Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Una introducción a las ecuaciones diferenciales fraccionarias

TESIS

que para obtener el título de

MATEMÁTICO

presenta

DAVID FLORES FLORES

Director del trabajo:
DR. ALFREDO CANO RODRÍGUEZ

INTRODUCCIÓN

En los cursos básicos de licenciatura se estudian algunos métodos de derivación e integración. Hemos expresado a las primeras derivadas como $\frac{d^n f}{dx^n}$, donde a n lo hemos tomado como un número natural. También se clasifican y resuelven ecuaciones diferenciales ordinarias donde involucrábamos un operador ordinario $\frac{d}{dx}$ aplicado a una función, y buscando las soluciones de ésta.

Ahora plantearemos estas preguntas: ¿Qué significado tendría $\frac{d^n f}{dx^n}$ donde n es una fracción? Mas aun, ¿tendría sentido pensar algo como $\frac{d^v y}{dx^v} - y = f(x)$, donde v es una fracción? Como podemos ver, esto ya incluye un operador que llamaremos fraccionario. Para esto, usaremos un poco de la teoría que se ha ido desarrollando, utilizando algunos conceptos a los que nos referiremos como cálculo fraccionario.

Nos enfocaremos principalmente en ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales, para las cuales trataremos de buscar métodos para encontrar las soluciones. Se realizarán observaciones y desarrollos análogos a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, involucrando operadores fraccionarios. Usaremos algunas funciones que llamaremos funciones no elementales, las cuales nos permitirán resolver las ecuaciones diferenciales al establecer soluciones con éstas.

En el Capítulo 1 veremos algunas funciones especiales, las cuales nos ayudarán a complementar esta teoría, ya que después las funciones elementales que todos conocemos no nos serán suficientes para ir desarrollando más métodos para resolver las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

La teoría del cálculo fraccionario la abordaremos en los Capítulos 2 y 3. Prestaremos atención a las derivadas de Riemann-Liouville, en la cual a partir de ésta desarrollaremos la teoría y pondremos algunos ejemplos.

Finalmente, en el Capítulo 4 abordaremos el enfoque desarrollando ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales. Usaremos las funciones vistas en el capítulo 1 para resolver estas ecuaciones utilizando la técnica de la transformada de Laplace. Encontraremos un conjunto de soluciones linealmente independientes para las ecuaciones de tipo homogéneo, introduciremos algunos conceptos de la teoría de EDO como la función de Green, y también colocaremos un método involucrando ecuaciones diferenciales ordinarias.

Índice general

Capítulo 1

LA INTEGRAL FRACCIONAL DE RIEMANN-LIOUVILLE

1.1. DEFINICIONES PRELIMINARES

En este capítulo presentaremos un número de funciones que se han encontrado útiles en el estudio del cálculo fraccional. La función más usada y la que podríamos considerar base es la función gamma, la cual generaliza al factorial, y es usada en muchas ocasiones en integración y diferenciación fraccional. También varias de estas funciones surgen al derivar e integrar en un orden fraccional algunas funciones estándar, y también las usaremos para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias.

1.1.1. FUNCIÓN GAMMA

La interpretación mas básica de la función gamma es simplemente la generalización del factorial para todos los números reales. Se define de la siguiente forma.

Definición 1.1. *La* ***función gamma*** *se define para todo número positivo* x *de la siguiente forma*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

A continuación daremos algunas propiedades de ésta función que nos serán de utilidad. Inmediatamente podemos ver que integrando por partes se tiene que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.1}$$

Si n es un entero, entonces

$$\Gamma(x+n)\Gamma(-x-n+1) = (-1)^n \Gamma(x)\Gamma(1-x). \tag{1.2}$$

Ahora, si n es un entero positivo, entonces

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1) = n!.$$

Así, vemos que

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{1.3}$$

Entonces, por ejemplo, podemos escribir el coeficiente binomial dados x e y no necesariamente enteros positivos como

$$\binom{-x}{y} = \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(y+1)\Gamma(1-x-y)}. \tag{1.4}$$

Si en particular, si y es un entero no negativo, digamos n, usando (1.2) vemos que

$$\binom{-x}{n} = \frac{\Gamma(1-x)}{n!\Gamma(1-x-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(x+n)}{n!\Gamma(x)} = (-1)^n \binom{x+n-1}{n}. \tag{1.5}$$

Además, podemos ver que $\Gamma(1) = 1$.

Varias de las funciones que frecuentemente surgen del estudio del cálculo fraccional se relacionan con la función gamma incompleta.

Definición 1.2. *La **función gamma incompleta** es una función estrechamente relacionada con la anterior y está definida como*

$$\gamma^*(v,t) = \frac{1}{\Gamma(v)t^v} \int_0^t x^{v-1} e^{-x}\, dx$$

con $v > 0$.

1.1.2. FUNCIÓN BETA

Al igual que la función gamma, la función beta se define como una integral definida de la siguiente manera.

Definición 1.3. *Sean x, y números reales positivos. La **función beta** se define como*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Ésta es una función simétrica de ambos argumentos, es decir, $B(x,y) = B(y,x)$. La función beta también puede ser definida en términos de la función gamma (véase [1])

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.6}$$

También consideraremos la función beta incompleta $B_q(x,y)$. Ésta es definida para $x > 0$, $y > 0$ y $0 < q < 1$ como

$$B_q(x,y) = \int_0^q t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

1.1.3. FUNCIÓN DE MITTAG-LEFFLER

Esta función es una generalización directa de la función exponencial e^x, y juega un papel importante en el cálculo fraccional. Las representaciones de uno y dos parámetros de la función Mittag-Leffler se pueden definir en términos de una serie de potencias como

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},\ \alpha > 0 \tag{1.7}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.8}$$

La serie definida por (1.8) da una generalización de (1.7), con $\beta = 1$.

En el caso de que α y β son reales positivos, la serie (1.8) converge y es analítica para todo x real (véase [3], [4]).

1.1.4. FUNCIÓN DE MILLER-ROSS

La función $E_x(v,a)$ de Miller-Ross surge cuando se encuentra la integral fraccional de una exponencial e^{ax}, como se verá más adelante.

Definición 1.4. *La* ***función de Miller-Ross*** *está dada de la siguiente forma (véase [2, p, 68])*

$$E_x(v,a) = x^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{\Gamma(v + k + 1)}. \tag{1.9}$$

con a, v y x números reales.

También podemos escribir

$$E_x(v,a) = x^v E_{1,v+1}(ax)$$

Con lo que si $v > -1$, la serie del lado derecho de la ecuación (1.9) converge y es analítica para todo x real.

Pero si v no es un entero no negativo tal que $v < -1$, entonces la función $E_x(v,a)$ converge y es analítica para todo x real, como se puede ver en [13, p. 89,90,94].

Esta función está estrechamente relacionada con la función gamma incompleta de la siguiente forma

$$E_x(v,a) = x^v e^{ax} \gamma^*(v, ax). \tag{1.10}$$

Con lo que para $v > 0$, podemos obtener su forma integral de la siguiente forma

$$E_x(v,a) = \frac{x^v e^{ax}}{\Gamma(v) x^v} \int_0^x y^{v-1} e^{-ay}\, dy,$$

así

$$E_x(v,a) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x y^{v-1} e^{a(x-y)}\, dy. \tag{1.11}$$

Esta función tiene las siguientes propiedades, (véase [7])

$$E_x(0,a) = e^{ax}, \tag{1.12}$$

$$E_0(v,a) = 0,\ v > 0. \tag{1.13}$$

1.2. DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL FRACCIONAL

Empezaremos a trazar el camino para entender y construir las definiciones de una derivada de orden fraccionario y negativo, o como lo llamaremos aquí, una integral de orden fraccionario. Primero empezaremos con un resultado que nos servirá más adelante.

Lema 1.1. *Sea $G(x,y)$ una función continua y acotada en $[c,b]\times[c,b]$, donde $b > x$, entonces*

$$\int_c^x \int_c^{x_1} G(x_1,y)\,dy\,dx_1 = \int_c^x \int_y^x G(x_1,y)\,dx_1\,dy. \tag{1.14}$$

Demostración. De la integral del lado izquierdo de la igualdad, se puede notar que $c < x_1 < x$ y $c < y < x_1$. Partiendo de ambas desigualdades, se tiene que $c < y < x_1 < x$, de donde $c < y < x$. Teniendo esto, del teorema de Fubini, dado que G es continua, podemos cambiar los ordenes de integración, obteniendo la igualdad buscada. □

Partiendo del teorema fundamental del cálculo, vemos que si tenemos una función $f(x)$ continua en un intervalo y si consideramos la función

$$F(x) = \int_c^x f(y)\,dy,$$

entonces la derivada de $F(x)$ es $f(x)$. Con esto podemos ver que la derivada e integral son operadores inversos. Así, en base a lo anterior, podemos inferir una notación como sigue:

$$\frac{d^{-1}f}{d(x-c)^{-1}} = \int_c^x f(y)\,dy.$$

Para $n = 2$, podemos repetir este proceso

$$\begin{aligned}\frac{d^{-2}f}{d(x-c)^{-2}} &= \int_c^x \left(\int_c^t f(y)\,dy\right)\,dt \\ &= \int_c^x \int_c^t f(y)\,dy\,dt.\end{aligned}$$

Así, podemos considerar la siguiente integral [1]

$$\frac{d^{-n}f}{d(x-c)^{-n}} = \int_c^x \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} \cdots \int_c^{x_{n-1}} f(y)\,dy\cdots dx_3\,dx_2\,dx_1. \tag{1.15}$$

[1]En algunos libros se usa la notación: $\frac{d^{-n}f}{d(x-c)^{-n}} = {}_cD_x^{-n}f(x)$

Para nuestros propósitos, la función f la asumiremos continua en el intervalo $[c, b]$ donde $b > x$.

A partir del lema 1.1, haciendo $G(x, y) = f(y)$, podemos escribir lo anterior de la siguiente forma

$$\int_c^x \int_c^{x_1} f(y)\, dy\, dx_1 = \int_c^x \int_y^x f(y)\, dx_1\, dy = \int_c^x (x-y)f(y)\, dy$$

Pero

$$\frac{d^{-2}f}{d(x-c)^{-2}} = \int_c^x \int_c^{x_1} f(y)\, dy\, dx_1,$$

así

$$\frac{d^{-2}f}{d(x-c)^{-2}} = \int_c^x (x-y)f(y)\, dy. \tag{1.16}$$

Con lo que hemos reducido una integral doble a una integral simple. Si $n = 3$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^{-3}f}{d(x-c)^{-3}} &= \int_c^x \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} f(y)\, dy\, dx_2\, dx_1 \\ &= \int_c^x \left(\int_c^{x_1} \int_c^{x_2} f(y)\, dy\, dx_2 \right) dx_1.\end{aligned}$$

Aplicando el lema 1.1 y (1.16) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^{-3}f}{d(x-c)^{-3}} &= \int_c^x \left(\int_c^{x_1} \int_y^{x_1} f(y)\, dx_2\, dy \right) dx_1 \\ &= \int_c^x \left(\int_c^{x_1} (x_1-y)f(y)\, dy \right) dx_1 \\ &= \int_c^x \int_y^x (x_1-y)f(y)\, dx_1\, dy \\ &= \int_c^x \frac{(x-y)^2}{2} f(y)\, dy.\end{aligned}$$

Iterando n veces llegamos a que

$$\begin{aligned}\frac{d^{-n}f}{d(x-c)^{-n}} &= \int_c^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} f(y)\, dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_c^x (x-y)^{n-1} f(y)\, dy.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Usando (1.3), entonces

$$\frac{d^{-n}f}{d(x-c)^{-n}} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^x (x-y)^{n-1} f(y)\, dy. \tag{1.18}$$

El lado derecho de la ultima expresión tiene sentido para cualquier numero q positivo. Así llamamos a

$$\frac{1}{\Gamma(q)} \int_c^x (x-y)^{q-1} f(y)\, dy \tag{1.19}$$

con $q > 0$, la integral fraccional de f de orden q.

Se debe tener cuidado en el uso de la equivalencia

$$\frac{d^n f}{d(x-c)^n} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

con órdenes negativos, porque, por supuesto,

$$\frac{d^{-n} f}{d(x-c)^{-n}} \neq \frac{d^{-n} f}{dx^{-n}}$$

en general.

Cabe destacar que para nuestros propósitos, usaremos la expresión (1.19) cuando $c = 0$, además de ser la versión más utilizada. Más adelante daremos algunos ejemplos cuando $c \neq 0$. Con esto podemos establecer la siguiente definición.

Definición 1.5. *Sea $q > 0$, y sea f una función continua a trozos en $(0, \infty)$ e integrable en cualquier subintervalo finito de $[0, \infty)$. Entonces para $x > 0$ definimos y denotamos como la* ***integral fraccional de Riemann-Liouville*** *(IF) de f de orden q a la siguiente expresión*

$$\frac{d^{-q} f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} f(y)\, dy. \tag{1.20}$$

Denotaremos por C a la clase de funciones con las características descritas en la definición.

Observación: También se suele denotar a la IF como $D^{-q} f(x)$.

Primero empezaremos viendo la propiedad de linealidad de la IF.

Proposición 1.1. *Sean f y g funciones de clase C y a un número real. Dado $q > 0$, entonces*

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}[af(x) + g(x)] = a\frac{d^{-q} f}{dx^{-q}} + \frac{d^{-q} g}{dx^{-q}}.$$

Demostración. De la definición 1.5 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}[af(x) + g(x)] &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1}[af(y) + g(y)]\, dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x a(x-y)^{q-1} f(y) + (x-y)^{q-1} g(y)\, dy.\end{aligned}$$

Usando la linealidad de la integral vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x a(x-y)^{q-1} f(y) + (x-y)^{q-1} g(y)\, dy &= a\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} f(y)\, dy + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} g(y)\, dy \\ &= a\frac{d^{-q} f}{dx^{-q}} + \frac{d^{-q} g}{dx^{-q}}.\end{aligned}$$

□

1.3. ALGUNOS EJEMPLOS

Vamos a calcular la IF de algunas funciones elementales, que nos servirán a lo largo de esto.

Ejemplo 1.1. *Sea $f(x) = x^a$ con $a > -1$. Entonces para $x > 0$ y $q > 0$ tenemos que:*

$$\begin{aligned} \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} y^a \, dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (1 - \frac{y}{x})^{q-1} x^{q-1} y^a \, dy. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable con $y = xu$ llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (1-u)^{q-1} x^{q-1} (xu)^a x \, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} x^{a+q} \int_0^x u^a (1-u)^{q-1} \, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} x^{a+q} B(a+1, q), \end{aligned}$$

donde B es la función beta definida en el capítulo anterior, y usando (1.6) llegamos a

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(q)}{\Gamma(a+q+1)} x^{a+q},$$

con lo que

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+q+1)} x^{a+q}. \tag{1.21}$$

Ejemplo 1.2. *Podemos obtener la IF de una constante K de orden q, de la forma siguiente: Si $f(x) = K$, de la definición 1.5*

$$\begin{aligned} \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} K \, dy \\ &= \frac{K}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} \, dy. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable con $y = x - u$ llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} &= \frac{K}{\Gamma(q)} \int_0^x (u)^{q-1} \, du \\ &= \frac{K}{\Gamma(q)} \frac{x^q}{q} \\ &= \frac{K}{q\Gamma(q)} x^q, \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{K}{\Gamma(q+1)} x^q.$$

Ejemplo 1.3. *Supongamos ahora $f(x) = e^{ax}$, donde a es una constante. De la definición tenemos:*

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} e^{ay}\, dy.$$

Hacemos un cambio de variable $w = x - y$, lo que nos permite obtener

$$\begin{aligned} \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x w^{q-1} e^{a(x-w)}\, dw \\ &= \frac{e^{ax}}{\Gamma(q)} \int_0^x w^{q-1} e^{-aw}\, dw, \end{aligned}$$

notemos que tenemos una integral en términos de la función de Miller-Ross descrita en (1.10)*, por lo que podemos escribir*

$$\begin{aligned} \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} &= x^q e^{ax} \gamma^*(q, ax) \\ &= E_x(q, a). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ejemplo 1.4. *Ahora, sea $f(x) = \cos ax$. De la definición*

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} \cos ay\, dy,$$

hacemos un cambio de variable $w = x - y$, lo que nos permite obtener

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x w^{q-1} \cos a(x-w)\, dw.$$

Podemos escribir esta integral de la siguiente forma

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x w^{q-1} \cos a(x-w)\, dw = C_x(q, a). \tag{1.23}$$

A esta última expresión nos referiremos como Coseno Generalizado. [2, p. 71]

Para $f(x) = \sin x$, haciendo un procedimiento análogo obtenemos que

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x w^{q-1} \cos a(x-w)\, dw = S_x(q, a). \tag{1.24}$$

A esta última expresión nos referiremos como Seno Generalizado. [2, p. 71]

Para calcular explícitamente la IF de una función f depende con frecuencia de realizar la integral (1.20). Sin embargo, debido a la naturaleza del núcleo $(x - y)^{q-1}$, es posible desarrollar ciertas técnicas analíticas que nos permiten calcular la IF de una gran clase de funciones con un mínimo esfuerzo. Veremos una de esas técnicas ahora.

El siguiente procedimiento nos permitirá expresar la IF de x multiplicada por una función $f(x)$ en términos de integrales Riemann-Liouville de f, esto es, si f es de clase C, si $g(x) = xf(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d^{-q}g}{dx^{-q}} &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1}g(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1}yf(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1}(x-(x-y))f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x x(x-y)^{q-1}f(y)\,dy - \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1}(x-y)f(y)\,dy \\
&= \frac{x}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1}f(y)\,dy - \frac{q}{q\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q}f(y)\,dy \\
&= \frac{x}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1}f(y)\,dy - \frac{q}{\Gamma(q+1)}\int_0^x (x-y)^{q}f(y)\,dy;
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos

$$\frac{d^{-q}g}{dx^{-q}} = x\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} - q\frac{d^{-(q+1)}f}{dx^{-(q+1)}}. \tag{1.25}$$

Ejemplo 1.5. *Si $f(x) = e^{ax}$, de la ecuación (1.22) sabemos que*

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = E_x(q,a)$$

con lo que, si $g(x) = xe^{ax}$

$$\frac{d^{-q}g}{dx^{-q}} = xE_x(q,a) - qE_x(q+1,a). \tag{1.26}$$

Ahora daremos algunos ejemplos de IF cuando el límite inferior de integración no es necesariamente cero. Este tipo de IF las denotaremos como $\frac{d^{-q}f}{d(x-c)^{-q}}$. Consideremos entonces

$$\frac{d^{-q}f}{d(x-c)^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_c^x (x-y)^{q-1}f(y)\,dy$$

con $q > 0$, $0 \le c < x$ y donde f es una función de clase C. Haciendo un cambio de variable $y = x(1-t)$ llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{d^{-q}f}{d(x-c)^{-q}} &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{\frac{x-c}{x}} x(xt)^{q-1}f(x-tx)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{\frac{x-c}{x}} xx^{q-1}t^{q-1}f(x-tx)\,dt \\
&= \frac{x^q}{\Gamma(q)}\int_0^{\frac{x-c}{x}} t^{q-1}f(x-tx)\,dt.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, supongamos que $f(x) = x^a$ con $a > -1$ si $c = 0$, y a arbitrario si $c > 0$. Sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^{-q}f}{d(x-c)^{-q}} &= \frac{x^q}{\Gamma(q)} \int_0^{\frac{x-c}{x}} t^{q-1}(x(1-t))^a\, dt \\ &= \frac{x^{a+q}}{\Gamma(q)} \int_0^{\frac{x-c}{x}} t^{q-1}(1-t)^a\, dt \\ &= \frac{x^{a+q}}{\Gamma(q)} B_{\frac{x-c}{x}}(q, a+1)\end{aligned}$$

La cual es la función beta incompleta definida en el capítulo anterior. Si $c = 0$ llegamos al ejemplo 1.1.

1.4. LEY DE LOS EXPONENTES

Anteriormente hemos desarrollado técnicas para encontrar IF de funciones. En esta y en la siguiente sección, desarrollaremos más técnicas adicionales, con lo que podremos encontrar IF de funciones aún más complicadas. Por ejemplo, mostraremos en esta sección que para $q > 0$ y $p > -1$,

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}} E_x(p, a) = E_x(p+q, a).$$

Primero empezaremos viendo un resultado que nos servirá más adelante.

Sea F una función continua en el plano euclidiano, y sean λ, μ, ν números positivos. Entonces

$$\int_a^t \int_a^x (y-a)^{\lambda-1}(t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1}F(x,y)\, dy\, dx = \int_a^t \int_y^t (y-a)^{\lambda-1}(t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1}F(x,y)\, dx\, dy \quad (1.27)$$

Esta integral, que fue empleada primero por Dirichlet, es de importancia en el estudio de ecuaciones integrales. Su prueba la omitiremos, pero la podemos encontrar en [8, p. 77]. Usamos brevemente la fórmula de Dirichlet en el siguiente resultado. En esta sección, vamos a explotar más esta importante fórmula.

Lema 1.2. *Sea $f(x)$ una función continua, entonces*

$$\int_0^t \int_0^x (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1}f(y)\, dy\, dx = B(\mu, \nu) \int_0^t (t-y)^{\mu+\nu-1}f(y)\, dy \quad (1.28)$$

donde B es la función beta.

Demostración. Usaremos (1.27), haciendo $a = 0$, $\lambda = 1$ y $F(x,y) = f(y)$ en (1.27), entonces llegamos a

$$\int_0^t \int_0^x (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1}f(y)\, dy\, dx = \int_0^t \int_y^t (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1}f(y)\, dx\, dy. \quad (1.29)$$

En el lado derecho de la igualdad (1.29), haciendo $x = t - (t-y)u$ llegamos a

$$\int_0^t \int_0^x (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1} f(y)\, dy\, dx = \int_0^t \int_0^1 (t-y)^{\mu+\nu-1} u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1} f(y)\, du\, dy$$

$$\int_0^t \int_0^x (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1} f(y)\, dy\, dx = \int_0^t f(y)(t-y)^{\mu+\nu-1} \int_0^1 u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1}\, du\, dy.$$

Así, de la definición de función beta, llegamos al resultado. □

Ahora probaremos la parte medular de esta sección.

Teorema 1.1. *Sea f una función de clase C, y sean $p > 0$, $q > 0$. Entonces*

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^{-p}f}{dx^{-p}}\right) = \frac{d^{-(p+q)}f}{dx^{-(p+q)}} = \frac{d^{-p}}{dx^{-p}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) \tag{1.30}$$

Demostración. De la definición de IF, podemos ver que

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^{-p}f}{dx^{-p}}\right) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1}\left(\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^y (y-t)^{p-1} f(t)\, dt\right) dy \tag{1.31}$$

y

$$\frac{d^{-(p+q)}f}{dx^{-(p+q)}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^x (x-y)^{p+q-1} f(y)\, dy. \tag{1.32}$$

De (1.31) podemos obtener

$$\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1}\left(\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^y (y-t)^{p-1} f(t)\, dt\right) dy = \frac{1}{\Gamma(q)}\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x \int_0^y (x-y)^{q-1}(y-t)^{p-1} f(t)\, dt\, dy \tag{1.33}$$

Aplicando el lema 1.2 a (1.33), y también aplicando (1.6), podemos ver que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(q)}\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x \int_0^y (x-y)^{q-1}(y-t)^{p-1} f(t)\, dt\, dy &= \frac{1}{B(p,q)\Gamma(p+q)} B(p,q) \int_0^x (x-y)^{p+q-1} f(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^x (x-y)^{p+q-1} f(y)\, dy \\ &= \frac{d^{-(p+q)}f}{dx^{-(p+q)}}.\end{aligned}$$

De forma análoga se prueba la segunda igualdad. □

Del teorema anterior, si $p = 0$ (ó $q = 0$), vemos que $\frac{d^0 f}{dx^0}$ puede ser definido como el operador identidad.

Ahora, sea n un entero positivo, y f una función continua. De la definición

$$\begin{aligned}\frac{d^{-n}f}{dx^{-n}} &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-y)^{n-1}f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-y)^{n-1}f(y)\,dy\end{aligned}$$

Haciendo $p = n$ en el teorema anterior, tenemos

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^{-n}f}{dx^{-n}}\right) = \frac{d^{-(n+q)}f}{dx^{-(n+q)}} = \frac{d^{-n}}{dx^{-n}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right)$$

Vemos, por tanto, que la IF de orden n de $\dfrac{d^{-q}f}{dx^{-q}}$ es la IF de f de orden $n+q$.

Podemos usar el teorema anterior para encontrar la integral de Riemann-Liouville de ciertas funciones no elementales.

Ejemplo 1.6. *Si $f(x) = e^{ax}$, del teorema 1.1 se tiene que*

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^{-p}f}{dx^{-p}}\right) = \frac{d^{-(p+q)}f}{dx^{-(p+q)}},$$

del ejemplo 1.3 se sabe que,

$$\frac{d^{-p}f}{dx^{-p}} = E_x(p,a)$$

y

$$\frac{d^{-(p+q)}f}{dx^{-(p+q)}} = E_x(p+q,a).$$

Con esto podemos establecer la siguiente formula

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}[E_x(p,a)] = E_x(p+q,a). \tag{1.34}$$

La siguiente fórmula la obtendremos usando (1.34) *y* (1.25)

$$\begin{aligned}\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}[xE_x(p,a)] &= x\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}[E_x(p,a)] - q\frac{d^{-(q+1)}}{dx^{-(q+1)}}[E_x(p,a)] \\ &= xE_x(p+q,a) - qE_x(p+q+1,a)\end{aligned} \tag{1.35}$$

con $p > 0$ y $q > 0$.

1.5. PROPIEDADES CON LAS DERIVADAS

Para las IF, mostramos en la sección anterior que

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^{-p}f}{dx^{-p}}\right) = \frac{d^{-p}}{dx^{-p}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right)$$

Ahora desarrollamos una relación similar que involucra derivadas. Pero antes de abordar esto, veremos un resultado, cuya prueba omitiermos, pero podemos encontrar en [9], y que nos servirá más adelante.

Proposición 1.2. *Sea* $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable tal que* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *es continua en* $[a,b] \times [c,d]$. *Sean* $g, h : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *funciones tales que existen y son finitas las derivadas* $\frac{dg}{dy}$, $\frac{dh}{dy}$, *para* $y \in [c,d]$. *Definamos*

$$F(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx$$

para toda $y \in [c,d]$. *Entonces* F *es diferenciable, y además*

$$\frac{dF}{dy} = \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + f(h(y),y)\frac{dh}{dy} - f(g(y),y)\frac{dg}{dy}.$$

Ahora empezaremos viendo un resultado que nos dirá cuál es la derivada ordinaria de una IF y la IF de una derivada ordinaria.

Teorema 1.2. *Sea* f *una función continua en* $[0,\infty)$ *y sea* $q > 0$. *Entonces*

1. *Si* $\frac{df}{dx}$ *es de clase* C,
$$\frac{d^{-q-1}}{dx^{-q-1}}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} - \frac{f(0)}{\Gamma(q+1)}x^q. \tag{1.36}$$

2. *Si* $\frac{df}{dx}$ *es continua en* $[0,\infty)$, *entonces para* $x > 0$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{f(0)}{\Gamma(q)}x^{q-1}. \tag{1.37}$$

Demostración. 1. Sea $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. Entonces $(x-y)^{q-1}$ y $f(y)$ son diferenciables en $[\eta, x-\varepsilon]$. Por integración por partes establecemos que:

$$\frac{1}{\Gamma(q+1)}\int_\eta^{x-\varepsilon}(x-y)^q\frac{df}{dx}(y)\,dy = \frac{1}{\Gamma(q+1)}$$
$$\left[(x-y)^q f(y)\,|_\eta^{x-\varepsilon} + q\int_\eta^{x-\varepsilon}(x-y)^{q-1}f(y)\,dy\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(q+1)}[\varepsilon^q f(x-\varepsilon) - (x-\eta)^q f(\eta)]$$
$$+\frac{q}{\Gamma(q+1)}\int_\eta^{x-\varepsilon}(x-y)^{q-1}f(y)\,dy.$$

Haciendo tender ε y η a cero obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^{-q-1}}{dx^{-q-1}}\left(\frac{df}{dx}\right) &= \frac{1}{\Gamma(q+1)}\int_0^x (x-y)^q\frac{df}{dx}(y)\,dy\\ &= \frac{1}{\Gamma(q+1)}[-x^q f(0)] + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1}f(y)\,dy\\ &= \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} - \frac{f(0)}{\Gamma(q+1)}x^q.\end{aligned}$$

2. De la definición de IF tenemos que

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-y)^{q-1} f(y)\, dy.$$

Haciendo un cambio de variable $y = x - t^{\frac{1}{q}}$, con lo que $dy = -\frac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt$, llegando a lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} &= -\frac{1}{\Gamma(q)} \frac{1}{q} \int_{x^q}^0 (x - x + t^{\frac{1}{q}})^{q-1} f(x - t^{\frac{1}{q}}) t^{\frac{1}{q}-1}\, dt \\
&= \frac{1}{q\Gamma(q)} \int_0^{x^q} (t^{\frac{1}{q}})^{q-1} f(x - t^{\frac{1}{q}}) t^{\frac{1}{q}-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^{x^q} t^{\frac{q-1}{q}} f(x - t^{\frac{1}{q}}) t^{\frac{1-q}{q}}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^{x^q} t^{\frac{q-1}{q}} f(x - t^{\frac{1}{q}}) t^{-\frac{q-1}{q}}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^{x^q} f(x - t^{\frac{1}{q}})\, dt.
\end{aligned}$$

Entonces para $x > 0$, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{x^q} f(x - t^{\frac{1}{q}})\, dt.$$

Aplicando la proposición 1.2 al lado derecho de la igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) &= \frac{1}{\Gamma(q+1)} \left[\int_0^{x^q} \frac{\partial}{\partial x} f(x - t^{\frac{1}{q}})\, dt + f(x^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}) q x^{q-1}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(q+1)} \left[\int_0^{x^q} \frac{\partial}{\partial x} f(x - t^{\frac{1}{q}})\, dt + f(0) q x^{q-1}\right].
\end{aligned}$$

Ahora regresando la transformación de y, obtenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^x (x-y)^{q-1} \frac{df}{dx}(y)\, dt + \frac{f(0)}{\Gamma(q)} x^{q-1}.$$

□

Si aplicamos el teorema 1.2 en el siguiente caso, con $f(x) = x^a$ con $a > 0$, entonces podemos verificar las partes 1 y 2.

Ahora sea $f(x) = e^{ax}$. Entonces (1.36) implica que

$$\frac{d^{-q-1}}{dx^{-q-1}} (ae^{ax}) = \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} - \frac{x^q}{\Gamma(q+1)}.$$

Usando (1.22) tenemos que

$$aE_x(q+1, a) = E_x(q, a) - \frac{x^q}{\Gamma(q+1)}, \tag{1.38}$$

la cual es una expresión que usaremos más adelante.

Aplicando (1.37) para $f(x) = e^{ax}$, tenemos

$$\frac{d}{dx}[E_x(q,a)] = aE_x(q,a) + \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)},$$

reemplazando q por $q-1$ en (1.38) obtenemos

$$E_x(q-1,a) = aE_x(q,a) + \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} = \frac{d}{dx}[E_x(q,a)]$$

además vemos que

$$\frac{d}{dx}[E_x(q,a)] = E_x(q-1,a) \tag{1.39}$$

con lo que obtenemos la derivada para la función E_x.

Ahora veremos lo siguiente. Sabemos que

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}.$$

De la ecuación (1.12) podemos ver que

$$e^{ax} = E_x(0,a),$$

así

$$\frac{d}{dx}[E_x(0,a)] = aE_x(0,a).$$

Por otra parte, de la ecuación (1.39), vemos que

$$\frac{d}{dx}[E_x(0,a)] = E_x(-1,a),$$

con lo que concluimos que

$$E_x(-1,a) = aE_x(0,a). \tag{1.40}$$

Podemos generalizar el teorema 1.2 para derivadas de orden superior.

Teorema 1.3. *Sea n un entero positivo. Sea $\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}$ una función continua en $[0,\infty)$, y sea $q > 0$. Entonces*

1. *Si $\frac{d^n}{dx^n}$ es de clase C, entonces*

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{d^{-q-n}}{dx^{-q-n}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) + Q_n(x,q). \tag{1.41}$$

2. *Si $\frac{d^n}{dx^n}$ es continua en $[0,\infty)$, entonces para $x > 0$*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) + Q_n(x,q-n) \tag{1.42}$$

donde

$$Q_n(x,q) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{q+j}}{\Gamma(q+j+1)} \frac{d^j f}{dx^j}(0). \tag{1.43}$$

Demostración. 1. Procedamos por inducción sobre n.

Para $n = 1$, es la parte 1 del teorema 1.2.

Para $n = 2$, reemplazando q por $q+1$ y f por $\frac{df}{dx}$ en la parte 1 del teorema 1.2, obtenemos

$$\frac{d^{-q-2}}{dx^{-q-2}}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = \frac{d^{-q-1}}{dx^{-q-1}}\left(\frac{df}{dx}\right) - \frac{x^{q+1}}{\Gamma(q+1)}\frac{df}{dx}(0).$$

Ahora reemplazando $\frac{d^{-q-1}}{dx^{-q-1}}\left(\frac{df}{dx}\right)$ en la expresión de la parte 1 del teorema 1.2 obtenemos

$$\frac{d^{-q-2}}{dx^{-q-2}}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = \frac{d^{-q} f}{dx^{-q}} - \frac{f(0)}{\Gamma(q+1)}x^q - \frac{x^{q+1}}{\Gamma(q+1)}\frac{df}{dx}(0).$$

Así

$$\frac{d^{-q} f}{dx^{-q}} = \frac{d^{-q-2}}{dx^{-q-2}}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) + \frac{f(0)}{\Gamma(q+1)}x^q + \frac{x^{q+1}}{\Gamma(q+1)}\frac{df}{dx}(0).$$

Supongamos que el resultado se cumple para $n-1$, es decir

$$\frac{d^{-q} f}{dx^{-q}} = \frac{d^{-q-(n-1)}}{dx^{-q-(n-1)}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{q+k}}{\Gamma(q+k+1)}\frac{d^k f}{dx^k}(0).$$

Para n, reemplazamos q por $q+n-1$ y f por $\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}$ en la parte 1 del teorema 1.2, con lo que obtenemos

$$\frac{d^{-q-n}}{dx^{-q-n}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = \frac{d^{-q-n+1}}{dx^{-q-n+1}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) - \frac{x^{q+n}}{\Gamma(q+n)}\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(0),$$

sustituyendo $\frac{d^{-q-n+1}}{dx^{-q-n+1}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)$ de la hipótesis de inducción, tenemos

$$\frac{d^{-q-n}}{dx^{-q-n}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = \frac{d^{-q} f}{dx^{-q}} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{q+k}}{\Gamma(q+k+1)}\frac{d^k f}{dx^k}(0) - \frac{x^{q+n}}{\Gamma(q+n)}\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(0),$$

así llegamos a

$$\frac{d^{-q} f}{dx^{-q}} = \frac{d^{-q-n}}{dx^{-q-n}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{q+k}}{\Gamma(q+k+1)}\frac{d^k f}{dx^k}(0),$$

que es lo que queríamos probar.

2. Procedamos por inducción sobre n.

   Para $n = 1$, es la parte 2 del teorema 1.2.

   Para $n = 2$, derivando ambos lados de la igualdad de la parte 2 del teorema 1.2 llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] + \frac{f(0)}{\Gamma(q)}(q-1)x^{q-2} \\ &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] + \frac{f(0)}{(q-1)\Gamma(q-1)}(q-1)x^{q-2} \\ &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] + \frac{f(0)}{\Gamma(q-1)}x^{q-2}.\end{aligned} \tag{1.44}$$

   Usando la parte 2 del teorema 1.2, reemplazando f por $\frac{df}{dx}$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)}\frac{df}{dx}(0). \tag{1.45}$$

   Sustituyendo (1.45) en (1.44) llegamos a

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)}\frac{df}{dx}(0) + \frac{f(0)}{\Gamma(q-1)}x^{q-2}.$$

   Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$, es decir,

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^{q+k-n+1}}{\Gamma(q+k-n+2)}\frac{d^kf}{dx^k}(0),$$

   para el paso inductivo, derivando ambos lados de la hipótesis de inducción obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right]\right) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)\right] + \\ \sum_{k=0}^{n-2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{q+k-n+1}}{\Gamma(q+k-n+2)}\right)\frac{d^kf}{dx^k}(0), \\ \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)\right] + \\ \sum_{k=0}^{n-2}(q+k-n+1)\frac{x^{q+k-n}}{\Gamma(q+k-n+1+1)}\frac{d^kf}{dx^k}(0).\end{aligned} \tag{1.46}$$

   Aplicando la parte 2 del teorema 1.2 a $\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}$ en el primer término del lado derecho de la ecuación (1.46) llegamos a

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right) + \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(0) + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^{q+k-n}}{\Gamma(q+k-n+1)}\frac{d^kf}{dx^k}(0).$$

Así
$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{q+k-n}}{\Gamma(q+k-n+1)} \frac{d^k f}{dx^k}(0).$$

□

La función Q_n que aparece en (1.43) puede ser expresada como una IF, como se prueba a continuación.

Proposición 1.3. *Sea*
$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(0), \tag{1.47}$$
entonces
$$Q_n(x,q) = \frac{d^{-q}R_n}{dx^{-q}} \tag{1.48}$$

Demostración. Usando (1.21), y haciendo los siguientes cálculos llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{d^{-q}R_n}{dx^{-q}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{x^k}{k!}\right) \frac{d^k f}{dx^k}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+q+1)k!} x^{k+q} \frac{d^k f}{dx^k}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+q+1)\Gamma(k+1)} x^{k+q} \frac{d^k f}{dx^k}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+q}}{\Gamma(k+q+1)} \frac{d^k f}{dx^k}(0) \\
&= Q_n(x,q).
\end{aligned}$$

□

Así, en base a la proposición 1.3, podemos ver (1.41) como
$$\frac{d^{-q-n}}{dx^{-q-n}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(0)\right). \tag{1.49}$$

Con esta última expresión y como un corolario del teorema 1.3, vemos que si $\frac{d^k f}{dx^k}(0) = 0$ para $k = 0, 1, ..., n-1$, entonces
$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{d^{-q-n}}{dx^{-q-n}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) \tag{1.50}$$
y
$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right). \tag{1.51}$$

Nuevamente apliquemos lo anterior a la función $f(x) = e^{ax}$. Usando (1.41) llegamos a
$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = a^n \frac{d^{-q-n}f}{dx^{-q-n}} + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{x^{q+k}}{\Gamma(q+k+1)},$$

entonces usando (1.22)

$$E_x(q,a) = a^n E_x(q+n,a) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{x^{q+k}}{\Gamma(q+k+1)}. \tag{1.52}$$

Con esta fórmula generalizamos (1.38).

Por otra parte, aplicando (1.42) a nuestra función original f, obtenemos

$$\frac{d^n}{dx^n}[E_x(q,a)] = a^n E_x(q,a) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{x^{q+k-n}}{\Gamma(q+k+1-n)}.$$

Si tomamos q por $q-n$ en (1.52), llegamos a lo siguiente

$$\begin{aligned} E_x(q-n,a) &= a^n E_x(q-n+n,a) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{x^{q+k-n}}{\Gamma(q+k+1-n)} \\ &= a^n E_x(q,a) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{x^{q+k-n}}{\Gamma(q+k+1-n)} \\ &= \frac{d^n}{dx^n}[E_x(q,a)]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{d^n}{dx^n}[E_x(q,a)] = E_x(q-n,a). \tag{1.53}$$

Así de esta manera obtenemos una generalización de la ecuación (1.39).

De (1.52) y (1.53) podemos deducir lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}[E_x(q,a)] &= E_x(q-n,a) \\ &= a^n E_x(q-n+n,a) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{x^{q+k-n}}{\Gamma(q+k+1-n)} \\ &= a^n E_x(q,a) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{x^{q+k-n}}{\Gamma(q+k+1-n)}. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Con esto obtenemos otra fórmula de derivación.

Ahora probaremos un teorema que expresa la derivada de la IF de una función como una IF de la función.

Teorema 1.4. *Sea f una función con derivadas continuas en $[0,\infty)$. Sea n un entero positivo tal que $q > n$. Entonces para todo $x \in [0,\infty)$*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-(q-n)}f}{dx^{-(q-n)}}. \tag{1.55}$$

Demostración. Procedamos por inducción sobre n.

Para $n = 1$, se tiene que, partiendo de la definición

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1} f(y)\,dy\right].$$

De la proposición 1.2 podemos ver que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\left[(q-1)\int_0^x (x-y)^{q-2} f(y)\,dy + (x-x)^{q-1} f(x)(1) - x^{q-1} f(0)(0)\right] \\
&= \frac{q-1}{(q-1)\Gamma(q-1)}\int_0^x (x-y)^{q-2} f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_0^x (x-y)^{q-2} f(y)\,dy \\
&= \frac{d^{-(q-1)}f}{dx^{-(q-1)}}.
\end{aligned}$$

Supongamos que el resultado es válido para $n-1$, esto es

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-(q-(n-1))}f}{dx^{-(q-(n-1))}}. \tag{1.56}$$

Para el paso inductivo, derivando ambos lados de (1.56) obtenemos

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-(q-(n-1))}f}{dx^{-(q-(n-1))}}\right),$$

si reemplazamos q por $q-n+1$ en (1.37) llegamos a

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-(q-(n-1))}f}{dx^{-(q-(n-1))}}\right) = \frac{d^{n-1-q}}{dx^{n-1-q}}\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{f(0)}{\Gamma(q+1-n)}x^{q-1-n}.$$

Ahora, reemplazando q por $q-n$ en (1.36) llegamos a

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-(q-n)}f}{dx^{-(q-n)}} - \frac{f(0)}{\Gamma(q+1-n)}x^{q-1-n} + \frac{f(0)}{\Gamma(q+1-n)}x^{q-1-n},$$

con lo que concluimos

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-(q-n)}f}{dx^{-(q-n)}}.$$

□

1.6. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA INTEGRAL DE RIEMANN-LIOUVILLE

La transformada de Laplace nos va a proveer de una herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Empecemos con una definición.

Definición 1.6. *Sea $f(x)$ una función definida en $[0,\infty)$ Se dice que f es de orden exponencial α si existen α un número real y constantes positivas M y T tales que*

$$\mid f(x) \mid \leq Me^{\alpha x}$$

para toda $x > T$.

Si f y g son de orden exponencial, entonces $f(x)g(x)$ también lo es, esto es, como f y g son de orden exponencial de orden α y β respectivamente, existe constantes positivas M, N y T tales que $\mid f(x) \mid \leq Me^{\alpha x}$ y $\mid g(x) \mid \leq Ne^{\beta x}$ para $x > T$. Así

$$\mid f(x)g(x) \mid \leq MNe^{(\alpha+\beta)x}$$

para $x > T$. Una vez definido el concepto de función de orden exponencial ya estamos listos para enunciar un resultado que nos ayudará a entrar más a fondo a la transformada de Laplace.

Proposición 1.4. *Sea f de clase C y de orden exponencial α, entonces*

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx \tag{1.57}$$

existe para toda $s > \alpha$.

Demostración. Como f es de orden exponencial α, existen constantes positivas M y T tales que $\mid f(x) \mid \leq Me^{\alpha x}$ para $x > T$. Ahora vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx &= \int_0^T e^{-sx}f(x)\,dx + \int_T^\infty e^{-sx}f(x)\,dx\\ &= \int_0^T e^{-sx}f(x)\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_T^N e^{-sx}f(x)\,dx.\end{aligned}$$

La primera integral es una integral definida, por tanto existe. Ahora veamos la segunda. Notemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_T^N e^{-sx}f(x)\,dx\right| &\leq \int_T^N e^{-sx} \mid f(x) \mid\, dx\\ &\leq \int_T^N e^{-sx}Me^{\alpha x}\,dx\\ &= M\int_T^N e^{-(s-\alpha)x}\,dx\\ &= \frac{M}{\alpha-s}\left[e^{-(s-\alpha)N} - e^{-(s-\alpha)T}\right]\end{aligned}$$

Ahora

$$\frac{M}{\alpha-s}\lim_{N\to\infty}\left[e^{-(s-\alpha)N} - e^{-(s-\alpha)T}\right] = -\frac{M}{\alpha-s}e^{-(s-\alpha)T}$$

siempre y cuando $s > \alpha$. Por tanto la integral existe. □

Definición 1.7. *Llamaremos a* (1.57) ***la transformada de Laplace*** *de $f(x)$ y escribimos*

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx.$$

Algunas veces es conveniente denotar a la transformada de Laplace de f por F, esto es,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)].$$

También escribiremos, si es posible

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

para indicar que f es la inversa de la transformada de Laplace.

Veremos los ejemplos de las transformadas de Laplace de funciones comunes, las cuales se obtienen realizando cálculos elementales.

$f(x)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$
K	$\frac{K}{s}$
x^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $a > -1$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$x^{a-1}e^{bx}$	$\frac{\Gamma(a)}{(s-b)^a}$, $a > 0$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$

También podemos calcular la transformada de Laplace de la derivada de una función f de la siguiente forma

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dx}\right] = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{df}{dx}dx.$$

Usando integración por partes vemos que

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dx}\right] = \left[\lim_{N\to\infty} f(N)e^{-sN} - f(0)\right] + s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx,$$

obteniendo

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dx}\right] = sF(s) - f(0). \tag{1.58}$$

Podemos generalizar la ecuación (1.58), para n un entero positivo, obteniendo lo siguiente.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\frac{d^k f}{dx^k}(0). \tag{1.59}$$

Una de las propiedades más usuales de la transformada de Laplace es el llamado teorema de la convolución, el cual definiremos a continuación.

Definición 1.8. *Sean f y g continuas en $[0, \infty)$. La función $h(x)$ dada por*

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy$$

se conoce como ***la convolución*** *de f y g.*

Podemos ver con el cambio de variable $u = x - y$ que $f * g = g * f$. A continuación enunciaremos el teorema de la convolución, cuya prueba se omitirá, pero podemos encontrarla en [11].

Teorema 1.5. *Si f y g son de orden exponencial, y si existen $\mathcal{L}[f(x)]$ y $\mathcal{L}[g(x)]$ y existe la convolución de f y g, entonces*

$$\mathcal{L}[f(x) * g(x)] = \mathcal{L}\left[\int_0^x f(x-y)g(y)\,dy\right] = F(s)G(s) = \mathcal{L}[f(x)]\mathcal{L}[g(x)].$$

Ahora, si f es una función de clase C, sabemos que su IF es

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-y)^{q-1}f(y)\,dy$$

con $q > 0$, y la integral que aparece es una convolución de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x^{q-1}$, por tanto, si f es de orden exponencial entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right] = \frac{1}{\Gamma(q)}\mathcal{L}[x^{q-1}]\mathcal{L}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(q)}\frac{\Gamma(q)}{s^q}F(s).$$

Así

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right] = s^{-q}F(s) \tag{1.60}$$

donde F es la transformada de Laplace de f.

A partir de los ejemplos dados anteriormente de las transformadas de Laplace obtenemos lo siguiente:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}(x^a)\right] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+q+1}},\ q > 0,\ a > -1, \tag{1.61}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}(e^{ax})\right] = \frac{1}{s^q(s-a)},\ s > a, \tag{1.62}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}(x^{a-1}e^{bx})\right] = \frac{\Gamma(a)}{s^q(s-b)^a},\ a > 0, \tag{1.63}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}(\cos ax)\right] = \frac{1}{s^{q-1}(s^2+a^2)}, \tag{1.64}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}(\sin ax)\right] = \frac{a}{s^q(s^2+a^2)}. \tag{1.65}$$

Ahora buscaremos la transformada de Laplace de la IF de una derivada y la transformada de Laplace de la derivada de la integral de Riemann-Liouville. Supongamos que f es continua en $[0, \infty)$ y $\frac{df}{dx}$ es de clase C y de orden exponencial. Entonces por (1.60)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] = s^{-q}\mathcal{L}\left(\frac{df}{dx}\right),$$

con lo que podemos concluir usando (1.58)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] = s^{-q}[sF(s) - f(0)]. \tag{1.66}$$

Ahora abordaremos la otra parte de encontrar la transformada de Laplace de la derivada de la integral de Riemann-Liouville. De (1.37) tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right) = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{f(0)}{\Gamma(q)}x^{q-1}.$$

Así

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d^{-q}}{dx^{-q}}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] + \mathcal{L}\left[\frac{f(0)}{\Gamma(q)}x^{q-1}\right].$$

Usando (1.2) y (1.58)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right)\right] = s^{-q}[sF(s) - f(0)] + s^{-q}f(0),$$

concluyendo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}\right)\right] = s^{1-q}F(s). \tag{1.67}$$

De las ecuaciones (1.22), (1.24), (1.23), y de las ecuaciones (1.62), (1.65), (1.64) podemos ver lo siguiente

$$\mathcal{L}[E_x(q,a)] = \frac{1}{s^q(s-a)}, \tag{1.68}$$

$$\mathcal{L}[C_x(q,a)] = \frac{1}{s^{q-1}(s^2+a^2)}, \tag{1.69}$$

$$\mathcal{L}[S_x(q,a)] = \frac{a}{s^q(s^2+a^2)}. \tag{1.70}$$

Capítulo 2

LA DERIVADA FRACCIONAL DE RIEMANN-LIOUVILLE

En el Capítulo 1, presentamos la notación $\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}}$ para la IF de una función $f(x)$. En este capítulo, introducimos una notación similar. Recordemos que la diferenciación es simplemente lo opuesto a la integración.

2.1. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA FRACCIONAL

Definición 2.1. *Sea f una función de clase C y sea $p > 0$. Sea m el entero más pequeño tal que $m > p$. Entonces la* ***derivada fraccional*** *de f de orden p se define como*

$$\frac{d^p f}{dx^p} = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}}\right). \tag{2.1}$$

Ahora veremos una propiedad de la derivada fraccional.

Proposición 2.1. *Sean f y g funciones de clase C y a un número real, entonces dado $p > 0$.*

$$\frac{d^p}{dx^p}[af(x) + g(x)] = a\frac{d^p f}{dx^p} + \frac{d^p g}{dx^p}.$$

Demostración. Sea m el entero más pequeño tal que $m > p$. De la definición 2.1 tenemos que

$$\frac{d^p}{dx^p}[af(x) + g(x)] = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-p)}}{dx^{-(m-p)}}[af(x) + g(x)]\right).$$

Usando la proposición tenemos que

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-p)}}{dx^{-(m-p)}}[af(x) + g(x)]\right) = \frac{d^m}{dx^m}\left(a\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}} + \frac{d^{-(m-p)}g}{dx^{-(m-p)}}\right).$$

Dado que m es un entero positivo, usando la linealidad de la derivada ordinaria obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left(a\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}}+\frac{d^{-(m-p)}g}{dx^{-(m-p)}}\right) &= a\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}}\right)+\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-p)}g}{dx^{-(m-p)}}\right)\\ &= a\frac{d^pf}{dx^p}+\frac{d^pg}{dx^p}.\end{aligned}$$

□

2.2. EJEMPLOS DE DERIVADAS FRACCIONALES

Ahora veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1. *Sea $f(x) = x^a$ con $a > -1$. Sea p un número positivo y sea m el entero más pequeño tal que $m > p$. La IF de f, como se vió en* (1.21) *es*

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+q+1)}x^{a+q},$$

entonces

$$\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+m-p+1)}x^{a+m-p}.$$

Ahora

$$\frac{d^pf}{dx^p} = \frac{d^m}{dx^m}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+m-p+1)}x^{a+m-p}.$$

Observemos que, si n es un entero positivo,

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^n) = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}.$$

Si n no es necesariamente un entero positivo, sino un real, entonces podemos escribir

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}x^{n-m}. \tag{2.2}$$

En base a lo anterior, podemos obtener

$$\frac{d^pf}{dx^p} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+m-p+1)}\frac{\Gamma(a+m-p+1)}{\Gamma(a-p+1)}x^{a-p}.$$

Concluyendo que

$$\frac{d^pf}{dx^p} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-p+1)}x^{a-p}. \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.2. *Ahora supongamos que $f(x) = e^{ax}$. Hemos visto de (1.22) que*

$$\frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = E_x(q,a),$$

entonces

$$\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}} = E_x(m-p,a).$$

Por tanto, usando (1.53),

$$\begin{aligned}\frac{d^p f}{dx^p} &= \frac{d^m}{dx^m}[E_x(m-p,a)]\\ &= E_x(m-p-m,a).\end{aligned}$$

Así concluimos que

$$\frac{d^p f}{dx^p} = E_x(-p,a). \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.3. *Haciendo un cálculo similar, vemos que las derivadas de $\cos ax$ y $\sin ax$ son*

$$\frac{d^p}{dx^p}(\cos ax) = C_x(-p,a) \tag{2.5}$$

y

$$\frac{d^p}{dx^p}(\sin ax) = S_x(-p,a). \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.4. *Las derivadas fraccionales de $E_x(v,a)$, $C_x(v,a)$, $C_x(-p,a)$ se calculan de la siguiente manera. Para $v > -1$, usamos (1.34) para obtener*

$$\frac{d^{-(m-p)}}{dx^{-(m-p)}}(E_x(v,a)) = E_x(v+m-p,a).$$

Aplicando la definición y (1.53)

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{dx^p}[E_x(v,a)] &= \frac{d^m}{dx^m}[E_x(v+m-p,a)]\\ &= E_x(v+m-p-m,a).\end{aligned}$$

Con lo que llegamos a

$$\frac{d^p}{dx^p}[E_x(v,a)] = E_x(v-p,a). \tag{2.7}$$

Similarmente, las derivadas de C_x y S_x son

$$\frac{d^p}{dx^p}[C_x(v,a)] = C_x(v-p,a) \tag{2.8}$$

y

$$\frac{d^p}{dx^p}[S_x(v,a)] = S_x(v-p,a). \tag{2.9}$$

Ejemplo 2.5. *Sea $g(x) = xE_x(v, a)$. Podemos ver que para n un entero positivo tenemos que*

$$\frac{d^n}{dx^n}(xf(x)) = x\frac{d^n f}{dx^n} + n\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}.$$

Usando esto y (1.35), a partir de la definición, dado p un número positivo y m el entero más pequeño tal que $m > p$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d^p g}{dx^p} &= \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{d^{-(m-p)}g}{dx^{-(m-p)}}\right] \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\left[xE_x(v+m-p,a) - (m-p)E_x(v+m-p+1,a)\right] \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\left[xE_x(v+m-p,a)\right] + (p-m)\frac{d^m}{dx^m}\left[E_x(v+m-p+1,a)\right] \\
&= xE_x(v+m-p-m,a) + mE_x(v+m-p-m+1,a) + (p-m)E_x(v-p+1,a) \\
&= xE_x(v-p,a) + mE_x(v-p+1,a) + pE_x(v-p+1,a) - mE_x(v-p+1,a)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{d^p g}{dx^p} = xE_x(v-p,a) + pE_x(v-p+1,a). \tag{2.10}$$

2.3. UNA LEY DE LOS EXPONENTES

Anteriormente consideramos varios resultados que relacionan la IF de derivadas ordinarias y las derivadas ordinarias de la IF. Ahora estableceremos algunos resultados análogos relacionando $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^u f}{dx^u}\right)$ y $\frac{d^u}{dx^u}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$, donde $u > 0$ y n es un entero positivo. Supongamos entonces que f es de clase C, $u > 0$ y m es el entero más pequeño tal que $m > u$. De la definición de la derivada fraccional, podemos ver que

$$\frac{d^u f}{dx^u} = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-u)}f}{dx^{-(m-u)}}\right).$$

Si además, lo anterior es n-diferenciable, se tiene

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^u f}{dx^u}\right) = \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(\frac{d^{-(m-u)}f}{dx^{-(m-u)}}\right)$$

Ahora de nuevo de la definición, la derivada fraccional de f de orden $n+u$ está dada por

$$\frac{d^{n+u}f}{dx^{n+u}} = \frac{d^r}{dx^r}\left(\frac{d^{-(r-n-u)}f}{dx^{-(r-n-u)}}\right)$$

donde r es el entero más pequeño tal que $r > n+u$. Usando el teorema 1.4, notemos que $r = n+m$, con lo que las expresiones anteriores son iguales, es decir

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^u f}{dx^u}\right) = \frac{d^{n+u}f}{dx^{n+u}}.$$

Ahora obtendremos una relación entre $\frac{d^u}{dx^u}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ y $\frac{d^{n+u} f}{dx^{n+u}}$. Si m y u son con las condiciones anteriores y si f tiene n derivadas continuas, entonces, por el teorema 1.3 visto en el capítulo anterior, vemos que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{-(m-u)} f}{dx^{-(m-u)}}\right) = \frac{d^{-(m-u)}}{dx^{-(m-u)}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{m-u-n+k}}{\Gamma(m-u-n+k+1)} \frac{d^k f}{dx^k}(0). \tag{2.11}$$

Aplicando $\dfrac{d^m}{dx^m}$ a la ecuación (2.11), tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{-(m-u)} f}{dx^{-(m-u)}}\right)\right] &= \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-u)} f}{dx^{-(m-u)}}\right)\right] \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^u f}{dx^u}\right),\end{aligned}$$

y

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{d^{-(m-u)}}{dx^{-(m-u)}}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)\right] = \frac{d^u}{dx^u}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right).$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{x^{m-u-n+k}}{\Gamma(m-u-n+k+1)}\right) &= \frac{\Gamma(m-u-n+k-1)x^{m-u-n+k-m}}{\Gamma(m-u-n+k-m+1)\Gamma(m-u-n+k+1)} \\ &= \frac{\Gamma(x^{-u-n+k}}{\Gamma(-u-n+k+1)},\end{aligned}$$

y de aquí

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{m-u-n+k}}{\Gamma(m-u-n+k+1)} \frac{d^k f}{dx^k}(0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{-u-n+k}}{\Gamma(-u-n+k+1)} \frac{d^k f}{dx^k}(0);$$

de lo anterior, $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{d^u f}{dx^u}\right) = \dfrac{d^{n+u} f}{dx^{n+u}}$. Por tanto hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea f con n derivadas continuas en $[0,\infty)$. Sea $u > 0$. Entonces si $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^u f}{dx^u}\right)$ o $\frac{d^{n+u} f}{dx^{n+u}}$ existen*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^u f}{dx^u}\right) = \frac{d^{n+u} f}{dx^{n+u}} = \frac{d^u}{dx^u}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{-u-n+k}}{\Gamma(-u-n+k+1)} \frac{d^k f}{dx^k}(0). \tag{2.12}$$

2.4. TRANFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA FRACCIONAL

Supongamos que $p > 0$, sea m el entero más pequeño tal que $p < m$, entonces $m - p > 0$. Si f es de clase C entonces

$$\frac{d^p f}{dx^p} = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-p)} f}{dx^{-(m-p)}}\right).$$

Supongamos que la transformada de Laplace de f existe. Entonces de la definición

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^p f}{dx^p}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}}\right)\right].$$

Usando la propiedades (1.60) y (1.59) llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{d^p f}{dx^p}\right] &= s^m \mathcal{L}\left[\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}}\right] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}\frac{d^k}{dx^k}\frac{d^{-(m-p)}f}{dx^{-(m-p)}}(0) \\
&= s^m[s^{-(m-p)}F(s)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}\frac{d^{k-(m-p)}f}{dx^{k-(m-p)}}(0) \\
&= s^p F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}\frac{d^{k-m+p}f}{dx^{k-m+p}}(0)
\end{aligned}$$

donde $m-1 < p < m$ para $m = 1, 2, ...$ Por tanto,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^p f}{dx^p}\right] = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}\frac{d^{k-m+p}f}{dx^{k-m+p}}(0) \tag{2.13}$$

con lo que hemos encontrado la transformada de Laplace de la derivada fraccional.

En particular, para $m = 1$ y $m = 2$, vemos que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^p f}{dx^p}\right] = s^p F(s) - \frac{d^{-(1-p)}f}{dx^{-(1-p)}}(0)$$

con $0 < p \leq 1$, y

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^p f}{dx^p}\right] = s^p F(s) - s\frac{d^{-(2-p)}f}{dx^{-(2-p)}}(0) - \frac{d^{-(1-p)}f}{dx^{-(1-p)}}(0)$$

con $0 < p \leq 2$, respectivamente.

$F(s)$	$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
$\dfrac{1}{s^a}$	$\dfrac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{ax}
$\dfrac{\Gamma(a)}{(s-b)^a}$	$x^{a-1}e^{bx}$
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos ax$
$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sin ax$
$s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\dfrac{d^kf}{dx^k}(0)$	$\dfrac{d^nf}{dx^n}$, n entero positivo
$s^pF(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}\dfrac{d^{k-m+p}f}{dx^{k-m+p}}(0)$	$\dfrac{d^pf}{dx^p}, \quad m \geq p > 0$
$\dfrac{1}{s^v(s-a)}$	$E_x(v,a)$
$\dfrac{1}{s^v(s-a)^2}$	$xE_x(v,a) - vE_x(v+1,a), \quad v > -2$
$\dfrac{1}{s^v-a}$	$\sum_{j=1}^{q} a^{j-1}E_x(jv-1,a^q), \quad v = \frac{1}{q}$
$\dfrac{1}{s^u(s^v-a)}$	$\sum_{j=1}^{q} a^{j-1}E_x(jv-1+u,a^q), \quad v = \frac{1}{q}, \quad u+v > 0$
$\dfrac{1}{s^{\frac{1}{2}}-a}$	$E_x(-\frac{1}{2},a^2) + aE_x(0,a^2)$
$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^v-a)^2}\right]$	$\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{q} a^{j+k-2}\{xE_x((j+k)v-2,a^q)$ $-[(j+k)v-2]E_x((j+k)v-1,a^q)\}, \ v = \frac{1}{q}$

Tabla 2.1: Pares de transformada de Laplace
Fuente: [13, p. 321]

Capítulo 3

ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS

3.1. INTRODUCCIÓN

En los cursos básicos de ecuaciones diferenciales se muestran varios métodos para resolverlas y sabemos que el problema de encontrar una solución a tales ecuaciones no es, en general, una tarea fácil. De hecho, una de las clases de ecuaciones para la que podemos encontrar una solución explícita sin mucho trabajo es la clase de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, o ecuaciones reducibles a esta forma.

Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

donde a y b son constantes. Entonces si α y β son las distintas raíces del polinomio auxiliar

$$P(t) = t^2 + at + b$$

sabemos que $e^{\alpha x}$ y $e^{\beta x}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación, mientras que si $\alpha = \beta$, entonces $e^{\alpha x}$ y $xe^{\alpha x}$ son soluciones linealmente independientes.

Generalizando esta noción para el ámbito de las derivadas fraccionarias con el fin de establecer métodos de solución definiremos una ecuación diferencial fraccional (EDF) de la siguiente forma: sean $r_m, r_{m-1}, ..., r_0$ un conjunto de números no negativos, $b_1, b_2, ..., b_m$ constantes y $h(x)$ una función de clase C, entonces denotamos

$$\frac{d^{r_m}y}{dx^{r_m}} + b_1\frac{d^{r_{m-1}}y}{dx^{r_{m-1}}} + \cdots + b_m y(x) = h(x)$$

como una posible expresión de EDF. Pero esta expresión para la ecuación es demasiado compleja. Pediremos un requisito adicional: que las r_j sean números racionales. Por tanto si q es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los r_j no cero, podemos denotar $v = \frac{1}{q}$ y escribir lo anterior como

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n y(x) = h(x), \tag{3.1}$$

donde $x > 0$, y los a_i pueden ser cero. Notemos que si $q = 1$, $v = 1$ y lo anterior se convierte en una ecuación diferencial ordinaria.

Llamaremos a nuestra ecuacion fraccional una **ecuación diferencial fraccionaria lineal con coeficientes constantes de orden** (n, q), o mas brevemente, una EDF de orden (n, q).

Una EDF de la forma

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1 \frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n y(x) = 0, \tag{3.2}$$

se llama **homogénea**, mientras que una ecuación de la forma

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1 \frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n y(x) = h(x), \tag{3.3}$$

donde $h(x)$ es distinto de cero se llama **no homogénea**.

Definimos el **operador diferencial fraccional de orden** (n, q) como:

$$L = \frac{d^{nv}}{dx^{nv}} + a_1 \frac{d^{(n-1)v}}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n \frac{d^0}{dx^0} \tag{3.4}$$

Así, podemos escribir (3.2) y (3.3) de forma compacta como

$$Ly(x) = 0,$$

$$Ly(x) = h(x).$$

Como consecuencia de la Proposición 2.1, el operador diferencial fraccional L tiene una propiedad de linealidad; es decir, si f y g son funciones de clase C y a es una constante real,

$$L[af(x) + g(x)] = aL(f(x)) + L(g(x))$$

con lo que se dice que el operador diferencial fraccional de orden (n, q), L, es un operador lineal.

A continuación veremos el resultado análogo al teorema de superposición en EDO.

Teorema 3.1. *Sean y_1, y_2 soluciones de la EDF homogénea de orden (n, q)*

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1 \frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n y(x) = 0.$$

Entonces

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

también es solución.

Demostración. Consideremos el operador (3.4). Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación homogénea $Ly(x) = 0$. Entonces por la linealidad de L

$$Ly(x) = L[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1L[y_1(x)] + c_2L[y_2(x)] = c_1 * 0 + c_2 * 0 = 0.$$

□

Ejemplo 3.1. *Consideremos una ecuación diferencial fraccional de orden* $(1, 2)$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}} = 0. \tag{3.5}$$

Afirmamos que

$$y(x) = x^2$$

es una solución de (3.5)*. En efecto, partiendo de la fórmula* (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}x^{2-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

En nuestra ecuación (3.2), vamos a asociar el siguiente polinomio

$$P(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n \tag{3.6}$$

el cual llamaremos el polinomio auxiliar, de tal forma que

$$P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) = \frac{d^{nv}}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n\frac{d^0}{dx^0}, \tag{3.7}$$

es decir,

$$L = P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right).$$

3.2. PRIMERAS IDEAS

Ahora vamos a dar un bosquejo de como son las soluciones de manera análoga a como se construyen en EDO. Empezaremos dando unas ideas. Tomamos una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes, digamos

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_ny = 0, \tag{3.8}$$

cuyo polinomio auxiliar es el siguiente

$$P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Una primera aproximación de solución es $y(x) = e^{ax}$. Si hacemos esto, podemos encontrar que

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) e^{ax} = P(a)e^{ax}$$

Si c es una raíz del polinomio auxiliar entonces tomando $y(x) = e^{cx}$ llegamos a

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) e^{cx} = P(c)e^{cx} = 0,$$

por tanto, e^{cx} es una solución de (3.8). Sin embargo, si aplicamos el operador derivada fraccional $\dfrac{d^u}{dx^u}$ en e^{cx} obtenemos (véase (2.4))

$$\frac{d^u}{dx^u}(e^{cx}) = E_x(-u, c), \tag{3.9}$$

lo que hace que el procedimiento usado en EDO sea diferente. Ahora, la razón de por qué e^{cx} resuelve la ecuación con derivada n-ésima con n un entero no negativo es porque las derivadas de e^{cx} son de la forma

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{cx}) = c^n e^{cx}. \tag{3.10}$$

Esto no parece ser el caso con el operador fraccional. Sin embargo, si tomamos (2.4)

$$\frac{d^u}{dx^u}[E_x(w, c)] = E_x(w - u, c), \tag{3.11}$$

se tiene un comportamiento semejante a la ecuación (3.10). También, de la ecuación (2.10), notemos que,

$$\frac{d^u}{dx^u}[xE_x(w, c)] = xE_x(w - u, c) + uE_x(w - u + 1, c), \tag{3.12}$$

la cual también es semejante a

$$\frac{d}{dx}(xe^{cx}) = cxe^{cx} + e^{cx}.$$

Además, de (1.12) podemos ver una relación de las funciones que estamos estudiando, esta es

$$E_x(0, c) = e^{cx}.$$

Y (3.9) puede verse a partir de (3.11) como

$$\frac{d^u}{dx^u}[E_x(0, c)] = E_x(-u, c).$$

Con esto, nos podemos dar una idea de como podrían ser las soluciones, como en el caso ordinario, usando la función e, usar la generalización de la exponencial con las funciones E_x.

Por tanto podemos intentar con funciones de la forma $E_x(kv, c)$, donde k es un entero. Para empezar con esto, consideremos la siguiente ecuación

$$\frac{dy}{dx} + a\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + by = 0 \tag{3.13}$$

la cual es de orden $(2, 2)$, con $v = \frac{1}{2}$ y polinomio auxiliar $P(t) = t^2 + at + b$.

Supongamos que α y β son raíces de $P(t)$. Consideremos que $\alpha \neq \beta$.

Como en el caso de EDO, dado que tenemos un operador diferencial fraccionario, podemos proponer lo siguiente

$$y_1(x) = AE_x(0, c) + E_x(-\frac{1}{2}, c) \tag{3.14}$$

donde A y c son constantes a determinar. Haciendo los cálculos con nuestro operador

$$P\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{d}{dx} + a\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} + b\frac{d^0}{dx^0}$$

aplicado a (3.14) y usando (3.11) vemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= AE_x(-1, c) + E_x(-\frac{3}{2}, c) \\ a\frac{d^{\frac{1}{2}}y_!}{dx^{\frac{1}{2}}} &= aAE_x(-\frac{1}{2}, c) + aE_x(-1, c) \\ by &= bAE_x(0, c) + E_x(-\frac{1}{2}, c). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Aplicando las ecuaciones (1.38) y (1.40) a cada término de (3.15)

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= AcE_x(0, c) + cE_x(-\frac{1}{2}, c) + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \\ a\frac{d^{\frac{1}{2}}y_!}{dx^{\frac{1}{2}}} &= aAE_x(-\frac{1}{2}, c) + acE_x(0, c) \\ by &= bAE_x(0, c) + E_x(-\frac{1}{2}, c) \end{aligned}$$

llegando a

$$P\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) y_1(x) = (cA + ac + bA)E_x(0, c) + (c + aA + b)E_x(-\frac{1}{2}, c) + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}. \tag{3.16}$$

En el caso de las EDO, si α era raíz del polinomio auxiliar, entonces $y(x) = \alpha e^{\alpha x}$ es solución. En este caso, pensaremos algo similar. Supongamos que α y β son raíces de $P(t)$. Ahora sea $A = \alpha$ y $c = \alpha^2$. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) y_1(x) &= (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha)E_x(0,\alpha^2) + (\alpha^2 + a\alpha + b)E_x(-\frac{1}{2},\alpha^2) + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \\ &= \alpha(\alpha^2 + a\alpha + b)E_x(0,\alpha^2) + (\alpha^2 + a\alpha + b)E_x(-\frac{1}{2},\alpha^2) + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Así

$$P\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) y_1(x) = \alpha P(\alpha)E_x(0,\alpha^2) + P(\alpha)E_x(-\frac{1}{2},\alpha^2) + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}. \tag{3.17}$$

Dado que α es una raíz de $P(t)$, entonces $P(\alpha) = 0$ y

$$P\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) y_1(x) = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}. \tag{3.18}$$

Observemos que $y_1(x)$ aún no es solución de (3.13).

Ahora proponemos $y_2(x)$ como

$$y_2(x) = \beta E_x(0,\beta^2) + E_x(-\frac{1}{2},\beta^2),$$

entonces de igual forma que y_1 se cumple

$$P\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) y_2(x) = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}.$$

Sea $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$, entonces obtenemos que

$$y(x) = \alpha E_x(0,\alpha^2) + E_x(-\frac{1}{2},\alpha^2) - \beta E_x(0,\beta^2) - E_x(-\frac{1}{2},\beta^2) \tag{3.19}$$

y además se sigue que

$$\left[\frac{d}{dx} + a\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} + b\frac{d^0}{dx^0}\right] y(x) = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} - \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} = 0. \tag{3.20}$$

Como $\alpha \neq \beta$, podemos ver que $y(x)$ es una solución no trivial de la ecuación (3.13). Como acabamos de ver, la función $y(x)$ es una solución de la ecuación usando funciones de la forma $E_x(kv, c)$, y además, si las raíces del polinomio auxiliar no son iguales.

Supongamos que $\alpha = \beta$.

En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se ve que e^{ax} y xe^{ax} son soluciones distintas de $P\left(\dfrac{d}{dx}\right)y(x) = 0$. Así refiriéndonos a la ecuación (3.12), podríamos pensar que una combinación lineal de términos de la forma $xE_x(kv, c)$ y $E_x(kv, c)$ puede ser una posible solución de la ecuación si las raíces de $P(t)$ son iguales. En base a esta suposición, afirmamos que

$$y(x) = E_x(0, \alpha^2) + 2\alpha^2 x E_x(0, \alpha^2) + \alpha E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + 2\alpha x E_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2) \tag{3.21}$$

es solución de (3.13) si $\alpha = \beta$. Para mostrar esto, empezaremos viendo lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= E_x(-1, \alpha^2) + 2\alpha^2 x E_x(-1, \alpha^2) + 2\alpha^2 E_x(0, \alpha^2) + \alpha E_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2) + 2\alpha x E_x(-\frac{3}{2}, \alpha^2) + \\
&\qquad 2\alpha E_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2) \\
a\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} &= aE_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2) + 2a\alpha^2 x E_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2) + a\alpha^2 E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + a\alpha E_x(0, \alpha^2) \\
&\quad + 2a\alpha x E_x(-1, \alpha^2) + a\alpha E_x(0, \alpha^2) \\
by &= bE_x(0, \alpha^2) + 2b\alpha^2 x E_x(0, \alpha^2) + b\alpha E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + 2b\alpha x E_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Usando las ecuaciones (1.38), (1.40) y (1.52) en cada término de (3.22) podemos llegar a lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \alpha^2 E_x(0, \alpha^2) + 2\alpha^4 x E_x(0, \alpha^2) + 2\alpha^2 E_x(0, \alpha^2) + \alpha^3 E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + \alpha\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&\quad + 2\alpha^3 x E_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2) + 2\alpha\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} + 2\alpha^3 E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + 2\alpha\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\
a\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} &= a\alpha^2 E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + a\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + 2a\alpha^2 x E_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2) + a\alpha^2 E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + 2a\alpha E_x(0, \alpha^2) \\
&\quad + 2a\alpha^3 x E_x(0, \alpha^2) \\
by &= bE_x(0, \alpha^2) + 2b\alpha^2 x E_x(0, \alpha^2) + b\alpha E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + 2b\alpha x E_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2)
\end{aligned}$$

Llegando a

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right)y(x) &= (3\alpha^2 + 2a\alpha + b)E_x(0, \alpha^2) + (2\alpha^4 + 2a\alpha^3 + 2b\alpha^2)xE_x(0, \alpha^2) \\
&\quad + (3\alpha^3 + 2a\alpha^2 + b\alpha)E_x(\frac{1}{2}, \alpha^2) + (2\alpha^3 + 2a\alpha^2 + 2b\alpha)xE_x(-\frac{1}{2}, \alpha^2) \\
&\quad + 3\alpha\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + 2\alpha\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} + a\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

A partir de la ecuación (1.1), podemos ver que

$$-\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) = \Gamma(-\frac{1}{2} + 1) = \Gamma(\frac{1}{2}),$$

así
$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}). \tag{3.23}$$
Usando la ecuación (3.23), y el hecho de que α es raiz de $P(t)$.

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) &= (3\alpha^2+2a\alpha+b)E_x(0,\alpha^2) \\
+2\alpha^2(\alpha^2+a\alpha+b)xE_x(0,\alpha^2) & \\
+(3\alpha^3+2a\alpha^2+b\alpha)E_x(\frac{1}{2},\alpha^2) & \\
+2\alpha(\alpha^2+2a\alpha+b)xE_x(-\frac{1}{2},\alpha^2) & \\
+3\alpha\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \alpha\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + a\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} & \\
&= (3\alpha^2+2a\alpha+b)E_x(0,\alpha^2) \\
+(3\alpha^3+2a\alpha^2+b\alpha)E_x(\frac{1}{2},\alpha^2) + (2\alpha+a)\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}. &
\end{aligned}$$

Notemos que dado $\alpha = \beta$, entonces $P(t) = (t-\alpha)^2 = t^2 - 2\alpha t + \alpha^2$, con lo que $a = -2\alpha$ y $b = \alpha^2$. Usando esto tenemos que

$$\begin{aligned}
(3\alpha^2+2a\alpha+b)E_x(0,\alpha^2) & \\
+(3\alpha^3+2a\alpha^2+b\alpha)E_x(\frac{1}{2},\alpha^2) & \\
+(2\alpha+a)\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} &= (3\alpha^2+2(-2\alpha)\alpha+\alpha^2)E_x(0,\alpha^2) \\
+(3\alpha^3+2(-2\alpha)\alpha^2+(\alpha^2)\alpha)E_x(\frac{1}{2},\alpha^2) & \\
+(2\alpha-2\alpha)\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} & \\
&= (3\alpha^2-4\alpha^2+\alpha^2)E_x(0,\alpha^2) \\
+(3\alpha^3-4\alpha^3+\alpha^3)E_x(\frac{1}{2},\alpha^2) & \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3.3. IDEAS CON TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dado que ya sabemos cómo es la transformada de Laplace de una derivada fraccional, podemos tener la idea de calcular la transformada de Laplace de una ecuación diferencial fraccional, y transformar nuestro problema a uno lineal, resolverlo y entonces invertir.

Aplicaremos este método a la ecuación (3.13), para comparar los resultados de la sección anterior

$$\frac{dy}{dx} + a\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + by = 0.$$

Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y usando el resultado (2.13) obtenemos

$$sY(s) - y(0) + as^{\frac{1}{2}}Y(s) - a\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0) + bY(s) = 0. \tag{3.24}$$

Podemos escribir (3.24)

$$[s + as^{\frac{1}{2}} + b]Y(s) - y(0) - a\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0) = 0.$$

Por tanto

$$Y(s) = \frac{C}{P(s^{\frac{1}{2}})} \tag{3.25}$$

donde

$$C = y(0) + a\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0) \tag{3.26}$$

y

$$P(t) = t^2 + at + b = (t-\alpha)(t-\beta)$$

es el polinomio auxiliar.

Si $C = 0$, entonces por la unicidad de la transformada de Laplace, la única solución de la ecuación (3.13) es la solución trivial $y(x) = 0$. Sin embargo, reforzados por los resultados de la parte anterior, sabemos que la ecuación tiene una solución no cero. Por tanto, supondremos que C es una constante finita no cero, además notemos que C depende de las condiciones iniciales de nuestra ecuación diferencial.

Ahora yendo hacia el problema acerca de la inversa de la transformada de Laplace, observemos que

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{t-\beta}\right) \tag{3.27}$$

y

$$\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\beta}\right), \tag{3.28}$$

si $\alpha \neq \beta$. Nuestro problema se reduce a encontrar la inversa de la transformada de Laplace de $\dfrac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha}$. Haciendo lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha} &= \frac{1+\alpha s^{-\frac{1}{2}}}{(s^{\frac{1}{2}}-\alpha)(1+\alpha s^{-\frac{1}{2}})}\\ &= \frac{1+\alpha s^{-\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha^2 s^{-\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{1+\alpha s^{-\frac{1}{2}}}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}\\ &= \frac{(1+\alpha s^{-\frac{1}{2}})(s-\alpha^2)}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)(s-\alpha^2)}\\ &= \frac{(s-\alpha^2)+\alpha s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)(s-\alpha^2)}\\ &= \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha} = \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}. \tag{3.29}$$

En base a lo anterior, podemos ver que, usando las transformadas de la tabla 2.1,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}\right]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{s-\alpha^2}\right]\\ &= E_x(-\frac{1}{2},\alpha^2)+\alpha E_x(0,\alpha^2).\end{aligned}$$

Podemos obtener una expresión similar para β. Por tanto de (3.25)

$$\begin{aligned}y(x) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha}-\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\beta}\right)\right]\\ &= \frac{C}{\alpha-\beta}\left[\alpha E_x(0,\alpha^2)-\beta E_x(0,\beta^2)+E_x(-\frac{1}{2},\alpha^2)-E_x(-\frac{1}{2},\beta^2)\right]\end{aligned} \tag{3.30}$$

que fue, salvo una constante, la solución (3.19) encontrada anteriormente.

Ahora supongamos que $\alpha = \beta$. Por tanto, de (3.25)

$$Y(s) = \frac{1}{(s^{\frac{1}{2}}-\alpha)^2}$$

y análogo a lo anterior usando (3.29)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}}-\alpha)^2} &= \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha}\right)^2\\ &= \left(\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}\right)^2\\ &= \frac{1}{s^{-1}(s-\alpha^2)^2}+\frac{2\alpha}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)^2}+\frac{\alpha^2}{(s-\alpha^2)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto de (3.25)

$$\begin{aligned}y(x) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{-1}(s-\alpha^2)^2}+\frac{2\alpha}{s^{-\frac{1}{2}}(s-\alpha^2)^2}+\frac{\alpha^2}{(s-\alpha^2)^2}\right].\end{aligned}$$

Consultando la tabla 2.1 de transformadas vemos que

$$\begin{aligned}y(x) &= C[xE_x(-1,\alpha^2)+E_x(0,\alpha^2)+2\alpha xE_x(-\frac{1}{2},\alpha^2)+\alpha E_x(\frac{1}{2},\alpha^2)+\alpha^2 xE_x(0,\alpha^2)]\\ &= C[\alpha^2 xE_x(0,\alpha^2)+E_x(0,\alpha^2)+2\alpha xE_x(-\frac{1}{2},\alpha^2)+\alpha E_x(\frac{1}{2},\alpha^2)+\alpha^2 xE_x(0,\alpha^2)].\end{aligned}$$

Por tanto en el caso de que las raíces sean iguales

$$y(x) = C[E_x(0,\alpha^2)+2\alpha^2 xE_x(0,\alpha^2)+\alpha E_x(\frac{1}{2},\alpha^2)+2\alpha xE_x(-\frac{1}{2},\alpha^2)], \tag{3.31}$$

el cual es, salvo una constante, (3.21).

3.4. SOLUCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

En las secciones 3.2 y 3.3 encontramos explícitamente una solución de la EDF de orden $(2,2)$

$$\frac{dy}{dx}+a\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}+by=0. \tag{3.32}$$

Podemos pensar que debe ser la única solución no trivial, ya que si $a=0$, (3.32) sería una ecuación de primer orden, y sabemos que dicha ecuación solo tiene una ecuación trivial.

Ahora empezaremos a hablar de independencia lineal de soluciones.

Definición 3.1. *Un conjunto de soluciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ se dice que son **linealmente independientes** si y sólo si $\sum_{j=1}^{n} c_j y_j = 0$ entonces $c_j = 0$ para toda $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Ahora supongamos que tenemos una ecuación diferencial fraccional de orden (n, q) con $n > q$. Entonces podemos conjeturar que exista más de una solución independiente.

Primero, consideremos la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0. \tag{3.33}$$

Si α es una raíz del polinomio auxiliar $P(t) = t^2 + at + b$, sabemos que $g_1(x) = e^{\alpha x}$ es una solución. También, para cualquier constante A, $g(x) = Ae^{\alpha x}$ es solución. En particular, $\frac{dg_1}{dx} = \alpha e^{\alpha x}$ tanto como las derivadas de orden superior de $g_1(x)$ son solución, pero no son linealmente independientes, pues vemos que si $0 = c_1e^{\alpha x} + c_2\alpha e^{\alpha x}$ entonces $0 = (c_1 + c_2\alpha)e^{\alpha x}$, con lo que $0 = c_1 + c_2\alpha$, entonces $c_1 = -\alpha c_2$. Si $c_2 = 1$, entonces $c_1 = -\alpha$ donde α puede ser no cero.

Si β es otra raíz de $P(t)$, entonces $g_2(x) = e^{\beta x}$ también es solución de la ecuación, y también sus derivadas. Si suponemos que $\alpha \neq \beta$, entonces g_1 y g_2 son soluciones linealmente independientes. Ahora sea $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$. Entonces ambos, $g(x)$ y $\frac{dg}{dx}$ son soluciones. Pero g y $\frac{dg}{dx}$ no son linealmente independientes. En efecto, podemos escribir

$$g_1(x) = \frac{\beta g(x) - \frac{dg}{dx}}{\beta - \alpha}$$

y

$$g_2(x) = \frac{\frac{dg}{dx} - \alpha g(x)}{\beta - \alpha}.$$

Ahora veremos si este argumento es aplicable a las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Consideremos la ecuación de orden $(3, 2)$

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}y}{dx^{\frac{3}{2}}} - 2\frac{dy}{dx} - \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + 2y = 0. \tag{3.34}$$

Afirmamos primero que

$$y_1(x) = \frac{1}{3}\left[-E_x(\frac{1}{2}, 1) + 4E_x(\frac{1}{2},4) - 2E_x(0, 1) + 2E_x(0, 4)\right] \tag{3.35}$$

es una solución de la ecuación (3.34). En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d^{\frac{3}{2}}y_1}{dx^{\frac{3}{2}}} - 2\frac{dy_1}{dx} - \frac{d^{\frac{1}{2}}y_1}{dx^{\frac{1}{2}}} + 2y_1 = \frac{1}{3}&\left[-E_x(-1, 1) + 4E_x(-1, 4) - 2E_x(-\frac{3}{2}, 1) + 2E_x(-\frac{3}{2}, 4)\right]\\ - \frac{2}{3}&\left[-E_x(-\frac{1}{2}, 1) + 4E_x(-\frac{1}{2}, 4) - 2E_x(-1, 1) + 2E_x(-1, 4)\right]\\ - \frac{1}{3}&\left[-E_x(0, 1) + 4E_x(0, 4) - 2E_x(-\frac{1}{2}, 1) + 2E_x(-\frac{1}{2}, 4)\right]\\ + \frac{2}{3}&\left[-E_x(\frac{1}{2}, 1) + 4E_x(\frac{1}{2},4) - 2E_x(0, 1) + 2E_x(0, 4)\right].\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (1.38), (1.52) y (1.40) podemos llegar a lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\Big[-E_x(-1,1)+4E_x(-1,4)-2E_x(-\frac{3}{2},1)+2E_x(-\frac{3}{2},4)\Big]\\
&\quad-\frac{2}{3}\Big[-E_x(-\frac{1}{2},1)+4E_x(-\frac{1}{2},4)-2E_x(-1,1)+2E_x(-1,4)\Big]\\
&\quad-\frac{1}{3}\Big[-E_x(0,1)+4E_x(0,4)-2E_x(-\frac{1}{2},1)+2E_x(-\frac{1}{2},4)\Big]\\
&\quad+\frac{2}{3}\Big[-E_x(\frac{1}{2},1)+4E_x(\frac{1}{2},4)-2E_x(0,1)+2E_x(0,4)\Big]\\
&=\frac{1}{3}\left[-E_x(0,1)+16E_x(0,4)-2E_x(\frac{1}{2},1)-2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}-2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+32E_x(\frac{1}{2},4)+2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}+8\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right]\\
&\quad-\frac{2}{3}\left[-E_x(\frac{1}{2},1)-\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+16E_x(\frac{1}{2},4)+4\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}-2E_x(0,1)+8E_x(0,4)\right]\\
&\quad-\frac{1}{3}\left[-E_x(0,1)+4E_x(0,4)-2E_x(\frac{1}{2},1)-2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+8E_x(\frac{1}{2},4)+2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right]\\
&\quad+\frac{2}{3}\Big[-E_x(\frac{1}{2},1)+4E_x(\frac{1}{2},4)-2E_x(0,1)+2E_x(0,4)\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=-\frac{1}{3}E_x(0,1)+\frac{16}{3}E_x(0,4)-\frac{2}{3}E_x(\frac{1}{2},1)+\frac{32}{3}E_x(\frac{1}{2},4)+2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\\
&\quad+\frac{2}{3}E_x(\frac{1}{2},1)-\frac{32}{3}E_x(\frac{1}{2},4)-2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+\frac{4}{3}E_x(0,1)-\frac{16}{3}E_x(0,4)\\
&\quad+\frac{1}{3}E_x(0,1)-\frac{4}{3}E_x(0,4)+\frac{2}{3}E_x(\frac{1}{2},1)-\frac{8}{3}E_x(\frac{1}{2},4)\\
&\quad-\frac{2}{3}E_x(\frac{1}{2},1)+\frac{8}{3}E_x(\frac{1}{2},4)-\frac{4}{3}E_x(0,1)+\frac{4}{3}E_x(0,4)=0.
\end{aligned}$$

Además, si $y_2=\dfrac{dy_1}{dx}$

$$y_2(x)=\frac{1}{3}\Big[-E_x(\frac{1}{2},1)+16E_x(\frac{1}{2},4)-2E_x(0,1)+8E_x(0,4)\Big]+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \tag{3.36}$$

también podemos afirmar que es solución de (3.34). En efecto

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{3}{2}}y_1}{dx^{\frac{3}{2}}}-2\frac{dy}{dx}-\frac{d^{\frac{1}{2}}y_1}{dx^{\frac{1}{2}}}+2y_1&=\frac{1}{3}\Big[-E_x(-1,1)+16E_x(-1,4)-2E_x(-\frac{3}{2},1)+8E_x(-\frac{3}{2},4)\Big]\\
&\quad-\frac{2}{3}\Big[-E_x(-\frac{1}{2},1)+16E_x(-\frac{1}{2},4)-2E_x(-1,1)+8E_x(-1,4)\Big]+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\\
&\quad-\frac{1}{3}\Big[-E_x(0,1)+16E_x(0,4)-2E_x(-\frac{1}{2},1)+8E_x(-\frac{1}{2},4)\Big]\\
&\quad+\frac{2}{3}\Big[-E_x(\frac{1}{2},1)+16E_x(\frac{1}{2},4)-2E_x(0,1)+8E_x(0,4)\Big]+2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (1.38), (1.40) y (1.52) podemos llegar a lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\left[-E_x(-1,1)+16E_x(-1,4)-2E_x(-\frac{3}{2},1)+8E_x(-\frac{3}{2},4)\right]\\
&\quad-\frac{2}{3}\left[-E_x(-\frac{1}{2},1)+16E_x(-\frac{1}{2},4)-2E_x(-1,1)+8E_x(-1,4)\right]+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\\
&\quad-\frac{1}{3}\left[-E_x(0,1)+16E_x(0,4)-2E_x(-\frac{1}{2},1)+8E_x(-\frac{1}{2},4)\right]\\
&\quad+\frac{2}{3}\left[-E_x(\frac{1}{2},1)+16E_x(\frac{1}{2},4)-2E_x(0,1)+8E_x(0,4)\right]+2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\\
&=\frac{1}{3}\left[-E_x(0,1)+64E_x(0,4)-2E_x(\frac{1}{2},1)-2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}-2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+128E_x(\frac{1}{2},4)+8\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}+32\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right]\\
&\quad-\frac{2}{3}\left[-E_x(\frac{1}{2},1)-\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+64E_x(\frac{1}{2},4)+16\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}-2E_x(0,1)+32E_x(0,4)\right]+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\\
&\quad-\frac{1}{3}\left[-E_x(0,1)+16E_x(0,4)-2E_x(\frac{1}{2},1)-2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+32E_x(\frac{1}{2},4)+8\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right]\\
&\quad+\frac{2}{3}\left[-E_x(\frac{1}{2},1)+16E_x(\frac{1}{2},4)-2E_x(0,1)+8E_x(0,4)\right]+2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=-\frac{1}{3}E_x(0,1)+\frac{64}{3}E_x(0,4)-\frac{2}{3}E_x(\frac{1}{2},1)+2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}+10\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+\frac{128}{3}E_x(\frac{1}{2},4)\\
&\quad+\frac{2}{3}E_x(\frac{1}{2},1)-10\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}-\frac{128}{3}E_x(\frac{1}{2},4)+\frac{4}{3}E_x(0,1)-\frac{64}{3}E_x(0,4)+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\\
&\quad+\frac{1}{3}E_x(0,1)-\frac{16}{3}E_x(0,4)+\frac{2}{3}E_x(\frac{1}{2},1)-2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}-\frac{32}{3}E_x(\frac{1}{2},4)\\
&\quad-\frac{2}{3}E_x(\frac{1}{2},1)+\frac{32}{3}E_x(\frac{1}{2},4)-\frac{4}{3}E_x(0,1)+\frac{16}{3}E_x(0,4)+2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}=2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la ecuación (3.23)

$$2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}=2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-2\Gamma(\frac{1}{2})}+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}=-\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}=0$$

con lo que hemos visto que $y_2(x)$ es solución.

Además, y_1 y y_2 son linealmente independientes. Por tanto, cualquier combinación lineal, digamos $\Psi(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, es una solución de (3.34).

Sin embargo, aun no podemos generalizar este método, por ejemplo

$$y_3(x)=\frac{dy_2}{dx}=\frac{d^2y_1}{dx^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-E_x(\frac{1}{2},1) + 64E_x(\frac{1}{2},4) - 2E_x(0,1) + 32E_x(0,4)\right] + 5\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}$$

y al calcular $\left[\frac{d^{\frac{3}{2}}}{dx^{\frac{3}{2}}} - 2\frac{d}{dx} - \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} + 2\frac{d^0}{dx^0}\right] y_3(x)$ llegamos a un problema. Por ejemplo, si intentamos calcular $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\right)$ veremos, por definición, que

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\right) &= \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\frac{d^{\frac{1}{2}}(x^{-\frac{3}{2}})}{dx^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{-\frac{1}{2}}(x^{-\frac{3}{2}})}{dx^{-\frac{1}{2}}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\,dy\right)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left[\frac{d}{dx}\left(\int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\,dy\right)\right].
\end{aligned}$$

Si usamos la proposición 1.2, vemos que

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\,dy = \int_0^x -\frac{1}{2}(x-y)^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\,dy + (x-y)^{-\frac{1}{2}}\ y^{-\frac{3}{2}}\Big|_{y=x},$$

lo cual no esta definido, con lo que $\left[\frac{d^{\frac{3}{2}}}{dx^{\frac{3}{2}}} - 2\frac{d}{dx} - \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} + 2\frac{d^0}{dx^0}\right] y_3(x)$ no existe.

Veamos si podemos llegar a una conclusión usando la técnica de la transformada de Laplace. Si $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(x)$ entonces del resultado (2.13), tomando la transformada de Laplace de la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
\left[s^{\frac{3}{2}}Y(s) - s\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0) - \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}(0)\right] - 2[sY(s) - y(0)] - \left[s^{\frac{1}{2}}Y(s) - \frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0)\right] + 2Y(s) = 0 \\
s^{\frac{3}{2}}Y(s) - s\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0) - \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}(0) - 2sY(s) + 2y(0) - s^{\frac{1}{2}}Y(s) + \frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0) + 2Y(s) = 0 \\
\left(s^{\frac{1}{2}} - 2s - s^{\frac{1}{2}} + 2\right)Y(s) - \left(s\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0)\right) - \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}(0) - 2y(0) - \frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0)\right) = 0
\end{aligned}$$

llegando a

$$\left(s^{\frac{3}{2}} - 2s - s^{\frac{1}{2}} + 2\right)Y(s) = \left(s\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0)\right) + \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}(0) - 2y(0) - \frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0)\right)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}(0) - 2y(0) - \frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0)}{s^{\frac{3}{2}} - 2s - s^{\frac{1}{2}} + 2} + \frac{s\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0)}{s^{\frac{3}{2}} - 2s - s^{\frac{1}{2}} + 2}$$

ó
$$Y(s)=\frac{A}{P(s^{\frac{1}{2}})}+\frac{Bs}{P(s^{\frac{1}{2}})}, \tag{3.37}$$

de donde $P(t)=t^3-2t^2-t+2$ es el polinomio auxiliar asociado a la ecuación y

$$A=\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}(0)-2y(0)-\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0),$$

$$B=\frac{d^{-\frac{1}{2}}y}{dx^{-\frac{1}{2}}}(0).$$

Por tanto
$$y(x)=A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right]+B\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right]. \tag{3.38}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(t)}&=\frac{A_1}{t+1}+\frac{A_2}{t-2}+\frac{A_3}{t-1}\\&=\frac{A_1(t-2)(t-1)+A_2(t+1)(t-1)+A_3(t+1)(t-2)}{(t+1)(t-2)(t-1)}\\&=\frac{A_1(t^2-3t+2)+A_2(t^2-1)+A_3(t^2-t+2)}{(t+1)(t-2)(t-1)}\\&=\frac{(A_1+A_2+A_3)t^2+(-3A_1-A_3)t+(2A_1-A_2-2A_3)}{(t+1)(t-2)(t-1)}.\end{aligned}$$

Así tenemos el sistema

$$\begin{aligned}A_1+A_2+A_3&=0\\3A_1-A_3&=0\\2A_1-A_2-2A_3&=1\end{aligned}$$

con soluciones $A_1=\frac{1}{6}$, $A_2=\frac{1}{3}$ y $A_3=-\frac{1}{2}$. Así

$$\frac{1}{P(t)}=\frac{1}{6(t+1)}+\frac{1}{3(t-2)}-\frac{1}{2(t-1)}.$$

De aquí
$$\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})}=\frac{1}{6(s^{\frac{1}{2}}+1)}+\frac{1}{3(s^{\frac{1}{2}}-2)}-\frac{1}{2(s^{\frac{1}{2}}-1)}.$$

Usando la ecuación (3.29), tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})}&=\frac{1}{6s^{-\frac{1}{2}}(s-1)}-\frac{1}{6(s-1)}+\frac{1}{3s^{-\frac{1}{2}}(s-4)}+\frac{2}{3(s-4)}-\frac{1}{2s^{-\frac{1}{2}}(s-1)}-\frac{1}{2(s-1)}\\&=-\frac{1}{3s^{-\frac{1}{2}}(s-1)}-\frac{2}{3(s-1)}+\frac{1}{3s^{-\frac{1}{2}}(s-4)}+\frac{2}{3(s-4)}.\end{aligned}$$

Así, de la tabla 2.1 vemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right] = -\frac{1}{3}E_x(-\frac{1}{2},1) - \frac{2}{3}E_x(0,1) + \frac{1}{3}E_x(-\frac{1}{2},4) + \frac{2}{3}E_x(0,4).$$

Usando la ecuación (1.38) llegamos a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right] &= -\frac{1}{3}E_x(\frac{1}{2},1) - \frac{1}{3}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{2}{3}E_x(0,1) + \frac{4}{3}E_x(\frac{1}{2},4) + \frac{1}{3}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{2}{3}E_x(0,4)\\ &= \frac{1}{3}\left[-E_x(\frac{1}{2},1) - 2E_x(0,1) + 4E_x(\frac{1}{2},4) + 2E_x(0,4)\right]\\ &= y_1(x).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{P(t)} &= \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{t-2} + \frac{A_3}{t-1}\\ &= \frac{A_1(t-2)(t-1) + A_2(t+1)(t-1) + A_3(t+1)(t-2)}{(t+1)(t-2)(t-1)}\\ &= \frac{A_1(t^2-3t+2) + A_2(t^2-1) + A_3(t^2-t+2)}{(t+1)(t-2)(t-1)}\\ &= \frac{(A_1+A_2+A_3)t^2 + (-3A_1-A_3)t + (2A_1-A_2-2A_3)}{(t+1)(t-2)(t-1)}.\end{aligned}$$

Así tenemos el sistema

$$\begin{aligned}A_1 + A_2 + A_3 &= 1\\ 3A_1 - A_3 &= 0\\ 2A_1 - A_2 - 2A_3 &= 0\end{aligned}$$

con soluciones $A_1 = \frac{1}{6}$, $A_2 = \frac{4}{3}$ y $A_3 = -\frac{1}{2}$. De donde

$$\frac{t^2}{P(t)} = \frac{1}{6(t+1)} + \frac{4}{3(t-2)} - \frac{1}{2(t-1)},$$

y de aquí

$$\frac{s}{P(s^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{6(s^{\frac{1}{2}}+1)} + \frac{4}{3(s^{\frac{1}{2}}-2)} - \frac{1}{2(s^{\frac{1}{2}}-1)}.$$

Usando la ecuación (3.29), tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{s}{P(s^{\frac{1}{2}})} &= \frac{1}{6s^{-\frac{1}{2}}(s-1)} - \frac{1}{6(s-1)} + \frac{4}{3s^{-\frac{1}{2}}(s-4)} + \frac{8}{3(s-4)} - \frac{1}{2s^{-\frac{1}{2}}(s-1)} - \frac{1}{2(s-1)}\\ &= -\frac{1}{3s^{-\frac{1}{2}}(s-1)} - \frac{2}{3(s-1)} + \frac{4}{3s^{-\frac{1}{2}}(s-4)} + \frac{8}{3(s-4)}.\end{aligned}$$

Así, de la tabla 2.1 vemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right] = -\frac{1}{3}E_x(-\frac{1}{2},1) - \frac{2}{3}E_x(0,1) + \frac{4}{3}E_x(-\frac{1}{2},4) + \frac{8}{3}E_x(0,4).$$

Usando la ecuación (1.38) llegamos a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right] &= -\frac{1}{3}E_x(\frac{1}{2},1) - \frac{1}{3}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{2}{3}E_x(0,1) + \frac{16}{3}E_x(\frac{1}{2},4) + \frac{4}{3}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{8}{3}E_x(0,4) \\
&= \frac{1}{3}\left[-E_x(\frac{1}{2},1) - 2E_x(0,1) + 16E_x(\frac{1}{2},4) + 8E_x(0,4)\right] + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&= y_2(x).
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right] &= y_1(x), \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right] &= y_2(x),
\end{aligned}
$$

donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son las dadas por (3.35) y (3.36). Podemos escribir

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \tag{3.39}$$

la cual es una combinación lineal.

3.5. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Usando algunas de las ideas que hemos recogido en las secciones anteriores, ahora probaremos que la EDF de orden (n, q) tiene N soluciones linealmente independientes donde N es el entero mas pequeño tal que $N \geq nv$, donde $v = \frac{1}{q}$.

Teorema 3.2. *Sea*

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots a_n y = 0 \tag{3.40}$$

una EDF de orden (n, q), con $v = \frac{1}{q}$, y sea

$$P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots a_n \tag{3.41}$$

el correspondiente polinomio auxiliar. Sea

$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^v)}\right]. \tag{3.42}$$

Entonces si N es el entero mas pequeño con la propiedad de que $N \geq nv$,

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x)$$

donde

$$y_j(x) = \frac{d^{j-1}y_1}{dx^{j-1}}(x)$$

son N soluciones linealmente independientes de (3.40).

Demostración. Si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación (3.40) tenemos

$$\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y(x)\right] = 0. \tag{3.43}$$

Sea $Y(s)$ la transformada de Laplace de $y(x)$. Por una parte, podemos ver al polinomio auxiliar como $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}t^k$ con $a_0 = 1$. En base a esto

$$P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{d^{kv}y}{dx^{kv}}.$$

Calculando la transformada de Laplace de lo anterior

$$\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y(x)\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\mathcal{L}\left[\frac{d^{kv}y}{dx^{kv}}\right].$$

Usando la ecuación (2.13) llegamos a

$$\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y(x)\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\left(s^{kv}Y(s) - \sum_{p=0}^{N-1} s^{N-p-1}\frac{d^{p-N+kv}y}{dx^{p-N+kv}}(0)\right)$$

Haciendo un cambio de indices con $r = N - p - 1$ llegamos a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y(x)\right] &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}s^{kv}Y(s) - \sum_{r=0}^{N-1} s^r \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{d^{kv-(r+1)}y}{dx^{kv-(r+1)}}(0) \\ &= P(s^v)Y(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r\end{aligned} \tag{3.44}$$

donde $B_r(y)$ es una combinación lineal de términos de la forma $\dfrac{d^{kv-(r+1)}y}{dx^{kv-(r+1)}}(0)$ con $r = 0, 1, \ldots, N-1$.

De (3.43) y (3.44)

$$Y(s) = \frac{\sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r}{P(s^v)}$$

y

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

es solución de (3.40).

Sea

$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^v)}\right], \tag{3.45}$$

entonces realizando cálculos semejantes a los que se hicieron anteriormente para $y(x)$, obtenemos

$$\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y_1(x)\right] = P(s^v)Y_1(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y_1)s^r \tag{3.46}$$

donde

$$B_r(y_1) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{d^{kv-(r+1)}y_1}{dx^{kv-(r+1)}}(0).$$

Usando el teorema del valor inicial de la transformada de Laplace [11] tenemos que

$$\lim_{s\to\infty} s^{v+1}\mathcal{L}[y_1(x)] = \frac{d^v y_1}{dx^v}(0) = L.$$

Así que

$$\begin{aligned} B_0(y_1) &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\lim_{s\to\infty} s^{kv}Y_1(s) \\ &= \lim_{s\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}s^{kv}Y_1(s) \\ &= \lim_{s\to\infty} P(s^v)\frac{1}{P(s^v)} = 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B_r(y_1) &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\lim_{s\to\infty} \frac{s^{kv}}{s^r}Y_1(s) \\ &= \lim_{s\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}s^{kv}Y_1(s)\frac{1}{s^r} \\ &= \lim_{s\to\infty} P(s^v)\frac{1}{P(s^v)}\frac{1}{s^r} \\ &= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^r} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$B_0(y_1) = 1,\ B_r(y_1) = 0,\ r \geq 1. \tag{3.47}$$

Así, de (3.46), llegamos a

$$\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y_1(x)\right] = P(s^v)Y_1(s) - 1.$$

Pero $Y_1(s) = \frac{1}{P(s^v)}$. Por tanto $y(x)$ es solución de (3.40).

De nuevo del teorema del valor inicial,

$$\frac{d^k y_1}{dx^k}(0) = 0 \tag{3.48}$$

para $k = 0, 1, \ldots, N-2$. Por tanto, de (2.12)

$$\frac{d^u}{dx^u}\left(\frac{d^{j-1}y_1}{dx^{j-1}}\right) = \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left(\frac{d^u y_1}{dx^u}\right)$$

para $j = 1, 2, \ldots, N$ y para todo $u > 0$. Entonces

$$P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y_j(x) = P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)\left[\frac{d^{j-1}y_1}{dx^{j-1}}\right] = \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y_1(x)\right].$$

Pero $P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y_1(x) = 0$. Por tanto

$$y_j(x) = \frac{d^{j-1}y_1}{dx^{j-1}}(x)$$

con $j = 1, \ldots, N$ son soluciones de la ecuación (3.40).

Ahora veremos que son linealmente independientes. Consideremos

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_Ny_N(x) = 0.$$

Por hipótesis sabemos que

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_Ny_N(x) = c_1y_1(x) + c_2\frac{dy_1}{dx}(x) + \cdots + c_N\frac{d^{N-1}y_1}{dx^{N-1}}(x) = 0$$

Calculando la transformada de Laplace,

$$c_1\mathcal{L}\left[y_1(x)\right] + c_2\mathcal{L}\left[\frac{dy_1}{dx}(x)\right] + \cdots + c_N\mathcal{L}\left[\frac{d^{N-1}y_1}{dx^{N-1}}(x)\right] = 0.$$

Ahora, en virtud de que $\frac{d^ky_1}{dx^k}(0) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, N-2$, vemos que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^jy_1}{dx^j}\right] = \frac{s^j}{P(s^v)}, \tag{3.49}$$

entonces

$$\begin{aligned}
0 &= c_1\frac{1}{P(s^v)} + c_2\frac{s}{P(s^v)} + \cdots + c_N\frac{s^{N-1}}{P(s^v)}\\
0 &= \frac{1}{P(s^v)}[c_1 + c_2s + \cdots + c_Ns^{N-1}]\\
0 &= c_1 + c_2s + \cdots + c_Ns^{N-1}.
\end{aligned}$$

Dado que el conjunto $\{1, s, \ldots, s^{N-1}\}$ es linealmente independiente, entonces $c_j = 0$ para toda $j = 1, 2, \ldots, N$ y por tanto $y_1(x), ..., y_{N-1}(x)$ son linealmente independientes. $\square$

Ejemplo 3.2. *Consideremos la EDF de orden* $(2, q)$

$$\frac{d^{2v}y}{dx^{2v}} + a_1\frac{d^v y}{dx^v} + a_2 y = 0, \tag{3.50}$$

con $v = \frac{1}{q}$*, y su correspondiente polinomio auxiliar es*

$$P(t) = t^2 + a_1 t + a_2 = (t - \alpha_1)(t - \alpha_2).$$

En este caso $N = 1$*, así que* (3.50) *tiene solo una solución* $y_1(x)$*. De* (3.42)

$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^v)}\right]$$

Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$*,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(t)} &= \frac{A}{t-\alpha_1} + \frac{B}{t-\alpha_2}\\ &= \frac{A(t-\alpha_2)+B(t-\alpha_1)}{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)}\\ &= \frac{At - A\alpha_2 + Bt - B\alpha_1}{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)}\\ &= \frac{(A+B)t + (-A\alpha_2 - B\alpha_1)}{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)}.\end{aligned}$$

Así tenemos el sistema

$$\begin{aligned}A + B &= 0\\ -A\alpha_2 - B\alpha_1 &= 1\end{aligned}$$

con soluciones $A = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}$, $B = -\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}$*. De donde*

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(x)} &= \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(t-\alpha_1)} - \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(t-\alpha_2)}\\ &= \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{1}{t-\alpha_1} - \frac{1}{t-\alpha_2}\right).\end{aligned}$$

De aquí

$$\frac{1}{P(s^v)} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{1}{s^v-\alpha_1} - \frac{1}{s^v-\alpha_2}\right)$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$*,*

$$\frac{1}{P(s^v)} = \frac{1}{(s^v-\alpha_1)^2}.$$

Entonces, de la tabla 2.1

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^v-\alpha_i}\right] = \sum_{k=0}^{q-1}\alpha_i^{q-k-1}E_x(-kv, \alpha_i^q),$$

mientras

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^v-\alpha_1)^2}\right]=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{q}\alpha_1^{j+k-2}\left\{xE_x((j+k)v-2,\alpha_1^q)\right.$$
$$\left.-[(j+k)v-2]E_x((j+k)v-1,\alpha_1^q)\right\}.$$

Por tanto vemos que

$$y_1(x)=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\left[\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_1^{q-k-1}E_x(-kv,\alpha_1^q)-\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_2^{q-k-1}E_x(-kv,\alpha_2^q)\right]$$

es la solución de la ecuación si $\alpha_1\neq\alpha_2$*, mientras*

$$y_1(x)=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{q}\alpha_1^{j+k-2}\left\{xE_x((j+k)v-2,\alpha_1^q)\right.$$
$$\left.-[(j+k)v-2]E_x((j+k)v-1,\alpha_1^q)\right\}$$

es la solución si $\alpha_1=\alpha_2$.

Un cálculo explícito de las soluciones $y_1(x),...,y_N(x)$ del teorema no es una tarea fácil. Sin embargo, si las raíces del polinomio auxiliar $P(t)$ son distintas, es posible encontrar las soluciones sin mucho esfuerzo, y obtener una representación bastante simple para las mismas. Para esto, veremos algunos resultados.

El siguiente resultado habla sobre una descomposicion de fracciones parciales, la cual podemos ver mas a fondo en [12].

Teorema 3.3. *Supongamos que tenemos* $\frac{1}{P(t)}$ *y que* a *es una raíz simple de* $P(t)$*. Entonces existe una constante* A *tal que*

$$\frac{1}{P(t)}=\frac{A}{t-a}+w_a(t),$$

en donde

$$A=\frac{1}{\frac{dP}{dt}(a)}.$$

Corolario 3.1. *Supongamos que tenemos* $\frac{1}{P(t)}$ *y* $P(t)=(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n)$*, con raices* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ *todas distintas. Entonces*

$$\frac{1}{P(t)}=\frac{A_1}{t-\alpha_1}+\frac{A_2}{t-\alpha_2}+\cdots+\frac{A_n}{t-\alpha_n},\tag{3.51}$$

donde

$$A_i=\frac{1}{\frac{dP}{dt}(\alpha_i)}.$$

Ahora veremos una representación explícita de las soluciones con este resultado.

Teorema 3.4. *Sea*
$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + a_n y = 0$$
una EDF de orden (n, q), *y sea*
$$P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_n$$
el correspondiente polinomio auxiliar. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *con* $\alpha_i \neq \alpha_j$ *para* $i \neq j$ *las raíces de* $P(t)$ *y sea*
$$A_m = \frac{1}{\frac{dP}{dt}(\alpha_m)}$$
con $m = 1, 2, ..., n$. *Entonces*
$$y_1(x) = \sum_{m=1}^{n} A_m \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_m^{q-k-1} E_x(-kv, \alpha_m^q) \tag{3.52}$$
es una solución de la ecuación.

Demostración. De (3.42) vemos que
$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^v)}\right]$$
con $v = \frac{1}{q}$, es una solución. Ahora del corolario 3.1,
$$\frac{1}{P(s^v)} = \frac{A_1}{s^v - \alpha_1} + \frac{A_2}{s^v - \alpha_2} + \cdots \frac{A_n}{s^v - \alpha_n}$$
y ademas, de la tabla 2.1
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^v - \alpha_m}\right] = \sum_{j=1}^{q} \alpha_m^{j-1} E_x(jv - 1, \alpha_m^q)$$
Entonces, haciendo un cambio de indices con $k = q - j$, y considerando que $v = \frac{1}{q}$, tenemos
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^v - \alpha_m}\right] = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_m^{q-k-1} E_x(-kv, \alpha_m^q)$$
Aplicando esta fórmula a la transformada inversa de Laplace de $\frac{1}{P(s^v)}$ llegamos al resultado. □

A partir de estos resultados, veremos uno, cuya prueba también omitiremos, pero la podemos ver en [13], p. 276.

Proposición 3.1. *Sea* $P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_{j=1}^{n}(t - \alpha_j)$ *un polinomio de grado* n *con raíces* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *todas distintas. Sea*
$$\frac{1}{P(t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{t - \alpha_k},$$

donde

$$A_k = \frac{1}{\frac{dP}{dt}(\alpha_k)},$$

la expansión parcial de $\frac{1}{P(t)}$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^m A_k = 0$$

para $m = 0, 1, \ldots, n-2$.

Ejemplo 3.3. *Consideremos la EDF de orden* $(7, 3)$

$$\frac{d^{\frac{7}{3}}y}{dx^{\frac{7}{3}}} + a_1\frac{d^2y}{dx^2} + a_2\frac{d^{\frac{5}{3}}y}{dx^{\frac{5}{3}}} + a_3\frac{d^{\frac{4}{3}}y}{dx^{\frac{4}{3}}} + a_4\frac{dy}{dx} + a_5\frac{d^{\frac{2}{3}}y}{dx^{\frac{2}{3}}} + a_6\frac{d^{\frac{1}{3}}y}{dx^{\frac{1}{3}}} + a_7y = 0$$

donde $v = \frac{1}{3}$, *con lo que tendrá* $N = 3$ *soluciones. Entonces del teorema anterior*

$$y_1(x) = \sum_{m=1}^{7} A_m \left[\alpha_m^2 E_x(0, \alpha_m^3) + \alpha_m E_x(-\frac{1}{3}, \alpha_m^3) + E_x(-\frac{2}{3}, \alpha_m^3)\right]$$

es una solución de la ecuación, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$ *son distintas raíces del polinomio auxiliar* $P(t) = t^7 + a_1t^6 + a_2t^5 + a_3t^4 + a_4t^3 + a_5t^2 + a_6t + a_7$.

Para calcular y_2, *por el teorema 3.2, derivamos* y_1 *para obtener*

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{dy_1}{dx}\\
&= \sum_{m=1}^{7} A_m[\alpha_m^2 E_x(-1, \alpha_m^3) + \alpha_m E_x(-\frac{4}{3}, \alpha_m^3) + E_x(-\frac{5}{3}, \alpha_m^3)]\\
&= \sum_{m=1}^{7} A_m[\alpha_m^2\alpha_m^3 E_x(0, \alpha_m^3) + \alpha_m\alpha_m^3 E_x(-\frac{1}{3}, \alpha_m^3) + \alpha_m\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})} + \alpha_m^3 E_x(-\frac{2}{3}, \alpha_m^3) + \frac{x^{-\frac{5}{3}}}{\Gamma(-\frac{2}{3})}]\\
&= \sum_{m=1}^{7} A_m\alpha_m^3[\alpha_m^2 E_x(0, \alpha_m^3) + \alpha_m E_x(-\frac{1}{3}, \alpha_m^3) + E_x(-\frac{2}{3}, \alpha_m^3)] + \sum_{m=1}^{7} A_m \sum_{k=0}^{1} \alpha_m^{1-k}\frac{x^{-\frac{(k+4)}{3}}}{\Gamma(-\frac{(k+1)}{3})}\\
&= \sum_{m=1}^{7} A_m\alpha_m^3[\alpha_m^2 E_x(0, \alpha_m^3) + \alpha_m E_x(-\frac{1}{3}, \alpha_m^3) + E_x(-\frac{2}{3}, \alpha_m^3)] + \sum_{k=0}^{1} \frac{x^{-\frac{(k+4)}{3}}}{\Gamma(-\frac{(k+1)}{3})} \sum_{m=1}^{7} \alpha_m^{1-k} A_m
\end{aligned}$$

Usando la proposición 3.1, se anula la segunda suma. Por tanto la segunda solución de la ecuación es

$$y_2(x) = \sum_{m=1}^{7} A_m\alpha_m^3 \left[\alpha_m^2 E_x(0, \alpha_m^3) + \alpha_m E_x(-\frac{1}{3}, \alpha_m^3) + E_x(-\frac{2}{3}, \alpha_m^3)\right]$$

Con un procedimiento similar vemos que

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= \frac{d^2y_1}{dx^2}\\
&= \sum_{m=1}^{7} A_m\alpha_m^6 \left[\alpha_m^2 E_x(0, \alpha_m^3) + \alpha_m E_x(-\frac{1}{3}, \alpha_m^3) + E_x(-\frac{2}{3}, \alpha_m^3)\right]
\end{aligned}$$

es una tercer solución linealmente independiente de la ecuación.

3.6. FUNCIÓN DE GREEN

Consideremos el operador diferencial fraccional de orden (n, q)

$$\frac{d^{nv}}{dx^{nv}} + a_1 \frac{d^{(n-1)v}}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n \frac{d^0}{dx^0} \tag{3.53}$$

con $v = \frac{1}{q}$. En la sección anterior vimos que si $P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ es el polinomio auxiliar asociado al operador, entonces podemos encontrar N soluciones linealmente independientes de $P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) y(x) = 0$ (donde N es el entero mas pequeño con $N \geq nv$). Las soluciones son $y_1(x)$, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{N-1}y_1}{dx^{n-1}}$ donde

$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^v)}\right].$$

En particular, si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son las distintas raíces de $P(t)$, entonces

$$y_1(x) = \sum_{m=1}^{n} A_m \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_m^{q-k-1} E_x(-kv, \alpha_m^q),$$

donde $A_m = \frac{1}{\frac{dP}{dt}(\alpha_m)}$, con $m = 1, ..., n$.

Ahora buscaremos soluciones de $P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) y(x) = h(x)$, con $h(x)$ una función de clase C. Pero antes de esto, es necesario remarcar algunos aspectos acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

Supongamos que $q = 1$ en (3.53). Entonces $v = 1$ y el operador es ahora un operador diferencial ordinario de orden n

$$\frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_n \frac{d^0}{dx^0}.$$

Sea

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} + \cdots + p_n(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

un operador diferencial ordinario lineal de orden n. Asumiremos que los coeficientes $p_i(x)$ son continuas en algún intervalo I.

El problema es, dada una función $h(x)$ continua en un intervalo I, encontrar una solución $y(x)$ tal que

$$Ly(x) = h(x) \tag{3.54}$$

Todo conjunto $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea de orden n asociada a (3.54), $Ly(x) = 0$, en un intervalo I, se llama conjunto fundamental de soluciones en el intervalo. Existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogenea de orden n, $Ly(x) = 0$, en un intervalo I.

Toda función Φ_P libre de parámetros arbitrarios que satisface la ecuación (3.54) se llama solución particular de la ecuación.

Exploraremos algunas propiedades de estas ecuaciones no homogéneas.

Proposición 3.2. *Si* $\Phi_P(x)$ *es una solución de* (3.54) *y* $\Phi_H(x)$ *es una solución de la ecuación homogénea asociada* $Ly(x) = 0$*, entonces* $\Phi(x) = \Phi_P(x) + \Phi_H(x)$ *es una solución de* (3.54)*.*

Si además de (3.54), $y(x)$ satisface las condiciones iniciales homogéneas

$$y(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \cdots = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = 0$$

entonces $y(x)$ esta dada por

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,u)h(u)\,du \tag{3.55}$$

la cual $G(x,u)$ la llamaremos la función de Green [14, p. 70] de (3.54), la cual obtendremos como sigue.

Empezaremos sacando el caso en el que $n = 2$, y haciendo un proceso análogo e inductivo obtendremos lo buscado para el caso de n.

Consideremos nuestra ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = h(x). \tag{3.56}$$

Supongamos que $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada $\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$. Usando el método de variación de parámetros, pensaremos nuestra solución como sigue

$$y(x) = u_1(x)\Phi_1(x) + u_2(x)\Phi_2(x), \tag{3.57}$$

donde

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{\Phi_2(x)h(x)}{W(x)}$$

y

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{\Phi_1(x)h(x)}{W(x)}$$

con $W(x) = W(\Phi_1, \Phi_2)(x)$ el wronskiano de Φ_1 y Φ_2. Si expresamos u_1 y u_2 como integrales definidas

$$u_1 = -\int_{x_0}^{x} \frac{\Phi_2(u)h(u)}{W(u)}\,du,$$

$$u_2 = \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi_1(u)h(u)}{W(u)}\,du.$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.57) llegamos a

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\int_{x_0}^{x} \frac{\Phi_2(u)h(u)\Phi_1(x)}{W(u)}\,du + \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi_1(u)h(u)\Phi_2(x)}{W(u)}\,du \\
&= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\Phi_1(u)h(u)\Phi_2(x)}{W(u)} - \frac{\Phi_2(u)h(u)\Phi_1(x)}{W(u)} \right) du \\
&= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\Phi_1(u)\Phi_2(x) - \Phi_2(u)\Phi_1(x)}{W(u)} \right) h(u)\,du
\end{aligned}
$$

Entonces nuestra solución (3.57) puede ser expresada como

$$
y(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,u)h(u)\,du
$$

donde

$$
G(x,u) = \frac{\Phi_1(u)\Phi_2(x) - \Phi_2(u)\Phi_1(x)}{W(u)} = -\frac{1}{W(u)} \begin{vmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \\ \Phi_1(u) & \Phi_2(u) \end{vmatrix}. \tag{3.58}
$$

Esta función de Green tiene estas propiedades

$$
G(x,u)\big|_{x=u} = 0,
$$

$$
\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=u} = 1.
$$

Este método puede ser usado para construir una solución particular de una EDO lineal no homogénea de orden n. Específicamente, $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada $Ly = 0$, la correspondiente función de Green $G(x,y)$ es

$$
G(x,u) = \frac{(-1)^{n-1}}{W(u)} \begin{vmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_n(x) \\ \Phi_1(u) & \Phi_2(u) & \cdots & \Phi_n(u) \\ \dfrac{d\Phi_1(u)}{du} & \dfrac{d\Phi_2(u)}{du} & \cdots & \dfrac{d\Phi_n(u)}{du} \\ \dfrac{d^2\Phi_1(u)}{du^2} & \dfrac{d^2\Phi_2(u)}{du^2} & \cdots & \dfrac{d^2\Phi_n(u)}{du^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{d^{n-2}\Phi_1(u)}{du^{n-2}} & \dfrac{d^{n-2}\Phi_2(u)}{du^{n-2}} & \cdots & \dfrac{d^{n-2}\Phi_n(u)}{du^{n-2}} \end{vmatrix} \tag{3.59}
$$

donde

$$
W(u) = \begin{vmatrix} \Phi_1(u) & \Phi_2(u) & \cdots & \Phi_n(u) \\ \dfrac{d\Phi_1(u)}{du} & \dfrac{d\Phi_2(u)}{du} & \cdots & \dfrac{d\Phi_n(u)}{du} \\ \dfrac{d^2\Phi_1(u)}{du^2} & \dfrac{d^2\Phi_2(u)}{du^2} & \cdots & \dfrac{d^2\Phi_n(u)}{du^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}\Phi_1(u)}{du^{n-1}} & \dfrac{d^{n-1}\Phi_2(u)}{du^{n-1}} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}\Phi_n(u)}{du^{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{3.60}
$$

Del mismo modo, se cumplirán las siguientes propiedades

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x,u)\bigg|_{x=u} = 0$$

para $k = 0, 1, ..., n-2$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x,u)\bigg|_{x=u} = 1$$

Por tanto, si $h(x)$ es continua en un intervalo I, podemos verificar que (3.55) es una solución de (3.54).
Por supuesto, dado que $\{\Phi_1(x), ..., \Phi_n(x)\}$ es un sistema fundamental, de la proposición 3.2, vemos que

$$\eta(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,u)h(u)\,du + C_1\Phi_1(x) + \cdots C_n\Phi_n(x)$$

también es solución de (3.54) donde $C_1, ..., C_n$ son constantes arbitrarias. Las condiciones iniciales ya no serían cero.

Si en particular, si $p_i(x)$ es constante, digamos $p_i(x) = a_i$, $1 \leq i \leq\leq n$, en este caso podemos escribir

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_n\frac{d^0}{dx^0}.$$

Notemos que si tomamos nuestro polinomio auxiliar $P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$, entonces

$$L = P\left(\frac{d}{dx}\right) = .\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{d^k}{dx^k}$$

. Si además $y(x)$ satisface las condiciones iniciales homogéneas

$$y(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \cdots = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = 0,$$

podremos hallar la función de Green de la siguiente forma.

Consideremos la ecuación

$$Ly(x) = h(x),$$

entonces lo podemos ver de la siguiente forma

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = h(x) \tag{3.61}$$

Calculando la transformada de Laplace en (3.61), llegamos a

$$\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x)\right] = \mathcal{L}\left[h(x)\right]$$

Por un lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x)\right] &= \mathcal{L}\left[.\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{d^k}{dx^k}\right] \\
&= .\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\mathcal{L}\left[\frac{d^k}{dx^k}\right] \\
&= .\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}s^k Y(s) \\
&= P(s)Y(s)
\end{aligned}$$

Con esto tenemos que

$$P(s)Y(s) = H(s)$$

donde $H(s) = \mathcal{L}[h(x)]$. Ahora, acomodando tenemos

$$\begin{aligned}
P(s)Y(s) &= H(s) \\
Y(s) &= \frac{H(s)}{P(s)}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Sea $G(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s)}\right]$. Aplicando la transformada inversa a (3.62) tenemos que

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{P(s)}\right] \tag{3.63}$$

Aplicando el teorema de la convolución (teorema 1.5) tenemos que

$$y(x) = \int_0^x G(x-u)h(u)\,du \tag{3.64}$$

Entonces $G(x, u)$ es una función solo de la diferencia de estos argumentos

$$G(x, u) = G(x - u)$$

3.7. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS NO HOMOGÉNEAS

Hemos visto anteriormente que la solución de la ecuación diferencial ordinaria no homogénea

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_n y(x) = h(x) \tag{3.65}$$

está dada por

$$\eta(x) = \int_0^x G(x, u)h(u)\,du + C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x)\cdots C_n\Phi_n(x) \tag{3.66}$$

donde las C_i son constantes arbitrarias, G es la función de Green asociada a (3.65) y $\Phi_i(x)$ son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a (3.65). Por supuesto, si tomamos todas las C_i como cero, entonces

$$y(x) = \int_0^x G(x,u)h(u)\,du \tag{3.67}$$

es una solución, para la cual se satisfacen las condiciones iniciales homogéneas

$$y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = \cdots = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(0) = 0. \tag{3.68}$$

En base a lo anterior, podemos ver un resultado análogo para EDF.

Teorema 3.5. *Sea y_P cualquier solución particular de la EDF, no homogénea, de orden (n,q)*

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_ny = h(x), \tag{3.69}$$

y sea y_H la solución de la EDF homogénea asociada

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_ny = 0.$$

Entonces

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x)$$

es solución de (3.69).

Demostración. Consideremos el operador (3.4), entonces (3.69) lo podemos ver como $Ly(x) = h(x)$. Entonces

$$Ly(x) = L[y_P(x) + y_H(x)] = L(y_P(x)) + L(y_H(x)) = 0 + h(x) = h(x).$$

□

Ahora analizaremos el problema de encontrar soluciones a las EDF no homogéneas de orden (n,q)

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_ny = h(x), \tag{3.70}$$

donde $h(x)$ la asumiremos continua a trozos y de orden exponencial. Como siempre, sea $P(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n$ el polinomio auxiliar. Hallaremos la solución tratando de hacer algo análogo para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Iniciaremos tomando la transformada de Laplace de (3.70). De la ecuación (3.44)

$$\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y(x)\right] = P(s^v)Y(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r,$$

donde $B_r(y)$ es una combinación lineal de términos de la forma $\frac{d^{kv-(r+1)}y}{dx^{kv-(r+1)}}(0)$ con

$r = 0, 1, ..., N-1$. Así,

$$\mathcal{L}\left[P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)y(x)\right] = \mathcal{L}\left[h(x)\right]$$

$$P(s^v)Y(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r = H(s)$$

$$P(s^v)Y(s) = H(s) + \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r,$$

con lo que

$$Y(s) = \frac{H(s)}{P(s^v)} + \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)\frac{s^r}{P(s^v)} \tag{3.71}$$

donde tomamos $Y(s)$ y $H(s)$ las transformadas de Laplace de $y(x)$ y $h(x)$ respectivamente. Ahora sea

$$K(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^v)}\right]. \tag{3.72}$$

Tomando la transformada inversa de (3.71)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{P(s^v)}\right] + \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^r}{P(s^v)}\right] \tag{3.73}$$

Del teorema de convolución (teorema 1.5) vemos que, a partir de la ecuación (3.72), podemos ver a (3.73) como

$$y(x) = \int_0^x K(x-u)h(u)\,du + \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^r}{P(s^v)}\right] \tag{3.74}$$

Podemos notar que, del teorema 3.2, $K(x) = y_1(x)$, y $y_1(x)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada a (3.70). Usando la ecuación (3.49), podemos escribir lo anterior como

$$y(x) = \int_0^x K(x-u)h(u)\,du + C_1K(x) + C_2\frac{dK}{dx} + \cdots C_N\frac{d^{N-1}K}{dx^{N-1}} \tag{3.75}$$

donde las C_i son constantes.

En particular supongamos que buscamos la solución de la ecuación con las condiciones homogéneas

$$y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = \cdots = \frac{d^{N-1}y}{dx^{N-1}}(0) = 0 \tag{3.76}$$

Afirmamos que

$$y(x) = \int_0^x K(x-u)h(u)\,du \tag{3.77}$$

es la solución buscada.

Podemos notar, a partir de la ecuación (3.75) y lo mencionado anteriormente, (3.77) satisface (3.70). Ahora, $y(0) = 0$ y usando la proposición 1.2 podemos ver que

$$\frac{dy}{dx} = K(0)h(x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}(x-u)h(u)\,du \tag{3.78}$$

Pero de (3.48),

$$\frac{d^jK}{dx^j}(0) = 0, \tag{3.79}$$

para $j = 0, 1, ..., N-2$, por tanto

$$\frac{dy}{dx}(0) = 0$$

Similarmente

$$\begin{aligned}\frac{d^jy}{dx^j} &= \frac{d^{j-1}K}{dx^{j-1}}(0)h(x) + \int_0^x \frac{\partial^j K}{\partial^j x}(x-y)h(y)\,dy \\ &= \int_0^x \frac{\partial^j K}{\partial^j x}(x-y)h(y)\,dy\end{aligned}$$

para $j = 1, ..., N-1$ (véase [10]), y por tanto, de (3.79)

$$\frac{d^ky}{dx^k}(0) = 0$$

para $k = 0, 1, ..., N-1$.

Comparando (3.66) y (3.77), hemos llamado a $K(x-u)$ la función de Green fraccional asociada a $P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$. Por tanto hemos probado lo siguiente.

Teorema 3.6. *Sea $h(x)$ una función continua a trozos en $(0, \infty)$, integrables y de orden exponencial en $[0, \infty)$. Sea*

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_ny = h(x) \tag{3.80}$$

con

$$\frac{d^jy}{dx^j}(0) = 0 \tag{3.81}$$

para $j = 0, 1, ..., N-1$, un sistema diferencial fraccional de orden (n, q), donde N es el entero mas pequeño tal que $N \geq nv$. Sea

$$P(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n$$

el polinomio auxiliar, y sea

$$K(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^v)}\right] \tag{3.82}$$

la función fraccional de Green. Entonces

$$y(x) = \int_0^x K(x-u)h(u)\,du \tag{3.83}$$

es una solución de (3.80)

Ejemplo 3.4. *Consideremos la ecuación diferencial fraccional de orden* $(2,4)$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} - a\frac{d^{\frac{1}{4}}y}{dx^{\frac{1}{4}}} = h(x) \tag{3.84}$$

donde $v = \frac{1}{4}$, $N = 1$, *con una sola condición inicial* $y(0) = 0$. *Encontraremos una solución explícita.*

La función de Green fraccional $K(x)$ *está dada por*

$$K(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{4}})}\right] \tag{3.85}$$

donde $P(t) = t^2 - at$ *es el polinomio auxiliar. Por tanto*

$$K(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{4}}(s^{\frac{1}{4}} - a)}\right].$$

Entonces, de la tabla 2.1

$$K(x) = \sum_{j=0}^{3} a^j E_x((j-2)(\frac{1}{4}), a^4), \tag{3.86}$$

por tanto, la solución de la ecuación está dada por

$$y(x) = \int_0^x K(x-u)h(u)\,du \tag{3.87}$$

donde K *está definida de la forma* (3.86).

Ejemplo 3.5. *Consideremos la EDF de orden* $(2,2)$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} - 2y = x \tag{3.88}$$

con una condición inicial $y(0) = 0$, *dado que* $v = \frac{1}{2}$ *con lo que* $N = 1$. *Con nuestra notación anterior,* $P(t) = t^2 + t - 2$ *es el polinomio auxiliar asociado a* (3.88), *con raíces* $\alpha = 1$, $\beta = -2$. *Entonces la función de Green fraccional* $K(x)$ *de* (3.88) *está dada como*

$$\begin{aligned} K(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 1} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}} + 2}\right)\right], \end{aligned}$$

usando la tabla 2.1, vemos que

$$K(x) = \frac{1}{3}\left[E_x(0,1) + 2E_x(0,4) + E_x(-\frac{1}{2},1) - E_x(-\frac{1}{2},4)\right].$$

Con lo que podemos escribir

$$y(x) = \frac{1}{3}\int_0^x u\left[E_{x-u}(0,1) + 2E_{x-u}(0,4) + E_{x-u}(-\frac{1}{2},1) - E_{x-u}(-\frac{1}{2},4)\right] du.$$

Haciendo un cambio de variable $t = x - u$ podemos escribir como

$$y(x) = \frac{1}{3}\int_0^x (x-t)\left[E_t(0,1) + 2E_t(0,4) + E_t(-\frac{1}{2},1) - E_t(-\frac{1}{2},4)\right] dt,$$

así

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{1}{3}\bigg[\int_0^x (x-t)E_t(0,1)\,dt &+ 2\int_0^x (x-t)E_t(0,4)\,dt \\ &+ \int_0^x (x-t)E_t(-\frac{1}{2},1)\,dt - \int_0^x (x-t)E_t(-\frac{1}{2},4)\,dt\bigg]. \end{aligned}$$

Por tanto la solución es

$$y(x) = \frac{1}{3}\left[E_x(2,1) + 2E_x(2,4) + E_x(\frac{3}{2},1) - E_x(\frac{3}{2},4)\right].$$

3.8. UN MÉTODO USANDO ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Empezaremos viendo algunos resultados que envuelven a nuestra función de Green fraccional. Empezaremos viendo uno relacionado con la convolución.

Teorema 3.7. *Sea*

$$P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) = \frac{d^{nv}}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n\frac{d^0}{dx^0} \tag{3.89}$$

un operador diferencial fraccional de orden (n, q) con una función fraccional de Green $K_P(x)$ y sea

$$Q\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) = \frac{d^{mv}}{dx^{mv}} + b_1\frac{d^{(m-1)v}}{dx^{(m-1)v}} + \cdots + b_n\frac{d^0}{dx^0} \tag{3.90}$$

un operador diferencial fraccional de orden (m, q) con función fraccional de Green $K_Q(x)$. Sea

$$R(t) = Q(t)P(t) \tag{3.91}$$

y sea

$$R\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) = \frac{d^{(m+n)v}}{dx^{(m+n)v}} + c_1\frac{d^{(m+n-1)v}}{dx^{(m+n-1)v}} + \cdots + c_{n+m}\frac{d^0}{dx^0} \tag{3.92}$$

un operador diferencial fraccional de orden $(m+n, q)$. Entonces si $K_R(x)$ es la función fraccional de Green asociada con $R\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$, entonces

$$K_R(x) = \int_0^x K_Q(x-y)K_P(y)\,dy. \tag{3.93}$$

Demostración. Vemos que del teorema 3.6, viendo (3.82)

$$\mathcal{L}[K_P(x)] = \frac{1}{P(s^v)},$$

así

$$\mathcal{L}[K_Q(x)]\mathcal{L}[K_P(x)] = \frac{1}{Q(s^v)}\frac{1}{P(s^v)}.$$

De la hipótesis

$$R(s^v) = Q(s^v)P(s^v).$$

Pero $\mathcal{L}[K_R(x)] = \frac{1}{R(s^v)}$. Por tanto

$$\mathcal{L}[K_R(x)] = \mathcal{L}[K_Q(x)]\mathcal{L}[K_P(x)].$$

Del teorema de la convolución de las transformadas de Laplace (teorema 1.5)

$$K_R(x) = \int_0^x K_Q(x-y)K_P(y)\,dy. \tag{3.94}$$

□

Del teorema 3.6 vemos que (3.93) es solución de

$$Q\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)K_R(x) = K_P(x).$$

Por supuesto, podemos intercambiar los roles de P y Q. Por tanto, tenemos lo siguiente

Corolario 3.2. *Si $P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$, $Q\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$ y $R\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$ son los operadores definidos como en el teorema anterior, y K_P, K_Q, K_R son sus respectivas funciones de Green, entonces*

$$Q\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)K_R(x) = K_P(x)$$

y

$$P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)K_R(x) = K_Q(x).$$

Ahora, sea q un entero positivo, y sea $v = \frac{1}{q}$. Probaremos que si P es un polinomio en potencias de t^v, existe un polinomio Q también de potencias de t^v tal que su producto es un polinomio en potencias de t. Su utilidad deriva del hecho de que en cierto sentido, podemos convertir un operador diferencial fraccional a un operador diferencial ordinario.

Teorema 3.8. *Sea P un polinomio con grado $n \geq 1$ en t. Entonces para cada entero positivo q, existe un polinomio Q de grado $n(q-1)$ en t tal que*

$$Q(t)P(t)$$

es un polinomio T de grado n en t^q, esto es, $T(t^q) = Q(t)P(t)$.

Demostración. Sea

$$P(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)$$

donde α_k son las raíces del polinomio, y sea

$$T(y) = \prod_{k=1}^{n}(y-\alpha_k^q),$$

si consideremos $T(t^q) = \prod_{k=1}^{n}(t^q-\alpha_k^q)$, entonces

$$\frac{T(t^q)}{P(t)} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(t^q-\alpha_k^q)}{\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{(t^q-\alpha_k^q)}{(t-\alpha_k)} = \prod_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\alpha_k^{j-1}t^{q-j}.$$

Por tanto vemos que el lado derecho de la igualdad anterior es un polinomio en t de grado $n(q-1)$. Llamemos a este $Q(t)$,

$$Q(t) = \prod_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\alpha_k^{j-1}t^{q-j} \tag{3.95}$$

Por tanto $T(t^q) = Q(t)P(t)$. $\square$

Por ejemplo, si $n = 2$ y $q = 3$

$$P(t) = t^2 + a_1 t + a_2. \tag{3.96}$$

Si las raices de $P(t)$ son α_1 y α_2, entonces

$$P(t) = (t - \alpha_1)(t - \alpha_2) = t^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)t + \alpha_1\alpha_2$$

Así, $a_1 = -\alpha_1 - \alpha_2$ y $a_2 = \alpha_1\alpha_2$. De la ecuación (3.95) tenemos que

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \prod_{k=1}^{2}(t^2 + \alpha_k t + \alpha_k^2) \\
&= (t^2 + \alpha_1 t + \alpha_1^2)(t^2 + \alpha_2 t + \alpha_2^2) \\
&= t^4 + (\alpha_1 + \alpha_2)t^3 + (\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2)t^2 + (\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2)t + \alpha_1^2\alpha_2^2
\end{aligned}$$

Por tanto

$$Q(t) = t^4 - a_1 t^3 + (a_1^2 - a_2)t^2 - a_1 a_2 t + a_2^2, \tag{3.97}$$

$$T(t^3) = t^6 + (a_1^3 - 3a_1 a_2)t^3 + a_2^3. \tag{3.98}$$

Ahora, si tenemos un polinomio P de grado $n \geq 1$, del teorema 3.8, existe Q un polinomio de grado $n(q-1)$ tal que $Q(t)P(t)$ sea un polinomio de grado n en t^q. Además, si tomamos a P y a Q como en el teorema anterior, entonces, por supuesto

$$R\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) = P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) Q\left(\frac{d^v}{dx^v}\right).$$

Además

$$R\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) = T\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_n\frac{d^0}{dx^0}$$

el cual es un operador diferencial ordinario. Sea $G(x)$ la función de Green asociada con T, entonces

$$G(x) = \int_0^x K_Q(x-y)K_P(y)\,dy \tag{3.99}$$

Por tanto hemos probado lo siguiente.

Corolario 3.3. *Si $P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$ es un operador diferencial fraccional de orden (n, q), existe un operador diferencial fraccional $Q\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$ de orden $(n(q-1), q)$ tal que la convolución de sus funciones fraccionales de Green es una función de Green de un operador diferencial ordinario de orden n.*

En particular, el corolario 3.2 implica que

$$Q\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) G(x) = K_P(x) \tag{3.100}$$

y

$$P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) G(x) = K_Q(x). \tag{3.101}$$

Podemos observar de manera específica, a partir de la igualdad (3.100), si tenemos un operador diferencial fraccional $P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$, podemos encontrar su función de Green a partir de la función de Green asociada a un operador diferencial ordinario. Daremos un ejemplo de esto.

Ejemplo 3.6. *Sea*

$$\frac{d^{\frac{2}{3}}}{dx^{\frac{2}{3}}} + b\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} + c \tag{3.102}$$

un operador diferencial fraccional de orden $(2,3)$ *con* $v = \frac{1}{3}$, *y sea*

$$P(t) = t^2 + bt + c$$

el correspondiente polinomio auxiliar. Entonces del teorema 3.8 existe un polinomio Q *de grado* $n(q-1) = 4$ *tal que*

$$T(t^3) = Q(t)P(t)$$

es un polinomio de grado 2 en t^3. *Ahora vemos que de* (3.97)

$$Q(t) = t^4 - bt^3 + (b^2 - c)t^2 - bct + c^2 \tag{3.103}$$

y

$$T(t^3) = t^6 + b(b^2 - 3c)t^3 + c^3.$$

Supongamos que α *y* β *son las raíces de* $P(t)$. *Entonces vemos que*

$$T(\alpha^3) = Q(\alpha)P(\alpha) = 0$$

y

$$T(\beta^3) = Q(\beta)P(\beta) = 0$$

con lo que α^3 *y* β^3 *son raíces de* $T(t) = t^2 + b(b^2 - 3c)t + c^3$. *Así consideramos el operador diferencial ordinario*

$$T\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + b(b^2 - 3c)\frac{d}{dx} + c^3, \tag{3.104}$$

cuyas soluciones de la ecuación homogénea asociada $Ty(x) = 0$ *son* $\Phi_1(x) = e^{\alpha^3 x}$ *y* $\Phi_2(x) = e^{\beta^3 x}$ *si* $\alpha^3 \neq \beta^3$; *y* $\Phi_1(x) = e^{\alpha^3 x}$ *y* $\Phi_2(x) = xe^{\alpha^3 x}$ *si* $\alpha^3 = \beta^3$. *Usando las fórmulas* (3.59) *y* (3.60),

- *Si* $\alpha^3 \neq \beta^3$,

$$\begin{aligned} G(x-s) = G(x,s) &= \frac{e^{\alpha^3 s}e^{\beta^3 x} - e^{\beta^3 s}e^{\alpha^3 x}}{(\beta^3 - \alpha^3)e^{\alpha^3 s}e^{\beta^3 s}} \\ &= \frac{e^{-\beta^3 s}e^{\beta^3 x} - e^{-\alpha^3 s}e^{\alpha^3 x}}{\beta^3 - \alpha^3} \\ &= \frac{e^{\beta^3 x - \beta^3 s} - e^{\alpha^3 x - \alpha^3 s}}{\beta^3 - \alpha^3} \\ &= \frac{e^{\alpha^3 (x-s)} - e^{\beta^3 (x-s)}}{\alpha^3 - \beta^3}. \end{aligned}$$

- *Si* $\alpha^3 = \beta^3$,

$$\begin{aligned} G(x-s) = G(x,s) &= \frac{e^{\alpha^3 s}xe^{\alpha^3 x} - se^{\alpha^3 s}e^{\alpha^3 x}}{e^{2\alpha^3 s}} \\ &= e^{-\alpha^3 s}xe^{\alpha^3 x} - se^{-\alpha^3 s}e^{\alpha^3 x} \\ &= xe^{\alpha^3 x - \alpha^3 s} - se^{\alpha^3 x - \alpha^3 s} \\ &= (x-s)e^{\alpha^3 (x-s)}. \end{aligned}$$

Por tanto, la función de Green $G(x)$ *asociada al operador* (3.104) *es,*

$$G(x) = \frac{1}{\alpha^3 - \beta^3}[e^{\alpha^3 x} - e^{\beta^3 x}]$$

si $\alpha^3 \neq \beta^3$, *y*

$$G(x) = xe^{\alpha^3 x}$$

si $\alpha^3 = \beta^3$. *De* (3.100)

$$Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right) G(x) = K_P(x)$$

Verificaremos este resultado en este ejemplo. Para ser específicos, supondremos que $\alpha^3 \neq \beta^3$. *Notemos que*

$$Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{d^{\frac{4}{3}}}{dx^{\frac{4}{3}}} - b\frac{d}{dx} + (b^2 - c)\frac{d^{\frac{2}{3}}}{dx^{\frac{2}{3}}} - bc\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} + c^2$$

y

$$G(x) = \frac{1}{\alpha^3 - \beta^3}[e^{\alpha^3 x} - e^{\beta^3 x}].$$

Por tanto

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right) G(x) = \frac{1}{\alpha^3 - \beta^3} \Big[& E_x(-\frac{4}{3}, \alpha^3) - E_x(-\frac{4}{3}, \beta^3) \\ & - bE_x(-1, \alpha^3) + bE_x(-1, \beta^3) \\ & + (b^2 - c)E_x(-\frac{2}{3}, \alpha^3) - (b^2 - c)E_x(-\frac{2}{3}, \beta^3) \\ & - bcE_x(-\frac{1}{3}, \alpha^3) + bcE_x(-\frac{1}{3}, \beta^3) \\ & + c^2 E_x(0, \alpha^3) - c^2 E_x(0, \beta^3) \Big], \end{aligned}$$

y usando las igualdades (1.38), (1.40) *y* (1.52), *podemos ver que*

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right) G(x) = \frac{1}{\alpha^3 - \beta^3} \Big[& \alpha^3 E_x(-\frac{1}{3}, \alpha^3) + \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})} - \beta^3 E_x(-\frac{1}{3}, \beta^3) - \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})} \\ & - b\alpha^3 E_x(0, \alpha^3) + b\beta^3 E_x(0, \beta^3) \\ & + (b^2 - c)E_x(-\frac{2}{3}, \alpha^3) - (b^2 - c)E_x(-\frac{2}{3}, \beta^3) \\ & - bcE_x(-\frac{1}{3}, \alpha^3) + bcE_x(-\frac{1}{3}, \beta^3) \\ & + c^2 E_x(0, \alpha^3) - c^2 E_x(0, \beta^3) \Big]. \end{aligned}$$

Dado que α *y* β *son raíces de* $P(t)$*, se sigue que* $b = -(\alpha+\beta)$ *y* $c = \alpha\beta$*. Entonces*

$$Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right)G(x) = \frac{1}{\alpha^3-\beta^3}\Big[\alpha^3 E_x(-\frac{1}{3},\alpha^3) - \beta^3 E_x(-\frac{1}{3},\beta^3)$$
$$+ (\alpha+\beta)\alpha^3 E_x(0,\alpha^3) - (\alpha+\beta)\beta^3 E_x(0,\beta^3)$$
$$+ ((\alpha+\beta)^2-\alpha\beta)E_x(-\frac{2}{3},\alpha^3) - ((\alpha+\beta)^2-\alpha\beta)E_x(-\frac{2}{3},\beta^3)$$
$$+ (\alpha+\beta)\alpha\beta E_x(-\frac{1}{3},\alpha^3) - (\alpha+\beta)\alpha\beta E_x(-\frac{1}{3},\beta^3)$$
$$+(\alpha\beta)^2 E_x(0,\alpha^3) - (\alpha\beta)^2 E_x(0,\beta^3)\Big].$$

Así

$$Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right)G(x) = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}\Big[\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)E_x(-\frac{1}{3},\alpha^3)$$
$$-\beta(\beta^2+\alpha\beta+\beta^2)E_x(-\frac{1}{3},\beta^3)$$
$$+(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)E_x(-\frac{2}{3},\alpha^3)$$
$$-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)E_x(-\frac{2}{3},\beta^3)$$
$$+\alpha^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)E_x(0,\alpha^3)$$
$$-\beta^2(\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2)E_x(0,\beta^3)\Big]$$
$$= \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}\Big[\alpha E_x(-\frac{1}{3},\alpha^3) - \beta E_x(-\frac{1}{3},\beta^3)$$
$$+E_x(-\frac{2}{3},\alpha^3) - E_x(-\frac{2}{3},\beta^3)$$
$$+\alpha^2 E_x(0,\alpha^3) - \beta^2 E_x(0,\beta^3)\Big].$$

Llegando a

$$Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right)G(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}\Big[\alpha E_x(-\frac{1}{3},\alpha^3) - \beta E_x(-\frac{1}{3},\beta^3) + E_x(-\frac{2}{3},\alpha^3) - E_x(-\frac{2}{3},\beta^3)$$
$$+\alpha^2 E_x(0,\alpha^3) - \beta^2 E_x(0,\beta^3)\Big].$$

Yendo por el lado fraccional, vemos que

$$K_P(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{3}})}\right]$$

y

$$P(s^{\frac{1}{3}}) = s^{\frac{2}{3}} + bs^{\frac{1}{3}} + c.$$

Viendo la expansión en fracciones parciales

$$\frac{1}{P(s^{\frac{1}{3}})} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{3}}-\alpha} - \frac{1}{s^{\frac{1}{3}}-\beta}\right),$$

a partir de la tabla 2.1 vemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{3}})}\right] = \frac{1}{\alpha-\beta}\Big[E_x(-\frac{2}{3},\alpha^3) + \alpha E_x(-\frac{1}{3},\alpha^3) + \alpha^2 E_x(0,\alpha^3)$$
$$-E_x(-\frac{2}{3},\beta^3) - \beta E_x(-\frac{1}{3},\beta^3) - \beta^2 E_x(0,\beta^3)\Big]$$

llegando a la conclusión de que se cumple la igualdad.

Así, en base a las ideas anteriores, afirmamos que los resultados anteriores demostraban que la solución de una EDF puede resolverse como un problema de EDO.

Supongamos que deseamos resolver el sistema diferencial de orden (n, q)

$$\begin{gathered}\left[\frac{d^{nv}}{dx^{nv}} + a_1\frac{d^{(n-1)v}}{dx^{(n-1)v}} + \cdots + a_n\frac{d^0}{dx^0}\right] y(x) = h(x)\\ y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = \cdots = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(0) = 0\end{gathered} \tag{3.105}$$

donde N es el entero mas pequeño con la propiedad de que $N \geq nv$, y $h(x)$ es continua a trozos en $[0,\infty)$, integrable y de orden exponencial (vease definición 1.6). Sea

$$P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots a_n$$

el polinomio auxiliar.

Del teorema 3.8, dado un polinomio P de grado n en t, podemos construir dos polinomios T y Q tales que

$$T(t^q) = Q(t)P(t)$$

donde Q es un polinomio $n(q-1)$ en t, y T es un polinomio de grado n en t^q. Elijamos P como $P(t)$.

Para el operador diferencial ordinario

$$T\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n\frac{d^0}{dx^0}$$

podemos construir una función de Green, digamos $G(x)$. Entonces de la ecuación (3.100), vemos que

$$Q\left(\frac{d^v}{dx^v}\right) G(x) = K_P(x). \tag{3.106}$$

Por tanto hemos obtenido la función fraccional de Green K_P de $P\left(\frac{d^v}{dx^v}\right)$ al aplicar el operador fraccional a una función ya conocida $G(x)$. Del teorema 3.6 la solución de (3.105) está dada por

$$\int_0^x K_P(x-s)h(s)\,ds. \tag{3.107}$$

Así vemos que el único momento donde necesitamos el cálculo fraccional fue cuando tuvimos que calcular las derivadas fraccionales de una función conocida.

Ejemplo 3.7. *Consideremos la EDF de orden* $(2,3)$

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{2}{3}}y}{dx^{\frac{2}{3}}} - 4\frac{d^{\frac{1}{3}}y}{dx^{\frac{1}{3}}} + 4y = h(x) \\ y(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.108}$$

donde $v = \frac{1}{3}$, *con lo que* $N = 1$. *Entonces*

$$P(t) = t^2 - 4t + 4$$

es el polinomio auxiliar asociado con (3.108). *Usando* (3.97), *vemos que*

$$Q(t) = t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 16t + 16$$

y

$$T(t^3) = R(t) = Q(t)P(t) = t^6 - 16t^3 + 64,$$

$$T(t) = t^2 - 16t + 64.$$

Así consideramos el operador diferencial ordinario

$$R\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right) = T\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} - 16\frac{d}{dx} + 64, \tag{3.109}$$

cuyas soluciones de la ecuación homogénea asociada $Ty(x) = 0$ *son* $\Phi_1(x) = e^{8x}$ *y* $\Phi_2(x) = xe^{8x}$. *Usando la fórmula* (3.58),

$$\begin{aligned} G(x-s) = G(x,s) &= \frac{e^{8s}xe^{8x} - se^{8s}e^{8x}}{e^{16s}} \\ &= e^{-8s}xe^{8x} - se^{-8s}e^{8x} \\ &= xe^{8x-8s} - se^{8x-8s} \\ &= (x-s)e^{8(x-s)}, \end{aligned}$$

entonces la función de Green asociada con el operador diferencial ordinario (3.109) *es*

$$G(x) = xe^{8x}.$$

Ahora

$$Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{d^{\frac{4}{3}}}{dx^{\frac{4}{3}}} + 4\frac{d}{dx} + 12\frac{d^{\frac{2}{3}}}{dx^{\frac{2}{3}}} + 16\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} + 16.$$

Recordemos que

$$\frac{d^p[xe^{kx}]}{dx^p} = \frac{d^p[xE_x(0,k)]}{dx^p} = xE_x(-p,k) + pE_x(-p+1,k).$$

Así

$$
\begin{aligned}
Q\left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\right)G(x) &= xE_x(-\frac{4}{3},8)+\frac{4}{3}E_x(-\frac{1}{3},8)+4xE_x(-1,8)\\
+4E_x(0,8)+12xE_x(-\frac{2}{3},8)+8E_x(\frac{1}{3},8)&\\
+16xE_x(-\frac{1}{3},8)+\frac{16}{3}E_x(\frac{2}{3},8)+16xE_x(0,8)&\\
&= 8xE_x(-\frac{1}{3},8)+\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})}+\frac{4}{3}E_x(-\frac{1}{3},8)\\
+32xE_x(0,8)+4E_x(0,8)+12xE_x(-\frac{2}{3},8)&\\
+8E_x(\frac{1}{3},8)+16xE_x(-\frac{1}{3},8)+\frac{16}{3}E_x(\frac{2}{3},8)&\\
+16xE_x(0,8) &= 24xE_x(-\frac{1}{3},8)+\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})}+\frac{4}{3}E_x(-\frac{1}{3},8)\\
+48xE_x(0,8)+4E_x(0,8)+12xE_x(-\frac{2}{3},8)&\\
+8E_x(\frac{1}{3},8)+\frac{16}{3}E_x(\frac{2}{3},8)&\\
&= x[12E_x(-\frac{2}{3},8)\\
+24E_x(-\frac{1}{3},8)+48E_x(0,8)]&\\
+\frac{4}{3}[E_x(-\frac{1}{3},8)+3E_x(0,8)&\\
+6E_x(\frac{1}{3},8)+4E_x(\frac{2}{3},8)]&\\
+\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})}.&
\end{aligned}
$$

Vemos de la ecuación (3.106) *que esta última expresión es* $K_P(x)$*. Por lo tanto*

$$
\begin{aligned}
y(x) = \int_0^x \Big\{&(x-s)[12E_{x-s}(-\frac{2}{3},8)\\
&+24E_{x-s}(-\frac{1}{3},8)+48E_{x-s}(0,8)]\\
&+\frac{4}{3}[E_{x-s}(-\frac{1}{3},8)+3E_{x-s}(0,8)\\
&+6E_{x-s}(\frac{1}{3},8)+4E_{x-s}(\frac{2}{3},8)]+\frac{(x-s)^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})}\Big\}\,h(s)\,ds
\end{aligned}
$$

que es la solución dada de la forma (3.107)*.*

Si vamos por el lado fraccional, del teorema 3.6

$$K_P(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{3}})}\right].$$

Ahora

$$\frac{1}{P(s^{\frac{1}{3}})} = \frac{1}{s^{\frac{2}{3}} - 4s^{\frac{1}{3}} + 4} = \frac{1}{(s^{\frac{1}{3}} - 2)^2}$$

Usando la tabla 2.1, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(s^{\frac{1}{3}})}\right] &= xE_x(-\frac{4}{3},8) + \frac{4}{3}E_x(-\frac{1}{3},8) \\
+4[xE_x(-1,8) + E_x(0,8)] \\
+12[xE_x(-\frac{2}{3},8) + \frac{2}{3}E_x(\frac{1}{3},8)] \\
+16[xE_x(-\frac{1}{3},8) + \frac{1}{3}E_x(\frac{2}{3},8)] + 16xE_x(0,8) \\
&= 24xE_x(-\frac{1}{3},8) + \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})} + \frac{4}{3}E_x(-\frac{1}{3},8) \\
+48xE_x(0,8) + 4E_x(0,8) + 12xE_x(-\frac{2}{3},8) \\
+8E_x(\frac{1}{3},8) + \frac{16}{3}E_x(\frac{2}{3},8) \\
&= x[12E_x(-\frac{2}{3},8) \\
+24E_x(-\frac{1}{3},8) + 48E_x(0,8)] \\
+\frac{4}{3}[E_x(-\frac{1}{3},8) + 3E_x(0,8) \\
+6E_x(\frac{1}{3},8) + 4E_x(\frac{2}{3},8)] \\
+\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})}
\end{aligned}$$

con lo cual obtuvimos el mismo resultado.

Bibliografía

[1] R. Beals abd R. Wong, Special Functions A Graduate Text, Cambridge University Press, 2010.

[2] Shantanu Das, Functional Fractional Calculus, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[3] Duan, Jun-Sheng, A generalization of the Mittag–Leffler function and solution of system of fractional differential equations. Advances in Difference Equations, 2018.

[4] Gorenflo Rudolph, Kilbas Anatoly A., Mainardi Francesco, Rogosin Sergei V., Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications, Springer Monogr. in Math., Springer-Verlag, 2014.

[5] C. Lavault, Fractional calculus and generalized Mittag-Leffler type functions, 2010.

[6] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

[7] J. Ávalos Rodríguez, The Miller-Ross function and Mittag-Leffler function (Notes), Soft Jar–Mathematical Notes, 2009, 47-53.

[8] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course Of Modern Analysis, Cambridge University Press, 1920, 61-80.

[9] J. A. Cañizo Rincón, Derivación bajo la integral, 2004.

[10] Granero, Derivación de integrales. La regla de Leibnitz, Universidad Complutense de Madrid.

[11] J. S. Cánovas Peña, Transformada de Laplace y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, 2008.

[12] A. A. Martínez, Descomposición en fracciones parciales, Scientia Et Technica Vol. XII (31), 2006, 259-264.

[13] K. Miller, B. Ross; An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[14] A. S. Villar, Notas de Aula de Mecânica Clássica, 2014/2015.

[15] D. Levermore, Higher-Order Linear Ordinary Differential Equations II: Nonhomogeneous Equations, University of Maryland, 2011.