Tiempo de educar, año 5, segunda época, número 10, julio-diciembre de 2004

RIGOR O ENTENDIMIENTO, UN VIEJO DILEMA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL CASO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

José Ismael Arcos Quezada[1]

RESUMEN

El Cálculo infinitesimal, en particular el desarrollado por Leibniz y sus seguidores, a fines del siglo XVII, mostró ser una herramienta sumamente poderosa para la modelación de fenómenos naturales y, por lo tanto, para facilitar el desarrollo de otras ciencias, situación que aún hoy puede apreciarse en textos de ciencias básicas y de la ingeniería.
Sin embargo, a partir de la primera mitad del siglo XIX, y como producto de continuos señalamientos sobre una supuesta falta de rigor, el Cálculo infinitesimal fue sustituido gradualmente por la propuesta de Cauchy, que es la que, con algunas modificaciones, se enseña actualmente en las aulas. Esta sustitución ha tenido efectos negativos en el aprendizaje, que, sin embargo, podrían revertirse si se recuperara, al menos parcialmente, el cálculo infinitesimal leibniziano.

ABSTRACT

1 Ingeniero Mecánico (FIUAEM-1979), Maestro en Ciencias, Matemática Educativa (CINVESTAV-IPN, 1993), Doctor en Ciencias Matemática Educativa (CINVESTAV-IPN, 2000), Institución donde labora: Facultad de Ingeniería, UAEM. Campo de investigación: Enseñanza de las Matemáticas (particularmente del Cálculo) en escuelas de Ingeniería. Área de trabajo: Enseñanza de las Ciencias Básicas. Producción académica más importante: Libro: Cálculo para estudiantes de Ingeniería, FICA-UAEM, dos ediciones, Libro: Cálculo 2 para estudiantes de Ingeniería, FICA-UAEM. Libro: Geometría Analítica para estudiantes de Ingeniería, FICA-UAEM. Libro: Geometría Analítica: Álgebra y Geometría (Cuaderno didáctico no. 5, Grupo Editorial Iberoamérica) Correo electrónico: iarcos@fi.uaemex.mx

The infinitesimal calculus, particularly the one developed at the end of the XVII century by Leibniz and his school, showed to be a powerful tool for modeling the natural phenomena and then for making easy the development of another sciences. This situation could be even nowadays observed in the basic and engineering sciences books.

Nevertheless, before the half of the XIX century, and as a consequence of continuous critics about the lack of strictness of this method, the infinitesimal calculus was substituted by the Cauchy proposal, which is almost the one that nowadays is taught. This substitution has had negative effects in the student's apprenticeship. These negative effects could be reversible if the leibnizian calculus is at least partially recovered.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas existentes en la enseñanza del Cálculo, tanto en el bachillerato como en el nivel superior, es que la presentación normalmente utilizada es la basada en el concepto de límite, la cual resulta poco comprensible para la mayoría de los estudiantes.

Por otra parte, al analizar los textos usados para la enseñanza en las escuelas de ingeniería se puede observar, que en aquellos destinados a la enseñanza de las ciencias, las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales siguen siendo utilizadas, sobre todo en el proceso de modelación, mientras que, en los textos usados para la enseñanza del Cálculo, los infinitesimales, como cantidades fijas, no son utilizados o siquiera mencionados, de manera que el estudiante encuentra que aquel Cálculo que aprendió en los primeros cursos de la licenciatura no es el mismo que normalmente es aplicado en los cursos posteriores.

Por otra parte, como se comentará más adelante, en algunos de los textos escritos para la enseñanza del Cálculo, en el siglo XIX, se aludía a las cualidades didácticas de la propuesta leibniziana, por ejemplo, indicando la importancia de la visualización (recurso de las figuras) como elemento facilitador del aprendizaje de los conceptos básicos del Cálculo.

En contraparte, en la primera mitad del siglo XX se indicaba que, para un buen (riguroso) aprendizaje de las Matemáticas, incluso de la Geometría, se debería prescindir de las figuras. Actualmente resulta raro encontrarse con profesores de Matemáticas que nieguen que la visualización sea un excelente recurso en la enseñanza.

En resumen, si bien es cierto que durante 300 años se han venido señalando algunas debilidades del Cálculo infinitesimal, desde el punto de vista del rigor, al mismo tiempo se han indicado las ventajas que el mismo tiene, tanto en el proceso de modelación, como en el de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, lo que debería ser motivo de reflexión por parte de quienes enseñamos la materia.

Así pues, en este documento se pretende hacer, desde una perspectiva de la enseñanza, una revisión de algunas de las principales presentaciones del Cálculo, centrando la atención en la versión infinitesimalista de Leibniz, de finales del siglo XVII, y contrastarla con la que se presenta actualmente en las aulas, que tuvo sus orígenes en los trabajos de Cauchy y Weierstrass, en el siglo XIX.

EL CÁLCULO LEIBNIZIANO

En sus orígenes, a fines del siglo XVII, y durante las primeras décadas del XVIII, el Cálculo leibniziano se presentó generalmente en un contexto geométrico, aunque desde los primeros escritos de Leibniz se manifestó ya la potencialidad de la nueva herramienta para abordar y resolver problemas de la Física.

En aquel Cálculo resultó un recurso básico la concepción infinitesimalista de las curvas, viéndolas como poligonales con una infinidad de lados, cada uno de ellos infinitamente pequeños. En palabras de L'Hôpital:

Las poligonales inscritas o circunscritas a las curvas, que por la multiplicación infinita de sus lados se confunden finalmente con ellas, han sido siempre tomadas como las curvas mismas. (L'Hôpital, 1696:16)

Atendiendo al término "siempre", podemos asumir que esta concepción estuvo presente en la mente de los matemáticos por mucho tiempo antes, situación confirmada por Russell, a principios del siglo XX:

La noción (de infinitesimal) fue introducida por los griegos que consideraron el círculo como difiriendo infinitesimalmente del polígono con un enorme número de lados muy pequeños. (Russell, 1915:373)

Con base en esta concepción de las curvas se obtuvieron una gran cantidad de resultados relativos a la geometría de las curvas, aunque la manera de exponerlos no siempre fue accesible para todo lector.[2] En particular, esta concepción de las curvas, brindó la posibilidad de obtener la tangente de manera sencilla, mediante un método general para todas las curvas de interés en esos tiempos. Al respecto, Leibniz decía:

Encontrar la tangente, es obtener una recta que une dos puntos de la curva, separados por una distancia infinitamente pequeña, o el lado de un polígono con un número infinito de ángulos, lo que es, para nosotros, equivalente a una curva... (Leibniz, 1684:7)

Además del problema de la recta tangente (que involucraba la solución de problemas de optimización), esta nueva herramienta se usó con mucho éxito en otros problemas geométricos, como el del círculo de curvatura y la cuadratura y rectificación de las curvas, por ejemplo.

[2] Los primeros escritos de Leibniz sobre el Cálculo infinitesimal fueron publicados en las Actas de Leipzig. Debido probablemente a que el destino de las Actas era la comunidad de matemáticos de la época, no se apreciaba mucha preocupación, por parte de Leibniz, en tratar de que sus trabajos resultaran entendibles a otros lectores.

La propuesta de Leibniz tuvo rápidamente muchos adeptos, entre los cuales cabe señalar a los hermanos Jacob y Johann Bernoulli y a un discípulo de este último, el marqués de L'Hopital, quien ahora es reconocido como el autor del primer libro de texto de Cálculo, el Análisis de los infinitamente pequeños.

Ahora bien, mientras que Leibniz no dirigía sus escritos a principiantes, cuando L'Hôpital escribió su Análisis, anunció desde el mismo título que la obra tenía un carácter didáctico, indicando que era "para el entendimiento de las líneas curvas".
Aunque se ha señalado que L'Hôpital publicó además que su propio trabajo, aquel que le comunicaba Johann Bernoulli, cabe pensar que la redacción y organización del contenido, en los que se pueden observar cualidades didácticas, si se deban al marqués. En esta obra, la primera definición se refiere a las cantidades constantes y variables, y en la segunda define la diferencia, que era, por lo tanto, el concepto fundamental del Cálculo leibniziano:

La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente es llamada la Diferencia. Sea AMB, por ejemplo, una línea curva cualquiera que tiene como eje o diámetro a la línea AC y como una de sus ordenadas a la recta PM, y sea pm otra ordenada infinitamente cercana a la primera. Admitido esto, si se trazan MR paralela a AC y las cuerdas AM y Am, y luego se describe, con centro en A y radio AM, el pequeño arco de círculo MS, entonces Pp será la diferencia de AP; Rm la de PM; Sm la de AM, y Mm la del arco AM. Análogamente el pequeño triángulo MAm que tiene como base al arco Mm será la diferencia del segmento AM, y el pequeño espacio MPpm será la diferencia del espacio comprendido por las rectas AP y PM, y por el arco AM. (L'Hôpital, 1696:28)

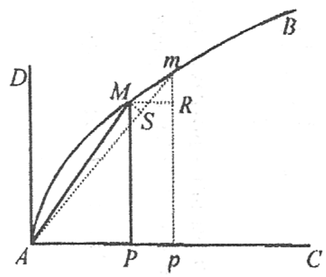

Figura 1

Si hacemos una lectura “moderna” del párrafo anterior, poniendo mucha atención en las ideas expresadas, y no tanta en el rigor (en el sentido actual), podemos hacer varias observaciones, una de las cuales es que la definición dada para la diferencia, y la figura anexa, nos permiten establecer, de manera muy sencilla, las expresiones correspondientes a los elementos de arco y de área bajo la curva, haciendo sólo pequeñas modificaciones en el lenguaje.

En efecto, supongamos que una partícula se mueve en el plano de manera que describe la curva OPW, según se muestra en la figura 2. Supongamos, además, que durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, la partícula se mueve sobre la curva desde el punto P al Q, que, por lo tanto, serán dos puntos infinitamente próximos entre sí.

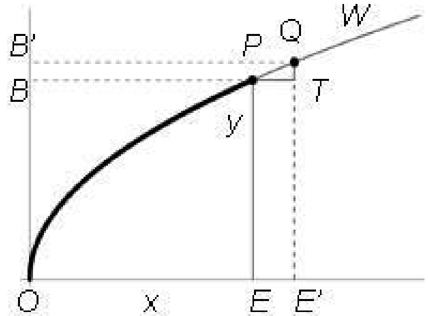

Figura 2

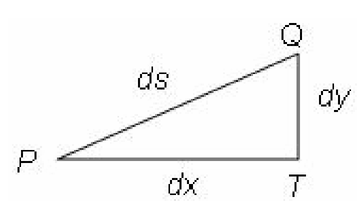

Figura 3

Podemos observar que, mientras eso ocurre, la abscisa ($x = OE$) del punto tiene un incremento (infinitesimal) EE', así que $dx = EE' = PT$. Análogamente, la ordenada ($y = OB$) del punto tiene un incremento BB', es decir, $dy = BB' = TQ$.

También podemos ver que el arco OP de la curva (indicado por un trazo más grueso en la figura 2) tiene como incremento al arco $PQ = ds$. Sin embargo, debido a que estos puntos están infinitamente próximos entre sí, el arco se puede sustituir por la cuerda, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo PTQ (figura 3).

Ahora bien, para dicho triángulo rectángulo tenemos que $PQ^2 = PT^2 + QT^2$, pero $PQ = ds$, $PT = dx$ y $QT = dy$, por lo tanto, el incremento infinitesimal o elemento de arco, será: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Por otra parte, si consideramos el área bajo la curva (figura 4, izquierda), esto es, en el área de la región encerrada por la curva, el eje X y una perpendicular a dicho eje (pueden utilizarse dos rectas perpendiculares al eje, como ocurre usualmente en los textos), tenemos que ésta será el área de la región OEP, cuando la partícula se encuentra en P, y el área de la región OE'Q, cuando la partícula se encuentra en Q, de manera que el incremento de esta área, correspondiente al movimiento de la partícula de P a Q, será el área del trapecio EE'QP, es decir (ver figura 4, derecha):

$$dA = \textbf{área del trapecio } EE'QP = \frac{1}{2}(y + y + dy)\,dx = \frac{1}{2}(2y + dy)\,dx = y\,dx$$

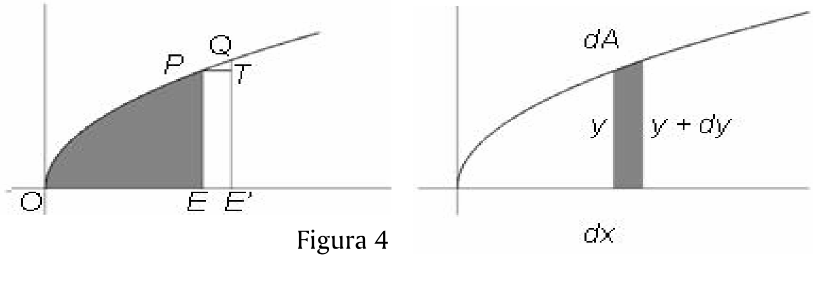

Figura 4

Como vemos, el proceso se realiza en unos cuantos renglones, en cambio, con la presentación actual se requiere de una explicación y justificación muy elaborada que, por lo general, termina por confundir al estudiante, y, lo que es más grave, no favorece la comprensión del proceso de integración como el inverso del de la diferenciación.

Por supuesto que se requiere un conjunto de reglas (teoremas) que permitan hacer operaciones aritméticas entre cantidades finitas e infinitamente pequeñas. Al respecto, L'Hôpital incluía algunos postulados, el primero de los cuales dice:

I. Requerimiento o suposición (postulado)

§2. Se pide que se puedan tomar indistintamente una por otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña, o (lo cual es lo mismo) que una cantidad que no se incremente ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, puede considerarse como que permanece siendo la misma… (L'Hôpital, 1696:29)

Es mediante este postulado que en una suma pueden "despreciarse" todos los términos que sean infinitamente pequeños respecto de otros, que serán los que permanezcan en la suma. Por otra parte, en la definición dada por L'Hôpital podemos observar que la diferencial (o diferencia) de una variable era la medida de un cambio infinitesimal de la misma, y que la variación continua de una variable se podía interpretar como una variación con "saltos" infinitesimales. Esta situación aparentemente contradictoria se describe con más claridad en el Cálculo infinitesimal de Bezout, medio siglo después del Análisis. En esta obra se define diferencial como sigue:

Cuando se considera una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños y se desea conocer el valor de esos incrementos, lo que se presenta como más natural es determinar el valor de esa cantidad para un instante cualquiera y el valor de esa misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente; entonces, la diferencia de estos valores es el incremento (o el decremento) que recibe esa cantidad: a esto es a lo que se llama diferencial de esa cantidad. (Bezout, 1770:14) [3]

Esta definición estableció muy claramente el proceso de la diferenciación. Así por ejemplo, para el caso de la diferenciación del producto de dos variables, Bezout indicó:

Para obtener la diferencial de xy, hay que considerar que x se convirtió en $x + dx$, esto es, se incrementó en la cantidad infinitamente pequeña dx; por su parte, y pasó a ser $y + dy$, esto es, se incrementó en la cantidad infinitamente pequeña dy. El producto xy será entonces $(x + dx)(y + dy)$, esto es $xy + x\,dy + y\,dx + dx\,dy$; por consiguiente, la diferencia de esos dos estados, o sea la diferencial, será $xy + x\,dy + y\,dx + dx\,dy - xy$, o $x\,dy + y\,dx + dx\,dy$, pero para que el cálculo exprese que dx y dy son cantidades infinitamente pequeñas, como se supone, habrá que omitir a $dx\,dy$ la que es una cantidad infinitamente pequeña de segundo orden y, por consiguiente, infinitamente pequeña frente a $x\,dy$ y $y\,dx$, que son infinitamente pequeños de primer orden. Entonces finalmente, la diferencial de xy o $d(xy)$ será $x\,dy + y\,dx$… (Bezout, 1770:15)

Podemos observar, entonces, que la definición leibniziana de diferencial proporcionó, con el auxilio de las reglas referidas, un procedimiento algebraico realmente sencillo para calcular diferenciales, lo que, a su vez permitía obtener la ecuación diferencial definida por una curva o familia de curvas. Además, considerando un instante como un intervalo infinitesimal de tiempo, y siendo la razón de cambio un cociente de incrementos finitos, la razón instantánea de cambio sería, por lo tanto, el cociente de las diferenciales (incrementos infinitesimales). Este es el concepto de razón de cambio

[3] En la presentación de la edición en español (LIMUSA, México, 1999), se indica que la obra original se publicó en 1800 y que el autor nació en 1730 y murió en 1783. Por otra parte, Jean Dhombres, en el prólogo del *Curso de Análisis* de Cauchy, indica que la obra de Bezout se escribió cincuenta años antes "de la época de Cauchy", así que eso pudo ser cerca de 1770.

al que todavía se recurre con frecuencia en textos de ciencias básicas y de la ingeniería.

En cuanto a las diferenciales de orden mayor, Bezout hizo algunas consideraciones importantes, indicando que:

...Cuando se trata de diferenciales segundas, se considera que la variable aumenta por grados desiguales, pero cuya diferencial es infinitamente pequeña frente a estos incrementos mismos; así ddx es infinitamente pequeña frente a esos incrementos mismos...

...Así pues, para tener las diferenciales segundas, hay que diferenciar las diferenciales primeras, según las reglas dadas para obtener estas diferenciales primeras...

…Sucede, a menudo, que en los cálculos donde entran diversas variaciones, se supone constante la diferencial primera de una de ellas, digamos la dx. Esta suposición, que se permite puesto que se puede tomar siempre una de las diferenciales primeras como término fijo de comparación respecto a las otras diferenciales primeras, simplifica los cálculos, … (Bezout, 1770:15)

La suposición de que la diferencial de una de las variables es constante, equivale a considerar esa variable como independiente. En efecto, bajo este esquema infinitesimalista, la velocidad (rapidez) y la aceleración de una partícula en movimiento rectilíneo están definidas por las razones entre diferenciales $v = ds / dt$ y $a = dv / dt$, respectivamente, entonces, al aplicar algunas reglas para la diferenciación (como la del cociente), y considerando dt constante, ya que posición, velocidad y aceleración, son funciones del tiempo, tenemos que:

$$a = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{\frac{dt\ d(ds) - ds\ d(dt)}{(dt)^2}}{dt} = \frac{\frac{dt\ d(ds)}{(dt)^2}}{dt} = \frac{d(ds)}{(dt)^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Aquí, el considerar dt constante, es como decir que el tiempo fluye gradualmente, y que la magnitud constante de ese crecimiento infinitesimal es dt.

EL CÁLCULO DE NEWTON

Se ha indicado (Bos, 1974) que la presentación leibniziana del Cálculo tuvo lugar en un contexto geométrico, sin embargo, sabemos que ésta fue (y continúa siendo) utilizada con éxito en el estudio de fenómenos físicos. Por otra parte, en el caso de la propuesta de Newton, encontramos una presentación en el contexto del movimiento, aunque se manifestara también un interés particular en el estudio de las curvas. En su Tratado de Métodos de Series y Fluxiones, Newton indicaba:

Ahora se deben presentar algunos problemas, especialmente los que se refieren a la naturaleza de las curvas, para ilustrar este arte analítico. Primero se observará que todas las dificultades se pueden reducir tan sólo a los siguientes dos problemas:

1. Dada de manera continua la longitud del espacio recorrido, esto es, en todo instante de tiempo, encontrar la velocidad de movimiento en cualquier tiempo propuesto.

2. Dada de manera continua la velocidad del movimiento, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo propuesto. (Newton, 1671:81)

Así pues, Newton indicó la existencia de sólo dos tipos de problema, los cuales daban lugar al Cálculo diferencial (el primero) y al Cálculo integral (el segundo).

Ahora bien, en lugar de referirse a la velocidad como una razón entre incrementos (infinitesimales), como sucedía en el Cálculo leibniziano, Newton definía primeramente las velocidades:

…para distinguir a las cantidades (…) que crecen indefinidamente, de otras cantidades que (…) serán vistas como conocidas y determinadas y que serán designadas por las letras iniciales a, b, c, etc., en lo sucesivo se les llamará cantidades fluyentes y se les designará por las letras finales v, x, y y z. Y la velocidad con la que fluyen, y con las que son incrementadas por su movimiento generado (que podría llamar fluxiones o simplemente velocidades), se les designará por las letras $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$. (Newton, 1671:82)

De esta manera los incrementos de las variables, que tienen lugar en un intervalo de tiempo infinitesimal resultan ser el producto de las velocidades (fluxiones) y el tiempo en el que ocurren los incrementos. Newton denomina como momentos a tales variaciones:

Los momentos de las cantidades fluyentes, esto es, las partes infinitamente pequeñas con las cuales, al ser añadidas, incrementan en cada periodo infinitamente pequeño de tiempo, son como sus velocidades de flujo. Por lo tanto, si el momento de alguna particular, digamos x, se expresara como el producto de su velocidad $\dot{x}$ y de una cantidad infinitamente pequeña o (esto es, por $\dot{x}o$), entonces los momentos de las otras v, y, z, […], se expresarán por $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, […], viendo que $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ y $\dot{z}o$ son entre sí como $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$. (Newton, 1671:87)

Observemos, pues, que aunque existen notables diferencias entre el Cálculo diferencial de Leibniz y el fluxional de Newton, es claro que en ambos casos las cantidades infinitamente pequeñas resultan ser un recurso básico.

LA REVISIÓN DE LOS FUNDAMENTOS Y LA PROPUESTA DE LAGRANGE

Desde la publicación de los primeros trabajos de Leibniz y Newton se habían señalado las debilidades que supuestamente presentaba el Cálculo infinitesimal, desde el punto de vista del rigor, sin embargo, la obtención continua de nuevos resultados minimizó la preocupación de los matemáticos a ese respecto, tal como lo indicara Russell:

Los grandes descubrimientos del siglo XVII —la geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal— fueron tan fructíferos en nuevos resultados que los matemáticos no tuvieron ni el tiempo ni las ganas de examinar sus fundamentos. (Russell 1915:380)

Sin embargo, a fines del siglo XVIII, los matemáticos observaron que la rapidez con la que se obtenían nuevos resultados en las ciencias por medio del Cálculo estaba decreciendo. En una carta escrita en 1781, y dirigida a D'Alembert, Lagrange dijo:

"Me parece que la mina de las matemáticas es ya muy profunda, y a menos de que alguno descubra nuevas vetas será necesario, en algún momento, abandonarla. La Física y la Química ofrecen ahora una explotación más rica y más fácil…" (Pardo, 2003:33)

Esta situación sugería la necesidad de descontextualizar el Análisis para que éste adquiriera mayor "libertad" y pudiera crecer por sí solo, lo que, a su vez, requería de una profunda revisión de sus fundamentos, en particular en lo referente al recurso de las cantidades infinitamente pequeñas.

Ahora bien, el propio Leibniz era consciente de esa aparente falta de rigor, sin embargo, consideró más importantes las virtudes del Cálculo infinitesimal que sus posibles deficiencias. Así, en referencia a las críticas del matemático holandés Nieuwentyt, Leibniz indicó:

Ciertamente, yo respeto a aquellos que tienden a demostrar todas las cosas siguiendo principios básicos y a establecer el estudio con base en los mismos; sin embargo, yo no aconsejaría que un obstáculo sea tan escrupulosamente puesto al arte de inventar, o que rechazáramos las cosas encontradas bajo tal pretexto, y privarnos a nosotros mismos de sus frutos… (Leibniz, 1695:43)

Por su parte, Newton también recibió críticas hacia su trabajo en el Cálculo infinitesimal, entre las cuales resultaron notorias las del obispo Berkeley. Es como dijo Newman:

No era difícil ridiculizar el concepto de "términos evanescentes"; exponer la absurdidad del infinitésimo: una cantidad mayor que cero, pero tan pequeña que ningún múltiplo de ella alcanza un tamaño mesurable... (Newman, 1956:211-212)

Así pues, cuando a finales del siglo XVIII disminuye la rapidez con la que se obtuvieron nuevos resultados, la falta de rigor presente en el Cálculo infinitesimal se mira con mayor atención, haciendo que los matemáticos hicieran nuevas propuestas.
En ese contexto fue que Lagrange escribió su Teoría de las funciones analíticas, en la que prometía: "(esta obra) contiene los Principios del Cálculo diferencial, desprovistos de toda consideración de los infinitamente pequeños, de los evanescentes, de los límites y las fluxiones, y se reducen al análisis algebraico de cantidades finitas".

En la introducción de dicha obra, Lagrange explicó porqué su propuesta no presentó las deficiencias de las presentaciones disponibles del Cálculo diferencial, específicamente la leibniziana y la newtoniana. Así, respecto de la primera, señaló:

Los primeros geómetras que emplearon el cálculo diferencial, Leibniz, los Bernoulli, L'Hôpital, etc. lo hicieron bajo la consideración de cantidades infinitamente pequeñas de diferentes órdenes, y bajo la suposición de que se pueden ver, como iguales, las cantidades que no difieren entre ellas sino por una cantidad infinitamente pequeña respecto de ellas mismas. Contentos por haber obtenido mediante ese cálculo, de una manera rápida y segura, resultados exactos, ellos nunca se ocuparon en demostrar sus principios. Aquellos que los siguieron, Euler, d'Alembert, etc., buscaron eliminar esa deficiencia, haciendo ver, para aplicaciones particulares, que las diferencias que se supusieron infinitamente pequeñas, deben ser absolutamente nulas, y que sus razones, las únicas cantidades que entran realmente en el cálculo, no son otra cosa que los límites de esas razones entre diferencias finitas o indeterminadas… (Lagrange, 1813:2)

Después expuso las deficiencias de la presentación newtoniana, primeramente, en cuanto al Cálculo fluxional:

Newton, para evitar la suposición de los infinitamente pequeños, consideró las cantidades matemáticas como engendradas por el movimiento, y encontró un método para determinar las rapideces, y más aún, la razón entre rapideces variables con las que las cantidades son producidas; que es lo que se ha denominado, después de él, el método de las fluxiones o el cálculo fluxional, ya que el nombró a tales rapideces como fluxiones de las cantidades. (Lagrange, 1813:3)

Y, enseguida arremetió contra el método de las últimas razones:

También el mismo Newton, en su libro de los Principios, prefirió, por más corto, el método de las últimas razones de cantidades evanescentes, y fue mediante los principios de este método que hizo a final de cuentas las demostraciones relativas a las fluxiones. Pero este método tiene, como el de los límites, del cual he hablado más ampliamente, y que no es propiamente sino una traducción algebraica, el gran inconveniente de considerar las cantidades en el estado en el cual ellas cesan, por así decirlo, de ser cantidades, ya que, si bien se concibe bien la razón de dos cantidades, en tanto que ellas permanecen finitas, esa razón no ofrece más, al espíritu una idea clara y precisa, en el momento en el que devienen, la una y la otra, nulas a la vez. (Lagrange, 1813:4)

Observemos aquí, que cuando habló Lagrange (1813) del método de los límites, se refirió a una "traducción algebraica" del método de las últimas razones. Como veremos más adelante, se siguió hablando así a lo largo de casi todo el siglo XIX, a pesar de que, en la década de 1820, Cauchy propuso una presentación del Cálculo en la que el límite, que sería entonces el concepto fundamental, se definió de manera parecida a como se define en los textos actuales.

Una vez hechos los señalamientos indicados, Lagrange describió el objetivo de su Teoría, indicando que su propuesta tenía el rigor necesario en la matemática, sin desatender la solución de los problemas de la geometría y de la mecánica:

El objetivo de esta Obra es dar la teoría de las funciones, consideradas como primitivas y derivadas; de resolver por esta teoría, los principales problemas del análisis, de la geometría y de la mecánica, concernientes al cálculo diferencial; y dar, mediante la misma teoría, a la solución de estos problemas, todo el rigor de la demostración de los Antiguos. (Lagrange, 1813:6)

Así pues, Lagrange se propuso hacer una presentación del Cálculo totalmente algebraica, que no recurrió a la geometría de las curvas aunque pudo resolver los problemas planteados en ésta, y que tampoco recurrió a las fluxiones, sin embargo, pudo resolver problemas de la mecánica.

Para ello, Lagrange escribió su Teoría en tres partes. En la primera hizo una "exposición de la teoría, con sus principales usos en el análisis", en la segunda habló de la "aplicación de la teoría de las funciones a la geometría", y, en la tercera, de la "aplicación a la mecánica".

Al observar la problemática considerada en sus aplicaciones, tanto en la geometría como en la mecánica, resulta indudable que Lagrange consigue los propósitos planteados. Sin embargo, cabe preguntarse si, eliminando los inconvenientes, que desde el punto de vista del rigor, tuvieron las presentaciones anteriores del Cálculo, esta nueva propuesta resultaría al menos igualmente ventajosa, desde el punto de vista de la enseñanza, que aquellas, en particular, la de Leibniz.

Ahora bien, observando la Teoría, podemos suponer que el aspecto didáctico no era una gran preocupación de Lagrange, ya que no incluye ninguna figura, ni siquiera al tratar los problemas geométricos, a pesar de que una característica de los textos de la época, desde el Análisis de L'Hôpital, era el recurso de las figuras. [4]

[4] De hecho, puede reconocerse un periodo, más o menos entre el medio siglo XVIII y el medio siglo XIX, en el que autores importantes dejaron de utilizar las figuras en las obras dedicadas al Cálculo (o al Análisis).

PRESENTACIONES DEL CÁLCULO A FINES DEL SIGLO XVIII: LAS REFLEXIONES DE CARNOT

Se ha dicho que, hacia fines del siglo XVIII, aumentaron las críticas sobre el Cálculo leibniziano, particularmente en cuanto al uso de las cantidades infinitamente pequeñas, lo que dio lugar al surgimiento de nuevas propuestas, y la eventual sustitución del Cálculo infinitesimal por alguna de ellas.

Preocupado por tal situación, Lazare Carnot escribe sus Reflexiones sobre la Metafísica del Análisis Infinitesimal, en donde expone, con algún detalle, las características de las diferentes versiones que del Cálculo se tenían en la época.[5] Refiriéndose como Análisis Infinitesimal a la propuesta leibniziana, Carnot indicó, en la introducción de sus Reflexiones:

Hay varias maneras de resolver cuestiones que son de la competencia del análisis infinitesimal; y aunque ninguna de ellas parece reunir las mismas ventajas, no es menos interesante conocer cuáles son los distintos puntos de vista desde los cuales los principios de esta teoría pueden ser enfocados; es por esto que yo me propongo aquí echar un vistazo sobre los diversos métodos con los que se cuenta y que la pueden sustituir… (Carnot, 1813:5)

Vemos entonces que, de entrada, Carnot asumió que las distintas presentaciones del Cálculo no son mutuamente excluyentes, de manera que puede ser utilizada una de ellas en lugar de otra. En su libro, describió, en los dos primeros capítulos, los "principios generales del Análisis Infinitesimal", así como algunas de sus aplicaciones, y en el tercero y último, "los Métodos por los que el Análisis Infinitesimal puede ser sustituido".

[5] La primera edición de las *Reflexiones* se publicó en 1797, y la segunda, en 1813. La versión consultada es una reimpresión (1921) de la segunda edición y consta de dos volúmenes, el primero de los cuales contiene los dos primeros capítulos.

Los métodos analizados por Carnot fueron: el de exhaución, el de los indivisibles, el de las indeterminadas (que atribuía a Descartes), el de las primeras y últimas razones o de los límites, el de las fluxiones, el de las cantidades evanescentes (para el que señala como principal representante a Euler) y el de la Teoría de las Funciones Analíticas o funciones derivadas.[6]

Una cuestión que llama la atención, es la indicación de Carnot de que todas las presentaciones antes indicadas son equivalentes entre sí, no siendo más que distintas versiones del método de exhaución de los antiguos griegos:
...los diversos métodos, cuya idea hemos dado en este escrito, no son, para hablar propiamente, sino un mismo método, presentado desde diversos puntos de vista. Siempre es el método de exhaución de los antiguos, más o menos simplificado, más o menos felizmente adaptado a las necesidades del cálculo y reducido a un algoritmo regular… (Carnot, 1813:159)

Sin embargo, estuvo convencido de que la propuesta leibniziana fue la que, desde el punto de vista de la modelación de fenómenos físicos (o de la inventiva, como dijeron en la época), presentó más ventajas. Por otra parte, es claro que para entonces era inminente que, en la búsqueda del rigor, los matemáticos terminaron por desechar los infinitesimales del Análisis, y con ello todo un método con las ventajas señaladas. Esa situación parece haber provocado cierta angustia en Carnot, quien señaló:

El mérito esencial, el sublime, podría decirse, del método infinitesimal, es el de reunir la facilidad de los procedimientos ordinarios de un simple cálculo de aproximación, con la exactitud de los resultados del análisis ordinario. Esta inmensa ventaja se perdería, o al menos, sería fuertemente disminuida, si a este método puro y simple, como el que nos ha dado Leibniz, se deseara, bajo la apariencia de un mayor rigor,

[6] De la *Teoría de las Funciones Analíticas*, de Lagrange, también se publicaron dos ediciones, coincidentemente, en los mismos años que las de las *Reflexiones* de Carnot (1797 y 1813). Es prácticamente seguro, entonces, que la referencia de la *Teoría* (1813) en las *Reflexiones* de Carnot, no haya aparecido en la primera edición.

sustituir por otros menos naturales, menos cómodos, menos conformes a la marcha probable de los inventores…

Si este método es exacto, como nadie lo duda hoy en día, si es a él al que siempre se recurre para las cuestiones difíciles, como todo el mundo conviene, ¿por qué recurrir a medios desviados y complicados para sustituirlo? (Carnot, 1813:73-74)

De acuerdo con el texto, aunque aquí no indicó Carnot a cuál método se refirió en particular en esta interrogante, parece ser que el método referido es el de Lagrange. Ahora bien, si Carnot se mostró preocupado por que el Análisis Infinitesimal leibniziano pudiera ser sustituido por la propuesta de Lagrange, más lo habría estado si hubiese conocido la propuesta de Cauchy. Carnot murió exiliado en 1823; el mismo año en que se publicaron las Lecciones sobre Cálculo infinitesimal, y dos años después de la publicación del Curso de Análisis, ambas obras de Cauchy.

LOS DISTINTOS CÁLCULOS EN LOS TEXTOS DEL SIGLO XIX

Al parecer, la Teoría de Lagrange fue bien recibida por muchos, tanto por eliminar los infinitesimales como por su carácter marcadamente algebraico, en el que una herramienta básica lo fue el desarrollo en serie de potencias de las funciones. Siendo publicada su segunda edición en 1813, pronto aparecieron otros libros cuyos autores adoptaron la propuesta lagrangiana, situación que se dio prácticamente a lo largo de todo el siglo XIX, a pesar de que, a partir de la segunda mitad del mismo, ya eran conocidos los trabajos de Cauchy y Weierstrass.

En México también se percibió la influencia de esta obra, sobre todo porque, al no recurrir a los infinitesimales, se librarían de las consabidas críticas. Uno de los autores mexicanos que, apoyándose en la propuesta lagrangiana, hizo su propia aportación al Análisis, fue Francisco Díaz Covarrubias, quien en su Análisis Trascendente, o Cálculo Infinitesimal, prometió, al igual que Lagrange, enseguida del título, que éste estaba “basado en nuevos principios, independiente de toda consideración de límite y de cantidades infinitesimales o evanescentes".

En la introducción de este libro encontramos algunas cuestiones interesantes. En primer lugar, Díaz Covarrubias habló de "cantidades auxiliares", indicando que, uno de los artificios a los que se recurre en toda ciencia matemática, lo fue el de:

"Introducir en el curso de las investigaciones, ciertas magnitudes cuyo objeto inmediato, siendo únicamente el de facilitar la reducción de cada problema á otro más sencillo, hacen el papel de verdaderas auxiliares y, generalmente, desaparecen luego que se obtiene la relación que se busca entre las magnitudes ó elementos primitivos del problema." (Díaz Covarrubias, 1890:11)

Llama la atención que esta referencia a cantidades auxiliares fue hecha, casi 100 años antes, [7] por Carnot, en sus Reflexiones, pero refiriéndose éste, a que los infinitesimales eran cantidades auxiliares, que "desaparecían" una vez que se hubiera llegado al resultado buscado. En el caso de Díaz Covarrubias, quien eligió no recurrir a los infinitesimales, un auxiliar lo fue, por ejemplo, la derivada de una función en un punto, a la que él llamó coeficiente diferencial.

Las cantidades auxiliares tuvieron, en esta propuesta, una importancia central, al grado de que el mismo Análisis infinitesimal se definió en esos términos:

Teniendo, pues, presente la naturaleza de este sistema de magnitudes subsidiarias, podemos decir que el análisis llamado trascendente o infinitesimal tiene por objeto introducir en los cálculos ciertas cantidades auxiliares, con el fin de facilitar el establecimiento de las ecuaciones entre los diversos elementos de una cuestión, dando en seguida métodos para eliminar los auxiliares, á fin de obtener las relaciones que se buscan entre las cantidades principales del problema. (Díaz Covarrubias, 1890:20)
Por otra parte, también llama la atención que, si bien es palpable el recurso de las series de potencias como herramienta básica, lo que nos

[7] Se consultó la segunda edición de la obra de Díaz Covarrubias, publicada en 1890.

indica una cierta inclinación por la propuesta lagrangiana, también se presentan elementos del cálculo newtoniano, por ejemplo, al referirse a las curvas, Díaz Covarrubias dice que:

Toda línea puede suponerse originada por el movimiento continuo de un punto que varía continuamente de dirección… (Díaz Covarrubias, 1890:20)

La obra de Díaz Covarrubias fue claramente reconocida en México. En un texto escrito casi simultáneamente con la segunda edición del Análisis de Díaz Covarrubias, el autor, Manuel Gargollo y Parra decía:

Tres son los sistemas comunmente usados por los autores de Cálculo: el Leibniziano, ó de las infinitesimales; el Newtoniano, ó de los límites; y el de Lagrange, ó de las derivadas algebráicas. A estos tres debe agregarse en México el adoptado por nuestro sabio mexicano el Sr. Díaz Covarrubias, en su apreciable Tratado sobre Análisis Trascendente y que pudiera llamarse de las auxiliares trigonométricas. (Gargollo y Parra, 1882:7)

Aproximadamente medio siglo antes, un autor francés, Boucharlat, manifestó la misma inquietud de tomar elementos de cada una de las tres propuestas; la de los infinitesimales de Leibniz, la de los límites de Newton, y la algebraica de Lagrange, con la finalidad de conformar un contenido más accesible a los estudiantes:

El método de los infinitamente pequeños, no es sino un medio expedito de encontrar los diferenciales de diversas funciones, él grava sus diferenciales en nuestra memoria mediante figuras geométricas reducidas al último grado de simplicidad, y que hablan más a la imaginación que las ideas abstractas; en fin, este método deviene indispensable en las partes altas de la mecánica y la astronomía, en donde, sin él, la resolución de los problemas tendrían una extrema dificultad…

Si el método de los límites complementa al de los infinitamente pequeños, rectificando aquello poco que este último podía tener defectuoso, el método de Lagrange complementa a su vez al de los límites, haciendo depender los coeficientes diferenciales de la pura

Álgebra. Se puede entonces considerar entonces a estos tres métodos como formando uno solo… (Boucharlat, 1858:6-7)

Podemos reconocer, entonces, que para los autores de libros para la enseñanza del cálculo, en el siglo XIX, resultó sumamente importante el aspecto didáctico. Se pretendió tomar los elementos positivos de cada una ellas para conseguir un texto que resultara más accesible para quienes se iniciaban en el estudio de esta ciencia, y, al mismo tiempo, tratar de corregir las deficiencias que, desde el punto de vista del rigor, pudiera tener alguna de ellas.

Veamos otro autor más de fines del siglo XIX, Bowser, quien se manifestó partidario de la presentación infinitesimalista del Cálculo:

El presente trabajo sobre Cálculo Diferencial e Integral está diseñado como un libro de texto para bachillerato y escuelas científicas. El propósito ha sido el de exhibir la materia de una manera concisa y simple aunque consistente con el rigor de la demostración, para hacerlo tan atractivo al principiante como la naturaleza del Cálculo lo permita…

He adoptado el método de los infinitesimales, habiendo aprendido de la experiencia que los principios fundamentales de la materia resultan ser más inteligibles a los principiantes con el método de los infinitesimales que con el de los límites, además de que, en las aplicaciones prácticas del Cálculo, las investigaciones son realizadas totalmente por el método de los infinitesimales. Sin embargo, un conocimiento más profundo de la materia requiere que el estudiante esté familiarizado con ambos métodos, razón por la cual el capítulo III está dedicado exclusivamente al método de los límites… (Bowser, 1928, prefacio)

Así pues, vemos que este autor afirma que su propuesta es entendible pero, a la vez, rigurosa. Además, afirma que “el método de los infinitesimales” es más accesible que el de los límites, aunque reconoce que resulta conveniente estudiar también este último si se requiere “un conocimiento más profundo”.

En el capítulo III, que dedica al "método de los límites", se hace una presentación de los concepto de límite y derivada de una manera, ahora si, más parecida a la de los textos actuales, pero de ninguna manera define el límite con "épsilon y delta". Así pues, podemos decir que este autor el "método de los límites" puede coexistir con otros en el mismo libro. En cuanto a las cantidades infinitesimales y la diferencial, este autor nos dice que:

Una cantidad infinita, o un infinito, es una cantidad que es mayor que cualquier cantidad asignable. Un infinitesimal es una cantidad que es menor que cualquier cantidad asignable. (Bowser, 1928:7)

Si suponemos que una variable, como x, experimenta un cambio, tal cambio es llamado un incremento; el incremento de x es usualmente denotado por Δx, que se lee "diferencia x", o "delta x", donde es tomada como una abreviación de la palabra diferencia…

Cuando el incremento o diferencia se supone infinitamente pequeña, o infinitesimal, es llamada una diferencial, y es representada por dx, que se lee "diferencial x", donde d es una abreviación de la palabra diferencial… (Bowser, 1928:15)

Podemos observar aquí dos cosas, la primera, que la definición para la diferencial coincide con la dada en la época de Leibniz (con más de dos siglos de diferencia) y la segunda, que el autor proporciona una definición para los infinitesimales (y para las infinitamente grandes), aceptándolas como cantidades que, siendo positivas, es decir, mayores que cero, son menores cualquier número real.

Este es probablemente uno de los últimos autores que se atrevió a utilizar los infinitesimales (como cantidades fijas) en un texto de Cálculo. Sin embargo, en textos de ciencias de la ingeniería todavía podemos encontrarlos:

La variación infinitesimal de una propiedad se indicará con el símbolo de la diferencial d antepuesta al símbolo de la propiedad. Por ejemplo, el cambio infinitesimal en la presión de un sistema está dado por dp… (Wark, 1987:12)

Podemos concluir, entonces, que a pesar de las presiones existentes desde sus orígenes, el Cálculo infinitesimal ha mostrado sus bondades, particularmente en el proceso de modelación de fenómenos físicos, a tal grado de que continúa siendo utilizado, al menos parcialmente, en la ingeniería y ciencias físicas.

Sin embargo, y a pesar también de sus ya comentadas virtudes didácticas, el Cálculo infinitesimal fue sustituido, en la enseñanza, por la propuesta de Cauchy, si bien este proceso de sustitución se dio a lo largo de casi un siglo, como se comentará a continuación.

LA PROPUESTA DE CAUCHY Y LA EXCLUSIÓN DE LOS INFINITÉSIMOS

Con la propuesta de Lagrange, a finales del siglo XVIII, comenzaron a explorarse propuestas del Cálculo en las que dejaran de utilizarse las cantidades infinitamente pequeñas. En la tercera década del siglo XIX, Cauchy escribía su Curso de Análisis, en el que utilizaba mucho la terminología infinitesimalista, sin embargo, el infinitesimal ya no era una cantidad fija, sino una variable que decrece convergiendo a cero:

Decimos que una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera a converger al límite cero. (Cauchy, 1823:83)

Así pues, en lugar de cantidades infinitamente pequeñas, en el Análisis de Cauchy vemos "límites y convergencia", términos que subsisten hasta ahora. Por otra parte, como lo indica Jean Dhombres, con la propuesta de Cauchy se adoptó un Cálculo totalmente descontextualizado:[8]

En el Análisis algebraico Cauchy no hace ninguna referencia a la física matemática, a pesar de que él mismo la cultivó con mucho talento, y no parece interesarse en el conocimiento del mundo sensible ni en las

[8] Jean Dhombres escribió la introducción de la edición en español del *Curso de Análisis* de Cauchy, publicada por la UNAM (México, 1994). De tal introducción es de donde se tomo este párrafo.

aplicaciones de la ciencia matemática (…) Si bien no es el primer texto de matemáticas puras, la obra de Cauchy es tal vez la primera, en análisis, que por sus objetivos, no intenta ninguna justificación ajena a las relaciones intrínsecamente matemáticas. Muy sintomática es también la diferencia con manuales como los de Bezout, sus cursos de matemáticas para el uso de la artillería o para el uso de los guardias de la marina, redactados cincuenta años antes, pero editados en la época de Cauchy y en los cuales muchas páginas evocan las aplicaciones, libros en los cuales el cálculo diferencial mismo no se presenta sino como preliminar a la mecánica y sólo para su utilización práctica.

Así pues, a diferencia de Lagrange, quien a pesar de haber hecho una presentación de los conceptos de su teoría de manera descontextualizada, dedicó, sin embargo, el resto de su obra a las aplicaciones a la geometría y a la mecánica, Cauchy no mostró ningún interés en aplicación alguna. El Análisis, por fin, había sido "liberado" de sus aplicaciones.

Ahora bien, el principal impulsor de la propuesta de Cauchy fue Weierstrass, de manera que, actualmente, se habla del modelo de Cauchy- Weierstrass para hacer referencia a esta propuesta, que es, con pequeños cambios, la que se enseña actualmente en las escuelas. De acuerdo con Boyer, fue Heine, bajo la influencia de Weierstrass, quien, en 1872, enunció la siguiente definición de límite:

Si dado cualquier , existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que , entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$. (Citado por Boyer, 1969:696)

Esta es, con insignificantes diferencias en la simbología, la definición de límite que aún se enseña en las escuelas. Y, como indica el mismo Boyer, marcó, de manera definitiva, el fin del recurso de las cantidades infinitamente pequeñas o de puntos moviéndose para generar curvas:

En esta definición fría, precisa y estática ya no hay la menor sugerencia a cantidades que fluyan engendrando magnitudes de dimensiones superiores, ni al menor recurso a puntos moviéndose sobre curvas, ni a despreciar cantidades infinitamente pequeñas. No han quedado nada más que números reales, la operación de sumar y su opuesta la de restar, y la relación «menor que» entre números reales. (Boyer, 1969:696-7)

Así pues, con esta nueva propuesta, el Análisis se vio “liberado” de toda imprecisión, empresa largamente buscada por los matemáticos. Al respecto, a principios del siglo XX, Russell escribía:

Lo infinitesimal jugaba antes un importante papel en las matemáticas. Creció gradualmente en importancia hasta que Leibniz inventó el Cálculo Infinitesimal y pareció transformarse en la noción fundamental de la matemática superior…

El Cálculo requería continuidad, y la continuidad, se pensaba, requería a su vez de lo infinitamente pequeño. Lo cual no era evidentemente igual a cero, pues sumando un número lo bastante grande de infinitesimales hacían un todo finito. Pero nadie podía descubrir una fracción que fuera distinta de cero y además no finita. Era pues un círculo vicioso. Pero al fin Weierstrass descubrió que no se necesitaba en absoluto lo infinitesimal y que todo podía hacerse sin él. Por consiguiente, no hubo ya necesidad de suponer por más tiempo que tal cosa existía… (Russell, 1915:373)

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN EL SIGLO XX

Si sólo nos limitamos al desarrollo de la Matemática como ciencia, resulta totalmente comprensible que, en la búsqueda del rigor, haya tenido lugar la sustitución del modelo infinitesimal por el basado en el concepto de límite. Sin embargo, cuando nos referimos a la Matemática, y más específicamente al Cálculo, como un lenguaje para el modelado de fenómenos físicos, la eliminación de los infinitesimales ya no parece haber sido un evento tan afortunado.

Si consideramos, además, que actualmente, en nuestro país, sólo el 1% (aproximadamente) de los estudiantes del bachillerato habrán de estudiar ciencias, no parece justificable el utilizar, en la enseñanza del Cálculo, en el nivel medio superior, un modelo que se desarrolló a partir de las necesidades de los profesionales de la Matemática.

Así pues, mientras el modelo infinitesimalista continúa siendo utilizado en otras ciencias básicas y de la ingeniería, en los cursos dedicados a la enseñanza del Cálculo, los infinitesimales han sido totalmente desechados. Como lo indicara Grattan-Guinness:

El planteamiento de CauchyWeierstrass, basado en los límites, se ha convertido naturalmente en la forma habitual de enseñanza en los cursos dedicados al cálculo o al análisis (puro). Sin embargo, en los cursos de mecánica, astronomía, física matemática e ingeniería a menudo se emplea la forma euleriana del cálculo diferencial por su flexibilidad intuitiva en la construcción de los modelos diferenciales de los fenómenos físicos en cuestión...” (Grattan-Guinness, 1991:3)

A partir de esta experiencia puede afirmarse que, cuando el rigor lógico es requisito para el desarrollo de una ciencia, como es el caso de la Matemática, y esa ciencia se pretende llevar a las aulas, con toda esa carga de rigor, habrá de presentarse una disyuntiva entre el rigor y el entendimiento, tanto en el momento de escribir los textos como en la presentación de los mismos en las aulas.

Si además se pretende enseñar la matemática de manera impecable, en cuanto al rigor lógico con el que se presentan y usan los conceptos, tal vez se deberá renunciar a buscar entendimiento por parte de un estudiante promedio.

Al respecto, Russell manifestó, a principios del siglo XX, y haciendo referencia a Los Elementos de Euclides, que no fue posible conciliar, en un solo texto, inteligibilidad y corrección:

Un libro tendría que tener inteligibilidad o corrección; combinar ambas es imposible, pero carecer de ambas es no merecer el lugar que Euclides ha ocupado en la educación… (Russell, 1915:380)

Debido, entonces, a este afán por el rigor, la presentación del Cálculo, como tiene lugar en las aulas en la actualidad, presenta otra grave deficiencia: excluye cualquiera de las viejas presentaciones (tal vez exceptuando la de Lagrange), ya que en ésta, como lo indicara Boyer, no caben ni los infinitesimales ni las cantidades evanescentes ni puntos moviéndose para generar curvas o variables fluyendo en el tiempo. Sólo hay números reales y operaciones aritméticas. Esta presentación de los conceptos del Cálculo (como el de límite), aparentemente sencilla, en cuanto a los recursos involucrados, resulta sin embargo, muy poco comprensible para el común de los estudiantes.

La disyuntiva planteada por Russell, entre la corrección y la inteligibilidad, parece ser ineludible en el caso de la enseñanza a futuros profesionales de la Matemática, sin embargo, en el caso de las escuelas de ingeniería, deben ofrecerse opciones en cuanto a la manera de plantear la enseñanza del Cálculo, y tal vez fue Lagrange quien nos haya dado una pista.

En efecto, en su Teoría, Lagrange no definió las diferenciales, sin embargo, supo que los lectores estaban familiarizados con ellas, de manera que, cuando estudió el problema de la rectificación de las curvas, es decir, del cálculo de la longitud de un arco, Lagrange dijo:

… $s' = \sqrt{1 + y'^2}$. Si x y y están dadas en función de otra variable, como t, tenemos que $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Siguiendo el cálculo diferencial, las funciones derivadas s' y y' serán expresadas como $\frac{ds}{dx}$ y $\frac{dy}{dx}$, y la ecuación $s' = \sqrt{1 + y'^2}$ devendrá $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, fórmula conocida para las rectificaciones. (Lagrange, 1813:220)

Por otra parte, en su Mecánica Analítica, escrita más o menos en el mismo tiempo que su Teoría, en la primera parte, dedicada a la estática, Lagrange indicó:

…las líneas rectas iguales a p, q, r, etc., en las direcciones de sus potencias; y designemos, en general, por dp, dq, dr, etc., las variaciones, o diferencias de esas líneas, en tanto que ellas pueden resultar de un cambio cualquiera, infinitamente pequeño…(Lagrange, 1788:24)

Observemos que Lagrange aceptó y manejó los infinitesimales como en el cálculo leibniziano. Sin embargo, el recurso de este Cálculo para el tratamiento de problemas de la Mecánica se manifestaría más claramente en la segunda parte de libro, dedicada a la dinámica:

…la invención del cálculo infinitesimal puso a los geómetras en posibilidades de reducir a ecuaciones analíticas las leyes del movimiento de los cuerpos… (Lagrange, 1788:208)

…esta fuerza debe ser medida por la razón entre crecimiento o decrecimiento de la velocidad durante un instante cualquiera y la duración de ese instante, es decir, por la diferencial de la velocidad dividida por la del tiempo; y como la velocidad misma está expresada en un movimiento variado, por la diferencial del espacio dividida por la del tiempo, se sigue que la fuerza de la que se refiere será medida por la diferencial segunda del espacio, dividida por el cuadrado de la diferencial primera del tiempo, supuesta constante… (Lagrange, 1788:211)

Así pues, mientras que su Teoría contenía los principios del Cálculo, desprovistos de toda consideración de los infinitamente pequeños y otras cosas, su Mecánica Analítica utilizaba, definitivamente, el cálculo infinitesimal leibniziano.

En mi opinión puede verse una sugerencia implícita en este doble discurso: si se enseña a futuros profesionales de la matemática, debe hacerse énfasis en el rigor, pero si se enseña a personas para quienes el Cálculo será una herramienta (en las escuelas de ingeniería, por ejemplo) o un elemento más bien cultural (como ocurre en el bachillerato), debe procurarse que los estudiantes entiendan lo más claramente posible los conceptos, aún si eso significa renunciar a cierto nivel de rigor.

Respecto de esta posición en la enseñanza, tenemos un ejemplo muy interesante en el texto de Ecuaciones Diferenciales de Simmons, quien en el prefacio manifiesta claramente su punto de vista:

El problema del rigor matemático. En las altas cumbres de la matemática pura, cualquier argumento que pretenda ser una demostración ha de ser capaz de superar las severas críticas de los expertos escépticos. Es una de las reglas del juego y quien desee jugar ha de acatarlas. Más no es éste el único juego de la ciudad...

Hay algunas partes de las matemáticas, quizá la teoría de números y el álgebra abstracta, en las que un alto grado de rigor puede ser aconsejable en todos los niveles. Ahora bien, en ecuaciones diferenciales elementales una insistencia escrupulosa en exactitudes doctrinarias tiende a exprimir el jugo del tema, quedando tan sólo un hollejo enjuto. Mi principal objetivo en este libro es ayudar al estudiante a captar la naturaleza y el interés de las ecuaciones diferenciales, y a tal fin prefiero, sin la más mínima duda, ser ocasionalmente impreciso pero inteligible que adoptar una actitud perfectamente precisa e ininteligible. No tengo interés alguno en edificar una estructura matemática lógicamente impecable en la que las definiciones, teoremas y demostraciones rigurosas se amalgaman entre sí en una mole desafiante que el lector ha de penetrar... (Simmons, 1991:16-17)

A partir de los trabajos de Cauchy y Weierstrass, pero más claramente desde los albores del siglo XX, se ha pretendido dar, en las aulas, una presentación rigurosa del Cálculo, bajo el supuesto de que, de esa manera no sólo se entenderían los conceptos de la materia de una manera correcta, sino que, al exponer los conceptos de una manera abstracta, los estudiantes no los “amarrarían” a un determinado contexto, y estarían habilitados (automáticamente) para entender la aplicación de esos conceptos en cualquiera otra ciencia.

La experiencia nos indica que se ha fracasado rotundamente en la consecución de tal propósito. Los estudiantes promedio no sólo no han sido capaces de reconocer el significado de los conceptos del Cálculo cuando estudian otras ciencias, sin que, incluso, no han aprendido claramente esos conceptos, aún suponiendo que han aprobado los cursos.

Por último debe mencionarse que, a partir de los trabajos de Robinson sobre el Análisis no estándar, hace cuatro décadas, no hay razón para seguir descalificando el uso de los infinitesimales, ya que el Análisis no estándar se fundamenta en un conjunto numérico (los hiperreales) que contiene al conjunto de los números reales como subconjunto y que tiene elementos (positivos) menores que cualquier número real, es decir, cantidades infinitamente pequeñas.

Resulta, por lo tanto, altamente recomendable, que los profesores de Cálculo, al menos en el bachillerato y en las escuelas de ingeniería, trabajemos en el diseño de un curso que recupere las cualidades didácticas del Cálculo leibniziano, a fin de conseguir que los conceptos básicos de la materia sean mejor comprendidos y, a su vez, puedan ser reconocidos y utilizados para acceder al conocimiento de otras ciencias.

COMENTARIOS FINALES

La investigación en educación y la experiencia docente

Es cierto que en un trabajo de investigación en educación no pueden hacerse afirmaciones categóricas recurriendo únicamente a la experiencia docente, sin embargo, ésta si debería ser una fuente y directriz de algunos trabajos de investigación, sobre todo si se desea que el producto de ese trabajo pueda comunicarse a los docentes y motivarlos a la reflexión, así como proporcionarles ideas y sugerencias al respecto de su actividad.

La investigación referente al Cálculo infinitesimal y el análisis no estándar

El presente trabajo tiene sus orígenes, en gran medida, en los seminarios de análisis infinitesimal que tuvieron lugar en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional, a mediados de la década de los 90, bajo la conducción del Dr. Carlos Imaz, quien impulsó significativamente la investigación en esta área.

De hecho, en un documento que el Dr. Imaz escribió para un evento que tuvo lugar en el CINVESTAV, hizo referencia a los trabajos que habíamos realizado algunos de sus tesistas de doctorado: Salat (1993), Kemel (1998), Selem (1998), Camarena (1999) y Arcos (2000).

El haber participado en dichos seminarios, y el haber desarrollado los trabajos de Tesis, tanto de maestría como doctoral, bajo la dirección del Dr. Imaz, seguramente me han llevado a escribir, inconscientemente, algunas cosas que alguno de los colegas mencionados, o el mismo Dr. Imaz, pudieron haber escrito en algún trabajo anterior.

Algo similar debo decir que ocurre cuando hago referencia, por ejemplo, a trabajos como los Elementos de Díaz Covarrubias, de quien habló ampliamente mi colega y amigo Alberto Camacho, en su tesis doctoral.

Investigación para la docencia

Por último quisiera decir que con este documento pretendo mostrar mi punto de vista de lo que puede ser la investigación en el área de la Matemática Educativa, cuando se plantea, como objetivo principal, el de motivar a la reflexión a los compañeros profesores de Cálculo, respecto de su práctica docente, e invitarlos y animarlos a llevar a cabo las acciones que consideren necesarias para mejorar sus cursos.

BIBLIOGRAFÍA

Arcos, I. (2000), *Acerca de la enseñanza del Cálculo en escuelas de ingeniería.* Un acercamiento infinitesimalista. Tesis Doctoral, CINVESTAV IPN, México.

Bezout, E. (1770), *Cálculo infinitesimal,* Limusa-IPN, México.

Boucharlat, J. L. (1858), *Élements de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral,* Mallet-Bachelier, Paris, Francia.

Bos, H. J. M. (1974), *"Differentials, higher order differentials and the derivative in the leibnizian calculus",* Arch. Hist. Exact Sc., 14, p. 1-90.

Bowser, E. (1928), *Differential and Integral Calculus,* Van Nostrand, New York, USA.

Boyer, C. B. (1969), *Historia de la matemática,* Alianza editorial, Madrid, España.

Camarena, P. (1999), *Las funciones generalizadas en Ingeniería,* construcción de una alternativa didáctica. Tesis Doctoral, CINVESTAV IPN, México.

Carnot, L. (1813), *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitesimal,* Gauthier-Villars, París, Francia.

Cauchy, A. L. (1823), *Curso de análisis,* colección MATHEMA, UNAM, México, 1994.

Díaz Covarrubias, F. (1890), *Elementos de Análisis Trascendente,* 2ª edición, Oficina de la Secretaría de Fomento, México.

Gargollo y Parra (1882), *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral,* Imprenta Díaz de León, México.

Grattan-Guinness, I. (1991), "¿Qué es y qué debería ser el cálculo?", MATHESIS, Vol. VII, No. 3, UNAM, México.

Kemel, G. (1998), *El cálculo discreto infinitesimal y la didáctica de la transformada de Fourier.* Tesis Doctoral, CINVESTAV IPN, México. Tesis Doctoral, CINVESTAV IPN, México.

Lagrange, J. L. (1813), *Théorie des fonctions analytiques,* tercera edición, Courcier, Paris, Francia.

Lagrange, J. L. (1788), *Méchanique Analytique*, tercera edición, corregida y aumentada por M. J. Bertrand, Paris, Francia.

Leibniz, W. G. (1684), *"Nouvelle method pour les maxima et les minima,…",* en Jean Peyroux, Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal, Paris, Francia

Leibniz, W. G. (1695), *"Reponse a quelques difficultes…",* Jean Peyroux en Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal, París Francia.

L'Hôpital, Marqués de (1696), A*nálisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas,* colección MATHEMA, UNAM, México.

Newman, J. R. (1956), "*El obispo Berkeley y los infinitésimos".* Artículo (comentario) en El mundo de las matemáticas, vol. I, Grijalbo, Barcelona, España.

Newton, I. (1671), *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones,* colección MATHEMA, UNAM, México,

Pardo, V. (2003), *Lagrange, la elegancia matemática*, colección: La matemática y sus personajes, no. 14, Nivela, Madrid, España.

Russell, B., (1915) *"Los metafísicos y las matemáticas",* vol. 4 de El mundo de las matemáticas, Grijalbo (pp. 368-381), Barcelona, España.

Salat, R. (1993), *Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal del Cálculo.* Tesis Doctoral, CINVESTAV IPN, México.

Selem, E. (1998), n-extensiones propias de $\Re^*$ de cardinales $\aleph_n$. Tesis Doctoral, CINVESTAV IPN, México.

Simmons, G. (1991), *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas,* 2ª edición, McGraw-Hill, México.

Wark, K. (1987), *Termodinámica,* McGraw-Hill, México.