Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Economía

La Derivada

MONOGRAFÍA

Para la Unidad de Aprendizaje:

Fundamento de Matemáticas 2

Yeitza Marina Valdespino Jiménez

Índice

Planteamiento

La derivada considerada como el eje principal del cálculo diferencial, tiene su origen en la Antigua Grecia, y surge como resultado de cuatro problemas fundamentales; el de la velocidad, el del área bajo la curva, el de la recta tangente y el de máximos y mínimos. A través del tiempo ha sido tema principal de diversas investigaciones que han puesto en tela de juicio lo que hasta el momento ha definido a la derivada.

Actualmente, a los alumnos preuniversitarios se les imparte lo que se denomina Metamatemática Elemental, caracterizada principalmente por estudiar procesos finitos. A los alumnos universitarios se les imparte Matemáticas Superiores, que entre otras cosas estudia los procesos infinitos. Pero para lograr la transición de la matemática elemental a la superior es necesario el estudio del Calculo Diferencial e Integral en los últimos años del estudiante preuniversitario. El estudio de dicha asignatura es necesaria para los alumnos que se perfilan a estudios universitarios relacionados con las ingenierías, ciencias exactas y ciencias económicas.

El estudio del Calculo Diferencial en alumnos preuniversitarios representa la obtención de los elementos básicos para facilitar su inserción en las matemáticas superiores, y así ampliar y profundizar en los temas que ya conoce.

Los estudiantes universitarios deben centrar sus estudios del Calculo Diferencial principalmente en la conceptualización de los procesos del límite aplicados a las derivadas y en la resolución de problemas donde se aplican las derivadas, ya que el dominio de los algoritmos algebraicos para calcular derivadas y el pensamiento lógico, los adquieren el su curso de cálculo preuniversitario.

A la mayoría de los estudiantes se les dificulta asociar ideas claves del cálculo en la solución de problemas de variación, así como la comprensión de los algoritmos realizados en soluciones de problemas cuando se realiza mediante fórmulas algebraicas, por lo tanto es necesario que los alumnos conozcan cada uno de los elementos de la deriva, su aplicación y sus variantes.

Introducción

Nuestro mundo se caracteriza por el cambio constante de sus componentes, esto debido a que la variación de algo influye en que otras cantidades también cambien. Es decir, si aumenta el número de mujeres embarazadas, el índice de natalidad también aumentará. Si el mercado decide aumentar el precio de las manzanas entonces es posible que disminuya la demanda de dicho producto. Si un ser humano reduce la cantidad de agua que ingiere al día, probablemente sea más propenso a sufrir una enfermedad renal.

Lo anterior muestra la importancia de realizar estudios que demuestren cual es la relación que existe en los cambios que suceden. La investigación pretende mostrar la derivada como un elemento del análisis matemático que a través de análisis facilite su uso para la solución de problemas tanto económicos, como matemáticos, químicos, etc.

Por ello en el Capítulo I se definirá a la derivada y a cada uno de sus elementos, el concepto de límite y su importancia en la funciones, además se entenderá a la derivada como una razón de cambio. En el Capítulo II se conocerán cada una de las reglas de derivación, así como los tipos de derivadas que se encuentran en los distintos problemas matemáticos. Y por último en el Capítulo III se abordaran algunas aplicaciones de la derivada para la obtención de elementos, como máximos y mínimos, para el análisis de las funciones, y la importancia de la derivada en la construcción de curvas y de los puntos de inflexión.

Objetivos

- Conocer las herramientas y conceptos del cálculo diferencial, así como su relación con las distintas ramas de las matemáticas.
- Entender la definición de límite como concepto fundamental en el cálculo diferencial.
- Analizar cada una de las reglas de derivación.
- Desarrollar un pensamiento lógico matemático para aplicarlo en la solución de problemas económicos, a través del cálculo diferencial.

Repaso de ecuaciones

1. Los datos de IUS Census Bureau indican que el precio promedio (p) de roiters que amplifica la señal de internet se puede expresar con una función lineal de los aparatos vendidos (N) en miles, además conforme N aumenta en 1000 unidades p cae 10.40 dólares cuando se venden 6485 aparatos (en miles), el precio promedio por aparato es de 504.39 dólares. Escriba la ecuación de la recta determinada para p en función de N.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{514.79 - 504.39}{5485 - 6485} = -0.0104$$

$$\mathrm{p} - p_1 = -0.0104(N - N_1)$$

$$p - 504.34 = -0.0104(N - 6485)$$

$$p = -0.0104N + 571.78$$

2. La ecuación $y = 352.2x + 2703$ expresa el POB de Estados Unidos de forma lineal en miles de millones de dólares con una función del número de años que han pasado desde 1980, x. Encuentra la pendiente y el intersecto de “y”, interpreta cada una de las partes de esta función.

De la formula $y = mx + b$

$$m = 352.2$$
$$y = 2703$$

$El\ PIB\ cambia\ a\ una\ tasa\ de\ 352.2\ mmd$
$por\ año\ a\ partir\ de\ 1980.$
$En\ 1980\ el\ PIB\ era\ de\ 2703\ mmd.$

a. ¿Qué nos dice la función sobre la manera en la que el PIB va cambiando?

$$y = 352.2(20) + 2703 = 9747$$

$$y = 352.2(18) + 2703 = 9042.6$$

$$y = 352.2(16) + 2703 = 8338.2$$

$$y = 352.2(12) + 2703 = 4464$$

$A\ partir\ de\ 1980\ el\ PIB\ va\ en\ aumento$
$con\ una\ tasa\ promedio\ de\ 352.2\ mmd$

3. La gerencia de una empresa de telecomunicaciones tiene costos fijos (costos a cero salidas) de 3000 dólares diarios y los costos totales cambian a 43000 dólares diarios en el momento que hay 100 salidas de camionetas de servicio. Determina la tasa de cambio asociados a los cero y cien salidas, es decir la recta que pasa por $(0, 3000)$ y $(100, 43000)$.

Tasa de cambio: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\boxed{Varía\ \$400\ cada\ 100\ salidas.}$

$$m = \frac{43000 - 3000}{100 - 0} = 400$$

a. Encuentra la recta que relaciona las salidas con el costo.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

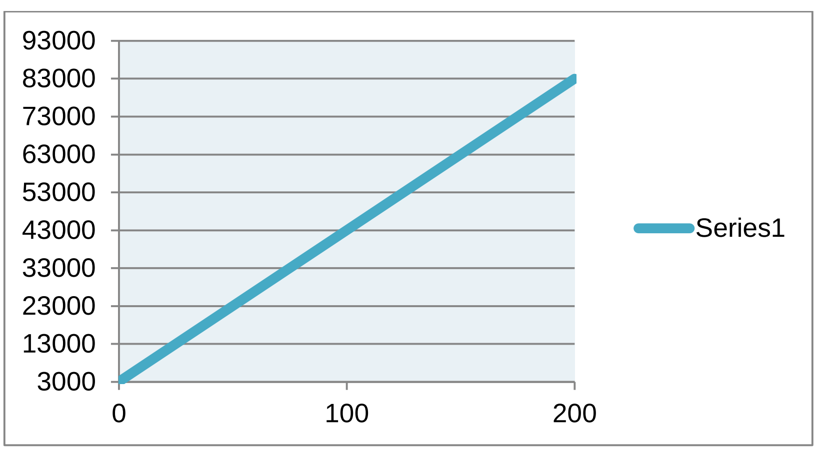
$$y - 3000 = 400(x - 0)$$

$$y - 3000 = 400x$$

$$y = 400x + 3000$$

La función de la recta que relaciona las salidas con el costo es: $y = 400x + 3000$

b. Construye la gráfica para $0 \leq x \leq 200$



c. Ahora la administración desea saber si varía la tasa de cambio y la ecuación cuando los costos fijos son de 2500 dólares diarios y los costos totales de 34500 este último para una salida de 80 camionetas.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{34500-2500}{80-0} = 400$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \textit{No varía la tasa de cambio} \\ \textit{a las } 80 \textit{ salidas, continua} \\ \textit{siendo de } 400 \textit{ dólares.} \end{array}}$$

Si C (es capital) se invierte una tasa de interés (i), entonces la cantidad M (monto) que se obtiene después de n (tiempo) se calcula dela siguiente manera

$$M = C(n)(i) + 1.$$

4. Si el capital es de 100 (miles) y se invierte a una i del 6%. ¿Cuánto ascenderá el capital de los 100 dólares (en miles) después de 5 años y después de 20?

$M = 100$
$i = 6\% = 0.06$

$n = 5$

$M = 100[5(0.06) + 1]$
$M = 100[1.3]$
$M = 130$
$A\ 5\ \textit{años el capital aumenta a}\ \$130 mil$

$n = 20$

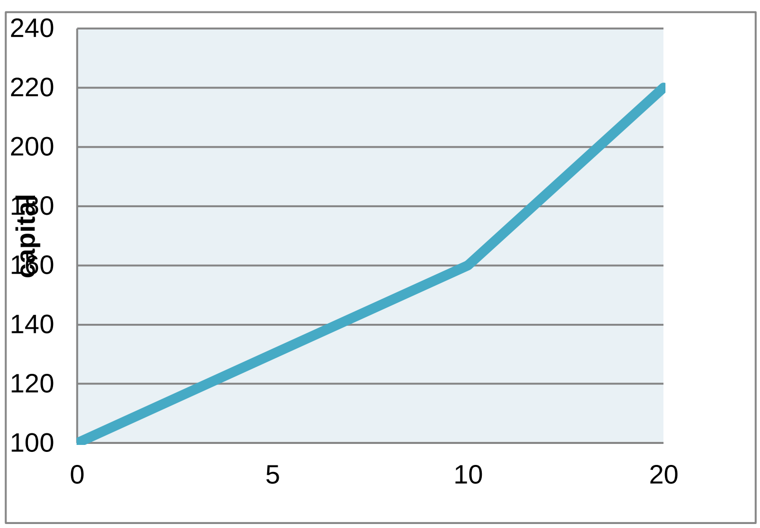
$M = 100[20(0.06) + 1]$
$M = 100[2.2]$
$M = 220$
$A\ 20\ \textit{años el capital aumenta a}\ \$220\ mil$

a. Construya la ecuación y la gráfica para el siguiente periodo de tiempo $0 \leq n \leq 20$

$M = 100[n(0.06) + 1]$

$M = 100(0.06n + 1)$

$M = 6n + 100$



b. ¿Cuál es la tasa de cambio?, y explica que significa.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad m = \frac{220-130}{20-5} = 6$

La tasa de cambio varía 6000 dólares entre 5 y 20 años.

5. La compañía Henkel fabrica sus productos con un costo por unidad de 4 dólares y los vende a 10 dólares cada uno, si los costos fijos son de 12000 dólares al mes, determina lo siguiente:

NOTA

El equilibrio de la empresa

$\mathrm{P(x) = R(x) - C(x)}$ $\quad \mathrm{C(x) = Cx + F}$ $\quad \mathrm{R(x) = px}$

$\mathrm{C(x) = Cx + F}$ $\quad \mathrm{R(x) = px}$

$\mathrm{C(x) = 4x + 12000}$ $\quad \mathrm{R(x) = 10x}$

$\mathrm{R(x) = C(x)}$

$\mathrm{10x = 4x + 12000}$

$\mathrm{6x = 12000}$

$\mathrm{x = 2000}$

Con 2000 unidades de producción se tiene el equilibrio de la empresa

c. ¿Cuál es la perdida de la empresa si produce 1500 unidades por mes?

$\mathrm{P(1500) = 10x - (4x + 12000)}$

$\mathrm{= 6x - 12000)}$

$\mathrm{P(1500) = 6(1500) - 12000}$

$= -3000$

Se tiene una pérdida de 3000 dólares al mes, si se producen 1500 unidades.

d. Tiene una ganancia o pérdida si produce 3000 unidades

$$\mathrm{P}(1500) = 10\mathrm{x} - (4\mathrm{x} + 12000)$$

$$= 6\mathrm{x} - 12000)$$

$$\mathrm{P}(1500) = 6(3000) - 12000$$

$$= 6000$$

$Se\ tiene\ una\ ganancia\ de\ 6000\ dólares\ al\ mes, si\ se\ producen\ 3000\ unidades.$

e. ¿Cuántas unidades debe reproducir o vender la empresa para obtener una ganancia mínima de 9000 dólares?

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) = 9000$$

$$9000 = 6x - 12000$$

$$21000 = 6x$$

$$3500 = x$$

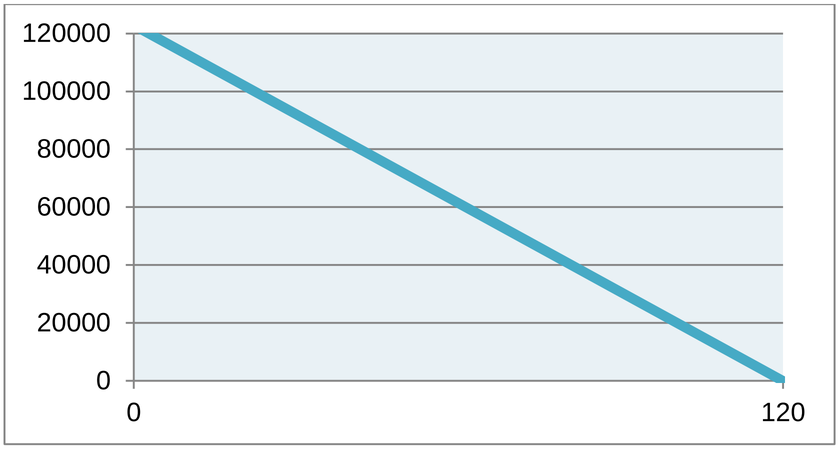
$Se\ deben\ producir\ 3500\ unidades\ para\ obtener\ una\ ganancia\ de\ 9000\ dolares.$

6. Una propiedad comercial que comprara en 122880 dólares y se deprecia en un periodo de 10 años. Su valor "y" se relaciona con el número de servicio "x" por medio de la siguiente ecuación $4096x + 4y = 491520$.

a. Grafique y explique la tasa de cambio de valor comercial.

$$m = \frac{-245760 + 122880}{360 - 240} = -1024$$

b. Hubo una pérdida de 1024 dólares en la depreciación de 20 a 30 años.



7. Con que tasa de interés se realizó una operación crediticia que se liquida con un pago a 10 meses con $\$42350$ suponiendo que el crédito fue por $\$37644.44$.

$M = C(n)(i) + 1$

$42350 = 37644.44(0.83i) + 1$

$42350 = 31244.88i + 37644.44$

$4705.56 = 31244.88i$ $\qquad 0.15 = i$

La tasa de interés es del 15% mensual.

8. Determine la función inversa de:

a. $I = 130 + 0.25y$

$$-130 + \mathrm{I} = 0.25\mathrm{y}$$

$$\frac{\mathrm{I} - 130}{0.25} = y$$

$$4\mathrm{I} - 520 = \mathrm{y}$$

b. Q_d= 75-15p

$$-75 + Q_D = -15p$$

$$\frac{Q_D - 75}{-15} = p$$

$$5 - \frac{Q_D}{15} = p$$

9. El departamento de investigación de mercados de una empresa recomienda a la gerencia que la compañía fabrique y venda un producto innovador, después de amplias investigaciones el departamento gerencial apoyo la recomendación bajo el siguiente esquema: $Q_d = x = f(p) = 6000 - 30p$ donde x es el número de unidades que los distribuidores compraran probablemente cada mes a precio por unidad, se nota que a medida que el precio sube la venta de unidades disminuye. Del departamento de financias se obtuvo la siguiente recomendación de $C = g(x) = 72000 + 60x$ donde el costo de manufactura y costos generales (fijos) son de 72000 y 60 dólares el costo de cada unidad.
   a. Calcule los puntos de equilibrio entre costo e ingreso.

$C(x) = 72000 + 60(6000 - 30p)$ $\qquad R(p) = px$

$C(p) = 72000 + 360000 - 1800p$ $\qquad R(p) = p(6000 - 30p)$

$C(p) = 432000 - 1800p$ $\qquad R(p) = 6000p - 30p^2$

$C(p) = R(p)$

$432000 - 1800p = 6000p - 30p^2$

$432000 - 7800p + 30p^2 = 0$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$p = \frac{-(-7800) \pm \sqrt{(-7800)^2 - 4(30)(432000)}}{2(30)}$$

$$p = \frac{7800 \pm \sqrt{60840000 - 51840000}}{60} = \frac{7800 \pm \sqrt{9000000}}{60}$$

$p_1 = \frac{7800+3000}{60} = 80 \qquad p_2 = \frac{7800-3000}{60} = 180$

$x_1 = 6000 - 30(80) = 3600$ (3200,80)

$x_2 = 6000 - 30(180) = 600$ (600,180)

Equilibrio:

$P = 0 \qquad C = 0$

$C = 432000 - 1800(0)$ $\qquad$ $432000 - 1800p = 0$

$C = 432000$ $\qquad$ $p = \frac{432000}{1800} = 240$

b. Obtenga la utilidad y a qué precio se obtendrá la misma.

$P(x) = R(x) - C(x)$

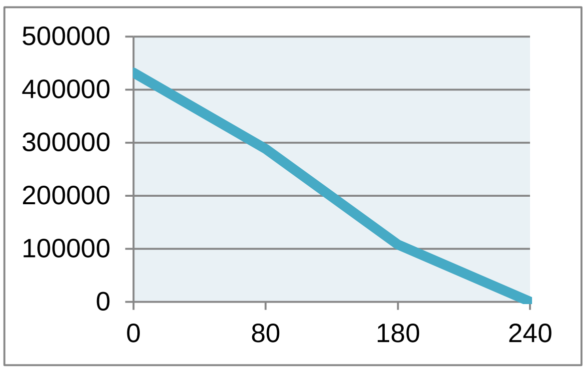
$P(x) = 6000p - 30p^2 - 432000 + 1800p$

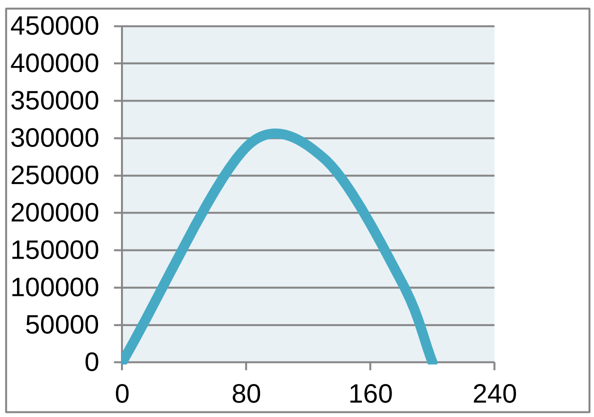
$P(x) = -30p^2 + 7800p - 432000$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-7800}{2(-30)} = 130\ precio\ máximo$$

$-30(130)^2 + 7800(130) - 432000 = 75000\ utilidad$

c. Grafique y corrobore sus respuestas anteriores.





10. La función $\beta = -1.056785714t^2 + 8.259285714t + 74.07142857$ describe el saldo del fondo de fideicomiso de seguridad β y asociados en miles de millones de dólares donde t es el número de años que han pasado desde el 2000 para fines de planeación es importante saber cuándo será 0 el saldo del fondo.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(-8.259285714) \pm \sqrt{(-8.259285714)^2 - 4(1.056785714)(-74.0714285)}}{2(1.056785714)}$$

$$t = \frac{8.259285714 \pm \sqrt{381.32631}}{2.11357143}$$

$$t_1 = \frac{8.259285714 + 19.5275782}{2.11357143} = 13.14687715$$

$$t_2 = \frac{8.259285714 - 19.5275782}{2.11357143} = -5.331398947$$

$$\beta_{t1} = -1.056785714(13.14687715)^2 + 8.259285714(13.14687715) + 74.07142857 = 0.00004336$$

$$\beta_{t2} = -1.056785714(-5.331398947)^2 + 8.259285714(-5.331398947) + 74.07142857 = 0.00000006$$

$$En\ el\ 2014\ el\ saldo\ del\ fondo\ será\ 0.$$

Capítulo 1. La derivada

1.1 Cálculo de límites de funciones

Si se tiene la expresión $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$ si la evaluamos veríamos que para x=1 se volvería indefinida.

$\frac{x^2-1}{x-1} = 0 \nexists$ $\quad x \neq 1$ $\quad \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$ Denominador x≠0

0.9	0.099	0.9999	1	1.1	1.01	1.001
1.9	1.99	1.9999	∄	2.001	2.01	2.1

El límite es una expresión que tiende a no existir. La continuidad significa ininterrumpido y es el nivel geométrico de la función no presenta vacío.

Una función es continua en el punto $x = c$

Si $f(c)$ existe: $f(c) = c^2$

El limite cuando $x \to c$ de $f(x) = f(c)$

Si el valor funcional para el límite es esa función, el límite $f(x) = L$ donde c y L son números reales.

Si el valor funcional de $f(x)$ está próximo al número real L cuando x se aproxima a c pero no es igual. Para caso práctico no se hacen tablas, sino que se hacen analíticamente.

Teoremas de los límites

$$\lim_{x\to a} k = k \qquad \lim_{x\to a} x = a \qquad \lim_{x\to a} kx = k^a \qquad \lim_{x\to a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

Ejemplos:

i. $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-4x-21} = \frac{x+3}{(x-7)(x+3)} = \frac{1}{x-7} = \frac{1}{-3-7} = -\frac{1}{10}$

ii. $\lim_{h\to 0} \frac{(7+h)^2-49}{h} = \frac{(7+h)(7+h)-49}{h} = \frac{49+7h+7h+h^2-49}{h} = \frac{h^2+14h}{h} = \frac{h(h+14)}{h} = 14$

iii. $\lim_{x\to -2} \left[\frac{10x}{2x^2+3x-2} - \frac{4}{x+2} + \frac{8}{2x-1}\right] = \frac{10x}{(x+2)(2x-1)} - \frac{4}{x+2} + \frac{8}{2x-1} = \frac{10x-8x+4+8x+16}{(x+2)(2x-1)} =$

$\frac{10x+20}{(x+2)(2x-1)} = \frac{10(x+2)}{(x+2)(2x-1)} = \frac{10}{2(-2)-1} = -2$

iv. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3-9x^5}{3x^5+4x^2-8} = \frac{\frac{5x^3}{x^5}-\frac{9x^5}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5}+\frac{4x^2}{x^5}-\frac{8}{x^5}} = \frac{\frac{5}{x^2}-9}{3+\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^5}} = \frac{\frac{5}{0}-9}{3+\frac{4}{0}-\frac{8}{0}} = -\frac{9}{3}$

v. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{3x-4}{8x^2+2x-2} = \frac{3(-1)-4}{8(-1)^2+2(-1)-2} = \frac{-7}{8-4} = -\frac{7}{4}$

vi. $\lim\limits_{x\to1}(x^3-8)(4x+1) = (1^3-8)(4(1)+1) = (-7)(5) = -35$

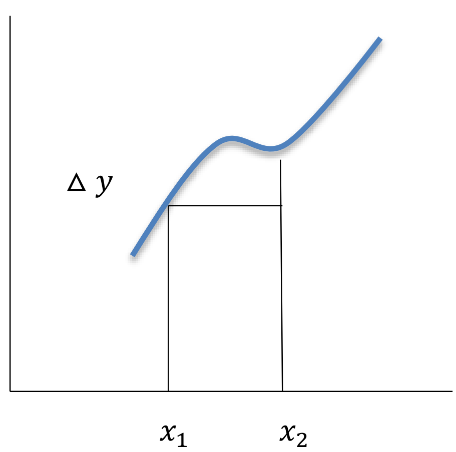
vii. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2} = \frac{x}{x(\sqrt{4+x})+2x} = \frac{1}{\sqrt{4}+0+2(0)} = \frac{1}{2}$

1.2 Derivadas de funciones algebraicas comunes

Incrementos y tangentes

Si una función definida $g = f(x)$ y la variable independiente x cambian de x_1 a x_2 entonces la variable dependiente cambiara de $g1 = f(x_1)$ a $g2 = f(x_2)$.
Estos cambios son llamados incrementos en x y y respectivamente y se presentan por $\triangle x$ y $\triangle y$

$\triangle y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)$



$x_2 = x_1 + \triangle x$

1. Dado $\frac{x^2}{2}$ para $x_1 = 1$ $x_2 = 2$

   Encuentra el $\triangle x$ el $\triangle y$, la variación de $\triangle = \frac{\triangle y}{\triangle x}$ y $\frac{f(x_1+\triangle x)-f(x_1)}{\triangle x}$

   $\triangle x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$

$$\triangle y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2} \qquad \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{f(1+2) - f(x_1)}{2} = \frac{f(3) - f(2)}{2} = \frac{\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}}{2} = 2$$

2. Dada la función $F = \frac{(x,y)}{y} = x^2 - 3x + 1$ obtener el incremento.

$$\triangle y = f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$= (x + \triangle x)^2 - 3(x + \triangle x) + 1$$

$$= x^2 + 2x \triangle x + \triangle x^2 - 3x - 3 \triangle x + 1 - x^2 + 3x - 1$$

$$= 2x \triangle x + \triangle x^2 - 3 \triangle x$$

$$\triangle y = \triangle x(2x + \triangle x - 3)$$

3. Determinar $\triangle = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dado F= $\frac{(x,y)}{y} = 3x^2 + 2x - 5$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = 3(x + \triangle x)^2 + 2(x + \triangle x) - 5$$

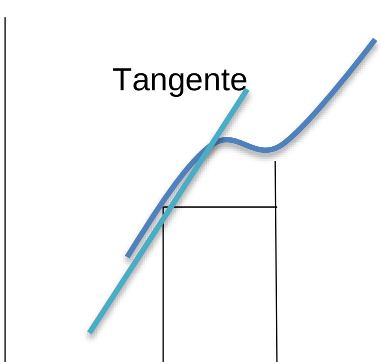
$$\frac{= 3x^2 + 6x \triangle x + 3 \triangle x^2 + 2x + 2 \triangle x - 5 - 3x^2 - 2x + 5}{\triangle x}$$

$$= \frac{6x \triangle x + 3 \triangle x^2 + 2 \triangle x}{\triangle x} = \frac{\triangle x(6x + 3 \triangle x + 2)}{\triangle x} = 6x + 3 \triangle x + 2$$

Recta tangente

Una secante es la recta que toca en dos puntos a la curva.

La tangente de la curva es la recta que solo toca un punto de la circunferencia.



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

x_1 x_2

Cuando el incremento de x tiende a cero $(\Delta x \to 0)$ $p_2$se aproxima a p_1 , se ve que el valor de las secantes se aproximan al valor del límite, cuando esto sucede la recta a cual se aproxima se llama tangente a la curva en $x_1, f(x_1)$

La pendiente del límite será de la tangente.

Ejemplo

1. Dado $f(x) = x^2$ encuentre la ecuación de la tangente para $x = 1$, dibuje la gráfica de $f(x)$, la tangente en 1 para $f(1)$ y la secante para $1, f(1)$ y $2, f(2)$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$$

$$= x^2 + 2x \Delta x + \Delta x^2$$

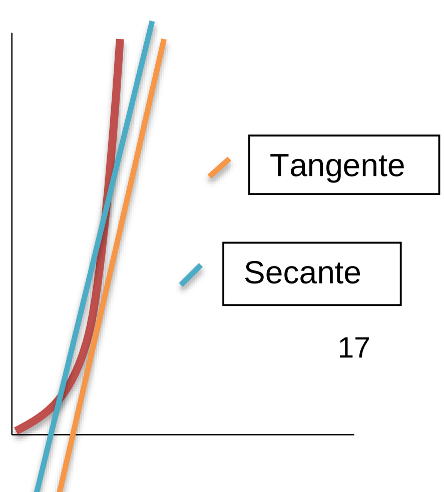
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = 2x + \Delta x \qquad x = 1 \;\; 2(1) + 0 = 2$$

$$m = 2 \; x = 1 \; (1,1)$$



$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$

Secante

$x = 1 \; f(1) = 1^2 = 1$ (1,1)

$x = 2 \; f(1) = 2^2 = 4$ $(2,4)$

Ecuación secante

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{4 - 1}{2 - 1}(x - 1)$$

$$y - 1 = \frac{3}{1}x - 3$$

$$y = 3x - 2$$

2. Dado $3x^2 + 2$ encuentre la ecuación de la tangente en $x, f(x)$
   a. Pendiente de la curva para el punto $(1{,}5)$
   b. Tangente de la curva en el punto $(1{,}5)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$f(x) = 3x^2 + 2$

$= 3(x_1 + \Delta x)^2 + 2$

$$\frac{= 3x^2 + 6x \Delta x + 3 \Delta x^2 + 2x + 2 \Delta x - 3x^2 - 2x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(6x + 3 \Delta x + 2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = 6x + 3 \Delta x + 2 = 6x + 2$$

$La\ m\ de\ (1,5)$

$m = 6x + 2 = 6(1) + 2 = 8$

Ecuación de la tangente

$y - 5 = 8(x - 1)$

$y = 8x - 3$

1.3 Razones de cambio

Razón de cambio promedio	Razón de cambio instantánea
$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
Cociente de las diferencias (como va cambiando)	La velocidad a la que cambia (m de la recta tangente)

Ejemplos

1. Una piedra cae de una altura de 50 metros.
   a. Rapidez promedio durante los dos primeros segundos.
   b. Rapidez promedio del segundo uno al dos.
   c. Velocidad instantánea de la caída de la piedra si la caída está gobernada por la ecuación $f(t) = 5.1t^2$ donde $f(t)$ se mide en metros.

$Rapidez\ entre\ 2\ seg\ t_1 = 0\ \ t_2 = 2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{5.1(2)^2 - 5.1(0)^2}{2 - 0} = 10.2 \frac{m}{seg}$$

$Rapidez\ 1 - 2\ seg\ t_1 = 1\ \ t_2 = 2$

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = \frac{5.1(2)^2 - 5.1(1)^2}{2-1} = 15.3\frac{m}{seg}$$

$Velocidad$

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{f(t_1 + \triangle t) - f(t_1)}{\triangle t}$$

$$\frac{5.1(t_1 + \triangle t)^2 - 5.1t^2}{\triangle t}$$

$$\frac{5.1t^2 + 10.2t \triangle t + \triangle t^2 - 5.1t^2}{\triangle t} = \frac{\triangle t(10.2t + 5.1 \triangle t)}{\triangle t}$$

$$\lim_{\triangle t \to 0} = 10.2t + 5.1 \triangle t = 10.2t$$

$Sustituyendo \quad (10.2)(2) = 20.4\frac{m}{seg}$

2. Un fruticultor espera sustituir en el mercado sus cajas de naranjas según la función oferta $s(x) = 100x^2$ a razón de dos dólares por caja por lo que el productor espera obtener 400 cajas. También esperan surtir cajas de naranjas a una razón de cuatro dólares por caja. A medida que el precio aumenta se espera surtir más cajas de naranjas.
   a. Razón de cambio promedio en la oferta de dos dólares a cuatro dólares
   b. Razón de cambio promedio en la oferta de dos dólares a $(2 + \triangle x)$
   c. A qué valor se aproxima el incremento de la oferta entre el incremento de cajas cuando el incremento de cajas $\triangle x \to o$ $\frac{\triangle s}{\triangle x}$
   d. Razón de cambio de sustituir un dólar a tres dólares.
   e. Razón promedio de sustituir uno a $(1 + \triangle x)$ dólares
   f. A qué valor se aproxima el $\triangle s$ al $\triangle x$ cuando $\triangle x \to o$.

RCP 2-4 dólares

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{100(4)^2-100(4)^2}{4-2}=600\ cajas$$

RCP $2-(2+\triangle x)$

$$\frac{f(x_1+\triangle x)-f(x_1)}{\triangle x}=\frac{100(2+\triangle x)^2-100(2)^2}{\triangle x}$$

$$=\frac{400+400\triangle x+100\triangle x^2-400}{\triangle x}=\frac{\triangle x(400+100\triangle x)}{\triangle x}=400+100\triangle x$$

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_1+\triangle x)-f(x_1)}{\triangle x}=\frac{100(2+\triangle x)^2-100(2)^2}{\triangle x}$$

$$=\frac{400+400\triangle x+100\triangle x^2-400}{\triangle x}=\frac{\triangle x(400+100\triangle x)}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}400+100\triangle x$$

$$400\ cajas$$

RCP 1-3 dólares

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{100(3)^2-100(1)^2}{3-1}=400\ cajas$$

RCP $1-(1+\triangle x)$

$$\frac{f(x_1+\triangle x)-f(x_1)}{\triangle x}=\frac{100(1+\triangle x)^2-100(1)^2}{\triangle x}$$

$$\frac{100+200\triangle x+100\triangle x^2-100}{\triangle x}=\frac{\triangle x(200+100\triangle x)}{\triangle x}=200+100\triangle x$$

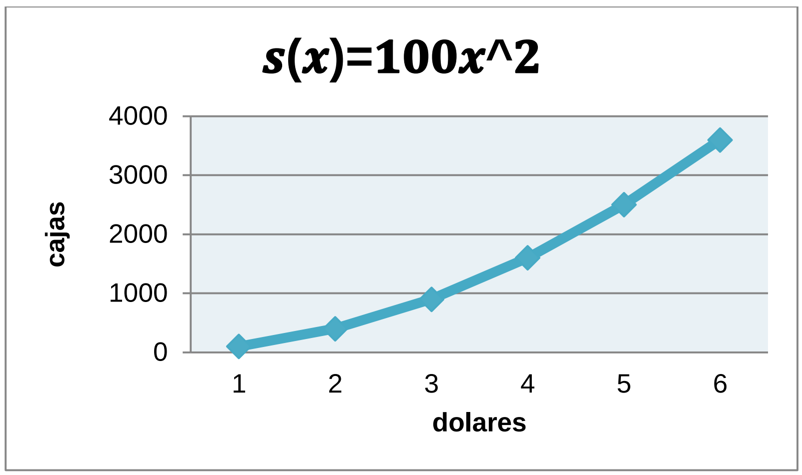
$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_1+\triangle x)-f(x_1)}{\triangle x}=\frac{100(1+\triangle x)^2-100(1)^2}{\triangle x}$$

$$\frac{100+200\bigtriangleup x+100\bigtriangleup x^2-100}{\bigtriangleup x}=\frac{\bigtriangleup x(200+100\bigtriangleup x)}{\bigtriangleup x}=\lim_{\Delta x\to 0}200+100\bigtriangleup x$$

$$200\ cajas$$

Aproximación de Δs

x	$s(x) = 100x^2$
1	100
2	400
3	900
4	1600
5	2500
6	3600



Aplicación de la razón de cambio

x representa	y representa	$\frac{f(a+\bigtriangleup a)-f(a)}{\bigtriangleup a}$	$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\bigtriangleup a)-f(a)}{\bigtriangleup a}$

Tiempo	Concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo en el instante x. Volumen de ventas en el instante x. Población en el instante x.	Concentración del medicamento en el periodo $(a, a + \triangle a)$. El volumen de ventas en el intervalo $[a, a + \triangle a]$. En la población en el intervalo $[a, a + \triangle a]$	Concentración de medicamentos en el torrente sanguíneo y en instante $x = a$. El volumen de ventas en el instante $x = a$. En la población en el instante $x = a$.
Cantidad de artículos vendidos	Ingresos en un nivel de ventas de x unidades.	En los ingresos cuando el nivel de ventas está entre $x = a$ y $[x = a + \triangle a]$	En los ingresos cuando el nivel de ventas es de a unidades.
Temperatura	Cantidad de producto formado en la reacción química cuando la temperatura es x grados.	Formación de producto en el rango de temperaturas $[a, a + \triangle a]$	Formación de productos cuando la temperatura es a grados.

Ejemplos

1. El costo promedio de CD en dólares invertidos por Jerald records al fabricar x CDs está dada por la función de costo promedio de X $C = 1.8 + \frac{3000}{x}$ evaluar el límite cuando $\lim_{x \to \infty} x$ e intérprete.

$$\lim_{x \to \infty} 1.8 + \frac{3000}{x}$$

$$= \frac{1.8}{x} + \frac{3000}{x} = \frac{\frac{1.8}{x} + \frac{3000}{x}}{\frac{x}{x}} = \frac{1.8 + \frac{3000}{\infty}}{1} = 1.8$$

$$El\ costo\ de\ cada\ CD\ es\ de\ 1.8$$

2. La gerencia de llantas continental a determinado que la demanda de llantas semanal está dada por el precio en función.

$$p = f(x) = 144 - x^2$$

Dónde x en unidades de millar, precio en dólares.

a. Hallar la razón de cambio promedio de una llanta, si la cantidad está entre los 5000 y 6000, 5000 y 5100 llantas y entre 5000 y 5010.

$$\textit{Razón de cambio instantánea de precio unitario cuando}$$
$$\textit{la cantidad demanda es de } 5000 \textit{ unidades.}$$

x_1	x_2
5000	6000
5000	5100
5000	5010

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{[144 - (6000)^2] - [144 - (5000)^2]}{6000 - 5000} = -11000\$$$

$$\frac{[144 - (5100)^2] - [144 - (5000)^2]}{5100 - 5000} = -10100\$$$

$$\frac{[144 - (5010)^2] - [144 - (5000)^2]}{5010 - 5000} = -10010\$$$

$$\textit{El precio disminuye x cantidad}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{[144 - (5000 + \Delta x)^2] - [144 - (5000)^2]}{\Delta x}$$

$$= \frac{144 - 25000000 - 10000 \Delta x - \Delta x^2 - 144 + 25000000}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(-10000 - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{x \to 0} 10000 - \triangle x = -10000\$ \; por \; unidad$$

3. El ingreso per cápita de Estados Unidos desde 1969 hasta 1973 se obtiene en la siguiente tabla.

Año	1969	1970	1971	1972	1973
Y	3700	3900	4100	4500	5000

Calcule la razón de cambio promedio del ingreso per cápita para

a. 1969-1971
b. 1971-1973
c. Realice la proyección de los incrementos de 1973-1975 y grafique.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4100 - 3700}{1971 - 1969} = \frac{400}{2}$$
$$= 200 \; entre \; 1969 - 1971 \; el \; cambio \; promedio \; de \; ingreso \; per \; capita$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5000 - 4100}{1973 - 1971} = \frac{900}{2}$$

$$= 450 \; entre \; 1973 - 1973 \; el \; cambio \; promedio \; de \; ingreso \; per \; capita$$

$$\frac{y_2 - 5000}{1975 - 1973}$$

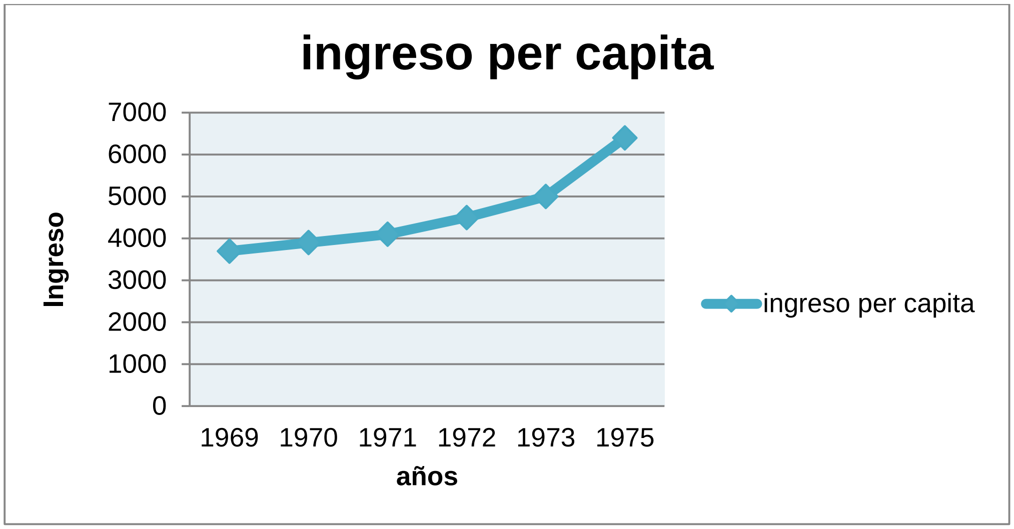
$$y_2 - 5000 = 700(2)$$

$$y_2 = 1400 + 5000 = 6400$$

$\triangle x_2 - \triangle x_2 = \triangle x_3$

$450 - 200 = 250$

$\triangle x_2 + \triangle x_3 = 450 + 250 = 700$



4. Realizan los clientes adquieres swaps del dólar sobre quetzales, la demandad diariamente aprecio x por swaps y la demanda se calcula mediante la función

$$D(X) = 100 - x^2 \; en\, un\, intervalo \;\; \$1 \leq x \leq \%10$$

   a. Calcule la razón de cambio promedio de la demanda para un cambio de 2 a 5 dólares.
   b. Calcule la razón de cambio promedio en la oferta de 2 dólares por swap a $(2 + \triangle\, x)$
   c. Calcule la razón de cambio instantánea cuando vale 2 dólares.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{[100 - (5)^2] - [100 - (2)^2]}{5 - 2} = \; -7\$$$

$La\ demanda\ disminuyo\ con\ una\ rapidez\ de\ 7\$\ con\ el\ precio\ cambiante\ de\ 2\ a\ 5$

$$\frac{[100-(2+\triangle x)^2]-[100-(2)^2]}{\triangle x}=$$

$$\frac{100-4-4\triangle x-\triangle x^2-100+4}{\triangle x}=\frac{\triangle x(-4-\triangle x)}{\triangle x}=-4-\triangle x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{[100-(2+\triangle x)^2]-[100-(2)^2]}{\triangle x}=$$

$$\frac{100-4-4\triangle x-\triangle x^2-100+4}{\triangle x}=\frac{\triangle x(-4-\triangle x)}{\triangle x}=\lim_{x\to 0}-4-\triangle x$$

$$-4$$

5. Las pérdidas en millones de dólares del banco Franklin se estiman como:

$$A=f(t)=-t^2+10t+30$$

En un tiempo de 0-10 años para t=0 corresponde al inicio de 1994

a. Con que rapidez incrementan las pérdidas al inicio de 1997, 1999 y al inicio de 2001

1997

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{-(3+\triangle t)^2+10(3+\triangle t)+30+3^2-10(3)-30}{\triangle t}$$

$$\frac{-9-6\triangle t-\triangle t^2+30+10\triangle t+30+9-30-30}{\triangle t}=\frac{\triangle t(4-\triangle t)}{\triangle t}$$

$$\lim_{t\to 0}\ 4-\triangle t=4$$

$$\mathit{Se\ incrementa\ el\ nivel\ de\ pérdidas\ en\ 4\ millones\ de\ dólares}$$

1999

$$\lim_{t \to 0} \frac{-(5 + \triangle t)^2 + 10(5 + \triangle t) + 30 + 5^2 - 10(5) - 30}{\triangle t}$$

$$\frac{-25 - 10 \triangle t - \triangle t^2 + 50 + 10 \triangle t + 30 + 25 - 50 - 30}{\triangle t} = \frac{\triangle t(- \triangle t)}{\triangle t}$$

$$\lim_{t \to 0} \ -\triangle t = 0$$

$$El\ nivel\ de\ pérdidas\ se\ mantiene\ nulo$$

2001

$$\lim_{t \to 0} \frac{-(7 + \triangle t)^2 + 10(7 + \triangle t) + 30 + 7^2 - 10(7) - 30}{\triangle t}$$

$$\frac{-49 - 14 \triangle t - \triangle t^2 + 70 + 10 \triangle t + 30 + 49 - 70 - 30}{\triangle t} = \frac{\triangle t(-4 - \triangle t)}{\triangle t}$$

$$\lim_{t \to 0} \ -4 - \triangle t = -4$$

$$Las\ perdidas\ disminuyen\ 4\ millones\ de\ dólares$$

Para $y = f(x)$ se define la derivada de $f^{\prime}(x) = \lim_{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ si el limite existe.

Por lo tanto al tomar la derivada de una función de $f^{\prime}(x)$ se crea una función de que de entre otras cosas es la pendiente dela recta tangente $y = f(x)$ para cada x, y la razón de cambio instantánea esta nos permite medir como va cambiando la variable dependiente.

La notación de la derivada $y = f(x)$ sería la siguiente:

$y = f(x)$, $f^{'}(x)$, $y^{'}$, $\frac{dy}{dx}$, $Dx\, f(x)$, $\frac{d}{dx}y$, $\frac{d}{dx}f(x)$

Capítulo 2. Reglas de derivación

$Dx\ x = 0$

$Dx\ K = 1$

$Dx\ Kx = K$

$Dx\ x^n = nx^{n-1}$

$Dx\ [f(x) \pm g(x)] = dxf(x) \pm dx\ g(x)$

$Dx\ \frac{fx}{gx} = \frac{g(x)dxf(x) - f(x)dxg(x}{(g(x))^2}$

$Dx\ [f(x).g(x)] = f(x)dxg(x). + g(x)dx\ f(x)$

$Dx\ [(f(x))^n] = n\ f(x)^n\ .dx\ f(x)$

Ejemplos

i. $f(x) = 5$

$Dx\ 5 = 0$

ii. $F(x) = x^5$

$Dx\ x^5 = 5x^4$

iii. $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$Dx\ x^{-3} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

iv. $F(x) = 4x^3 + 8x^2 - 5x + 9$

$Dx\, f(x) = 12x^2 + 16x - 5$

v. $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{30}{x^3} - \frac{7}{5} = 3x^{-2} - 30x^{-3}$

$Dx\, x^{-3} = -6x^{-3} + 90x^{-4} = \dfrac{-6}{x^3} + \dfrac{90}{x^4}$

vi. $f(x) = (2x - 3x^2)(x + 2x^5)$

$Dx\, f(x) = (2x - 3x^2)(1 + 10x^5) + (x + 2x^5)(2 - 6x)$

$= 20x^5 - 30x^6 + 2x + 6x^2 + 42x^5 - 12x^6$

$= -42x^6 + 24x^5 + 6x^2 + 2x$

Costo promedio= $\frac{C(x)}{x}$

Costo marginal: es una razón de cambio de costo por unidad del cambio de producción a un nivel de salida x por unidad.

$$Cmg = C\acute{}(x)$$

Ejemplos:

1. Suponga que el $C(X)$ en millares de dólares por fabricar millones de Blue-Rays de Jazz se obtienen de la función de $C(x) = 2 + 8x - x^2$ para el valor de $(0 \leq x \leq 3)$
   a. Costo marginal en x

   $$C\acute{}(x) = 8 - 2x$$

   b. Costo marginal en $x = 1,2,3$ millares de niveles de producción y grafique.

   $C\acute{}(1) = 8 - 2(1) = 6$

   $$El\ costo\ es\ de\ 6{,}000\ dólares\ a\ partir\ de\ 1\ millón\ de\ unidades$$

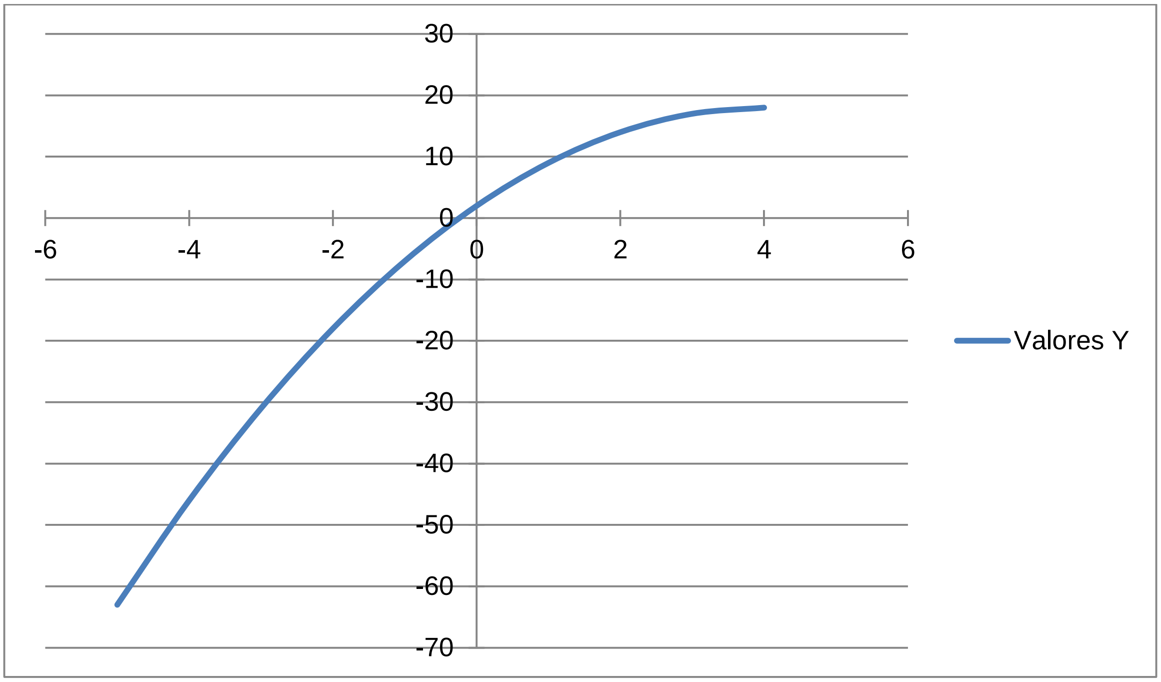
   $C\acute{}(2) = 8 - 2(2) = 4$

   $$El\ costo\ es\ de\ 4{,}000\ dólares\ a\ partir\ de\ 2\ millones\ de\ unidades$$

   $C\acute{}(3) = 8 - 2(3) = 2$

   $$El\ costo\ es\ de\ 2{,}000\ dólares\ a\ partir\ de\ 3\ millones\ de\ unidades.$$

c. Grafique



2. Utilizando datos registrados se estima que una empresa venderá n(x) vallas de publicidad después de gastar $\$(x)$ millones. Calculados mediante la función: $N(x) = 60x - x^2$ $(5 \leq x \leq 30)$
   a. Determinar la razón de cambio de las ventas x unidades del cambio en dinero gastado en publicidad al nivel del precio x en millones

$$N'(x) = 60 - 2x$$

   b. Determinar el nivel de producción si las ventas son iguales a 10 y 20.

$$N'(10) = 60 - 2(10) = 40$$

$$N'(20) = 60 - 2(20) = 20$$

3. Una fábrica de energía eléctrica genera mediante la combustión de carbono electricidad liberando $C02$ de azufre al aire circulante, la concentración $C(x)$ es partes por millón se calcula aproximadamente con la siguiente formula:

$C(X) = \frac{0.1}{x}$ donde x es igual a la distancia desde la planta en millas.

Calcule como va cambiando la concentración en la 1er milla y en la 2da.

$$C(x) = 0.1X^{-1}$$

$$C'(x) = -0.1X^{-2}$$

$$C'(1) = -0.1(1)^{-2} = -0.1$$

$$C'(2) = -0.1(2)^{-2} = -.025$$

4. La estadística determina que el costo/h de aprendizaje es de $20\$/h$ para una biblioteca pública. Si una persona aprende y cosas en x horas calculada con:

$$y = 21\sqrt{x^3}\ (0 \leq x \leq 36)$$

Determinar la rapidez del aprendizaje y el costo después de las primeras 2 hrs, 8 hrs y 36 hrs.

$$y' = \frac{63}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$y'(2) = \frac{63}{2}(2)^{\frac{1}{2}} = 44.5 \quad * Costo = 40$

$y'(8) = \frac{63}{2}(8)^{\frac{1}{2}} = 126 \quad * Costo = 160$

$y'(36) = \frac{63}{2}((36)^{\frac{1}{2}} = 567 \quad * Costo = 720$

5. Según la teoría económica clásica, la demanda de un artículo en mercado libre disminuye a medida que su precio aumenta. Suponga que el número de demanda de celulares que la gente quiere por semana en una cierta ciudad a precio x, se calcula con: $D(x) = \frac{50{,}000}{x^2+10x+25}$
   a. Determinar la razón de cambio respecto al precio de la demanda.

$$D'(x) = \frac{-100}{(x+5)^2}$$

b. Calcule la demanda cuando el precio cambia a $\$5$ y $\$10$

$$D´(5) = \frac{-100}{(5+5)^2} = -100.$$

$$La\ demanda\ disminuye\ 100\ unidades\ cuando\ el\ precio\ es\ de\ \$5$$

$$D´(10) = \frac{-100}{(10+5)^2} = -29.62.$$

$$La\ demanda\ disminuye\ en\ 30\ unidades\ cuando\ el\ orecio\ cambia\ a\ \$10$$

6. Determinar la función marginal de los siguientes incisos para $Q = 3$ y $Q = 5$
   a. $CT = 3Q^2 + 7Q + 12$

$$C´T = 6Q + 7$$

$$C´(3) = 6(3) + 7 = 25$$

$$C´(5) = 6(5) + 7 = 37$$

   b. $YT = 12Q - Q^2$

$$Y´T = 12 - 2Q$$

$$Y´(3) = 12 - 2(3) = 6$$

$$Y´(5) = 12 - 2(5) = 2$$

7. En los primeros días de la teoría cuantitativa del aprendizaje (1917) L. Hurstun encontró que una cierta persona realiza $N(x)$ actos después de practicar x veces a través de la función:

$$N(X) = \frac{100x + 200}{x + 32}$$

   Determinar la razón de cambio del aprendizaje y calcularlo cuando varía 4 y 60 veces. Interprete.

$$N´(X) = \frac{-3200}{x^2 + 64x + 1024}$$

$$N´(4) = \frac{-3200}{4^2 + 64(4) + 1024} = -2.46.$$

$El\ numero\ de\ actos\ disminuye\ en\ 2.4\ apartir\ de\ que\ se\ practica\ 4\ veces.$

$$N'(60) = \frac{-3200}{60^2 + 64(60) + 1024} = -.32$$

$El\ numero\ de\ actos\ dismiuye\ en\ .32\ a\ partir\ de\ que\ s\ epractica\ 60\ veces.$

Ejemplos de reglas de derivación

i. $\boldsymbol{F(X) = (x+4)In(3x+5)}$

$$= (x+4)\left(\frac{3}{3x+5}\right) + In(3x+5)(1)$$

$$f(x) = \frac{3x+12}{3x+5} + In(3x+5)$$

ii. $\boldsymbol{F(x) = (-3x^2 + 10x - 1)In(x^6 + 4x - 5)}$

$$f(x) = (-3x^2 + 10x - 1)\left(\frac{-6x^5 + 4}{x^6 + 4x - 5}\right) + In(x^6 + 4x - 5)(-6x + 10)$$

iii. $\boldsymbol{F(x) = 4^{(8x^4+2x^2+x+4)^6}}$

$$f(x) = 4^{(8x^4+2x^2+x+4)^6} In4(8x^4 + 2x^2 + x + 4)^5(192x^3 + 24x + 6)$$

iv. $\boldsymbol{F(x) = 6^{(-3x^6+x^2-2)^{-3}}}$

$$f(x) = 6^{(-3x^6+x^2-2)^{-3}} In6^{(-3x^6+x^2-2)^{-4}}(-54x^5 - 6x)$$

v. $\boldsymbol{F(x) = In\frac{1}{\sqrt[5]{(2x+7)^3}}}$

$$= In(2x+7)^{\frac{-3}{5}} = \frac{\frac{-3}{5}(2x+7)^{-\frac{8}{5}}(2)}{(2x+7)^{-\frac{3}{5}}} = \frac{\frac{-6((2x+7)^{-\frac{8}{5}}}{5}}{(2x+7)^{-\frac{3}{5}}} = \frac{-6(2x+7)^{\frac{3}{5}}}{5((2x+7)^{\frac{8}{5}}}$$

$$f(x) = \frac{-6}{5(2x+7)}$$

vi. $\boldsymbol{F(x) = \frac{(x^4+3x+1)^3}{x^5+3}}$

$$=\frac{x^5+3(12x^3+9)(x^4+3x+1)^2-(5x^4)(x^4+3x+1)^3}{(x^5+3)^2}$$

$$=\frac{(x^4+3x+1)^2[(x^5+3)(12x^3+9)-(x^4+3x+1)(5x^4)}{(x^5+3)^2}$$

$$=\frac{(x^4+3x+1)^2(12x^8+9x^5+36x^2+27-5x^8-15x^5-5x^2)}{x^5+3)^2}$$

$$f(x)=\frac{(x^4+3x+1)^2(7x^8-6x^5-5x+36x+24)}{(x^5+3)^2}$$

vii. $\boldsymbol{F(x)=In(7x^3+3x^{-1}+7x^{-2}+3)^7}$

$$=\frac{7\left(21x^2-\frac{3}{x^2}-\frac{14}{x^3}\right)}{7x^3}=\frac{7\,\frac{21x^5-3x-14}{x^3}}{\frac{7x^5+3x+7+3x^2}{x^2}}$$

$$f(x)=\frac{7x^{2(21x^5-3x-14)}}{x^3(7x^5+3x+7+3x^2)}$$

viii. $\boldsymbol{F(x)=(3x^2+5x)4^{(5x+1)}}$

$$=(3x^2+5x)[4^{(5x+1)}(5)]\,In4+\ (6x+5)(4^{(5x+1)})$$

$$f(x)=4^{(5x+1)}[(6\mathrm{x}+5+15x^2+25x)In4]$$

ix. $\boldsymbol{f(x)=\frac{e^{Sen\,x}}{\mathrm{Cos\,x}}}$

$$=\frac{[(e^{Sen\,x}\,Cos\,x)(Cos\,x)]-[e^{Sen\,x}\,(-Sen\,x)]}{\mathrm{Cos^2\,x}}$$

$$=\frac{e^{Sen\,x}\,Cos^2x+e^{Sen\,x}\ \ Sen\,x}{\mathrm{Cos\,^2\,x}}$$

$$=\frac{e^{Sen\,x}\,(Cos^2\,x+Sen\,x)}{\mathrm{Cos\,^2\,x}}$$

$$=e^{Sen\,x}\left[1+\left[\left(\frac{Sen\,x}{Cos\,x}\right)\left(\frac{1}{Cos\,x}\right)\right]\right]$$

$$f'(x)=e^{Sen\,x}(1+Tanx\ Secx)$$

x. $\boldsymbol{f(x)=(4x^6+5x+3)e^{(-x^2+5x+1)}}$

$$= \left[(4x^6+5x+3)\left(e^{(-x^2+5x+1)}\right)(-2x+5)\right] + \left[\left(e^{(-x^2+5x+1)}\right)(24x^5+5)\right]$$

$$f'(x) = e^{(-x^2+5x+1)}[(-8x^7-20x^6-10x^2+19x+15)+(24x^5+5)]$$

xi. $\boldsymbol{f(x) = e^x Sen(e^x)}$

$$= e^x Sen(e^x) + e^x e^x Cos(e^x)$$

$$f'(x) = e^x[Sen(e^x) + e^x Cos(e^x)]$$

xii. $\boldsymbol{f(x) = \frac{Sen(e^x)}{e^x}}$

$$= \frac{e^x[e^x Cos(e^x)] - [(Sene^x)(e^x)]}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x Cose^x - Sene^x}{e^x}$$

xiii. $\boldsymbol{f(x) = Sen(4x^3 - 3x + 2)^{5/3}}$

$$= \frac{5}{3}(4x^3-3x+2)^{2/3}\,(12x^2-3)\,Cos(4x^3-3x+2)^{5/3}$$

$$f'(x) = (20x^2-5)(4x^3-3x+2)^{2/3}\,Cos(4x^3-3x+2)^{5/3}$$

xiv. $\boldsymbol{f(x) = (4^x + x + 1)^3 Sen(3^x + 3x^2)}$

$$= [3(4^x+x+1)^2(4^x Ln4 + 1)]\,Sen\,(3^x+3x^2) + (4^x+x+1)^3 +$$
$$Cos\,(3^x+3x^2)(3^x Ln3 + 6x)$$

$$f'(x) = [3(4^x+x+1)^2(4^x Ln4+1)]\,Sen\,(3^x+3x^2)$$
$$+ [(4^x+x+1)^3 + (3^x Ln3 + 6x)]Cos\,(3^x+3x^2)$$

xv. $\boldsymbol{f(x) = Cos^6(2x)}$

$$= [-(2)Sen(2x)]\;6\;Cos^5(2x)(2)$$

$$f'(x) = -24\,Sen(2x)Cos^5(2x)$$

xvi. $\boldsymbol{f(x) = (4x^2 - 5)\, Tan(4x^6 + 7)}$

$$= \left[(4x^2 - 5)\left(\frac{24x^5}{Cos^2(4x^6+7)}\right)\right] + [Tan(4x^6 + 7)(8x)]$$

$$f'(x) = \frac{96x^7 - 120x^5}{Cos^2(4x^6 + 7)} + 8x\, Tan(4x^6 + 7)$$

xvii. $\boldsymbol{f(x) = Tan(x^3 + x^2 - 4)^{-3/8}}$

$$= \frac{-\frac{3}{8}(x^3+x^2-4)^{-\frac{11}{8}}(3x^2+2x)}{Cos^2(x^3+x^2-4)^{-3/8}}$$

$$= \frac{-3(3x^2+2x)(x^3+x^2-4)^{-11/8}}{8Cos^2(x^3+x^2-4)^{-3/8}}$$

$$= \frac{-3(3x^2+2x)}{8(x^3+x^2-4)^{11/8}\, Cos^2(x^3+x^2-4)^{-3/8}}$$

$$f'(x) = \frac{-3(3x^2 + 2x)}{8\sqrt[8]{(x^3 + x^2 - 4)^{11}}\, Cos^2(x^3 + x^2 - 4)^{-3/8}}$$

xviii. $\boldsymbol{f(x) = (4x^2 + 3) Cot(4x^6 + 7)}$

$$= \left[(4x^2 + 3)\left(\frac{-24x^5}{Sen^2(4x^6+7)}\right)\right] + [8x\, Cot(4x^6 + 7)]$$

$$f'(x) = 8x\left[Cot(4x^6 + 7) - \left(\frac{12x^6 + 9x^4}{Sen^2(4x^6 + 7)}\right)\right]$$

2.1 Regla de la cadena

La regla de la cadena es cuando se manejan funciones compuestas para su derivación, por ejemplo:

Sea $u = g(x)$ y $y = f(u)$

Donde *g* y *f* son $y = f(u)$ > $f\big(g(x)\big)$

Es decir, que la derivada de *y* respecto a *x* es igual a $\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, siempre que $\frac{\partial y}{\partial u}$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$ existan.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ejemplos:

1. $y = (x^2 - 2)^8$

$$y = u^8 \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 8u^7$$

$$u = (x^2 - 2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$y = 8u^7(\partial u)$$

$$= 8u^7(2x)$$

$$= \mathbf{16x(x^2 - 2)}$$

2. $f(x) = Sen^2(Cos2x)$

$$y = Sen^2 u \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = (2\,Sen\,u)(Cos\,u)$$

$$u = Cos2x \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -2\,Sen2x$$

$$y = 2\,Sen(Cos2x) \cdot Cos(Cos2x)(-2)Sen2x$$

$$= \boldsymbol{-4\,Sen(Cos2x) \cdot Cos(Cos2x)Sen2x}$$

3. $f(x) = e^{Sen\,x}$

$$y = e^u \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = e^u$$

$$u = Senx \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = Cosx$$

$$y = e^{Sen\, x}\, Cos\, x$$

4. Obtener w^{II} de la siguiente función: $w(z) = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$

$$w^{I} = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(-1) + (3z)\left(\frac{(3z)(3)-(1+3z)(3)}{9z^2}\right)$$

$$= \left(\frac{-1-3z}{3z}\right) + \frac{(3-z)}{9z^2}(-3)$$

$$= \left(\frac{-1-3z}{3z}\right) - \left(\frac{3-z}{3z^2}\right)$$

$$= \frac{z(-1-3-z)-3+z}{3z^2}$$

$$= \frac{-z-3z^2-3+z}{3z^2}$$

$$= \frac{-3z^2-3}{3z^2}$$

$$\boldsymbol{w^{I}} = \boldsymbol{\frac{-z^2-1}{z^2}}$$

$$w^{II}(z) = -z^2 - 1(z^{-2})$$

$$= -z^0 - z^{-2}$$

$$= -1 - z^{-2}$$

$$= (-2)(-z^{-3})$$

$$= 2z^{-3}$$

$$\boldsymbol{w^{II}} = \boldsymbol{\frac{2}{z^3}}$$

5. $f(x) = Ln(3^x Sen\, x)$ Demuestre que $f^6(x) = -8(15Csc^6 x - 15Csc^4 x + 2Csc^2 x)$

$$f^{I}(x) = Ln3 + \frac{Cos\,x}{Sen\,x}$$

$$\boldsymbol{f^{I}(x) = Ln3 + Cot\,x}$$

$$\boldsymbol{f^{II}(x) = -Csc^{2}\,x}$$

$$f^{III}(x) = (-2\,Csc\,x)(-Csc\,x\,Cot\,x)$$

$$\boldsymbol{f^{III}(x) = 2\,Csc^{2}\,x\,Cot\,x}$$

$$f^{4}(x) = 2[(2\,Csc\,x)(-Csc\,x\,Cot\,x)Cot\,x + (Csc^{2}\,x)(-Csc^{2}\,x)]$$

$$f^{4}(x) = -2[2Csc^{2}\,x\,Cot^{2}\,x + Csc^{4}\,x]$$

$$f^{4}(x) = -2[2Csc^{2}\,x + (Csc^{2}\,x - 1) + Csc^{4}\,x]$$

$$\boldsymbol{f^{4}(x) = -2[3Csc^{4}\,x - 2Csc^{2}\,x]}$$

$$f^{5}(x) = -2[-12Csc^{4}\,x\,Cot\,x + 4Csc^{2}\,x\,Cot\,x]$$

$$\boldsymbol{f^{5}(x) = 8[3Csc^{4}\,x\,Cot\,x - Csc^{2}\,x\,Cot\,x]}$$

$$f^{6}(x) = 8[-12Csc^{4}\,x\,(Csc^{2}\,x - 1) - 3Csc^{6}\,x + 2Csc^{2}\,x(Csc^{2}\,x - 1) + Csc^{4}\,x]$$

$$\boldsymbol{f^{6}(x) = -8[15Csc^{6}\,x - 15Csc^{4}\,x + 2Csc^{2}\,x]}$$

2.2 Derivadas implícitas.

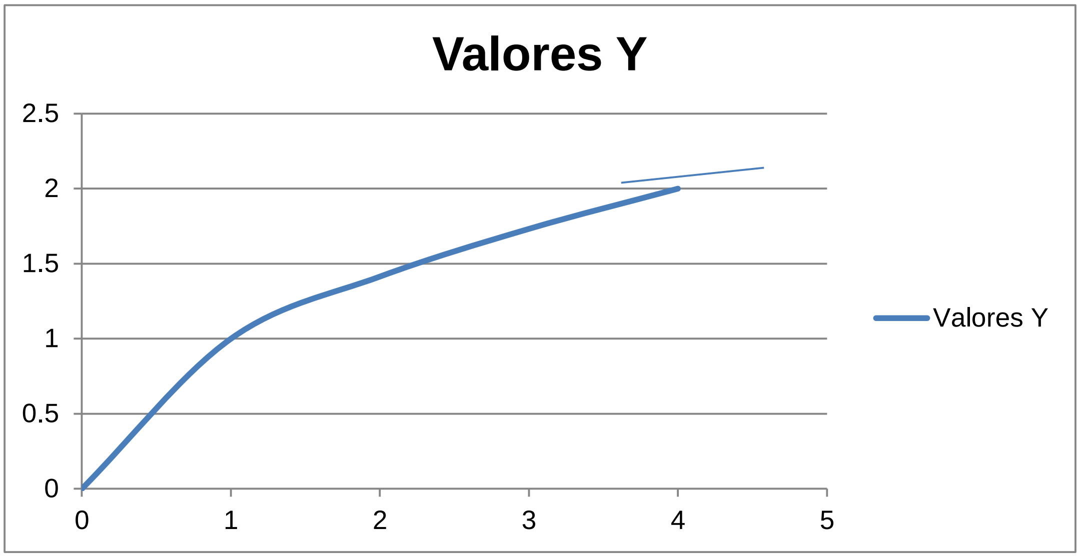
Cuando *y* es una función implícita de x encontramos la $\frac{\partial y}{\partial x}$ diferenciando ambos lados de la ecuación.

Por lo tanto, se deriva con respecto a x y luego se despeja algebraicamente $\frac{\partial y}{\partial x}$, es decir, se puede escribir la función expresando una variable explícitamente en términos de otra variable.

Ejemplo:

1. Para $y^{2} = x$ encuentre la pendiente a la tangente a la gráfica en el punto $(4{,}2)$ y $(4, -2)$.

$$y^2 = x$$



$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2y} \rightarrow m\ de\ la\ tangente$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(4,2)} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(4,-2)} = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$$

a. Sacar ecuación de tangentes:

$T1$

$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

$y - 2 = \frac{1}{4}x - 1$

$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + 1}$

$T2$

$y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 4)$

$y + 2 = -\frac{1}{4}x + 1$

$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x - 1}$

2. Para $x^2 + y^2 - 2 = 0$ $(\sqrt{5}, 2)$ encuentre la pendiente.

$$2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x} - 0 = 0$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

$$\boldsymbol{m = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

3. Encuentre y^{II} de la siguiente función: $x^3 + y^2 = 6xy$

$$3x^2 + 3y^2y^I = (6x)(y^I) + y(6)$$

$$\frac{3x^2 + 3y^2y^I = 6y^I + 6y}{3}$$

$$x^2 + y^2y^I = 2xy^I + 2y$$

$$y^2y^I - 2xy^I = 2y - x^2$$

$$y^I(y^2 - 2x) = 2y - x^2$$

$$\boldsymbol{y^I = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}}$$

$$\frac{(2y^I - 2x)(y^2 - 2x) - (2y - x^2)(2y^Iy - 2)}{(y^2 - 2x)^2}$$

$$\frac{2y^Iy^2 - 4y^Ix - 2xy^2 + 4x^2 - 4y^Iy^2 + 4y + 2x^2y^Iy - 2x^2}{(y^2 - 2x)^2}$$

$$\frac{-2y^Iy^2 - 4y^Ix - 2xy^2 + 2x^2 + 4y + 2x^2y^Iy}{(y^2-2x)^2}$$

$$\frac{-2\left(\frac{2y-x^2}{y^2-2x}\right)y^2 - 4\left(\frac{2y-x^2}{y^2-2x}\right)x - 2xy^2 + 2x^2 + 4y + 2x^2\left(\frac{2y-x^2}{y^2-2x}\right)y}{(y^2-2x)^2}$$

$$\frac{\left(\frac{2y-x^2}{y^2-2x}\right)[-2y^2 - 4x + 2x^2y] - 2xy^2 + 2x^2 + 4y}{(y^2-2x)^2}$$

$$\frac{\frac{(2y-x^2)(-2y^2-4x+2x^2y)}{(y^2-2x)}}{(y^2-2x)^2} - \frac{2xy^2+2x^2+4y}{(y^2-2x)^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{(2y-x^2)(-2y^2-4x+2x^2y)}{(y^2-2x)^3} - \frac{2xy^2+2x^2+4y}{(y^2-2x)^2}}$$

4. Encuentre $\frac{\partial y}{\partial x}$ de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3,4).

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{\partial 25}{\partial x}$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial x} = 0$$

$$2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{y} = \frac{-3}{4}}$$

Para recta...

$$y - 4 = \frac{-3}{4}(x-3)$$

$$y = \frac{-3x}{4} + \frac{9}{4} + 4$$

$$y = -3x + \frac{25}{4}$$

$$\mathbf{3x + 4y = 25}$$

5. $(2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$

$$3(2y^3 + 3)^2(4yy^I) = 15x^2 - 3$$

$$(12yy^I)(2y^3 + 3)^2 = 15x^2 - 3$$

$$12yy^I = \frac{15x^2 - 3}{(2y^3+3)^2}$$

$$\boldsymbol{y^I = \frac{15x^2 - 3}{12y(2y^3+3)^2}}$$

6. $Sec^2x + Csc^2y = 0$

$$[(Sec\ x\ Tan\ x)(2\ Sec\ x)(1)] + [(-Cscyy^I Cotyy^I)(2\ Cscyy^I)(1)] = 0$$

$$2Sec^2\ x\ Tan\ x - 2Csc^2yy^I\ Cotyy^I = 0$$

$$-2Csc^2yy^I\ Cotyy^I = -2Sec^2\ x\ Tan\ x$$

$$y^I(-2Csc^2y\ Cot\ y) = -2Sec^2x\ Tan\ x$$

$$y^I = \frac{-2Sec^2x\ Tan\ x}{-2Csc^2y\ Cot\ y}$$

$$\boldsymbol{y^I = \frac{Sec^2x\ Tan\ x}{Csc^2y\ Cot\ y}}$$

2.3 Derivada inversa

Cuando se tienen dos funciones f ^ g $\quad g(f(x)) = x$ ^ $f(g(x)) = y$ siempre y cuando $g.f = f.g = I$

Para solucionar estos ejercicios se realizan los siguientes pasos:

1) Calcular la función inversa $y = f(x)$ y cambiarla por $x = g(y)$
2) Hacer derivada de x, entonces $x' = g'(x)$
3) Por lo tanto se obtiene $y' = \frac{1}{x'}$
4) Se sustituye x' por $g'(y)$
5) Se sustituye x por $g(x)$

Ejemplo

1. $y = f(x)$

$$y = x^3, x > 0$$

$$y = f'(y)\sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = 3x^2$$

$$y^{-1} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(y^{\frac{1}{3}})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{y}}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = x' = \frac{1}{3}y^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}}$$

El cálculo de las funciones inversas es muy útil en el cálculo de las primitivas de las funciones hiperbólicas.

$$y = arc\ sen\ x = y = sen^{-1}x$$

Inversa → $x = sen\ y$

$x' = \cos y$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}}$$

2.4 Derivada de orden superior

La derivada de f' es una función de una función, por lo tal, se considera la diferenciación (la derivada) de f' obteniendo f''

De la función f'' se puede considerar diferenciación hasta la tercera, cuarta o *n* derivadas de orden superior.

La notación para reconocerlas es la siguiente:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots f^n(x)$$
$$f^1(x), f^2(x), f^3(x), \dots f^n(x)$$
$$D'(x), D''(x), D'''(x), \dots D^n(x)$$
$$y', y'', y''', \dots y^n$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \dots \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$$

Ejemplos

1. Hallar la derivada hasta donde n>0

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x - 8$$
$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 20x^3 - 35x^2 - 24x - 4$$
$$f^3(x) = 60x^2 - 72x - 24$$
$$f^4(x) = 120x - 72$$
$$f^5(x) = 120 \qquad n > 5$$
$$\boldsymbol{f^6(x) = 0}$$

2. Obtener las 3 derivadas posibles de $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{\sqrt[3]{1-t}}$

$$= \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} - 3(1-t)^{-\frac{1}{3}}$$
$$g'(x) = -\frac{1}{4}(t)^{-\frac{3}{2}} + (1-t)^{-\frac{4}{3}}(-1) \to -\frac{1}{4}(t)^{-\frac{3}{2}} - (1-t)^{-\frac{4}{3}}$$
$$g''(x) = \frac{3}{8}(t)^{-\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(1-t)^{-\frac{7}{3}}(-1) \to \frac{3}{8}(t)^{-\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(1-t)^{-\frac{7}{3}}$$
$$g'''(x) = -\frac{15}{16}(t)^{-\frac{7}{2}} + \frac{28}{9}(1-t)^{-\frac{10}{3}}(-1) \to -\frac{15}{16}(t)^{-\frac{7}{2}} - \frac{28}{9}(1-t)^{-\frac{10}{3}}$$

$$\boldsymbol{g'''(x) = -\frac{15}{16\sqrt{t^7}} - \frac{28}{9\sqrt[3]{(1-t)^{10}}}}$$

3. Hallar y' y y'' en el punto (1,1) de $x^3y + xy^3 - 2$

$$y' = x^3(1) + 3x^2(y) + x(3y^2) + (1)y^3$$
$$= \boldsymbol{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

$$y'' = x^3 + 6x(y) + 3x^2(1) + 3(y^2) + (6y)(3x) + 3y^2$$
$$= \boldsymbol{x^3 + 6xy + 3x^2 + 3y^2 + 18xy + 3y^2}$$

4. Encuentre $\frac{\partial y}{\partial x}$ de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25 \ \ en\ (3,4)$

$$2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \rightarrow 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2x}{2y} = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3}{4}$$

$Para\ recta$:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$
$$y = -\frac{3x}{4} + \frac{9}{4} + 4$$
$$\boldsymbol{3x + 4y = 25}$$

5. Encuentre y' de:
   a. $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$

$$y' = 3y^2 - 2(y) - 2(x) = 3$$
$$3y^2 - 2y - 2x = 3$$
$$3y^2y' - 2y - 2xy' = 3$$
$$3y^2y' - 2xy' = 3 + 2y$$
$$\boldsymbol{y' = \frac{3 + 2y}{3y^2 - 2x}}$$

b. $x^3 + y^4 = x^2y^5$

$$\boldsymbol{y' = 3x^2 + 4y^3 = 2xy^5 + 5y^4x^2}$$

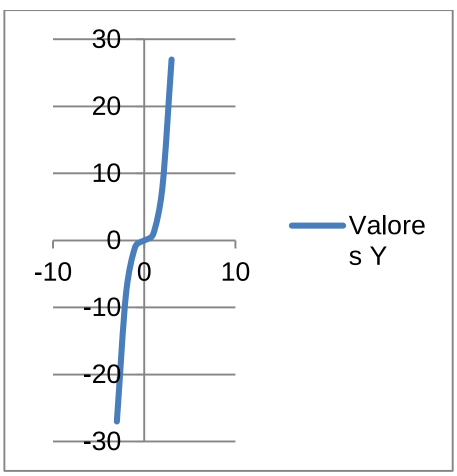
Capítulo 3. Optimización de funciones

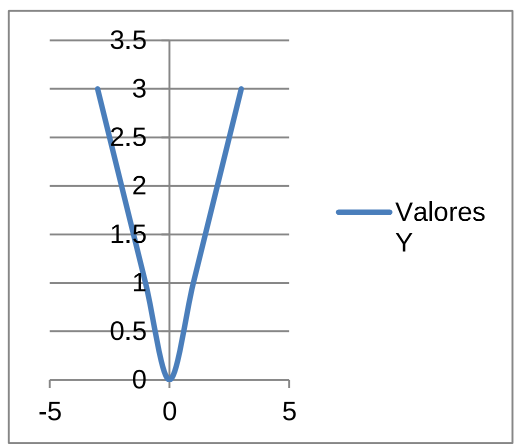
3.1 Máximos y mínimos de una función

Una función tiene un máximo relativo en $x = c$ si existe un intervalo abierto que contiene a C tal que $f(x) \leq f(c)$ para toda x en (a, b).

Un mínimo relativo en $x = c$ si existe que a C tal que $f(x) > f(c)$ para toda X en (a, b).

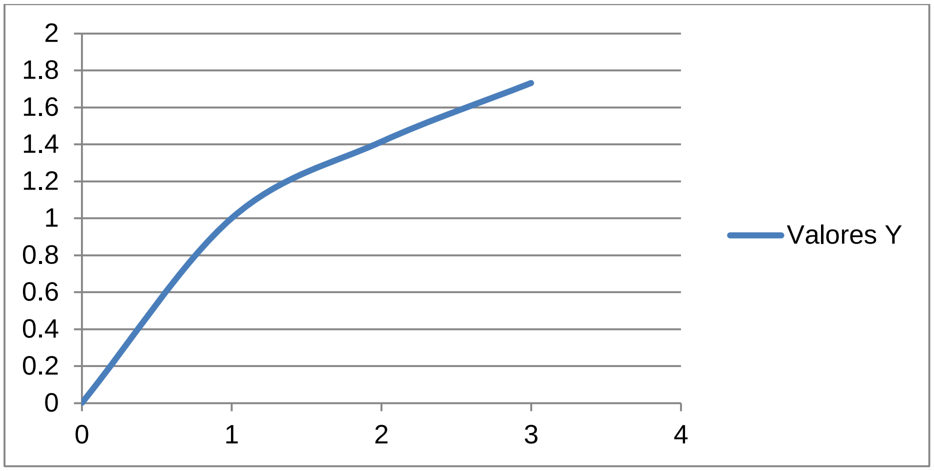
Los máximos y mínimos relativos de una función se conocen como extremos relativos. Así mismo existe el llamado Punto Crítico. El punto crítico se una función es cualquier punto X de la función f tal que $f'(x) = 0$ o bien que $f'(x) = \nexists$





No tiene extremo relativo $f'(x) = 0$

$x = 0$ Punto Crítico no son diferenciales



$x = 0$ Punto Crítico no son diferenciales

Para hallar los extremos relativos existen varias pruebas:

Criterio de la 1° derivada

Se determinan los puntos críticos de la función derivando para obtener f'.

Los puntos críticos de f (aquellos donde $f'(c) = 0$ o no exista). Construir los diagramas de signos para cada uno de los intervalos si f es creciente o decreciente.

Determinar el signo de f'a la izquierda y a la derecha de cada punto crítico.

Si f'cambia de + a – al pasar por el punto crítico $x = c$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

Si f'cambia de – a + al pasar por el punto critico $x = c$, entonces $f(c)$ es un minimo relativo

Si f'no cambia de signo al pasar por el punto critico $x = 0$ entonces $f(c)$ no es un extremo relativo,

Para los valores críticos en los cuales f no es continua se analiza la función utilizando la definición de extremos.

3.2 Máximo absoluto y mínimo absoluto

Una función tiene un máximo absoluto en a si $f(a) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de f.

Una función tiene un mínimo absoluto en a si $f(a) \leq f(x)$ para toda x en la función.

Ejemplo

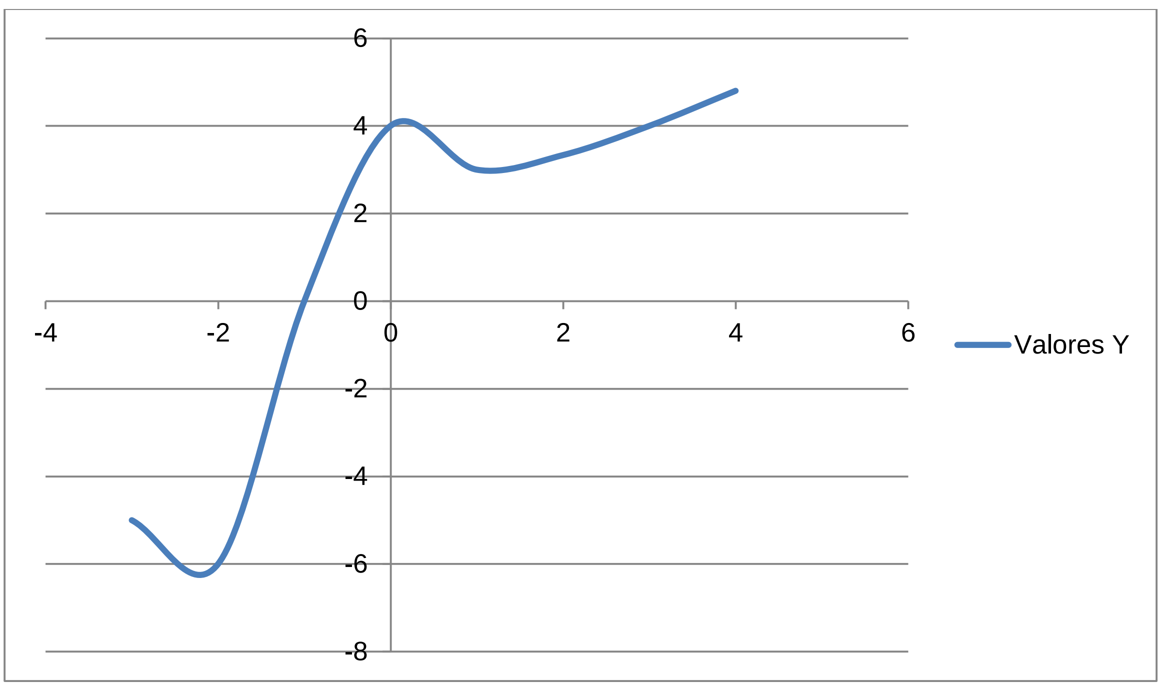
1. $y = x + \frac{4}{x+1}$

$$y' = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+1)}$$

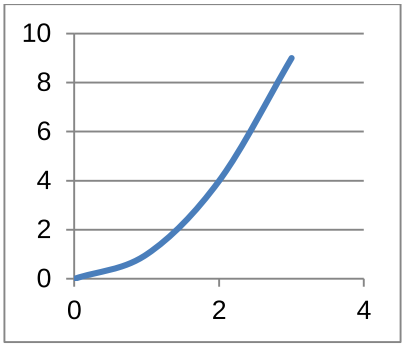
$$y' = 0 \qquad x_1 = -1 = \nexists \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -3$$

$$Máximo = -3 \qquad Mínimo = 1$$

$$f(-3) = -5 \qquad f(1) = 3 \qquad f(-1) = \nexists$$

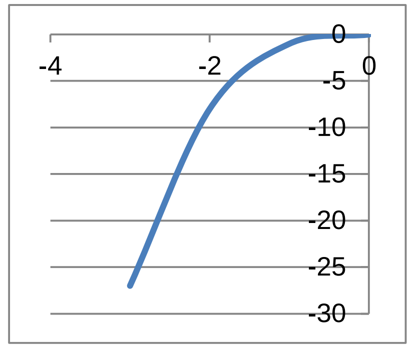


3.3 Aplicaciones de la primera y segunda derivada



Función creciente

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Función decreciente

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Una función creciente se determina en un intervalo (a, b) si para cualquiera de los dos números x_1 y x_2 en un intervalo (a, b) ocurre que $f x_1 < f\ x_2$ siempre que $x_1 < x_2$.

Una función es decreciente en (a, b) si para cualquiera de los dos números x_1 y x_2 en el (a, b) ocurre que $f x_1 > f\ x_2$ siempre que $x_1 > x_2$. Se dice que f es creciente en un punto cualquiera si existe (a, b) que contenga a c tal que f es creciente en el intervalo (a, b). De manera similar se dice que f es decreciente en un punto C si hay un intervalo (a, b) que contenga a C tal que la función es decreciente en (a, b). Dado que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto y la razón de cambio de la función en el mismo punto entonces:

Si $f(x) > 0$ para cada valor de x en (a, b) entonces las función es creciente en (a, b).

Si $f(x) < 0$ para cada valor de x en (a, b) entonces la función es decreciente en (a, b).

Si $f(x) = 0$ para cada valor de x en (a, b) entonces la función es constante en (a, b).

Para determinar los intervalos donde la función es creciente o decreciente se hace lo siguiente:

1) Se determinan todos los valores de x para los que $y´ = 0$ o y´ es discontinua e identificar los intervalos abiertos definidos por tales puntos.
2) Elegir el punto de prueba C en cada uno de los intervalos determinados en el paso 1 y analizar el signo de $f´(c)$ en caso de intervalo.

   Si $f´(c) > 0$ es una función creciente en este intervalo.

   Si $f´(c) < 0$ es una función decreciente en este intervalo.

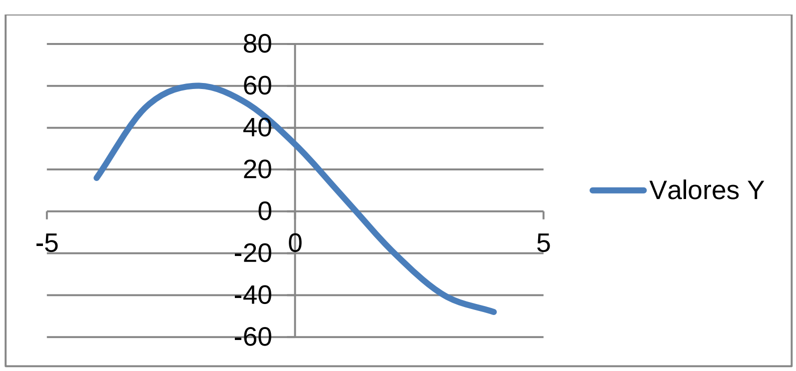
Ejemplo

1. Determine el intervalo donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ es decreciente o creciente y sus intervalos.

$f´(x) = 3x^2 - 6x - 24$ $\qquad$ $x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$

$3x^2 - 6x - 24 = 0$ $\qquad$ $INTERVALOS\ (-\infty, -2)\ (-2,4)\ (4, \infty)$

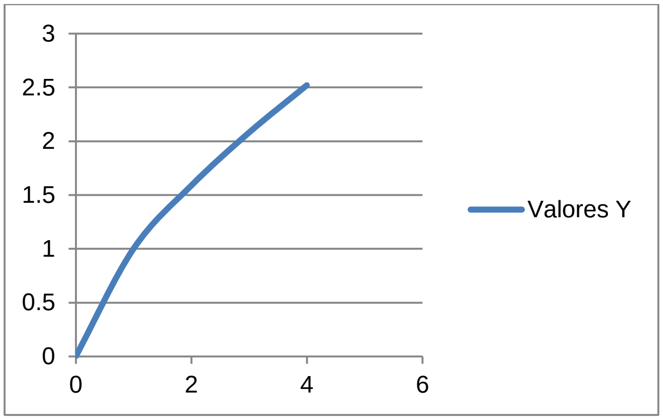
$(3x + 6)(x - 4) = 0$



2. Determine el intervalo y qué sucede en $y = x^{2/3}$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} \qquad\qquad x = 0$$

$Intervalo\ (-\infty, 0)\ \ (0, \infty)\ \ x\ es\ indefinida\ para\ x = 0$



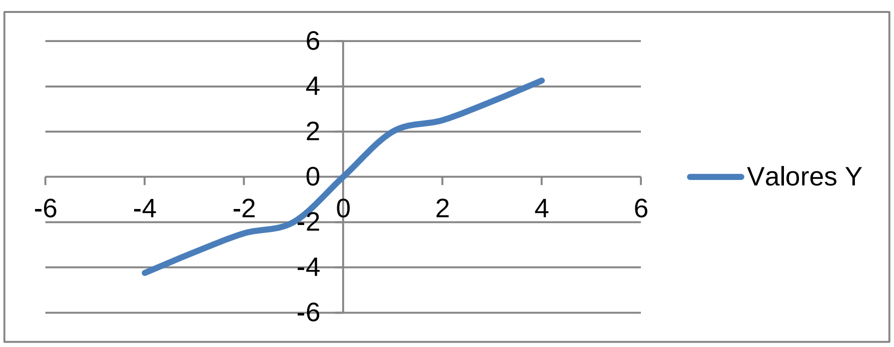
	-∞	-2	4
(X+2)	-	+	+
(X-4)	-	-	+
f´(x)	+	-	+
f(x)			

3. Determine los intervalos de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

	-∞	-1	0	1
x^2	+	+	+	+
(X+1)	-	+	+	+
(X-1)	-	-	-	+
f´(x)	+	-	-	+
f(x)				

$$f´(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$
$$= (x+1)(x-1)$$

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_3 = -1$



Construcción de Curvas

Con la ayuda de la 1° Derivada se pueden construir curvas utilizando las intersecciones, la simetría y la prueba de la primera derivada.

Ejemplo

4. $y = 2x^2 - x^4$

Simetría

$f(-x) =$

$2(-x)^2 - (-x)^4 = 0$

$2x^2 - x^4 = 0$

$No\ cambia\ de\ signo\ es\ simétrica$

Intersecciones

$x_1 = 0 \quad y = 0 \quad (0,0)$

$2x^2 - x^4 = 0$

$x^2(2 - x^2) = 0$

$x_2 = 0$

$x^2\left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right) = 0$

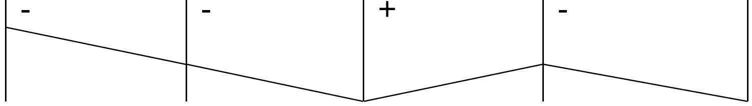
$x_3 = \sqrt{2}$

$x_4 = -\sqrt{2}$

Primera derivada

$\left(-\sqrt{2}, 0\right)(0,0)\left(0, \sqrt{2}\right) = 0 \qquad Intervalos — Puntos\ de\ intersección$

	-∞ a $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ a 0	0 a $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ a ∞
$\left(\sqrt{2} + x\right)$	-	-	+	+
x^2	+	+	+	+
$\left(\sqrt{2} - x\right)$	+	+	+	-
$f(x)$	-	-	+	-



$f'(x) = 4x - 4x^3$

$f(x) = 4x(1 - x^2)$

$$= 4x(1-x)(1+x)$$

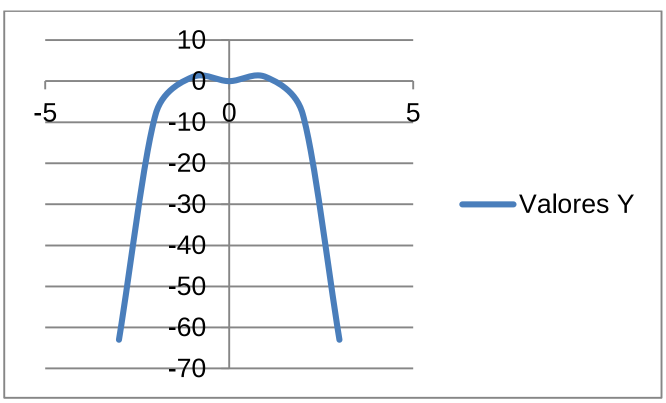
$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 1$ $\qquad$ $x_3 = -1$ $\qquad$ *Puntos críticos*

$f'(x)$	-∞ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a ∞
$(1+x)$	-	+	+	+
$(1-x)$	+	+	+	-
$(4x)$	-	-	+	+
$f'(x)$	+	-	+	-
$f(x)$				

$$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0 \qquad (0,0)$$

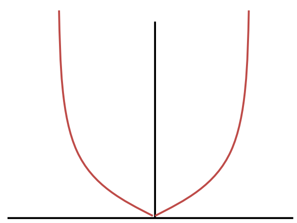
$$f(-1) = 2(-1)^2 - (-1)^4 = 1 \qquad (-1,1)$$

$$f(1) = 2(1)^2 - (1)^4 = 1 \qquad (1,1)$$

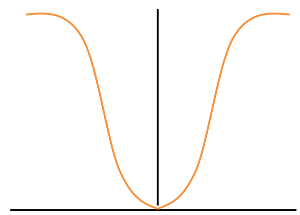


Concavidad

La primera derivada sirve para trazar curvas ya que nos dice cuando la curva es creciente o decreciente y la localización de sus máximos y mínimos relativos. Sin embargo para definir realmente una curva se toma el criterio de concavidad.



$F\,'(x)$



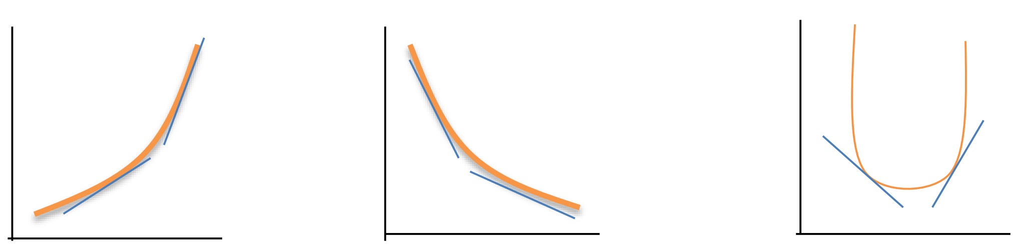
$F\,'(x)$

$$f(x) = x^2$$

Para determinar cuál curva satisface la ecuación se debe verificar hacia donde se "flexiona".

Cóncava hacia arriba:

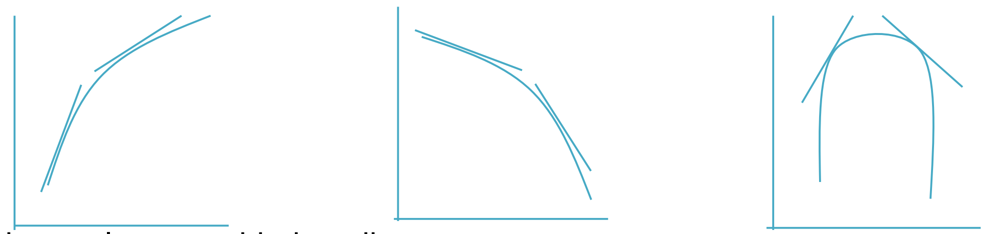
- Las tangentes quedan debajo de la curva y la pendiente aumenta.
- De valores más pequeños a valores positivos más grandes.
- Son negativas y se acercan a cero, por lo tanto crecen.
- Pasan de valores positivos a negativos.



Cóncava hacia abajo:

- La curva se encuentra por debajo de la tangente.

- Las curvas flexionan hacia abajo.
- Cuando “x” aumenta las pendientes son crecientes.



Para obtener la concavidad se dice:

$f''(x) > 0$ para toda “x” en (a, b). CONVEXA

$f''(x) < 0$ para toda “x” en (a, b). CONCAVA

Ejemplo

1. Determine las concavidades de
   a. $y = (x-1)^3 + 1$

$$y' = 3(x-1)^2$$

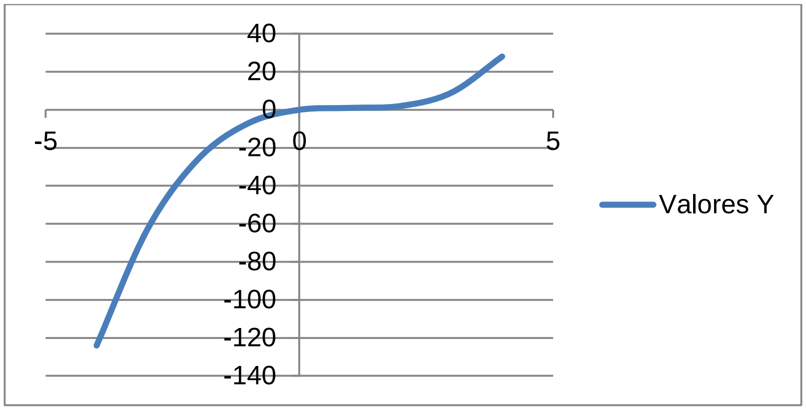
$$y'' = 6(x-1)$$

$$6x - 6 = 0 \qquad x = 1 > 0\ convexa, punto\ de\ inflexión$$

$Int. f'(x)$	-∞		1			∞
$6(x-1)$	-		+			
$f'(x)$	-		+			
$f(x)$	$\cap$		$\cup$			

Punto de inflexión

$f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1$



b. $y = x^3$

$$y' = 2x \qquad y'' = 2 > 0 \ \ convexa$$

El punto donde una gráfica cambia de concavidad se llama punto de inflexión.

Puntos de inflexión

Para encontrar los puntos de inflexión y la concavidad:

1) Se encuentran los valores donde f’’(x)=0 o no está definida.

   Los valores de “x” determinan los intervalos.

   $f''(x) < 0 \quad \cup$

   $f''(x) > 0 \quad \cap$

2) Si el signo cambia alrededor de esos valores entonces es un punto de inflexión.

Ejemplo

1. $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$

$$y' = 24x^3 - 24x^2$$

$$y'' = 72x^2 - 48x \qquad 72x^2 - 48x = 0 \qquad 24x(3x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

$y''(x)$	-∞		0			2/3				∞
$24x$	-		+			+				

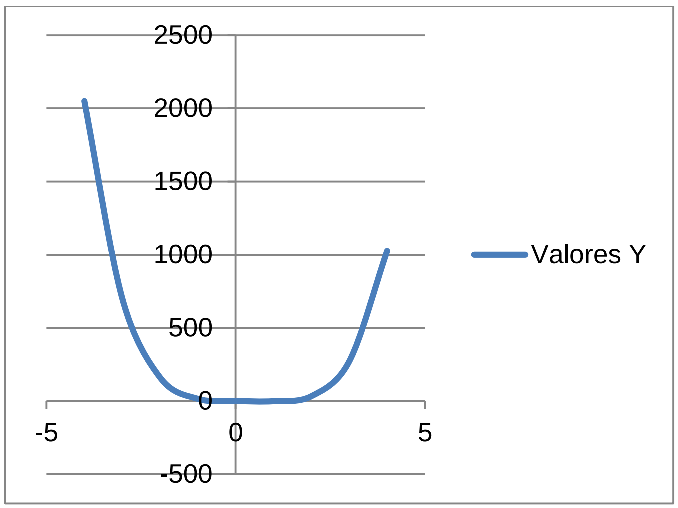
$(3x-2)$	-	-	+
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$$Puntos\ de\ inflexión = \ 0\ y\ 2/3$$

Prueba

$$y(0) = 6(0)^4 - 8(0)^3 + 1 = 1$$

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 1 = -\frac{5}{27} \qquad (0,1)\ \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{27}\right)$$



Prueba de la Segunda Derivada

La segunda derivada se puede utilizar para probar también los puntos críticos correspondientes a los valores extremos relativos.

Para realizarla se hace lo siguiente:

1) Se obtiene $f\,'(x)$ y los puntos críticos.
2) Se hace $f\,''(x)$ y se sustituye.

   Si $f\,''(x) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en a.

   Si $f\,''(x) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en a.

Si $f''(x) = 0$ no sirve la prueba ya que el criterio no es concluyente y para calcular los máximos y mínimos se deberá hacer la prueba de la primera derivada.

Ejemplo:

$y = 18x - \frac{2}{3}x^3$ $\quad 2(9 - x^2) = 0 \quad 2(3 - x)(3 + x) = 0 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -3$

$y' = 18 - 2x^2$

$y'' = -4x$

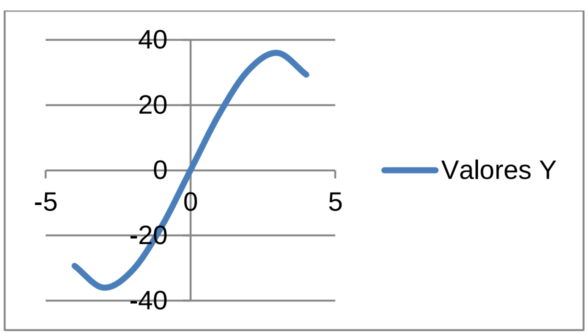
$f(x)$	-∞		0			2/3				∞
$3 - x$	+			+			+			
$3 + x$	-			+			+			
$f'(x)$	-			+			-			
$f(x)$										

$y'' = -4(-3) = 12 \quad min. relativo$

$y'' = -4(3) = 3 - 12 \quad máx. relativo$

$y = -4(-3) = -36 \quad min. relativo$

$y = -4(3) = 36 \quad máx. relativo$

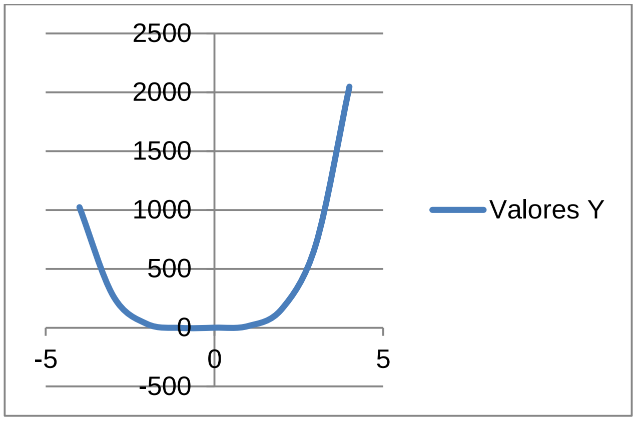


$y = 6x^4 + 8x^3 + 1 \quad 24x^4(x + 1) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -1$

$y' = 24x^3 + 24x^2$

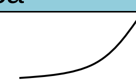
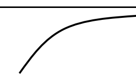
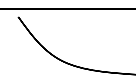
$y'' = 72x^2 + 48x$

$f(x)$	$-\infty$	-1	0	∞
$24x^4$	+	+	+	
$(x+1)$	-	+	+	
$f'(x)$	-	+	+	
$f(x)$				



En resumen $f\,'(x)$ indica los intervalos donde f es creciente o decreciente.

$f''(x)$ indica donde es cóncava o convexa.

Signos de $f\,'$ y $f\,''$	Propiedades de la gráfica de $f(x)$	Forma general de la grafica
$f\,'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	f creciente f cóncava	
$f\,'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	f decreciente f convexa	
$f\,'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	f creciente f convexa	
$f\,'(x) < 0$ $f''(x) < 0$	f decreciente f cóncava	

Guía para trazar curvas

1. Determinar el dominio de f(x).
2. Hallar las intersecciones de f con los ejes.
3. Determinar el comportamiento de f para x con valor absoluto grande.
4. Hallar todas las asíntotas horizontales y verticales de f.
5. Determinar los intervalos donde f es creciente y decreciente.
6. Hallar los extremos relativos de f.

7. Determinar la concavidad de f.
8. Hallar los puntos de inflexión de f.
9. Trazar los puntos como apoyo para graficar.

Ejemplo:

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

$(-\infty, \infty)$

$x = 0 \quad y = 2 \quad (0{,}2)$

$y = 0 \quad x(x^2 - 6x + 9) + 2 = 0$

$x(x-3)(x-3) = -2$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = \pm 1 \qquad (-2{,}0) \quad (1{,}0)$

$f(x)\ no\ tiene\ límite.$

$Es\ una\ función\ polinomial\ y\ no\ tiene\ restricción\ es\ decir,$
$no\ hay\ asíntotas.$

$f(x)$	-∞		1			3				∞
$(x-3)$	-	-	+							
$(x-3)$	-	+	+							
$f'(x)$	+	-	+							
$f(x)$										

$Los\ puntos\ críticos\ son\ x = 3\ y\ x = 1$

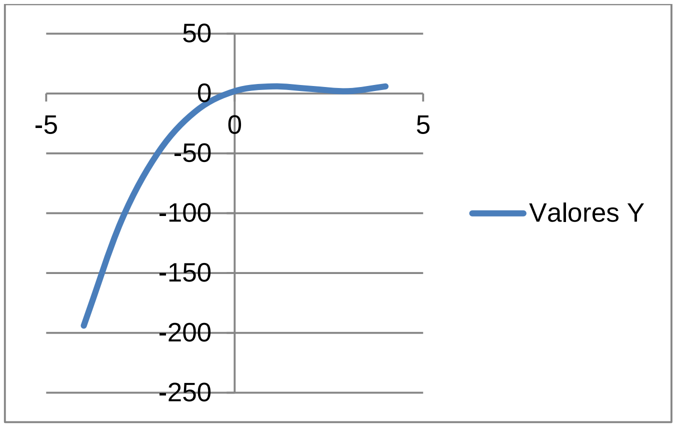
$(1{,}6)\ máx.\ relativo$

$(3{,}2)\ min. relativo$

$y'' = 6x - 12 \qquad x = 2 > 0$

$y''(x)$	-∞		2			∞	
$(6x-12)$	-	+					
$f''(x)$	-	+					
$f(x)$	$\cap$	$\cup$					

$Puntos\ de\ inflexión\ 4 > 0\ \ (82{,}4)\ min. Relativo$


50
0
-5
0
5
-50
-100
-150
-200
-250
Valores Y

Conclusiones

Cada derivada tiene un grado de dificultad que influye en el tiempo de solución de un problema, la mejor forma de mejorar el tiempo que se emplea en resolver dicha derivada es practicar.

A pesar de la existencia de mucha bibliografía e incluso de artículos enfocados a la enseñanza de la derivada, se tiene la ventaja de que las reglas de derivación son las mismas, por lo tanto el resultado de un ejercicio idéntico en diferentes bibliografías siempre debe ser el igual.

El único problema en torno a las derivadas es la simbología que utiliza cada autor, y que crece durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que cada alumno se identifica con la primera simbología aprendida. Por lo tanto, es necesario enseñar a los alumnos la mayoría de simbologías existentes en el cálculo diferencial, para posteriormente llegar a un acuerdo en la utilización del mismo.

La derivada se considera una de las operaciones más importantes cuando estamos estudiando funciones reales, ya que con ella podemos conocer la variación, tanto instantánea como en un valor concreto, de dichas funciones.

Finalmente la aplicación de mayor importancia de la derivada es en los problemas de optimización de funciones.

Bibliografía

Ayres, F., & Mendelson, E. (2001). *Cálculo.* Colombia: Mc Graw Hill.

Budnick, F. (1980). *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales .* Mc Graw Hill.

Dowling, E. T. (s.f.). *Matemáticas para Economistas.* Mc Graw Hill.

Earl, S. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* Iberoamericana.

Hashbarger, R. J. (2004). *Matemáticas Aplicadas A La Administración, Economía Y Ciencias Sociales.* Mc Graw Hill.

Lehmann, C. H. (2004). *Álgebra.* Limusa.

Steward, J. (2012). *Cálculo Conceptos y Contextos.* Cengage Learning.

Tan, S. T. (2013). *Matemáticas Aplicadas a los Negocios, las Ciencias Sociales y de la Vida.* Cengage Learning.

Tan, S. T. (s.f.). *Matemáticas para Economistas* (Tercera ed.). Thomson.

Vigil, E. C. (2004). *Álgebra.* Publicaciones Cultural.