Abr	90
May	85
Jun	88
Jul	99
Ago	95
Sep	90
Oct	93
Nov	87
Dic	90



Ejercicio: El observatorio Mauna Loa, Hawai, registra la concentración de dióxido de carbono (en partes por millón) en la atmósfera terrestre. En la tabla se muestran los registros correspondientes al mes de enero de varios años

Año	CO2 (partes por millon)
15	319
10	325
15	330
20	338
25	345
30	354
35	359
40	370



MUCHAS GRACIAS

REFERENCIAS

Hillier, F. S. Liberman G. J., 2010. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México

López, J.F., Vértiz, G., 2014. *Investigación de Operaciones*. Patria. México

Prawda, J., 2007. *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Vol. 1 y 2*. México

Render, B. Stair, R., 2006. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. Pearson. México

Taha, H. A., 2012. *Investigación de Operaciones*, 9ª edición, México D.F.

Apuntes de Estadística II