UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS.

NOMBRE DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE:

ECUACIONES DIFERENCIALES

1. INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Responsable: Dr. Jorge Mulia Rodríguez

Junio de 2016

GUIA EXPLICATIVA DE USO GENERAL PARA LA UNIDAD DE APRENDIZAJE ECUACIONES DIFERENCIALES 2016A.

TRAYECTORIA ACADÉMICA

TRAYECTORIA IDEAL (9 SEMESTRES) DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
MATEMÁTICAS BÁSICAS	ÁLGEBRA AVANZADA	ÁLGEBRA LINEAL	PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	MECÁNICA TEÓRICA	INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA CUÁNTICA	FÍSICA CUÁNTICA	FÍSICA NUCLEAR	OPTATIVA 6
FÍSICA CONCEPTUAL	CÁLCULO DIFERENCIAL	CÁLCULO INTEGRAL	ECUACIONES DIFERENCIALES	TERMODINÁMICA	LABORATORIO DE FÍSICA CUÁNTICA	FÍSICA COMPUTACIONAL	ÓPTICA MODERNA	OPTATIVA 7
TÉCNICAS DE LABORATORIO	FÍSICA TÉRMICA	MECÁNICA	CÁLCULO VECTORIAL	CÁLCULO VECTORIAL INTEGRAL	ELECTRODINÁMICA	FÍSICA ESTADÍSTICA	MATERIA CONDENSADA	OPTATIVA 8
COMPUTACIÓN BÁSICA	LABORATORIO DE FÍSICA TÉRMICA	LABORATORIO DE MECÁNICA	ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO	VARIABLE COMPLEJA	MÉTODOS MATEMÁTICOS I	MÉTODOS MATEMÁTICOS II	RELATIVIDAD	OPTATIVA 9
INTRODUCCIÓN A LA FILOSOFÍA DE LA CIENCIA		LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN	LABORATORIO DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO	ÓPTICA	OPTATIVA 1	OPTATIVA 2	LABORATORIO AVANZADO	OPTATIVA 10
	INGLÉS I	INGLÉS II		LABORATORIO DE ÓPTICA		OPTATIVA 3	OPTATIVA 4	
							OPTATIVA 5	

UNIDAD DE APRENDIZAJE

Universidad Autónoma del Estado de México

Secretaria de Docencia
Coordinación General de Estudios Superiores
Programa Institucional de Innovación Curricular

Programa de Estudio por Competencias

1. IDENTIFICACIÓN DEL UNIDAD DE APRENDIZAJE

ESPACIO ACADÉMICO : Facultad de Ciencias	
PROGRAMA EDUCATIVO: Licenciatura de Física	**Área de docencia:** Academia de Física
Aprobación por los H.H. Consejos Académico y de Gobierno / **Fecha:**	**Programa elaborado por:** Dr. Máximo A. Agüero Granados Dr. José A. Aguilar Sánchez
Nombre de la Unidad de Aprendizaje: Ecuaciones Diferenciales	**Fecha de elaboración:** 15-02-2006

Clave	Horas de teoría	Horas de práctica	Total de horas	Créditos	Tipo de Unidad de Aprendizaje	Carácter de la Unidad de Aprendizaje	Núcleo de formación
	4	2	6	10	Curso	Obligatorio	Sustantivo

Prerrequisitos	Unidad de Aprendizaje Antecedente recomendada:	Unidad de Aprendizaje Consecuente sugerida:
Conocimiento de calculo diferencial e integral de una variable, álgebra lineal y avanzada.	Se requiere conceptos básicos de la unidad de aprendizaje Variable compleja.	

Programas académicos en los que se imparte:

Licenciatura de Fisica

II. PRESENTACIÓN

VI. ÁMBITOS DE DESEMPEÑO

Instituciones de investigación y estudios superiores. Dependencias y organismos públicos. La industria.

V. NATURALEZA DE LA COMPETENCIA

(Inicial, entrenamiento, complejidad creciente, ámbito diferenciado)

D Inicial M Inicial A Inicial

VI. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

I. Introducción: Generalidades sobre las ecuaciones diferenciales. Aspectos generales sobre las soluciones. Familias de curvas. Trayectorias ortogonales. Las ecuaciones diferenciales (ED) como modelos matemáticos de procesos naturales.

II. Ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden: Ecuaciones homogéneas. Ecuaciones con variables separables, ecuaciones en diferenciales totales. Teorema de existencia y unicidad para la solución. Ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada. Reducción de orden. Aplicaciones

III. Ecuaciones diferenciales lineales de 2er orden: Ecuación homogénea. Uso de una solución conocida para hallar otra. Ecuación homogénea con coeficientes constantes y ecuaciones de Euler. Coeficientes indeterminados. Variación de parámetros. Ecuaciones no homogéneas. Metodo del parámetro pequeño y su aplicación en la teoría de oscilaciones..

UNIDAD DE COMPETENCIA I	ELEMENTOS DE COMPETENCIA			
	Conocimientos	**Habilidades**	**Actitudes**	**Valores**
Introducción	Generalidades sobre las ecuaciones diferenciales. Aspectos generales sobre las soluciones. Familias de curvas. Trayectorias ortogonales. Las ecuaciones diferenciales (ED) como modelos matemáticos de procesos naturales.	Capacidad de análisis, deducción y síntesis	Disciplina en el trabajo y orden.	ser crítico y analítico.

Estrategias Didácticas	RECURSOS REQUERIDOS	TIEMPO DESTINADO
Estrategias Didácticas: Exposición y discusión por parte del profesor. Aprendizaje individual y en grupo. Solución de problemas. Exposiciones orales y trabajos individuales y en equipo.	**RECURSOS REQUERIDOS:** Libros [2, 3,4,5,10,11]. Pizarrón. Proyector de acetatos.	**TIEMPO DESTINADO:** 12 horas

CRITERIOS DE DESEMPEÑO I	EVIDENCIAS		
	DESEMPEÑO	**PRODUCTOS**	**CONOCIMIENTOS**
El estudiante realizará una tarea escrita para reforzar los conocimientos adquiridos.	La ejecución de eficiencia: el alumno maneje el concepto y clasificación de ecuaciones diferenciales antes de proceder a resolverlas.	Tarea escrita	Definición y clasificación de las ecuaciones diferenciales ordinarias.
El estudiante realizará una discusión en donde desarrollara el aprendizaje individual y colaborativo	La ejecución de eficiencia: se refiere a que el estudiante realizará una exposición individual o en equipo ante el grupo de algún modelo de la naturaleza para saber cual es la ecuación diferencial que lo modela.	Exposición oral	Modelación de la naturaleza a través de las ecuaciones diferenciales..

1. INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Ecuación Diferencial (ED): Es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables **dependientes**, con respecto a una o más variables **independientes**.

variable dependiente

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \qquad (1)$$

variable independiente

Las EDs se clasifican por **tipo**, **orden** y **linealidad**.

Clasificación por tipo:

Ecuación diferencial ordinaria (EDO): Una ecuación que contiene sólo **derivadas ordinarias** de una o más variables dependientes de **una sola variable independiente**.

Ejemplo de EDO:

$$\frac{dy}{dx} + y = 4e^{x} \qquad (2)$$

Una EDO puede contener más de una variable dependiente:

$$4\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = (x + y) \qquad (3)$$

Ecuación diferencial parcial (EDP): Una ecuación que contiene **derivadas parciales** de una o más variables dependientes de **dos o más variables independientes**.

Ejemplos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (5)$$

Clasificación según el orden:

El **orden** de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) **es el orden mayor de la derivadas** involucradas en la ecuación.

Ejemplo:

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{Segundo orden}} + \Bigg(\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{Primer orden}}\Bigg)^9 + y = 3e^x \qquad (6)$$

EDO de segundo orden.

En forma diferencial las EDO se describen como:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (7)$$

Ejemplo, supongamos que *y* es la variable dependiente y *x* la independiente en la EDO en forma diferencial:

$$(y+4x)dx + 4xdy = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$(y+4x) + 4xy' = 0 \qquad (8)$$

Grado de una ED

El grado de una ecuación diferencial es **el grado algebraico de su derivada de mayor orden**. Es decir, el grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que esta elevada la derivada que nos da el orden de la ecuación diferencial.

Ejemplo: La siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 4e^x \qquad (9)$$

Es de **segundo orden** y de **tercer grado**, dado que la segunda derivada, que nos da el grado de la EDO, está elevada a tres.

Ejercicio 1: Determinar el grado de las siguientes ecuaciones:

$$(a)\qquad \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 3x^2 + 7$$

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 7x\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = x^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$$

Ejercicio 2: Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \qquad 4\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y$$

$$(b) \qquad \frac{4}{5}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 6x + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5$$

$$(c) \qquad \sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}}\,{}' + x = \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Clasificación según la linealidad:

Se dice que una EDO de orden *n* es lineal si *F* (en la forma general) es lineal en *y, y', y", …, y*$^{(n)}$.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y-g(x)=0 \quad (10)$$

O bien:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \quad (11)$$

Los casos más importantes son las **<u>EDOs lineales de primer y segundo orden</u>**.

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad (12)$$

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad (13)$$

CASOS PARTÍCULARES SEGÚN LA LINEALIDAD

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Lineal homogénea: El término independiente *g(x)* es nulo.

Lineal con coeficientes constantes: Los coeficientes $a_0(x),\ldots,a_n(x)$ son constantes.

Lineal con coeficientes variables: Enfatiza el hecho de que al menos uno de los coeficientes $a_0(x),\ldots,a_n(x)$ NO es constante.

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE UNA ED LINEAL

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

En una **EDO lineal de orden *n***:

1) y, y', y'', …, $y^{(n)}$ son de **primer grado**.
2) Los coeficientes a_0, a_1, …, **dependen solo de la variable independiente x**.

Si no es lineal, es **no lineal**.

Ejemplo de EDOs no lineales:

- El coeficiente depende de *y*.

$$(a) \quad yy' + y = 6e^{x}$$

- Función no lineal de *y*.

$$(b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 4\text{sen}(y) = 0$$

$$(c) \quad \frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 8$$

Ejemplo 1: De las siguientes EDs Encuentre cuales son lineales y cuales son No Lineales

$$(a) \quad \frac{dT}{dt} = K(T_a - T)$$

(b) $ml\ddot{\theta} + kl\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$

$$(d) \quad y' + x^3y + \sin(x)y^2 = x^3 + 3$$

$$(e) \quad y'' + \mu(3 - y^2)y' + y = 0$$

Solución de una EDO

Cualquier función ϕ, definida en un intervalo *I* y con al menos *n* derivadas continuas en *I*, que al sustituirse en una ecuación diferencial ordinaria de *n*-ésimo orden reduce la ecuación a una identidad, se considera solución de la ecuación en el intervalo.

En otras palabras, ϕ posee al menos *n* derivadas y cumple:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \qquad \forall x \in I$$

Al proceso de obtención de las soluciones de una EDO se le denomina **integración de la ecuación**.

Ejemplo 2: Comprobar que la función indicada es la solución de la EDO dada en el intervalo (-∞, ∞).

$$(a)\ \frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \qquad y = \frac{x^4}{16}$$

Solución: Existe la derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{4}$ *para todo x de* (-∞, ∞).

Lado izquierdo $$\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

Lado derecho: $$xy^{1/2} = x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = x\frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$$

La igualdad se cumple para todo x de (-∞, ∞).

$$(b) \quad y'' - 2y' + y = 0; \qquad y = xe^{x}$$

Derivando la solución dos veces:

$$y' = xe^{x} + e^{x}$$

$$y'' = xe^{x} + 2e^{x}$$

$$y'' - 2y' + y = (xe^{x} + 2e^{x}) - 2(xe^{x} + e^{x}) + xe^{x} = 0$$

Nótese que *y(x) = 0* también es solución tanto de este ejemplo como del anterior en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Se conoce como **solución trivial**.

Ejemplo 3: Comprobar que $y = x^2 + C$ no es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Solución: Derivando $y = x^2 + C$ tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Sustituyendo el valor de la derivada encontrada en la ecuación diferencial tenemos:

$$2x = x$$

$$2 \neq 1$$

Por lo tanto $y = x^2 + C$ no es solución $\frac{dy}{dx} = x$ de la ecuación diferencial

Ejercicio 3: Determine si cada ecuación es solución o no de la ecuación diferencial dada:

1 $y = x^2 + Cx; \qquad x\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = x^2 + y$

2. $y = Asen(5x) + B\cos(5x); \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$

3. $y = C(x - C)^2; \qquad \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + 8y^2 = 0$

4. $y = C^2 + Cx^{-1}; \qquad y + xy' = x^4(y')^2$

5. $y = 8x^5 + 3x^2 + C; \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 6 = 160x^3$

Ejemplo 4: Encuentre la ED cuya solución general es $y = Cx^2$.

Solución: Observemos que sólo aparece una constante de integración, de manera que derivamos una sola vez la solución general $y = C x^2$. Así

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx$$

Despejamos C de la solución general y se sustituye el valor encontrado en la ED.

$$C = \frac{y}{x^2} \qquad \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x^2}\right)x$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Es la ED de la solución general, puesto que ya no aparecen constantes de integración.

Ejercicio 4: Encuentra la ED de cada una de las siguientes soluciones generales:

$$(a) \quad y = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x}$$

$$(b) \quad y = 3\tan(x + C)$$

$$(c) \quad (x - k_1)^2 + y^2 = k_2^2$$

Solución explícita de una EDO:

La variable dependiente está expresada solamente en términos de variables independientes y constantes.

Por ejemplo, la solución de $xy' + y = 0$ en *(0, ∞)* es $y = \emptyset(x) = 1/x$.

Solución implícita de una EDO

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una EDO en un intervalo *I*, siempre que exista al menos una función $y = \emptyset(x)$ que satisface tanto la relación como la ED en *I*.

PROBLEMAS DE VALORES INICIALES (PVI)

Encontrar la solución $y(x)$ de una ED que además satisfaga condiciones adicionales en $y(x)$ y en sus derivadas.

Ejemplo: en un intervalo *I* que contiene a x_o

Resolver
$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

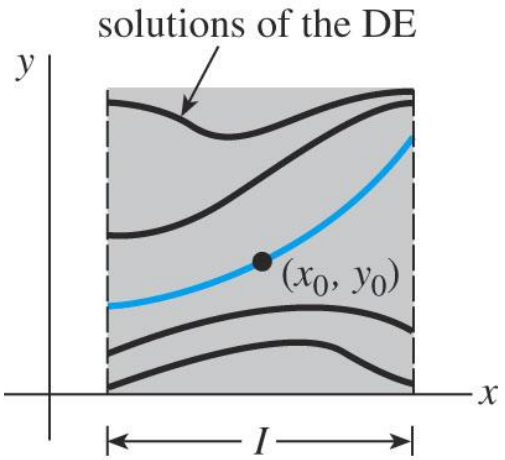
Con condiciones
$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

A esto se le llama **problema de valor inicial**. Y a las condiciones se las llama: **condiciones iniciales**.

PVIs de primer y segundo orden:

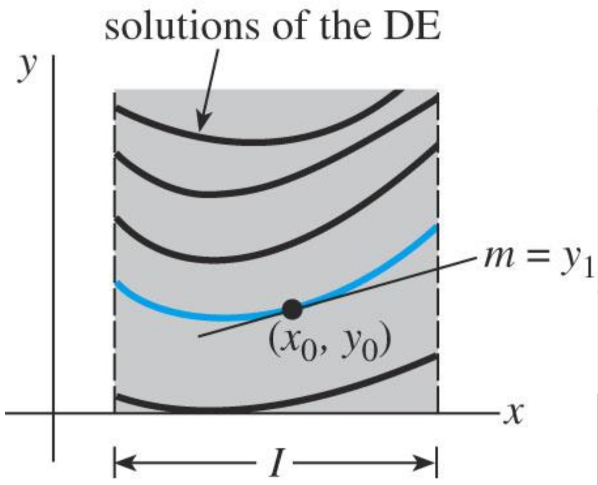
Resolver: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

sujeta a: $y(x_0) = y_0$



Resolver: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$

sujeta a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$



son problemas de valor inicial de **primer y segundo orden**, respectivamente. Fácilmente interpretables de manera geométrica, como vemos en las figuras.

Ejemplo 5: $y = Ce^{x}$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO:

$y' = y$ en (-∞, ∞).

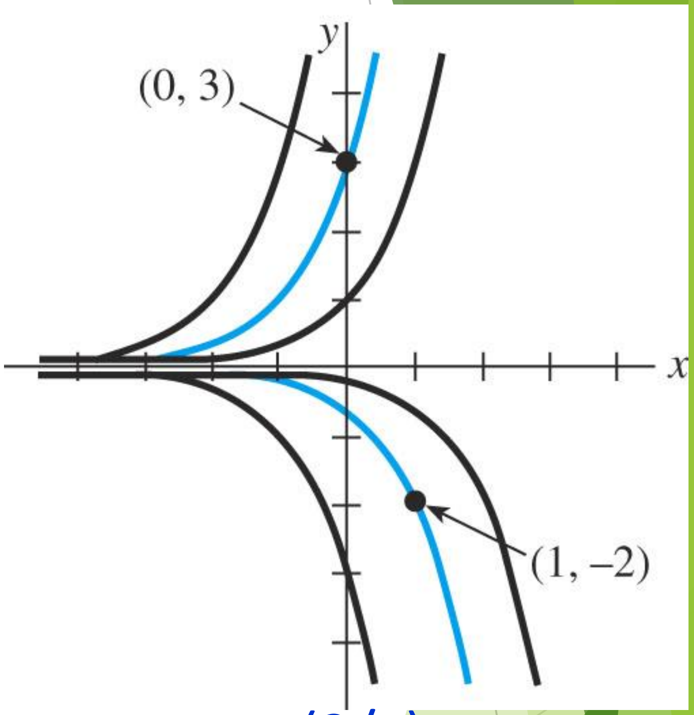
Si $y(0) = 3$, entonces

$3 = Ce^{0} = C$. Así $y = 3e^{x}$ es una solución de este problema de valor inicial.

Si queremos una solución que pase por (1, -2), entonces la condición es: $y(1) = -2$. De modo que .$2 = Ce$,

$C = -2e^{-1}$. Y tenemos $y = -(2/e)e^{-x.}$

$y = 3e^{x}$



$y = -(2/e)e^{x}$

Ejemplo 6: Sabiendo que $x = c_1\cos(4t) + c_2\text{sen}(4t)$ es una solución de $x'' + 16x = 0$.
Hallar una solución del siguiente PVI:

$$x'' + 16x = 0;\ x(\pi/2) = -2;\ \ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Solución: Sustituimos: $x(\pi/2) = -2$ en

$x = c_1\cos(4t) + c_2\text{sen}(4t)$,

y obtenemos $c_1 = -2$.

De la misma manera, a partir de $x'(\pi/2) = 1$ obtenemos $c_2 = ¼$. La solución pedida es:

$$x = -2\cos 4t + ¼\ \text{sen}\ 4t$$

Trayectorias Ortogonales

- *Las trayectorias ortogonales* son las curvas que se intersectan formando un ángulo recto.

Para obtener las trayectorias ortogonales de una ecuación diferencial, se toma: $m_1 = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$, como $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Entonce
s

$m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x,y)}$ de la trayectoria ortogonal a la primera ecuación.

Existencia e unicidad

Al resolver un problema de valor inicial surgen dos asuntos fundamentales:

¿Existe una solución al problema ?, si la hay ¿es única?

Para un problema de valor inicial , en una ecuación, se pregunta lo siguiente:

Existencia:

¿La ED $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tiene soluciones?

¿Alguna curvas solución pasa por el punto (x_{0}, y_{0})?

Unicidad:

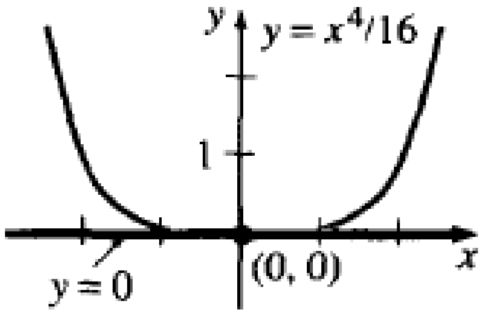
¿Cuándo podemos estar seguros que hay precisamente una curva solución que pasa por el punto (x_{0}, y_{0})?.

Ejemplo: Problema de valor inicial con varias soluciones

Ambas funciones $y = 0$ y $y = x^4/16$ satisfacen la ecuación diferencial $dx/dy = xy^{3/2,}$ y la condición inicial $y = 0,$ de modo que el problema del valor inicial

$$dx/dy = xy^{1/2} \quad , \qquad y(0)= 0$$

tiene dos soluciones cuando menos. Como vemos en la figura, la graficas ambas funciones pasan por el mismo punto, (0, 0).



Dos soluciones del mismo problema de valor inicial

BIBLIOGRAFÍA

1. Abell, M. L. y J.P. Braselton. Differential Equations with Maple V, segunda edición. Academic Press. San Diego, 1999.
2. Blanchard, P. ,R. L. Devaney y G. R. Hall. Ecuaciones diferenciales. Ed. Thomson. México, 1999.
3. Borrelli, R. L. y C. S. Courtney. Differential Equations: A Modeling Perspective. John Wiley & Sons. New York, 1998.
4. Boyce, W. E. y R. C. DiPrima. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ª ed. Edit. Limusa, México, 2000.
5. Braun, M. Differential Equations and their Applications: An Introd. to Applied Mathematics, 4ª ed. Springer-Verlag. New York, 1993.
6. Campbell, S. L. y R. Haberman. Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de frontera. McGraw-Hill. México, 1998.
7. Coddington, E.E. Theory of Ordinary Differential Equations. Krieger Pub Co (June 1, 1984)
8. Edwards, C. H. y D. E. Penney. Ecuaciones diferenciales. 2ª ed. Pearson Educación. México, 2001.