



**Universidad Autónoma del Estado de México**

Facultad de Contaduría y Administración

Facultad de Economía

Valuación del precio de opciones europeas sobre la relación peso mexicano/dólar estadounidense para el periodo 2004-2018

## **T E S I S**

que para obtener el grado de

Doctora en Ciencias Económico Administrativas

Presenta:

**Ma. de Lourdes Najera López**



**Comité Tutorial:**

**Dr. Raúl De Jesús Gutiérrez**

Director

**Dr. Miguel Ángel Díaz Carreño**

Lector interno

**Dr. Javier Suárez Espinosa**

Lector externo



Toluca, México, agosto 2020.

## **RESUMEN**

A partir de las crisis cambiarias que han surgido, inversionistas, empresas y bancos centrales están en busca de instrumentos financieros que los protejan ante fluctuaciones de las variables macroeconómicas, como son: el tipo de cambio y las tasas de interés. En esta investigación se presenta una extensión del modelo de Heston (1993) asociado con Hull y White (1990), la cual es un modelo de tres factores que permite calcular la prima de la opción sobre el tipo de cambio, cuando la volatilidad del activo subyacente y las tasas de interés presentan un comportamiento estocástico. La aportación de esta investigación radica en que se obtuvo una prima más justa respecto a la del mercado de opciones sobre el dólar estadounidense que cotiza en el MexDer.

En este trabajo se hace un recorrido por las crisis que ha sufrido México y el impacto que ha tenido el uso de los derivados financieros, así como, la evolución de los modelos teóricos que calculan la prima de la opción, considerando la divisa y las tasas de interés. También se describe la metodología para estimar los parámetros de los modelos de Heston y Heston-Hull-White, y con dichos valores obtenidos se procede a valorar la prima de la opción por ambos modelos incluyendo a Black-Scholes y Garman-Kohlhagen. Una vez valuadas las primas por los cuatro modelos, se encuentra el error que presentan dichos precios respecto a los del MexDer.

Los resultados muestran que el modelo de tres factores es el que otorga resultados más precisos, por lo tanto, se puede considerar un instrumento de cobertura ampliamente confiable para todos aquellos que requieran cubrirse del riesgo de mercado cambiario.

## **ABSTRACT**

From the exchange crises that have arisen, investors, companies and central banks are looking for financial instruments that protect them against fluctuations in macroeconomic variables, such as the exchange rate and interest rates. This research presents an extension of the Heston model (1993) combined with the model of Hull and White (1990), which is a three-factor model that allows to calculate the price of the option on exchange rate, when volatility of the underlying asset and interest rates show a stochastic behavior. The contribution of this research is that a fairer premium was obtained with respect to that of the options market on the US dollar that is listed on the MexDer.

In this work, a literature review is made about the crises in Mexico and the impact of the use of financial derivatives, as well as the evolution of the theoretical models that calculate the option premium, considering the exchange rate and interest rates. The methodology for estimating the parameters of the Heston and Heston-Hull-White models is described, and with the obtained values, the option premium is valued by both models including the calculation of the premium from the Black-Scholes and Garman-Kohlhagen. Once the premiums have been valued by the four models, the error presented by the theoretical prices regarding to the MexDer is found.

The results show that the three-factor model is the one that gives the most accurate results; therefore, it can be considered a widely reliable hedging instrument for all those who need to cover themselves from the exchange market risk.

## ÍNDICE

Introducción .....	6
1. Tipos de régimen adoptados de 1954 a 2009.....	10
Introducción .....	10
1.1. Evolución del tipo de cambio mexicano .....	11
1.2. Los instrumentos derivados y su importancia .....	21
2. Marco Teórico.....	25
Introducción .....	25
2.1. Precursores de Black y Scholes.....	26
2.2. Modelos de volatilidad constante .....	27
2.3. Modelos de volatilidad estocástica.....	35
2.4. Modelos con tasa de interés estocástica .....	45
2.5. Modelos de valuación con volatilidad y tasas de interés estocásticas.....	48
3. Metodología: Modelo de tres factores para valorar opciones sobre tipo de cambio .....	56
Introducción .....	56
3.1. Descripción del modelo.....	56
3.2. Estimación de los parámetros.....	70
3.2.1. Antecedentes .....	70
3.2.2. Algoritmo general .....	74
3.3. Metodología de aproximación al modelo Heston-Hull-White .....	75
3.3.1. Función objetivo.....	75
3.3.2. Estimación de los parámetros.....	77
4. Análisis de resultados.....	86
Introducción .....	86

4.1.	Descripción de los datos.....	86
4.2.	Análisis de los datos.....	87
4.3.	Análisis estadístico.....	90
4.4.	Estimación de los parámetros.....	93
4.4.1.	Parámetros de Heston.....	93
4.4.2.	Parámetros Heston-Hull-White.....	97
4.5.	Cálculo de la prima de la opción aplicado al Mercado Mexicano de Derivados. ....	100
5.	Conclusiones.....	109
	Bibliografía.....	111
	ANEXO A.....	120
	ANEXO B.....	146

## **Introducción**

La administración de riesgos junto con las tecnologías de la información ha provocado grandes transformaciones en los mercados financieros, desde facilitar más información eficaz hasta otorgar alternativas de cobertura e inversión de forma continua. Los mercados globalizados, la dinámica de la economía, junto con la participación de México en los mercados internacionales y las fluctuaciones en las principales variables financieras y macroeconómicas, no sólo han creado alta volatilidad en los mercados reales y financieros, sino también incertidumbre entre inversionistas individuales e institucionales, que tienen proyectos de inversión. Es por ello, que el uso de instrumentos derivados, entre ellos las opciones, permiten reducir el riesgo incorporado en sus posiciones de mercado a través del pago de una prima.

A partir del proceso de desregulación e innovación financiera, los mercados se han vuelto muy volátiles en algunos periodos, debido a ciertos fenómenos financieros y económicos que han ocurrido a nivel internacional. El hecho que los mercados tengan mucha liquidez ayuda a estabilizar las crisis financieras y calma los mercados, no obstante, da pie a nuevas crisis y junto con ello provoca quiebras en conglomerados financieros y no financieros. Para ello, se han desarrollado instrumentos financieros sofisticados que buscan anticiparse a los escenarios adversos. Sin embargo, la complejidad de estos instrumentos ha sido parte del agravamiento de diversas crisis financieras. Por ejemplo, el modelo de Black-Scholes que fue adquirido como modelo base por la bolsa de valores de Chicago desde 1975, en octubre de 1987 originó la peor caída de los precios de los activos financieros. En dicho año, se cayeron gravemente los precios de las acciones y como las opciones fueron diseñadas para disminuir el efecto de tales situaciones se encontraron en una demanda extremadamente alta, dado que el modelo no calculó correctamente los precios, porque la volatilidad en realidad no era constante (Bray, 1988).

En un ambiente local, el tipo de cambio mexicano sufrió grandes depreciaciones: en 1982 se devaluó 470.53%, cayendo de manera vertical de 26.16 a 149.25 pesos/dólar; de 1994 a 2000 se desvalorizó 79.9%, de 2000 a 2006 la equivalencia de depreciación fue del 13.7% y en 2008 el peso cayó el 23%. De lo anterior, vemos que las instituciones financieras, empresas y el Estado, están expuestos a cambios inesperados del peso mexicano ante el dólar estadounidense. Pero ante la estabilidad económica que vivía México durante 2002-2007 (el peso se devaluó sólo 5.21%), muchas empresas especularon con instrumentos financieros, y en 2008 con la crisis

financiera global provocó graves lesiones a las empresas mexicanas, que terminaron con pérdidas catastróficas, tal es el caso de la Comercial Mexicana, en menor medida Cemex, Alfa y Bachoco. La falta de visión de los administradores de empresas no tenía contemplada la posibilidad de diversificar los riesgos, a fin de neutralizar pérdidas por incrementos en los precios de las divisas. En consecuencia, los agentes financieros han reflejado la importancia de controlar los riesgos financieros para la buena toma de decisiones. Por lo cual, ha sido necesario desarrollar nuevos mecanismos de cobertura y de diversificación, siendo los modelos los que permiten obtener el precio de la opción sobre divisas y a la vez reducir el riesgo de mercado cambiario (Ramírez et al., 2008). Ante los fenómenos financieros ya mencionados, estudios revelan que la modificación al modelo de Black-Scholes exhibe sesgos sistemáticos en los precios de las opciones sobre divisas (Bodurtha y Courtadon, 1987; Melino y Turnbull, 1991). En concreto, los errores de valoración de opciones están sistemáticamente relacionados con el precio del activo subyacente, las tasas de interés, la volatilidad estocástica, el precio de la opción y el tiempo de expiración.

Por lo anterior, el objetivo de este trabajo es valorar la prima de la opción sobre tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense, que toma en cuenta a la volatilidad del activo subyacente y la tasa de interés libre de riesgo estocásticas para el período 2004 a 2018, para que, a través de los resultados del modelo, proporcionar herramientas a los inversionistas institucionales a fin de diversificar sus portafolios de inversión y reducir el riesgo.

Para lograr lo propuesto, primeramente, se elaborará un modelo de opciones sobre divisas que se denominará Heston-Hull-White (HHW) que considera el comportamiento estocástico de la volatilidad del activo subyacente y de las tasas de interés doméstica y extranjera libre de riesgo; seguidamente se estimarán los parámetros del modelo y finalmente se obtendrá el error de la prima de la opción entre los modelos de Black-Scholes, Garman-Kohlhagen, Heston y Heston-Hull-White y el precio del mercado emitido por MexDer, y con ello verificar su eficiencia cuando se aplican a una divisa exótica.

Este estudio se parte de la siguiente hipótesis: La tasa de interés y la volatilidad estocásticas, otorgan una prima de la opción sobre tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense más cercana al precio del mercado.

Se pretende realizar un modelo que contemple los factores macroeconómicos más relevantes en el cálculo de la prima de la opción, y que sea un instrumento sofisticado que sirva de cobertura a las instituciones financieras, no financieras y a todos los tomadores de decisiones en el ambiente financiero.

El trabajo se compone de cuatro capítulos y conclusiones, además de la bibliografía correspondiente y los anexos que soportan la evidencia empírica. En el primer capítulo se describen los regímenes de tipos de cambio adoptados a partir de 1954, junto con ello el análisis de las crisis en México y las devaluaciones del peso mexicano frente al dólar estadounidense, también la evolución de los instrumentos derivados en el país, a la par el surgimiento del Mercado Mexicano de Derivados y la importancia que han tenido frente a las crisis ocurridas.

En el capítulo dos se analizan los modelos de volatilidad constante, principalmente a Black-Scholes (1973), posteriormente a Garman-Kohlhagen (1983). También los modelos de volatilidad estocástica, en este caso Heston (1993), y de tasas de interés estocásticas con Hull y White (1993) basándose en el modelo de Vasicek (1977). Finalmente, se presentan los modelos teóricos que valúan el precio de la opción con volatilidad y tasas de interés, cuando éstas presentan un comportamiento estocástico.

El capítulo tres, describe el modelo HHW para el cálculo del precio de la opción europea *Call* y *Put* para divisas, con volatilidad y tasas de interés libre de riesgo doméstica y extranjera, estocásticas. Asimismo, se describe la metodología para estimar los parámetros de los modelos de Heston y Heston-Hull-White, a través del método simplex Nelder-Mead.

En el siguiente capítulo, con el fin de realizar una mejor valuación de la prima de las opciones cuyo activo subyacente es el tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense, en primer lugar se estiman los parámetros de los modelos de Heston y Heston-Hull-White, después se calcula el precio con dichos modelos, así como también con Black-Scholes y Graman-Kohlhagen, y posteriormente se obtiene el error que existe entre los precios teóricos y el de las opciones sobre el dólar que emite el MerDex para el día 9 de noviembre de 2018 y comparar los resultados. Finalmente se exponen las conclusiones.

Una limitación que presenta esta investigación es la recolección de los datos, ya que provienen de registros históricos que el mercado financiero va capturando en cada instante de tiempo, por



medio de instituciones oficiales que operan en estos mercados, además que no es información abierta al público. Los datos se adquirieron de la agencia financiera Thomson Reuters y DataStream, con un periodo que va del 14 de abril de 2003 al 9 de noviembre de 2018, pero su adquisición tuvo un alto costo. Cabe mencionar, que es una fuente de datos sumamente confiable, ya que la utilizan los corredores de bolsas para hacer sus transacciones financieras. La principal ventaja de utilizar esta fuente de datos es que los precios de cierre diarios de la opción y el tipo de cambio spot se registran de manera simultánea.

Los resultados obtenidos fueron los esperados, se obtuvo una prima justa de la opción sobre tipo de cambio, considerando los factores tales como la volatilidad y tasas de interés libre de riesgo doméstica y extranjera, con comportamiento estocástico; y finalmente se considera un buen instrumento de cobertura para aquellos agentes económicos que desean cubrirse de riesgo cambiario.

## **1. Tipos de régimen adoptados de 1954 a 2009.**

### **Introducción**

Los derivados financieros se han convertido en instrumentos importantes para los tomadores de decisiones en la administración de riesgos, dichos instrumentos pueden afectar positiva o negativamente a la estabilidad de las entidades financieras. La globalización de los mercados de capitales y de dinero, ha despertado el interés sobre la optimización de riesgos a través del uso de portafolios de inversión.

Con el propósito de administrar emisiones de fondos y dirigirse a la cultura de cobertura de riesgos, en la década de 1990, se utilizaron de forma masiva los instrumentos derivados, con base al dinero electrónico, la emisión de títulos de crédito, sociedades de inversión, de pensiones y la titularización, que produjo un sistema financiero más global (Arenas, 1999). Gracias a la apertura de los mercados financieros, se fortaleció tanto la circulación de capitales reservados para la inversión de portafolios, así como también las relaciones de intercambio comercial, y debido a la volatilidad de los precios los activos financieros y en especial del tipo de cambio, se ha animado el desarrollo de nuevos instrumentos financieros para cubrirse del riesgo cambiario.

Asimismo, se ha demostrado con los eventos antes descritos, que el sistema de libre flotación es más riesgoso que el régimen de paridad fija, ya que con este nuevo régimen existe mayor fluctuación del tipo de cambio, sobre todo en economías débiles, como es el caso de México, permitiendo que el peso se esté modificando continuamente (Gráfica 1.1). Por lo anterior, las empresas e inversionistas involucrados en operaciones internacionales deben protegerse del riesgo derivado de las turbulencias del tipo de cambio.

Debido a la relación que existe entre las variables macroeconómicas y financieras, la volatilidad de la moneda afecta de manera negativa a la actividad económica, de igual manera, a las empresas e inversionistas involucrados en actividades internacionales, y a consumidores locales. Es por ello, que este capítulo tiene por objeto, realizar un análisis de los instrumentos derivados en el mercado mexicano y su impacto en el comportamiento del tipo de cambio, debido a que es escasa la literatura; también dar seguimiento al incremento del uso de dichos instrumentos y los riesgos que conllevan, considerando su origen, evolución y volumen de operación.

## 1.1. Evolución del tipo de cambio mexicano

*Régimen de tipo de cambio fijo (1954-1981)*. En el año de 1971 ocurre la ruptura del acuerdo de Brentton Woods debido a las transformaciones en los sistemas financieros internacionales, lo que provocó que la estructura financiera mexicana experimentara cambios radicales en la organización y funcionamiento de los intermediarios. Antes de que se abandonara dicho acuerdo, en México el sistema financiero estaba basado en el crédito bancario, es decir, había una interrelación entre las grandes empresas y los bancos, y predominaba una dinámica de expansión financiera hacia las empresas (Najera y De Jesús, 2013; Correa, 1998).

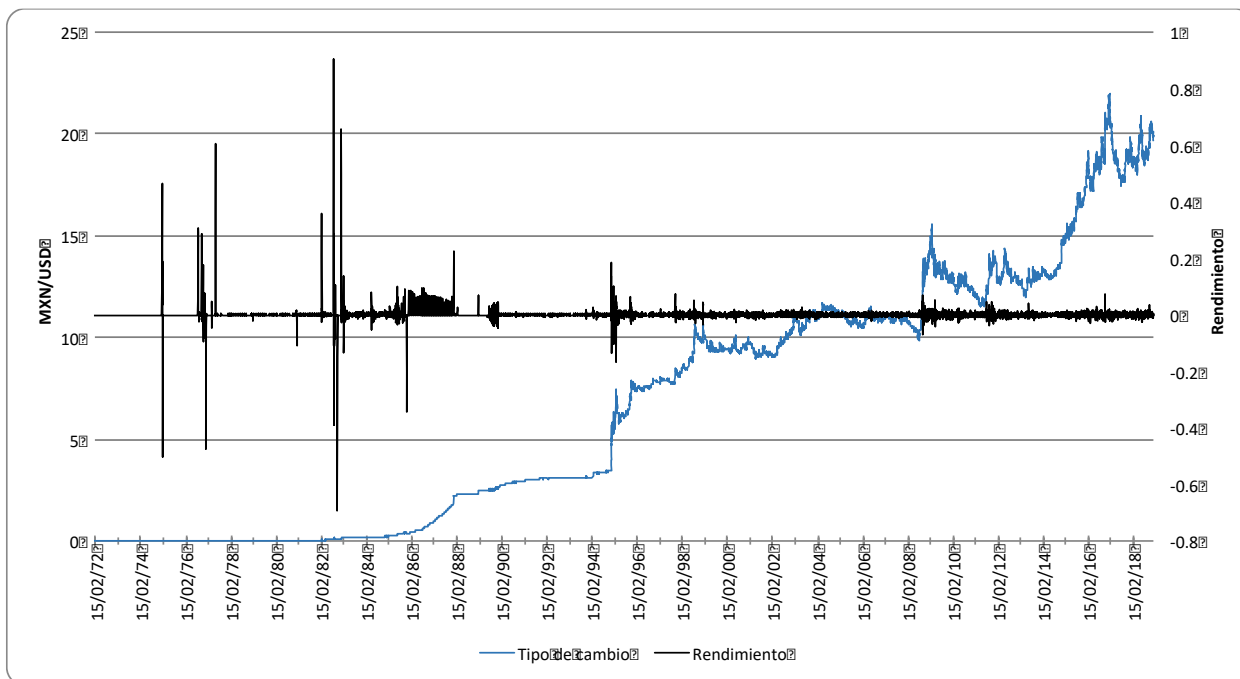
Debido a que la economía mexicana presentaba cierta estabilidad (tipo de cambio estable y flujos de capital con tasas de interés fijas), México mantenía una inserción financiera en los mercados internacionales, y a la vez, tenía un financiamiento sólido en moneda extranjera a través de la Banca de Desarrollo<sup>1</sup> (ver Gráfica 1.1), esto permitió contar con un sólido sistema financiero durante mucho tiempo (Najera y De Jesús, 2013; Lagunilla, 1973).

Ortiz y Solís (1978) señalan que a inicios del sexenio 1970-1976, el periodo de desarrollo estabilizador iba decreciendo y junto con ello una desaceleración de la economía. Posteriormente de la depresión económica de 1971, el Banco Central abandonó la fijación anual de objetivos monetarios de mediano plazo, debido a la baja tasa de crecimiento económico y por esto, fomentó el desarrollo económico promoviendo el crédito interno. Pero en 1973 inició la flotación del dólar estadounidense debido al abandono del sistema monetario de Bretton Woods y también se incrementó el precio del petróleo por la guerra en el Medio Oriente; dichos choques externos, generaron mayores presiones inflacionarias y con ello una depreciación de la moneda mexicana (Najera y De Jesús, 2013; Guillén, 2007; Bitroes y Lagunilla, 1981).

---

<sup>1</sup> Para garantizar los flujos de financiamiento para las empresas, el gobierno fungía como aval.

Gráfica 1.1. Evolución del tipo de cambio MXN/USD y su rendimiento.



Fuente: Se elaboró con datos de DataStream.

NOTA: Para efecto de homogeneizar la gráfica, el tipo de cambio se trabajó en nuevos pesos.

Con la apertura financiera surge una nueva forma de fijar las tasas de interés, por una parte, tomando en cuenta las tasas de interés de la Reserva Federal de Estados Unidos (Fed) y por la otra, considerando a los mercados financieros internacionales; lo que ocasionó que el nivel de precios se incrementara<sup>2</sup> (ver Gráfica 1.1). En 1973 el déficit gubernamental había alcanzado anualmente un crecimiento del 35%, adicionalmente la tasa de inflación alcanzó el 21.37 %, y por primera vez, se presentaron las tasas de interés para el ahorro financiero negativas; por todo esto Banxico<sup>3</sup> trató de revertir su política expansiva (Guillén, 2007).

Para 1976, se reflejaron los efectos de la incertidumbre financiera a los ahorradores, provocó una gran preferencia por instrumentos financieros de gran liquidez, además inició el proceso de conversión de activos financieros de moneda nacional a extranjera y con ello, se incrementó la tasa de crecimiento de instrumentos en dólares. Este mismo año, se notificó el abandono de la

<sup>2</sup> En 1974 la inflación aumentó a 20.60 por ciento y el Producto Interno Bruto (PIB) sólo creció 5.78 por ciento, pero en 1975 la inflación se redujo a 11.30 por ciento.

<sup>3</sup> Banco de México (2009) realiza una descripción detallada de los regímenes cambiarios adoptados por México desde 1954.

paridad fija por parte de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), lo que indujo la libre flotación del peso. De esta manera, el régimen de flotación controlada<sup>4</sup> es adoptado en el período 1976-1982. La ruptura del sistema de paridades fijas provocó que crecieran las perspectivas de desarrollo de los mercados de productos derivados, sobre todo en aquellos que tenían como objetivo cubrir del riesgo cambiario. En 1977 se operó el primer instrumento derivado en México, el petrobono, cuyo precio estaba anclado al precio del tipo de cambio y al del petróleo (Güemez, 2008), con resultados no satisfactorios. En 1978, se listaron en el Chicago Mercantile Exchange (CME) futuros sobre el dólar<sup>5</sup>, pero en 1982 se decretó el control de cambios y dicho instrumento se suspendió (Najera y De Jesús, 2013).

*Régimen de cambio dual (1982-1991).* En 1982 existieron muchos problemas internos y externos, que indujeron a una caída de la economía y a una gran volatilidad del tipo de cambio. Por lo tanto, el mercado cambiario y financiero sufrieron serias dificultades en sus operaciones, provocando a la vez, una gran contracción del volumen de transacción con el exterior. Dado el desequilibrio que existía en la balanza de pagos, México abandona el desliz cambiario, por ello, el 18 de febrero inició el periodo de flotación de la moneda, alcanzado un precio de hasta 44.5 pesos por dólar en tan sólo diez días, reflejando una devaluación del 67 por ciento aproximadamente; con ello, las salidas de los capitales, el déficit público y los vencimientos de la deuda de corto plazo que se había contratado en el segundo semestre del año anterior, afectaron al mercado cambiario al presionar la demanda de divisas. Entonces el 6 de agosto, entra formalmente el régimen de tipo de cambio dual con control de cambios integral<sup>6</sup>, y aun así con el régimen establecido, al terminar el año el país sufre la más grave crisis<sup>7</sup> económica después de la Gran Depresión Mundial, donde el peso experimentó una devaluación del 470.53 por ciento, al alcanzar un precio de 149.25 pesos/dólar el último día del año. Dados los acontecimientos anteriores, a partir de 1983 hasta 1986 la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) registró operaciones de futuros sobre petrobonos y acciones individuales, también el gobierno listó contratos *forward* para la valuación de cupones, que permitió indizar estos valores

---

<sup>4</sup> El 1 de septiembre de 1976, el precio del tipo de cambio fue de 20.50 pesos/dólar, alcanzando una devaluación de 64%.

<sup>5</sup> Consultado en MexDer, La Bolsa de Derivados, <http://www.mexder.com.mx/>.

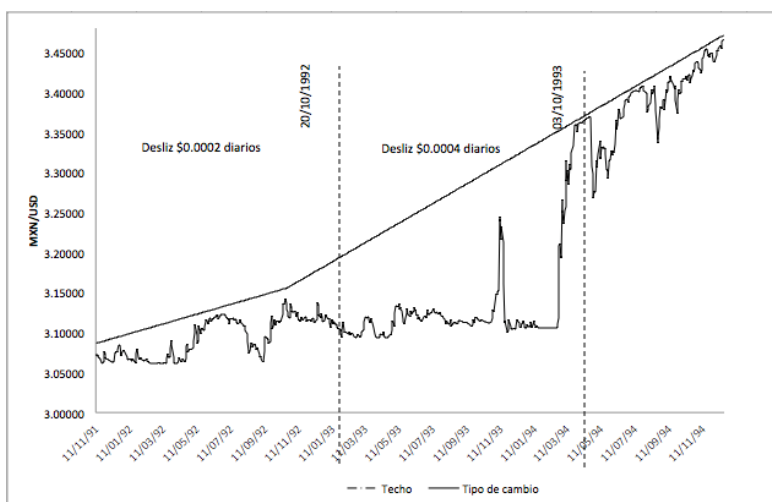
<sup>6</sup> *Uno preferencial* con valor de 49.13 MXN/USD, incrementando diariamente 4 centavos y *el general* de 50.00 MXN/USD hasta el 13 de diciembre de 1982.

<sup>7</sup> La crisis cambiaria fue factor determinante de la nacionalización de la banca privada mexicana, que se dispuso junto con el control generalizado de cambios el 1 de septiembre (Banxico, 2009).

nominales a diferentes bases, como los pagafes a la divisa controlada, petrobonos indizados al petróleo Istmo y tesobonos al tipo de cambio libre.

En 1987 se vivía un crítico ambiente financiero y una gran volatilidad del peso, Banxico decide proteger a las personas físicas y morales ante los riesgos del mercado cambiario, por lo tanto, reinició las operaciones de contratos diferidos sobre el tipo de cambio a través de contratos de cobertura cambiaria a corto plazo (Najera y De Jesús, 2013).

Gráfica 1.2. Tipo de cambio con bandas de flotación



Fuente: Se elaboró con datos de DataStream y BANXICO (varios años).

Posteriormente de 1991 a 1994, surge el *régimen de tipo de cambio con Bandas de Flotación*, cuya amplitud se incrementó durante la prevalencia de este régimen (López et al., 2011), y con el propósito de soportar las fluctuaciones de los mercados internacionales e impedir que los precios fueran muy volátiles, se estableció el piso<sup>8</sup> en 3051.20 pesos/dólar y un techo dinámico, en donde cada día se incrementaba 0.0002 pesos/dólar. Pero con el objetivo de vigilar las intervenciones de Banxico para controlar el tipo de cambio y detener la salida de capitales, el desliz se duplicó a partir del 20 de octubre de 1992 (ver Gráfica 1.2); cabe señalar que en este año las bolsas de valores de Londres y de Luxemburgo listaron *Warrants* sobre acciones e índices accionarios mexicanos, y a partir de octubre la BMV opera *Warrants* sobre acciones

<sup>8</sup> Para mantener la banda de flotación, Banxico intervenía vendiendo dólares cuando el peso tocaba el techo de la banda y comprando cuando tocaba el piso. Para que el tipo de cambio se ajustara a las condiciones subyacentes de la economía, la banda de flotación tenía una amplitud creciente (Banxico, 2009).

individuales, canastas e índices accionarios, regulados por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV). A finales de 1992 empieza la negociación de opciones sobre ADR'S de Telmex L en el Chicago Board Options Exchange (CBOE) (Najera y De Jesús, 2013).

Al final de 1994 el mercado cambiario estuvo presionado por diferentes factores, entre ellos, cuando el tipo de cambio alcanzó el límite superior de la banda, por lo que Banxico decide aumentar un 15.3% la amplitud y seguir un desliz de 0.0004 pesos/dólar el 20 de diciembre, pero esta estrategia no tuvo éxito y el 22 de diciembre deciden abandonar las bandas de flotación, enfrentando el peso mexicano una devaluación del 71 por ciento, iniciándose de esta manera el régimen de libre flotación que hasta la fecha está vigente.

En este mismo año y ante este horizonte, en los mercados de derivados internacionales se operaban opciones sobre acciones mexicanas, como en el mercado de opciones de Nueva York (NYOE), el de Opciones de Chicago (CBOE), en la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE) y en el de Filadelfia (PHLX). También se firmaron contratos *forward* y *swaps* sobre divisa, tasas de interés y *commodities*, solamente entre entidades nacionales, es decir, no había un agente regulador; pero a finales de 1994, con el objetivo de garantizar el control del riesgo, Banxico estableció normas para la operación de contratos *forward*.

A partir de este año, se establece el *régimen de cambio libre flotación*. Desafortunadamente a finales de 1994 estalla una crisis trilliza, esto es: crisis cambiaria, financiera y bancaria, que, aunado al incremento en la movilidad de los flujos internacionales de capital y a los bajos niveles en las reservas internacionales, obligaron a la adopción de un régimen cambiario de libre flotación. Durante este año, el tipo de cambio venía sufriendo ciertos cambios, por ejemplo, en noviembre el precio era de 3.4386<sup>9</sup> pesos/dólar y al final del año fue de 4.9950 pesos/dólar, depreciándose en tan sólo un mes el 45.37%; pero en enero de 1995 alcanzó un valor de 5.90 pesos/dólar, es decir, una devaluación del 89.99 por ciento respecto al año anterior (Banxico, 2009). Por todo lo anterior las autoridades decidieron abandonar el régimen de bandas de flotación e implementaron el régimen de libre flotación del peso mexicano frente al dólar estadounidense.

---

<sup>9</sup> El Diario Oficial de la Federación decretó el 22 de junio de 1992 que a partir del 1 de enero de 1993 entraría en vigor el nuevo peso, que consistió en quitar 3 ceros al peso que regía hasta el último día de 1992 (Banxico, 2009). Que en este trabajo hablamos en pesos.

En relación con los derivados financieros, éstos tuvieron una participación muy importante en el estallido y la profundidad de la crisis. En los años noventa después de la privatización de la banca, hubo una gran exposición al riesgo de mercado y de crédito, debido a que los bancos acumularon posiciones dentro y fuera de su balance. Dado lo anterior, es importante señalar que el uso inapropiado de los productos derivados generó un efecto negativo en la economía, por ejemplo, el uso de las notas de tesorería en unidades indexadas al tipo de cambio, al cual se le reconocía como tesobono swap<sup>10</sup>, utilizadas para apalancar sus tenencias, de igual manera, se usaron papeles estructurados y swaps sobre acciones (Garber, 1998; Partnoy, 2003; Schinasi, 2006). Asimismo, Serfín y BANAMEX crearon operaciones virtuales en sus balances, para especular, utilizando productos estructurados denominados obligaciones de bono con colateral (Correa, 2000, 1998; Ortiz, 1994). Ante este panorama y dada la devaluación del peso, los tesobonos incrementaron su rendimiento del 8 al 24 por ciento, el valor del activo subyacente de respaldo se redujo, y todo esto dio pie a liquidar las operaciones por más de 4 mil millones de dólares (mdd), lo cual incrementó la presión al precio de la moneda mexicana (Schinasi, 2006; Partnoy, 2003).

Hay que hacer notar, que en 1995 se desarrolló de manera importante el mercado organizado de derivados financieros, en donde Banxico permitió el progreso del mercado de contratos adelantados *forward* sobre divisa sin ninguna regulación, debido a que no había mecanismos que permitieran cubrirse del riesgo cambiario, una vez que el tipo de cambio se dejó fluctuar libremente. Por lo anterior y debido a la alta volatilidad que sufrían las tasas de interés, se creó un instrumento financiero para protegerse del riesgo de mercado de dinero (Girón, 2003). Dada la alta volatilidad que vivía el peso en este año, debido a la incertidumbre macroeconómica que prevalecía en el país, Banxico publica los requisitos necesarios para emitir contratos sobre el tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense en el mercado de Futuros de la Bolsa Mercantil de Chicago, y en el primer semestre de 1996 se estabilizó el mercado cambiario. Debido a que el tipo de cambio tuvo una favorable evolución y dada la necesidad de incrementar

---

<sup>10</sup> Las entidades financieras que obtuvieron los tesobonos percibían su rendimiento y a la vez realizaban el pago de una tasa Libor en dólares. Dentro de las actividades registradas en el balance de pagos fueron: el del colateral por Banxico y el movimiento de dólares ocasionada por la compra de tesobonos de parte extranjera (Garber, 1998).



el nivel de reservas internacionales, en julio del mismo año la Comisión de Cambios realizó venta de dólares una vez al mes, a través de un instrumento de subasta de opciones *Put*. Además, en 1997 se introdujo otro instrumento con objeto de disminuir la volatilidad del tipo de cambio, en épocas donde el mercado cambiario experimentaba bajos niveles de liquidez (Ramos-Francia y Torres, 2005). En este contexto, cinco años más tarde, Banco de México acumuló 12,245 mdd en reservas internacionales, donde el 75 por ciento del monto subastado se ejerció por los poseedores de opciones. Con lo anterior, las reservas internacionales habían llegado a un óptimo nivel, por lo tanto, se suspendieron las subastas en julio de 2001. A pesar de todo, la moneda mexicana ha mostrado cierta estabilidad desde 1996 a 2001, haciendo notar interrupciones por eventos importantes como la crisis asiática de 1997, la crisis de deuda rusa en 1998 y la devaluación del real brasileño en 1999.

Una crisis importante que mencionar ocurrió en septiembre de 2008 en Estados Unidos, denominada crisis financiera global, dicha crisis fue ocasionada por el mal uso de los instrumentos derivados en especial de crédito (Collateralized Debit Obligations), que provocó efectos adyacentes en el interior del país americano y en los mercados financieros, como quiebras de aquellos grupos de entidades financieras, tales como: la empresa hipotecaria más grande del país denominada Countrywide Financial, la firma Fannie Mae y Freddie Mac<sup>11</sup> al declararse en bancarrota tuvo que ser rescatada por el gobierno, así como la compra de Merrill Lynch por Bank of America, el 15 de septiembre se declara en quiebra Lehman Brothers, también la adquisición de Bear Stearns por JP Morgan Chase, de igual manera, la Fed tuvo que rescatar a la empresa American International Group (AIG), y la quiebra de varios bancos regionales (Najera y De Jesús, 2013).

Para el caso de México, se tiene la quiebra de Comercial Mexicana, que especuló con opciones *Put*<sup>12</sup> sobre el dólar en el mercado no organizado (OTC), y con la depreciación de la moneda mexicana en septiembre de 2008, su acción cayó 55.49 por ciento y sus activos se convirtieron en pasivos con una cantidad de 2,300 mdd, durante ese año. Dicha empresa mantuvo sus

---

<sup>11</sup> Durante 2008 los mercados financieros de Estados Unidos ya sufrían ciertas tensiones, y el 11 de julio Fannie Mae y Freddie Mac experimentaron una caída del 50% en sus acciones en la Bolsa de Nueva York, dicho evento hizo que Henry Paulson, jefe del Tesoro de Estados Unidos en ese entonces, anunciara que se acercaba una crisis.

<sup>12</sup> Un "*Put*" refleja una posición en venta de una cantidad determinada del activo subyacente a un tiempo de vencimiento. Por su parte Comercial Mexicana usó el instrumento financiero apostando que el peso permanecería estable (Informe financiero Comerci 2008. Consultado el 16 de febrero de 2013, <https://www.bmv.com.mx/es/emisoras/estadisticas/COMERCI-5228>).

operaciones con Merrill Lynch, Santander, JP Morgan, Goldman Sachs, Citigroup, Banamex y Barclay's en un mercado no regulado, por lo tanto, no tenía información sobre las operaciones para dar seguimiento y saber si permanecía o cerraba posiciones.

Por su parte, el Grupo Maseca (GRUMA) adquirió productos financieros derivados sobre materias primas (maíz, trigo, gas natural y diesel) como *swaps* de tasas de interés y operaciones financieras de tipo de cambio, y le provocó pérdidas de casi mil millones de dólares (Vargas y Pérez, 2014). En ese año el panorama para muchas empresas fue incierto, hubo grandes pérdidas, por ejemplo, para Cemex se reflejó un saldo en su contra con un valor de 500 mdd, y para Vitro los pasivos por derivados en gas natural sumaron 153 mdd, en la empresa Kuo, sus mermas fueron de 796 mil dólares, asimismo, el Grupo Industrial Saltillo tuvo pasivos por 55 mdd, los bancos comerciales y fondos de pensión también reflejaron fuertes pérdidas, todo lo anterior por el mal uso de los instrumentos derivados, dado que fueron usados para especular más no para cubrirse del riesgo de mercado (Ramírez et al., 2008).

Respecto al mercado financiero mexicano, se contrajeron los flujos de capital y por lo tanto hizo que el tipo de cambio fuera más volátil<sup>13</sup>, ante este fenómeno y para brindar liquidez al mercado cambiario, la Comisión de Cambios en México realizó varias acciones y entre las que destacan son: *subastas de dólares diarias*<sup>14</sup> en donde se ofertaron 400 mdd con un precio mínimo de 2% sobre el tipo de cambio al cierre del día anterior; *subastas extraordinarias* realizadas en el mes de octubre para atender demandas excepcionales de divisas<sup>15</sup>; y de manera temporal una línea swap, que se refiere al *establecimiento de un mecanismo de intercambio de divisas* con la Fed por un total de 30 mil mdd comprendido desde el 29 de octubre de 2008 hasta el 30 de abril de 2009. Y hacia finales de 2009 se comprobó que las acciones emprendidas por la Comisión de Cambios mejoraron las condiciones del mercado cambiario y con ello mitigaron los efectos de los mercados internacionales en la economía mexicana.

---

<sup>13</sup> A finales de septiembre de 2008 el precio del tipo de cambio era de 10.9814 MXN/USD, perdiendo su valor en un mes del 6.77 por ciento, en diciembre se incrementa a 14.3097 pesos hasta llegar a alcanzar 15.365 pesos/dólar el día 3 de marzo de 2009, siendo su depreciación del 40.52 por ciento en relación con el año anterior (Banxico, 2009).

<sup>14</sup> El 19 de febrero de 1997 Banxico implementó un mecanismo de subastas y como funcionó se ofertó nuevamente (Circular-Telefax 10/97 y la Circular Telefax 18/2001).

<sup>15</sup> En dicho mes se realizaron cinco subastas extraordinarias, las cuales significaron la venta de divisas por 11,000 mdd. De esta manera, al cierre de diciembre de 2008, el monto total de dólares vendidos a través de estos dos tipos de subastas ascendió a 15,178 millones de dólares (Banxico, 2009).

A continuación, en 2009 surge la crisis de la deuda soberana europea, haciéndose más aguda ya que aún prevalecían los efectos ocasionados por la crisis financiera global, reflejándose en el elevado endeudamiento público de la zona euro y la escasa credibilidad de Grecia. Por lo anterior, hubo necesidad de la intervención del Banco Central Europeo, de la Comisión Europea y del Fondo Monetario Internacional (FMI), con tres rescates: en mayo de 2010, marzo de 2012 y agosto de 2015, siendo Grecia el primer país en solicitar el apoyo al FMI (Rodríguez, 2010). La profunda recesión en dicha zona fue marcada por varios eventos: *el 5 de enero de 2015* cayeron las bolsas gravemente por el temor de que Grecia saliera de la comunidad europea y a México le impactó un 2.41% la caída del IPC; *el 5 de mayo* del mismo año el gobierno griego decretó el cierre de los bancos y de la bolsa de valores y aplicó controles de capitales para evitar el colapso financiero, pero esto ocasionó una reacción negativa que produjo gran incertidumbre en las bolsas europeas, pasando a las americanas y después a las de la región de Asia-Pacífico, con cierres a la baja en todos los casos; y *el 3 de agosto de 2015* surge el desplome de la bolsa de Grecia con una caída del 16.23 por ciento después de llevar cinco semanas cerrada. Otra crisis en los mercados financieros fue provocada por el colapso de las bolsas de China en agosto de 2015, devaluándose el yuan cuando la bolsa de Shanghái cae el 8.49 por ciento y nuevamente la bolsa mexicana cierra con -3.57 por ciento en el IPC, aunque se registró un mínimo de -6.62 por ciento. Los mercados chinos siguieron con gran volatilidad y el 26 de enero de 2016 nuevamente la bolsa de Shanghái cayó 6.4 por ciento, en febrero otro 6.0 por ciento y en junio con el resultado del referéndum en el Reino Unido a favor del Brexit siguen con la crisis financiera.

En la Tabla 1.1 se muestran las estadísticas descriptivas del tipo de cambio peso/dólar, respecto a los diferentes periodos analizados anteriormente hasta el 30 de noviembre de 2018.

En el periodo de 1971-1981 se presume de que hubo estabilidad en el tipo de cambio, lo cual se confirma con la pequeña diferencia entre la media y la mediana, equivalente a 0.0003 pesos y con la desviación estándar 0.0116. Se muestra un rendimiento máximo de 0.4947 por ciento el 1 de septiembre de 1976 y el 24 de noviembre del mismo año se registra un mínimo con un valor de -0.0991 por ciento. La serie de los rendimientos positivamente sesgada significa que presenta propiedades de colas más anchas, particularmente la derecha y, un coeficiente de asimetría

positivo que revela la existencia de una mayor probabilidad de que el peso se deprecie, tal como ocurrió el 31 de agosto de 1976.

Tabla 1.1 Estadísticas descriptivas.

RENDIMIENTOS DEL TIPO DE CAMBIO MXN/USD							
Estadístico	1971-1981	1982-1991	1992-1994	1994-1995	1996-2008	2008-2009	2010-2018
Media	0.0003	0.0016	0.0004	0.0018	0.0007	0.0007	0.0002
Mediana	0.0000	0.0004	0.0000	0.0003	-0.0004	-0.0004	0.0000
Desv. est.	0.0116	0.0195	0.0055	0.0276	0.0164	0.0125	0.0070
Varianza	0.0001	0.0004	0.0000	0.0008	0.0003	0.0002	0.0000
Asimetría	33.34	28.710	17.1688	0.0902	18.655	0.5914	0.7364
Curtosis	1321.99	1039.81	389.66	9.2684	370.01	6.7131	7.3570
Mínimo	-0.0991	-0.1252	-0.0182	-0.1597	-0.0179	-0.0560	-0.0305
Máximo	0.4947	0.7571	0.1285	0.1322	0.3254	0.0733	0.0737
Rango	0.5938	0.8823	0.1466	0.2919	0.3433	0.1293	0.1042
Jarque-Bera	2.02E+08	1.03E+08	4673756	876.87	2357610	624.61	5234.7
p-valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Fuente: Se elaboró con datos de DataStream en Stata/MP 14.0.

Durante 1982 y 1991 la desviación estándar y el rango muestran que el peso es más volátil, reflejando un máximo rendimiento el 27 de abril de 1982. Dicha volatilidad anuncia la devaluación de la moneda del 18 de febrero de 1982, debido al fuerte desequilibrio de las finanzas públicas, provocado por una inflación fuera de control, una gran deuda externa, un aumento de las tasas de interés internacionales y con ello fugas de capitales, lo cual provocó que el Banco Central se quedara sin reservas. Es entonces desde este año la moneda mexicana se ha ido devaluando en promedio del 5 por ciento cada año, hasta noviembre de 1994 (Banxico, 2009).

Cabe señalar que, a partir del 22 de diciembre de 1994 al 29 de agosto de 2008, presentan mayor volatilidad los precios del tipo de cambio que en los periodos anteriores, incrementándose aún más desde 2008 a 2009 y en menor medida después del 2010 hasta el 2018, haciendo hincapié que en estos periodos se presentaron: en diciembre de 1994 la crisis mexicana y en septiembre de 2008 la crisis financiera global; lo anterior se avala con la asimetría positiva desde 1994 hasta 2018.

En todos los periodos existe exceso de curtosis considerablemente alta y significativa estadísticamente, lo que confirma que las colas de la distribución de los rendimientos del activo subyacente tienden a ser más pesadas que las colas de la distribución normal debido a la densidad de probabilidad, lo anterior también se sustenta en el estudio De Jesús y Ortiz (2013). Replicando que el exceso de curtosis también se debe a que se tienen rendimientos de frecuencia diaria; de igual manera la ausencia de normalidad se justifica con el estadístico JB (Jarque-Bera) con un valor grande y un *valor-p* igual a cero. Por lo anterior, es importante que los inversionistas consideren instrumentos de cobertura para el riesgo cambiario.

## **1.2. Los instrumentos derivados y su importancia**

La falta de una regulación financiera originó nuevas condiciones de competencia entre los intermediarios financieros y permitió un gran crecimiento en los sistemas financieros, lo que propició una sucesión de burbujas especulativas muy grandes e irracionales (Schiller, 2003; Stiglitz, 2002). Las recurrentes burbujas financieras incrementaron la necesidad de cubrirse de riesgos en sus operaciones, que involucran las fluctuaciones de la divisa y tasas de interés; así como, protegerse del sobreendeudamiento y quiebra de las corporaciones financieras y no financieras (Najera y De Jesús, 2013). Por ejemplo, el Grupo Industrial Covadonga (empresa importadora de arroz de Estados Unidos), contaba con pasivos en dólares y es por lo que se vio en la necesidad de hacer frente a sus obligaciones de pago, adquiriendo cobertura mediante futuros.

Hay que mencionar, que después de la crisis mexicana de 1994, surge la necesidad de establecer un mercado financiero formal que fue autorizado por la SHCP, Banxico y la CNBV el 15 de diciembre de 1998, al cual denominaron Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), en donde se listaron contratos de futuros del peso mexicano/dólar estadounidense, en seguida, futuros sobre tasas de interés e IPC de la BMV; el 22 de marzo de 2004 dan inicio los contratos sobre opciones del IPC, y en julio de 2006 surgen opciones<sup>16</sup> sobre el dólar estadounidense.

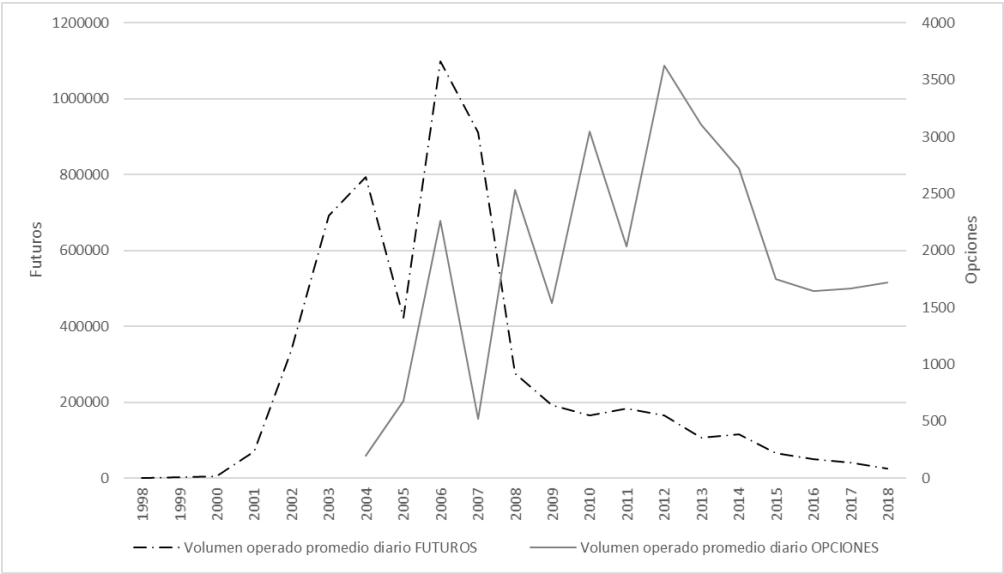
Las instituciones financieras y no financieras, utilizaban los productos derivados para cubrirse del riesgo, pero en México fueron relativamente nuevos; sin embargo, el volumen de contratos

---

<sup>16</sup> Consultado en MexDer, La Bolsa de Derivados, <http://www.mexder.com.mx/>.

de futuros y opciones (Gráfica 1.3) iban en aumento; no obstante, en diciembre de 1998 el volumen operado promedio diario de futuros fue de 72 contratos con un importe nominal de \$7'561,113.00 pesos, teniendo su mayor volumen de operación en 2006 de 1 098,607 contratos en un día con un importe de \$109'677,479,031.26 de pesos.

Gráfica 1.3. Futuros y Opciones del MexDer.



Fuente: Elaboración propia con base de datos de MexDer.

En marzo de 2004 dieron inicio las operaciones con opciones, colocando 199 contratos diarios, realizando 10 operaciones promedio diarias, con vencimiento a diciembre del mismo año y marzo de 2005, haciendo hincapié que tan sólo en un año reflejó un valor nominal promedio diario de \$2'006,550.39 pesos. Además, es importante señalar que el primer mes de operación de opciones sobre el dólar estadounidense se emitieron 100 contratos, realizando 2 operaciones con un valor nominal de \$11'000,000.00 de pesos. Siguiendo una tendencia creciente hasta el año 2012 con un volumen promedio igual a 3107 contratos con tan sólo 14 operaciones en promedio diarias y un valor nominal de \$76'317,272.82 pesos. El crecimiento de los instrumentos derivados en México es porque permiten la entrada y salida del mercado de manera flexible, lo cual se debe a la liquidez que existe en el MexDer, además por la garantía de cumplimiento que brinda a través de la Cámara de Compensación y Liquidación.

Cabe destacar, que las crisis ocurridas en el mundo y en México, propician que los agentes financieros realicen cambios que antes les parecían complejos. En 1994, durante la crisis la

pequeña y mediana empresa lamentó el no haber tomado medidas para cubrirse del riesgo financiero provocado por el tipo de cambio y/o la tasa de interés, debido a la falta de un mercado de derivados, Por mencionar un caso particular, en Jalapa Veracruz la empresa Maderas Sánchez García S. A., comerciante de postes para teléfonos provisora de Universal Forest, solicitó un crédito por \$600,000.00 pero no se cubrió ante la volatilidad del tipo de cambio, lo que provocó que su deuda se triplicara llevándolo a la quiebra.

Por los efectos negativos señalados anteriormente, una medida preventiva ante el riesgo de una crisis que no se puede predecir, es el uso de instrumentos financieros, como son los productos derivados. Por ejemplo, la empresa Liga de Productores Agropecuarios de Tamaulipas AC., ofreció programas de financiamiento a través de productos derivados, tales como opciones sobre futuros en la Bolsa de Chicago, con el objeto de que los productores cubrieran el precio de la cosecha ante cambios inesperados del mercado. Por lo tanto, aseguraron su producción a cambio de una prima, a la vez tuvieron acceso a instrumentos diseñados para el fortalecimiento de la producción. De modo similar, Apoyos y Servicios a la Comercialización Agropecuaria, es otra de las instituciones que ha utilizado opciones sobre futuros en el mercado internacional, para cubrirse del riesgo de la volatilidad de los precios de los productos agrícolas y pecuarios.

Por su parte, la empresa importadora de arroz de palay denominada Grupo Industrial Covadonga, cubrió sus pasivos a través de futuros sobre divisas y por lo tanto mejoró su planeación financiera. En cambio, para la constructora GP sus márgenes de utilidad se redujeron debido a la depreciación que enfrentó el peso contra el dólar en 2001 y 2002, dado que sus ingresos se daban en dólares y sus egresos en pesos. Este hecho, propició que la empresa se cubriera del riesgo cambiario por medio de futuros sobre el dólar estadounidense. Lo anterior muestra cómo las empresas que han usado instrumentos de cobertura han encontrado beneficios en sus finanzas, ya que no están expuestas totalmente al riesgo cambiario. También el Estado ha hecho uso de los derivados financieros para cubrirse de situaciones adversas, por ejemplo, en 1998 Banco de México creó el programa de adquisición de divisas por medio de la venta de opciones sobre moneda.

En conclusión, los instrumentos derivados han tenido un desarrollo muy importante en los mercados internacionales y locales; el MexDer cuenta con productos atractivos y líquidos para los inversionistas mexicanos y extranjeros, permite la creación de estrategias y productos

diferentes, igualmente, ofrece costos competitivos a la clientela y establece condiciones para una mejor competitividad financiera internacional.



## **2. Marco Teórico**

### **Introducción**

Los mercados de opciones han crecido notable en la última década, los instrumentos que dependen de múltiples activos subyacentes están mostrando mayor importancia; la gran volatilidad que experimentaron las monedas y las tasas de interés en la crisis financiera global de 2008 es una muestra de la consecuencia del riesgo de mercado, debido a que los modelos matemáticos para calcular la prima de la opción no integraron todas las variables que representan un riesgo en el mercado.

Con el argumento de replicación, las estructuras exóticas también podrían tener un precio, en tal procedimiento, los precios de los contratos se negocian activamente, como futuros u opciones europeas, que se utilizan para determinar la cobertura, así como los costos involucrados de la opción exótica. Por lo tanto, un modelo que calcula la prima de la opción es un método que permite explorar el comportamiento de los precios de dichos instrumentos de una forma más sencilla, hasta que el precio teórico coincida o se aproxime al precio del mercado. En este contexto, el modelo de Black-Scholes (1973) con los supuestos de volatilidad y tasas de interés constantes, no provee precios teóricos cercanos a los del mercado. En consecuencia, existen varios estudios que se han concentrado en el desarrollo de modelos alternativos, de tal forma que se calcule la prima de la opción tomando en cuenta la volatilidad estocástica del activo subyacente.

En el modelo de Black y Scholes (1973) existen supuestos que no encuentran justificación en los mercados financieros. Particularmente a partir de 1987 cuando surge el crash del índice S&P500, nacen modelos cuyo objetivo es mejorar las singularidades de dicho modelo. Estos modelos sustituyen la característica de volatilidad constante por estocástica, por lo cual el precio de la opción se aproxima más al del mercado (Schwert, 1990).

Así mismo, las tasas de interés no sólo juegan un papel importante a nivel macroeconómico y microeconómico en cualquier sector de la economía, sino también en los mercados financieros, en particular en los mercados de derivados de opciones financieras, ya que las tasas de interés están estrechamente vinculadas con el tipo de cambio, sobre todo para regímenes de libre flotación. Por otro lado, el creciente uso de estos instrumentos de cobertura se debe en gran medida a la flexibilidad de sus contratos con bajos costos de transacción.

En este contexto, el supuesto de que las tasas de interés para la fijación de precios de las opciones se mantienen constantes, no es lo que realmente sucede en la práctica. Sin embargo, la tasa de interés en el mediano y largo plazo, presenta un comportamiento aleatorio, no lineal en el tiempo, lo cual afecta determinadamente el precio de la opción, reflejando un precio ya sea subvaluado o sobrevalorado con respecto al del mercado, es por ello, que los procesos de difusión que modelan la curva de rendimientos, proporcionan una herramienta adecuada para analizar la evolución de las tasas de interés y que esto contribuya a obtener un precio de la opción más justo (Brigo y Mercurio, 2007).

## 2.1. Precursores de Black y Scholes

Desde inicios de este siglo, las opciones han sido valuadas utilizando como base a la tesis doctoral sobre *la teoría de la especulación* de Bachelier (1900), dicho modelo parte del movimiento Browniano del precio del activo subyacente, cuyo proceso de difusión está gobernado por

$$dS_t = \sigma dW_t, \text{ con } dW_t \sim N(0, dt) \quad (2.1)$$

Donde el precio del activo subyacente es  $S_t$  en el tiempo  $t$  y la volatilidad  $\sigma$  de dicho activo, además considerando la técnica de Martingalas<sup>17</sup> para valorar activos en donde la información actual está dada (Bachelier, 1900).

Una de las limitaciones de Bachelier es que en su modelo los precios de los activos subyacentes pueden ser negativos, es por ello, que surge el estudio de Samuelson (1965) “*Rational Theory of Warrant<sup>18</sup> Prices*”, el cual aborda el concepto de Movimiento Browniano Geométrico en el contexto económico. Samuelson elimina el hecho de precios negativos en el activo, pero

---

<sup>17</sup> Uno de los conceptos más importantes en el estudio de mercados eficientes, los cuales se definen a través de la técnica de martingalas. Observe que en virtud de la condición  $E[S_t/F_{t-1}] = S_{t-1}$ , es decir, el mejor pronóstico de  $S_{t+h}$ , dado que su valor actual es  $S_h$ , es justamente  $S_h$ . Un proceso estocástico  $(S_t)_t \geq 0$ , que satisface  $E[S_t/F_{t-1}] = S_{t-1}$  para todo  $t, h \geq 0$  es llamado una martingala (Venegas-Martínez, 2006).

<sup>18</sup> Un *warrant* es un contrato de opción que emite una empresa y que otorga el derecho de comprar sus acciones a un período preestablecido y dentro de un plazo determinado, éstos tienen vencimientos que oscilan usualmente entre 2 y 12 años (Hull, 2008).

aparecen dos parámetros desconocidos ( $\mu$  y  $\beta$ ). Con este modelo, el Movimiento Browniano Geométrico conduce al precio del activo subyacente y calcula la prima de la opción como el valor presente de la esperanza del pago al vencimiento. En cuanto al valor de la opción, como ya lo mencionamos, depende de dos parámetros que no se conocen  $C(S_0, T; \mu, \beta)$ : El primero es  $\mu$ , es un parámetro que representa el rendimiento esperado del activo subyacente, y está relacionado con las preferencias al riesgo de los agentes económicos; el segundo parámetro es  $\beta$ , ajusta la volatilidad del cambio del precio  $S$  en respuesta a los efectos externos (Samuelson, 1965).

El supuesto principal de la investigación de Samuelson es considerar que el Movimiento Browniano Geométrico conduce al precio del activo subyacente a través del siguiente proceso de difusión

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \text{ con } dW_t \sim N(0, dt) \quad (2.2)$$

lo que impide que el precio del activo subyacente tome valores negativos. Siendo  $\mu$  y  $\sigma > 0$ .

Entonces en 1973 Fischer Black y Myron Scholes publicaron un modelo de equilibrio para valorar una opción<sup>19</sup> europea sobre acciones que no pagan dividendos, con este modelo los inconvenientes de Samuelson fueron corregidos.

## 2.2. Modelos de volatilidad constante

El modelo de Black y Scholes (1973) (en adelante BS), parte de una ecuación diferencial parcial parabólica lineal, en donde la solución otorga el precio de una opción europea. En el sector financiero, es muy conocida dicha ecuación porque se toma como base para valorar varios productos derivados para diferentes condiciones iniciales.

Los supuestos básicos o condiciones ideales de los mercados para el modelo BS son:

---

<sup>19</sup> Entre las opciones más comunes, están las europeas y las americanas. Las primeras, sólo pueden ejercerse al momento de expiración de la opción y la segunda desde la creación del contrato hasta el día de su vencimiento (Hull, 2008).

1. El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
2. El Movimiento Browniano Geométrico conduce al precio del activo subyacente;
3. La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante en el tiempo;
4. Las ventas en corto del subyacente son permitidas e ilimitadas;
5. El mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción del título;
6. No hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
7. El mercado opera en forma continua;
8. Hay un sistema bancario, donde los agentes prestan y pueden pedir prestado a una misma tasa de interés constante para todos los plazos (tasa de interés pasiva igual a la activa);
9. Todos los agentes comparten exactamente la misma información; y
10. Los mercados están en equilibrio, esto es, no existen oportunidades de arbitraje.

El precio de ejercicio ( $K$ ), la fecha de vencimiento ( $T$ ), el precio spot ( $S_t$ ), la volatilidad ( $\sigma$ ) y la tasa de interés libre de riesgo ( $r$ ), son los parámetros que determinan el precio de una opción *Call* europea. La ecuación diferencial (2.2) determina la dinámica del activo subyacente, donde  $\mu$  mide el cambio promedio del precio del activo subyacente (*drift*). El factor de la izquierda representa la variabilidad en el cambio del precio de  $S_t$  en refutación de fenómenos externos, como noticias inesperadas. Conjuntamente se tiene la volatilidad  $\sigma$ , que calcula la magnitud de la desviación estándar del rendimiento del activo riesgoso.

La solución a la ecuación (2.2) es el llamado precio del activo subyacente que se muestra como:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (2.3)$$

con un Movimiento Browniano Estándar ( $W = W_t, t \geq 0$ ) y  $S_0$  es el precio inicial de la acción, la cual representa una variable aleatoria independiente al proceso de Wiener ( $W$ ).

La expresión de BS se desarrolla en un marco neutral al riesgo, pero en la ecuación (2.2) el precio tiene un componente de incertidumbre o riesgo ( $W$ ), por lo que este modelo representa el precio de un activo riesgoso. Para eliminar esta incertidumbre BS proceden de la siguiente manera:

Dada la función  $C(S_t, t)$  que expresa el precio de una opción *Call* europea en el tiempo  $t$  con precio inicial  $S_t$  y al construir un portafolio  $\Pi$  libre de riesgo, que se denomina estrategia de *cobertura*  $\pi(-\Delta, 1)$ , formada por una posición corta de una determinada cantidad invertida en el activo subyacente  $(-\Delta)$  y, con una posición larga de una opción *Call*, el valor del portafolio se caracteriza como el producto interno de  $R^2$ , teniendo de esta manera:

$$\Pi = (-\Delta, 1) \cdot (S_t, C_t) = -\Delta S_t + C_t \quad (2.4)$$

Ante un cambio infinitesimal en el tiempo, el valor del portafolio es:

$$d\Pi = -\Delta dS_t + dC_t \quad (2.5)$$

y si se aplica el lema de Ito, se tiene la siguiente igualdad

$$dC_t(S_t, t) = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \quad (2.6)$$

al sustituir (2.2) y (2.6) en la expresión (2.5) se tiene

$$d\Pi = -\Delta(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \left( \frac{\partial C_t}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 \right) \quad (2.7)$$

De acuerdo con las leyes del cálculo estocástico, los términos determinísticos de segundo orden convergen a cero, mientras que los términos estocásticos, tienden a un cambio infinitesimal de tiempo, es decir: la variable  $W_t$  tiene una distribución normal con media cero y varianza  $t$ ,  $W_t \sim N(0, t)$ . Para el incremento  $\Delta W$  del proceso es  $\Delta W \sim N(0, \Delta t)$ . Considerando la variable  $(\Delta W)^2$ , se tiene:

$$E((\Delta W)^2) = \Delta t$$

$$Var((\Delta W)^2) = 2(\Delta t)^2$$

pero cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , la esperanza es mayor a la varianza, por lo que la variable es igual a:

$$(\Delta t)^2 \sim \Delta t \quad \text{o sugestivamente} \quad (dW)^2 = dt$$

de igual manera, si se desarrolla  $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 (dW_t)^2 + 0(dt^{3/2})$

$$\lim_{t \rightarrow 0} ((dS_t)^2) = \sigma^2 S_t^2 dt$$

Ahora, al agrupar términos en la ecuación (2.7) que contienen la parte estocástica  $dW_t$  y si se toman en cuenta las propiedades mencionadas, se tiene:

$$d\Pi = \sigma S_t \left( \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - \Delta \right) dW_t + \left( \mu S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} - \mu \Delta S_t \right) dt \quad (2.8)$$

Para eliminar el riesgo de la ecuación (2.8), se escoge un  $\Delta$ , que es igual a  $\frac{\partial C_t}{\partial S_t}$ , lo que se conoce como *cobertura delta*, la cual debe ser rebalanceada continuamente. Dicha cobertura representa la diferencia de la prima de la opción *Call* con respecto al precio del activo subyacente  $S_t$ . Es muy importante el factor  $\Delta$  tanto en la teoría como en la práctica, es una medida de correlación entre los movimientos de la opción y los del activo subyacente.

Continuando con el análisis matemático, al sustituir y simplificar la expresión anterior, se tiene

$$d\Pi = \sigma S_t dW_t + \left( \mu S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \right) dt \quad (2.9)$$

$$d\Pi = \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} \right) dt \quad (2.10)$$

Como se puede ver, ya que no existe la parte estocástica  $dW_t$ , es decir, la perturbación; ahora se tiene un *portafolio libre de riesgo*. A fin de evitar operaciones de arbitraje, el valor de la opción *Call* en  $t$  debe ser igual al portafolio réplica en  $t$ , esto es:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = r dt \quad (2.11)$$

Al igualar términos, la tasa libre de riesgo es

$$r = \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t}$$

ahora si

$$\frac{d\Pi}{dt} = \Pi r \quad (2.12)$$

Al tomar (2.4) y considerar que  $\Delta = \frac{\partial C_t}{\partial S_t}$ , se tiene  $\Pi = C_t - S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t}$ , al sustituir lo anterior y

(2.10) dividida entre  $dt$  en (2.12), se tiene

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} = \left( C_t - S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \right) r$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} = r C_t - r S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t}$$

al despejar

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} = r C_t - r S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \quad (2.13)$$

sujeta a la condición inicial para una opción *Call*:

$$C_t(S_t, t) = \max(S_t - K, 0)$$

al resolver la ecuación diferencial parcial parabólica lineal (2.13), se reduce a la ecuación de calor y al proponer una solución, BS llegan al precio de la opción de compra (*Call*):

$$C_t(S_t, t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (2.14)$$

si  $N(\cdot)$  es la distribución normal de probabilidad:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{w^2}{2}} dw \quad (2.15)$$

además

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad y \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Como se puede observar, el modelo de BS es un modelo de equilibrio, ya que no depende del rendimiento esperado ( $\mu$ ) del activo riesgoso, además se observa que el precio de la opción es directamente proporcional al precio de la acción. Por otro lado, un incremento en la tasa de interés libre de riesgo ( $r$ ) o en el período de vencimiento ( $T - t$ ), o bien en la varianza ( $\sigma^2$ ), dará lugar a un incremento en el valor de la opción (Black y Scholes, 1973).

Al seguir el mismo procedimiento para la obtención de una opción *Call* europea, se puede obtener el precio de una opción *Put*, así como también a través de la paridad *Call-Put*, que por efectos de simplificación se utiliza esta última, teniendo la siguiente expresión:

$$P_t(S_t, t) = C_t(S_t, t) - S_t + Ke^{-r(T-t)} \quad (2.16)$$

si se sustituye la ecuación (2.14) en (2.16) se tiene el precio de la opción *Put*

$$P_t(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) - S_t + Ke^{-r(T-t)}$$

$$P_t(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)} (1 - N(d_2)) - S_t (1 - N(d_1))$$

posteriormente se usa la propiedad simétrica de la distribución normal,  $N(-d_1) = (1 - N(d_1))$ , para calcular la prima de la opción *Put*

$$P_t(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \quad (2.17)$$

Un supuesto clave en la prima de una opción tipo europea es considerar que los precios del activo subyacente siguen una distribución normal de probabilidad durante el vencimiento de la opción, en cambio el modelo de BS asume una distribución lognormal. Por ello Hull y White (1996) analiza el sesgo que refleja el precio de una opción por medio de Black-Scholes, en donde argumenta que el precio del activo subyacente difiere de la distribución lognormal cuando la opción expira.

Más tarde, Garman y Kohlhagen (1983) (GK en adelante) estudia opciones sobre divisas partiendo del modelo de BS, y considera dos tasas de interés constantes (doméstica y extranjera), relacionadas con la tasa libre de riesgo o bonos cupón cero gubernamentales negociados en cada país.



A partir de la condición libre de arbitraje para tasas de interés, GK realizan una modificación para obtener el precio de una opción *Call* europea para divisas, esto es:

$$\frac{\alpha_i - r_D}{\delta_i} = \lambda \quad \text{para todo } i \quad (2.18)$$

Siendo  $\alpha_i$  la tasa esperada de rendimiento de un bono,  $\delta_i$  es la desviación estándar del bono,  $r_D$  la tasa de interés libre de riesgo doméstica. En general,  $\lambda$  puede depender del tiempo y de las variables de estado involucradas, pero en este caso particular, es una constante.

Ahora aplicando dicho factor a la propiedad de la moneda extranjera, se tiene:

$$\frac{(\mu + r_F) - r_D}{\sigma} = \lambda \quad (2.19)$$

donde  $\mu$  es el rendimiento esperado de la posición tomada en moneda extranjera, más la tasa libre de riesgo de la moneda extranjera  $r_F$  (por ejemplo, Bonos, CETES, TBILL, etc.), siendo el denominador  $\sigma$ , la desviación estándar de la tasa de rendimiento de la moneda extranjera.

El precio de la opción *Call* europea con vencimiento  $T$ . Retomando (2.19) se tiene:

$$\frac{\alpha_C - r_D}{\delta_C} = \lambda \quad (2.20)$$

si  $\alpha_C$  y  $\delta_C$  son la tasa esperada de rendimiento y desviación estándar de la opción *Call*, respectivamente. Por el lema de Ito se obtiene:

$$\alpha_C C = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial T} \quad (2.21)$$

y

$$\delta_C S = \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \quad (2.22)$$

sustituyendo (2.21) y (2.22) en (2.20)

$$\frac{\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial T} - r_D C}{\sigma S \frac{\partial C}{\partial S}} = \lambda \quad (2.23)$$

ahora al sustituir (2.19) en la anterior y al simplificar, se tiene:

$$\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial T} - r_D C}{\sigma S \frac{\partial C}{\partial S}} = \frac{(\mu + r_F) - r_D}{\sigma}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial T} - r_D C = [(\mu + r_F) - r_D] S \frac{\partial C}{\partial S}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial T} - r_D C - \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + [r_D - r_F] S \frac{\partial C}{\partial S} = 0$$

si se observa la expresión anterior se cancela el término que contiene a  $\mu$  :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - r_D C + (r_D - r_F) S \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial T}$$

finalmente se tiene la ecuación diferencial parcial parabólica lineal para opciones sobre divisas

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - r_D C + (r_D S - r_F S) \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial T} \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24) es idéntica al modelo propuesto por Samuelson (1965) y Samuelson y Merton (1969), en la que se reconoce la tasa de dividendo de una acción, proporcional al nivel de la curva de precios. Considerando  $r_F$ , como la tasa extranjera.

La solución de forma cerrada obtenida en el trabajo de Garman y Kohlhagen (1983) bajo la condición de frontera  $C(S, 0) = \max[0, S - K]$  es:

$$C(S, T) = S e^{-r_F T} N(d_1) - K e^{r_D T} N(d_2) \quad (2.25)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r_D - r_F + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r_F - r_D - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

De manera similar, para una opción *Put* es:

$$P(S, T) = Ke^{-r_b T} N(-d_2) - Se^{-r_f T} N(-d_1) \quad (2.26)$$

Los mercados financieros se han tornado más riesgosos, debido al proceso de globalización y los impactos de las crisis, tales como: la devaluación del peso mexicano en 1994, la crisis asiática de 1997, el incumplimiento de Rusia en el año 1998, el efecto samba de Brasil en 1999. Otros eventos que han conducido a que las divisas presenten un comportamiento negativo son los ocurridos en la primera mitad del siglo XXI, siendo éstos: la caída del índice Nasdaq en 2000, la desaceleración económica de Estados Unidos y el aumento de los energéticos generalizados del 2001, el derrumbe de la economía de Argentina en 2002, la crisis financiera global originada en Estados Unidos en el año 2008 y la crisis de deuda soberana de Grecia de 2010 (Pascale, 1999).

Ante estos acontecimientos y al tomar en cuenta los supuestos del modelo BS, los investigadores y agentes económicos hoy en día se han enfocado con mayor intensidad en el estudio de la volatilidad del activo subyacente y tasa de interés, con comportamiento estocástico. Por tal motivo, surge una clase de estudios que relajan dichos supuestos, con el fin de proporcionar modelos de valuación que permitan determinar una prima más justa de la opción sobre tipo de cambio, así como también, generar estrategias de cobertura que coadyuven a los participantes en los mercados de divisas a reducir la exposición al riesgo cambiario.

### **2.3. Modelos de volatilidad estocástica**

Al analizar el modelo de BS varias investigaciones (Melino y Turnbull, 1990; Day y Lewis, 1992) han demostrado que dicho modelo presenta sesgos sistemáticos, provocados por la violación del supuesto de normalidad en los rendimientos del activo subyacente (Rubinstein, 1983; Bakshi et al., 1997; Nandi, 1998). Los resultados muestran que la asimetría negativa hace que la prima de la opción fuera del mercado (OTM) presente sesgo, mientras que la leptocurtosis incrementa la prima para opciones que están muy profundamente en el mercado (ITM) y OTM, también reduce la prima para las opciones cerca del mercado (ATM, por sus siglas en inglés) (Lin et al., 2001; Bates, 1996, 2000, 2003).

Por su parte, los estudios de Hull y White (1987), Melino y Turnbull (1990), y Heston (1993),

mejoraron la precisión de la prima ya que con su modelo valoran las opciones con volatilidad estocástica y un factor importante que analizaron es la leptocurtosis de los rendimientos del activo subyacente. Los resultados arrojaron mejores precios en comparación al modelo de volatilidad constante, lo cual se argumenta a los procesos de difusión del precio y de la volatilidad estocástica, aunado al considerar que no existe correlación entre la volatilidad y el rendimiento del precio del activo subyacente.

Hull y White (1987) (HW, en adelante), utilizaron la técnica de expansión de Taylor y propusieron una aproximación en serie de potencias de la opción *Call* europea. Dicho modelo es el primero con volatilidad estocástica aplicado a las monedas de la Bolsa de Filadelfia (PHLX). En este trabajo, se muestra que si el precio de un activo subyacente sigue una distribución lognormal y su volatilidad es una función conocida del tiempo ( $\sigma_t$ ), entonces el proceso neutral al riesgo que conduce dicho precio está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas en un espacio de probabilidad ( $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$ ):

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_s \quad (2.27)$$

$$d\sigma_t^2 = \alpha\sigma_t^2 dt + \beta\sigma_t^2 dW_\sigma \quad (2.28)$$

donde  $S_t$  es el precio del activo subyacente, el parámetro de tendencia  $r$  representa la tasa de interés libre de riesgo,  $\sigma_t$  es la varianza instantánea o volatilidad de los rendimientos del precio de la acción,  $dW_s$  y  $dW_\sigma$  son Movimientos Brownianos Estándar. En la ecuación (2.28) se observa que  $\sigma_t$  se revierte a una tasa  $\alpha$  y  $\beta$  es el coeficiente de la volatilidad estocástica.

Ahora, definiendo la volatilidad estocástica promedio se tiene:

$$\bar{\sigma}_{t,T}^{-2} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du$$

donde  $\sigma_u^2$  es la solución de la ecuación diferencial estocástica (2.28).

Existen varios estudios que modificaron el modelo de BS, con el fin de obtener la prima de la opción sobre tipo de cambio con volatilidad estocástica (Garman y Kohlhagen, 1983; Grabbe, 1983; Chesney y Scott, 1989). En el caso de Biger y Hull (1983) analizaron cuatro modelos para la paridad CHF/USD, y las primas de las opciones sobre tipo de cambio negociadas por Credit

Suisse First Boston (CSFB) de Ginebra, Suiza. Al valorar el precio de la opción con volatilidad constante, implícita y estocástica, obtuvieron que con volatilidad estocástica la prima sigue un proceso de reversión a la media que considera una caminata aleatoria  $ln\sigma$ , además de dar un precio más cercano al mercado.

También, Hull y White (1987) (HW) observaron que el modelo de BS sobrevalora el precio de una opción cuando el  $S_t$  es cercano a  $K$ , y subvalora el precio de la opción cuando es ITM y OTM. Además, el precio de la opción es sesgada cuando la volatilidad está correlacionada positivamente con el precio que registra el mercado. Los resultados muestran que la prima de la opción presenta sesgo en relación con el precio de BS, también, las opciones tienden a sobrevalorar la prima cuando son OTM, mientras que para opciones ATM subvalúa el precio, muchos más que BS. Estudios como el de Guo (1996) y Fleming (1998), argumentaron que la variación implícita obtenida a partir del modelo de HW es significativa, pero sigue siendo un estimador sesgado en términos de desempeño de los precios de mercado de las opciones OTM sobre divisas.

Por su parte Scott (1987) basó su modelo en HW, considerando la volatilidad estocástica como un proceso de reversión a la media. En ese mismo año, también es integrado el factor de riesgo de la volatilidad de los rendimientos del precio del activo por Wiggins (1987), y para los estudios de HW, Scott (1987) y Wiggins (1987) la nula correlación entre el rendimiento del activo y su volatilidad es su principal limitación. Al comparar dichos modelos, muestran que BS no es el más adecuado, ya que se obtienen errores más altos en los precios teóricos con respecto a los precios de mercado. En un análisis más profundo, Chesney y Scott (1989) encontraron que el modelo de BS tiende a subvaluar las opciones *Call* ATM y sobrevalora las OTM. Mientras que el modelo de valuación con volatilidad estocástica tiende a sobrevalorar las opciones *Call* para vencimientos más largos y subvalora para fechas de expiración más cortas. Finalmente, los resultados empíricos muestran que los precios encontrados considerando volatilidad estocástica se ajustan mejor que el modelo de BS si se lleva a cabo una revisión diaria de la volatilidad, lo cual permite a los agentes económicos cubrirse del riesgo cambiario. También es relevante mencionar, que para la Bolsa de Filadelfia (PHLX) Melino y Turnbull (1990) valoraron las primas de las opciones sobre el tipo de cambio CAD/USD con volatilidad estocástica. Los resultados muestran que sobrevalora el precio de las opciones *Call* y *Put* fuera del mercado. Los

estudios anteriores confirman que los modelos que obtienen el precio de la opción con volatilidad estocástica otorgan primas más justas que aquellos que consideran a la volatilidad constante.

En los mercados accionarios, Stein y Stein (1991) propusieron una distribución de precios de acciones determinada a través de la transformada inversa de Fourier. Obtuvieron una fórmula de solución semi-cerrada para las opciones europeas sobre el índice S&P 100 basado en el supuesto de correlación nula. También estudios como el de Heston (1993), Bates (1996) y Bakshi et al. (1997), implementaron una solución semi-cerrada para opciones, y de manera particular, el modelo de Heston (1993) argumentó que la leptocurtosis y la asimetría se ven afectadas por la correlación que existe entre el rendimiento del activo subyacente y la volatilidad.

El modelo de Heston (1993) postuló un proceso de Ornstein-Unlenbeck para la volatilidad instantánea de los rendimientos del activo subyacente  $\sqrt{\sigma_t}$ , cabe señalar, que la diferencia con el modelo de BS es el proceso estocástico que sigue la volatilidad, tal como se muestra a continuación:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t dW_S \quad (2.29)$$

$$d\sqrt{\sigma_t} = -\beta\sqrt{\sigma_t} dt + \delta dW_\sigma \quad (2.30)$$

Siendo los procesos de Wiener  $dW_S$  y  $dW_\sigma$  bajo la medida de probabilidad  $P$ , y la tasa de crecimiento  $\mu$  que se encuentra en el proceso del precio del activo subyacente. Representando la correlación entre los procesos del precio y la volatilidad de la siguiente manera:

$$dW_S dW_\sigma = \rho dt$$

Si se aplica el lema de Ito a la ecuación (2.30), se tiene el proceso para la varianza instantánea:

$$d\sigma_t = \kappa(\theta - \sigma_t) dt + \sigma\sqrt{\sigma_t} dW_\sigma \quad (2.31)$$

con  $\kappa = 2\beta$ ,  $\theta = \frac{\delta^2}{2\beta}$  y  $\sigma = 2\delta$ . El parámetro  $\kappa$  es la velocidad de reversión a la media y  $\theta$

incorpora el nivel medio de la varianza de largo plazo.

El proceso que representa a la varianza instantánea (2.31) está conformado por una parte determinística y otra aleatoria; la primera es asintóticamente estable cuando el parámetro  $\kappa > 0$  y en la segunda  $\sigma$  simboliza la volatilidad de la varianza  $\sqrt{\sigma_t}$ . Este último parámetro permite que el modelo se ajuste a la valoración de productos derivados sujetos a la volatilidad, además de considerar que la volatilidad es determinista del tiempo.

Al considerar el teorema de Girsanov el proceso de la evolución del activo subyacente es:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{v_t}dW_{S,t} \quad (2.32)$$

con la medida de probabilidad neutral al riesgo  $Q$ ,  $W_{S,t}$  es un proceso de Wiener.

Ahora la ec. (2.30) se transforma usando el teorema de Girsanov y queda de la siguiente manera:

$$d\sigma_t = \kappa \left[ \theta - \left( 1 + \frac{\lambda}{\kappa} \right) \sigma_t \right] dt + \sigma \sqrt{\sigma_t} \left[ \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{\sigma_t} dt + dW_{\sigma,t} \right]$$

$$d\sigma_t = \kappa^* (\theta^* - \sigma_t) dt + \sigma \sqrt{\sigma_t} dW_{\sigma,t}^Q \quad (2.33)$$

donde  $\theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda}$ ,  $\kappa^* = \kappa + \lambda$  y  $dW_{\sigma,t}^Q = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{\sigma_t} dt + dW_{\sigma,t}$ , además  $W_{\sigma,t}^Q$  es un proceso de Wiener bajo la medida  $Q$ . Con la velocidad de reversión a la media de largo plazo  $k^*$  y la varianza  $\theta^*$  bajo  $Q$ . Utilizando estos parámetros se tiene:  $b_1 = \kappa^* - \rho\sigma$ ,  $b_2 = \kappa^*$ . Por tanto, bajo la medida  $Q$ , el parámetro  $\lambda$  es eliminado, lo que facilita la calibración del modelo, debido a que reduce el número de parámetros estimados al ajustar el modelo a un conjunto de datos financieros.

Por lo tanto, el precio de la opción *Call* europea, que contiene la función de densidad  $f(S_t)$ , el precio de ejercicio ( $K$ ) y la fecha de vencimiento ( $\tau = T - t$ ), está dado por:

$$C = e^{-r\tau} \int_K^\infty (S_\tau - K) f(S_\tau) dS_\tau \quad (2.34)$$

Usando la transformada inversa de Fourier, Heston (1993) aplica diferenciales<sup>20</sup> a la función de densidad lognormal del precio ( $S_T$ ) a partir de las ec. (2.33) y (2.34), condicionada a la varianza de los rendimientos de los precios del activo subyacente. La opción *Call* europea sobre divisa está dada por:

$$C = Se^{-r_f\tau} P_1 - Ke^{-r_d\tau} P_2 \quad (2.35)$$

Cabe hacer notar que el valor de la opción *Call* de la ec. (2.35) es semejante a la expresión en el modelo de BS.

Por su parte, Heston (1993) señaló que las funciones de densidad  $P_j$  para  $j = 1, 2$ , pueden deducirse usando la transformada inversa de Fourier, por lo que se tiene:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \left[ \frac{e^{-iz \ln(K) f_j}}{iz} \right] dz \quad (2.36)$$

si  $i$  es un número imaginario y las funciones características de la función de densidad están representadas por  $f_j$  para  $j = 1, 2$ , toman la siguiente forma:

$$f_j = e^{C_j + D_j \sigma_0 + iz \ln(S_0)}$$

$$C_j = rizT + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma iz + d_j)T - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j e^{Td_j}}{1 - g_j} \right) \right]$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma iz + d_j}{b_j - \rho\sigma iz - d_j}$$

$$d_j = \left[ (\rho\sigma iz - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j iz - z^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

con  $u_1 = \frac{1}{2}$ ,  $u_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $b_1 = k + \lambda - \rho\sigma$ , y  $b_2 = k + \lambda$ . Para obtener la prima de la opción *Call*, a partir de la ec. (2.35) es necesario evaluar dos integrales: es decir, integrar la parte real e

---

<sup>20</sup> Debido a que la diferenciación está dada bajo la distribución condicional, requiere realizar numéricamente la integral de la función característica del proceso de probabilidad.



integrar el término imaginario dado en la ec. (2.36).

De manera semejante, tomando en cuenta el precio de la opción *Call*, la condición de no arbitraje y la paridad *Put-Call*, la prima de la opción *Put* europea está dada por:

$$P = C - Se^{-r_f \tau} + Ke^{-r_d \tau} \quad (2.37)$$

Los resultados del estudio muestran que Heston (1993) subvalora las opciones cuando su precio está dentro del precio del mercado (ITM) y cuando es casi igual (ATM), y sobrevalora a las opciones cuando el precio está fuera del precio del mercado (OTM). El análisis de los precios lo realiza comparando modelos con diferentes asimetrías y curtosis, con base a esto, establece que la correlación entre la volatilidad y el precio de ejercicio es necesaria para generar asimetría, dado que este factor en la distribución de los rendimientos afecta al precio de las opciones ITM y en menor medida a las OTM. Omitiendo esta relación, la volatilidad estocástica sólo cambia la curtosis, ya que ésta afecta los precios ATM. Cabe señalar que dicho modelo, fue un experimento teórico, pero cuando se estudiaron sus alcances es uno de los más aplicados para obtener la prima de la opción para diferentes activos subyacentes.

Abraham y Taylor (1993) realizaron un estudio de los precios de las opciones sobre divisas, consideraron que la volatilidad del tipo de cambio es estocástica y que no es afectada por eventos tales como: los anuncios de oferta de dinero, las intervenciones en el mercado spot y los cambios en las tasas de interés. Dicho trabajo proporciona un modelo para las opciones *Call* sobre divisas que captura explícitamente los efectos de la volatilidad de los eventos normales y externos. Este modelo ha sido utilizado por agentes económicos para cubrirse del riesgo cambiario. También, Bates (1996) utiliza el modelo de volatilidad estocástica de Heston para estimar los parámetros implícitos en las opciones para el marco alemán y otras monedas duras, con lo que muestra que el mercado de opciones experimenta sensibilidad a las fluctuaciones de los mercados financieros internacionales, de igual manera, encontró que la volatilidad estocástica podría explicar la leptocurtosis teniendo en cuenta el riesgo del salto, debido al mercado.

Bakshi et al. (1997) valoraron empíricamente el precio de la opción del índice S&P 500 bajo modelos de volatilidad constante y estocástica, para la Bolsa de Filadelfia, en el periodo 1988-1991. Al analizar la consistencia de los parámetros, encontraron que el modelo de BS obtiene precios mayores a los del mercado y el modelo con volatilidad estocástica logra primas más

justas; asimismo muestran que, al considerar las tasas de interés estocásticas, los precios se ajustaron mejor a los del mercado para opciones con vencimientos de largo plazo. Además, estudiaron los procesos estocásticos de tasas libres de riesgo (domésticas y extranjeras) y compararon el desempeño de los precios de las opciones sobre divisas entre el modelo de GK y el de Heston (1993), obteniendo mejores resultados este último modelo.

Schöbel y Zhu (1999) (SZ, en adelante) realizaron una extensión del modelo de volatilidad estocástica de Stein y Stein (1991), donde la volatilidad sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck de reversión a la media; asumieron que existe correlación entre la volatilidad y el precio del activo subyacente. Derivaron un modelo analítico de forma cerrada para obtener el precio de la opción *Call* europea, basado en el modelo de Scott (1997). Este modelo no es un estudio empírico, sólo se queda en la prueba con datos que no se especifican, pero obtuvieron que la correlación entre el precio del activo subyacente y la volatilidad presentan diferentes sensibilidades en las opciones OTM, ITM y ATM. Los resultados muestran que los precios de las opciones no cambian notablemente para opciones ATM, pero para las opciones OTM son más sensibles que para opciones ITM debido a la correlación. También SZ efectuaron una comparación teórica entre el modelo de BS, Heston (1993), Stein y Stein (1991), y encontraron que en este último las primas de las opciones ATM no cambian notablemente, pero en las opciones ITM y OTM si hay un mayor valor. Con respecto al análisis del proceso de reversión a la media, argumentaron que los precios de las opciones varían de acuerdo con la velocidad de reversión, por lo que concluyeron que el modelo en general sobrevalora los precios de las opciones.

Por su parte, Chen y Gau (2004), realizaron un análisis de comparación de los modelos de GK y el de Heston, para una muestra de cuatro tipos de cambio, tales como: la libra esterlina, el marco alemán, el yen japonés y el franco suizo en relación con el dólar estadounidense, que se negocian en PHLX desde 1994 hasta 2001. Los resultados empíricos mostraron que los precios teóricos obtenidos por Heston son más exactos con respecto a los del mercado. Asimismo, Carr y Wu (2007) analizaron el comportamiento de los precios de opciones para divisas, a partir de los modelos de BS y GK, para la paridad, dólar estadounidense/libra esterlina y yen japonés, en el cual concluyeron que con el modelo de GK se obtienen primas más justas que con BS.

Levendorskii (2012) aplicó el modelo de Heston para la fijación de precios sobre las opciones europeas del índice Euro-Stoxx 50 y la divisa AUD/JPY. Los resultados muestran un error de 0.01% y 0.5% en promedio entre los precios teóricos y reales para el índice y la divisa, respectivamente. Crisóstomo (2014) implementó el modelo de Heston para opciones *Call* europeas sobre el Nasdaq, con datos de febrero y marzo de 2014. Bajo la metodología de optimización global estima los parámetros que involucra el modelo y con ello valuar el precio de la opción, con lo cual obtienen resultados consistentes respecto al mercado. También Azencott et al. (2015) avalaron la efectividad del modelo de Heston (1993), replicaron el modelo para el índice S&P500 con datos diarios registrados en 2006 con vencimiento de 30 días. Este estudio cuantifica el impacto de los errores de las opciones *Call* europeas con respecto a los precios reales.

Asimismo, Singh y Dixit (2016) analizaron el rendimiento fuera de la muestra con un día de anticipación en el mercado de la India para el índice CNX Nifty por medio de Heston (1993), comparando resultados con el modelo de Black-Scholes, los cuales muestran que el modelo de volatilidad estocástica es más confiable para fijar el precio de las opciones y para este mercado los precios teóricos mejoran conforme las opciones pasan de OTM a ITM. En el estudio de Mondal et al. (2017), replicaron el modelo de Heston (1993) pero con el objetivo de medir los efectos de los parámetros de correlación y volatilidad, y encontraron que la correlación en la distribución de los rendimientos del activo subyacente y la volatilidad estocástica, captura el efecto de apalancamiento (correlación negativa), lo que provoca un incremento de la volatilidad conforme disminuye el rendimiento y que lleva que la cola izquierda sea más pesada, por lo tanto existe la posibilidad de caídas aún mayores en el precio del activo. En cambio, para una correlación positiva, la volatilidad aumenta conforme incrementa el precio del activo subyacente y la cola derecha es más pesada. En síntesis, la correlación afecta la asimetría de la distribución de los rendimientos. En cuanto a los efectos de la volatilidad de la varianza, ésta controla la curtosis de la distribución y su efecto es directamente proporcional, es decir, una mayor volatilidad aumenta la curtosis.

Sin embargo, existe una brecha en la literatura para divisas de economías emergentes, particularmente para la divisa peso mexicano/dólar estadounidense. Hasta ahora sólo existe el estudio de Medina et al. (2003), el cual aplicó el modelo de GK para valuar opciones *Put* para

el peso mexicano/dólar estadounidense en el periodo 1996-2001. El estudio es una estrategia utilizada por Banxico para adquirir divisas en el mercado cambiario a partir de un portafolio de opciones *Put* europeas ATM, cuidando de no presionar el tipo de cambio y de no enviar señales que pudieran interpretarse en forma errónea por los agentes económicos.

En este contexto, Climent-Hernández y Venegas (2012), realizaron una valuación de opciones europeas sobre la divisa peso/dólar asumiendo que los rendimientos siguen una distribución  $\alpha$ -estable, para el periodo 1994-2011. Sin embargo, este estudio presenta inconsistencias, dado que considera la volatilidad y tasas de interés constantes, además de utilizar el tipo de cambio FIX<sup>21</sup> que es aplicable para liquidar operaciones el segundo día hábil bancario inmediato siguiente a la fecha de su concertación, por tal motivo, el modelo no se logra calibrar, debido a que sólo es válido para 48 horas. Por lo tanto, el precio teórico no se puede comparar con el precio de opciones sobre divisas que emite el MexDer.

Además, en el contexto nacional, a partir del 24 de marzo de 2008 el MexDer, aplicó una nueva manera de calcular los precios de liquidación diaria en los contratos de opciones, donde consideran el modelo de Heston sólo para el cálculo de la volatilidad implícita del precio de la opción sobre tipo de cambio y sobre acciones.

También se puede apreciar que el modelo de Heston con el que opera el MexDer no se usa para calcular la volatilidad estocástica del rendimiento del precio del activo subyacente, como se realiza en Bolsas de países desarrollados, por lo cual el precio teórico no se ajusta al precio del mercado. Por toda la argumentación anterior, se presenta la importancia de formular un modelo que considere la dinámica del precio del activo subyacente, así como su volatilidad y las tasas de interés, cuando estas dos últimas presentan un comportamiento estocástico, para obtener un precio más justo de la opción y aplicarlo al mercado mexicano.

---

<sup>21</sup> Determinado por el Banco de México con base en un promedio de cotizaciones del mercado de cambios al mayoreo para operaciones liquidables el segundo día hábil bancario siguiente en el Diario Oficial de la Federación y que son obtenidas de plataformas de transacción cambiaria y otros medios electrónicos con representatividad en el mercado de cambios (Diario Oficial de la Federación, 22 de marzo de 1996, numeral M86 con circular 2019/95 del Banco de México).

## 2.4. Modelos con tasa de interés estocástica

La modelación de la curva de rendimiento de tasas de interés intertemporal es un aspecto fundamental para entender el funcionamiento de una economía dado el importante papel que tienen las tasas de interés en la transmisión de los movimientos del sector monetario al sector real. Esta modelización se puede hacer desde una perspectiva macroeconómica (considerando, por ejemplo, las implicaciones de diversas políticas económicas o monetarias sobre los diferentes agentes económicos) o desde una teoría basada en los mercados financieros<sup>22</sup>.

A partir del punto de vista financiero, los estudios tanto teóricos como empíricos sustentan que el precio de las opciones debe descontar los efectos en el nivel de las tasas de interés a través del tiempo. Es por ello, que existe una extensa literatura sobre el modelado de la estructura temporal de las tasas de interés. Enfoques para la fijación de precios y gestión de riesgos de derivados financieros sobre tasas de interés han sido descritos por Vasicek (1977), Miltersen et al. (1977), Brace et al. (1977), Cox et al. (1985), Amin y Jarrow (1991), Heath et al. (1992), Hull y White (1993), Hunt et al. (2000). Estos modelos de tasa de interés se pueden subdividir en modelos de tasa corta (Heath et al., 1992) y modelos de Markov. Se recomienda a Brigo y Mercurio (2007) y Pelsser (2000), para una extensa literatura de modelados de tasas de interés.

Un estudio de opciones sobre tipo de cambio suponiendo volatilidad constante y tasas de interés estocásticas es el de Amin y Jarrow (1991), el cual se basa en el trabajo de Heath et al. (1992) que obtuvieron un modelo analítico con soluciones de forma cerrada para opciones *Call* europeas sobre divisas. A través de este modelo, reducen las deficiencias que presenta el modelo de Merton (1973), usando la técnica Martingala desarrollada para opciones de divisas con tasas de interés constantes (para más información consultar Ho y Lee, 1986, y Heath et al., 1990).

Asimismo, Hull y White (1993) formulan un modelo para tasas de interés estocásticas, extendieron el modelo de Vasicek (1977) con una medida de reversión a la media en el tiempo. Bajo una medida  $Q$  en el mercado de dinero (que utiliza la tasa de interés libre de riesgo) el modelo HW ofrece la siguiente dinámica:

---

<sup>22</sup> Para una explicación más detallada véase Castellanos (2000) y, Brigo y Mercurio (2007).

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW_r(t) \quad (2.38)$$

Con  $a$  y  $\sigma$  constantes,  $W_r(t)$  un Movimiento Browniano y donde la función determinística  $\theta(t)$  es elegida para ajustarse a la estructura observada de la tasa de interés. A medida que la tasa sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck, el modelo implica una distribución normal para tasas de interés a corto plazo. La distribución Gaussiana permite el análisis analítico y la construcción de métodos numéricos eficientes para los precios de varios derivados sobre tasas de interés.

Por otro lado, cabe la posibilidad teórica de que  $r(t)$  tome valores negativos debido a que se asume una distribución normal, lo que implica un claro inconveniente del modelo. Sin embargo, en la práctica la probabilidad de tasas negativas es a menudo insignificante ya que no provoca ningún problema para la mayoría de los productos derivados (Brigo y Mercurio, 2007).

Al analizar a Pelsser (2000) junto con Brigo y Mercurio (2007), el modelo de Hull y White (1993) es el más sencillo de parametrizar, esto es:

$$r(t) = x(t) + \beta(t) \quad (2.39)$$

el cual separa el proceso de tasa de interés  $r(t)$  en una función determinista  $\beta(t)$  y un proceso Ornstein-Uhlenbeck  $x(t)$  que satisface la siguiente igualdad:

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_r(t) \quad (2.40)$$

al ajustar la estructura de plazos de las tasas de interés, se tiene:

$$\int_t^T \beta(u) du = \ln \frac{P(0,t)}{P(0,T)} + \frac{1}{2} [V(0,T) - V(0,t)] \quad (2.41)$$

si se considera una estrategia de inversión que consiste en una cartera  $V(t, T)$ , formada por un bono de descuento con vencimiento  $T$  :

$$V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left( (T-t) + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \quad (2.42)$$

Asumiendo normalidad junto con la transformada inversa de Fourier, se obtiene la siguiente expresión para el precio de un bono cupón cero  $P(t, T)$  con vencimiento en el tiempo  $T$ :

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)x(t)} \quad (2.43)$$

con

$$A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left[ \frac{1}{2} (V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)) \right] \quad (2.44)$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T, t)}}{a} \quad (2.45)$$

donde  $P(0, s)$  denota el factor de descuento de mercado durante el tiempo  $s$ , que es la diferencia entre el tiempo cero y el de vencimiento.

Si se aplica el cambio de la medida de probabilidad y se descuenta el precio del bono, se evalúa el modelo bajo la dinámica de la  $Q^T$  para un vencimiento  $T$ . Al implementar el teorema de Girsanov implica que en el modelo de HW el proceso  $W_r^T(t)$  está definido por:

$$dW_r^T(t) = dW_r(t) + \sigma B(t, T) dt \quad (2.46)$$

que es un Movimiento Browniano bajo la medida  $T$ -forward. Una solución explícita para  $x(t)$  a partir del tiempo  $s$  bajo  $Q^T$  está definida de la siguiente manera:

$$x(t) = x(s) e^{-a(t, s)} - M^T(s, t) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_r^T(u) \quad (2.47)$$

donde  $M^T(s, t)$  es una función determinística de la forma:

$$M^T(s, t) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-a(t, s)}) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-a(T, t)} - e^{-a(t+t-2s)}) \quad (2.48)$$

Por lo tanto, a partir del lema de Ito para  $r(t)$  condicionada al tiempo  $s$  bajo una medida  $T$ -forward, es normalmente distribuida con media  $\mu_r(s, t)$  y varianza  $\sigma_r^2(s, t)$  dadas como:

$$\mu_r(s, t) = x(s) e^{-a(t, s)} - M^T(s, t) + \beta(t) \quad (2.49)$$

$$\sigma_r^2(s, t) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t, s)}) \quad (2.50)$$

El uso de la dinámica descrita y el hecho de que el movimiento sigue una distribución log-normal en este modelo, muchas opciones pueden obtener el precio de forma cerrada utilizando fórmulas de Black y Scholes (1973) (para mayores detalles ver Hull y White, 1993; Pelsser, 2000; Brigo y Mercurio, 2007). También la simulación del modelo puede hacerse de manera exacta ya que las variables de estado siguen una distribución normal (Glasserman, 2003). En general, el modelo de Hull y White (1993) tiene la ventaja por el hecho de que es muy manejable.

Bajo este contexto, es de suma importancia introducir las tasas de interés estocásticas en los modelos para valorar el precio de una opción *Call* europea sobre divisas, ya que conducen a un precio teórico más próximo al de mercado para vencimientos largos (Amin y Jarrow, 1991; Hull y White, 1993), que los modelos que consideran a la tasa de interés constante.

## **2.5. Modelos de valuación con volatilidad y tasas de interés estocásticas**

A partir de la introducción del modelo de Black-Scholes y en particular desde la caída de los mercados financieros a finales de los ochenta, una serie de modelos complejos han sido propuestos para relajar las especificaciones de BS. Aunque dicho modelo tiene propiedades atractivas teóricas-prácticas, los supuestos, como la volatilidad constante y la tasa de interés constante, no encuentra justificación en los mercados financieros. Una clase de modelos relajan el supuesto de volatilidad constante e incorpora un fenómeno financiero conocido como volatilidad estocástica. Estudios representativos con volatilidad estocástica son: Hull y White (1987), Stein y Stein (1991), Heston (1993) y Schöbel y Zhu (1999).

Por otro lado, ante la aparición de mercados financieros con instrumentos cada vez más complejos que dependen de los movimientos de la estructura de las tasas de interés, han surgido modelos caracterizados por su flexibilidad analítica y de cálculo (Vasicek, 1977; Miltersen et al., 1977; Brace et al., 1977; Cox et al., 1985; Heath et al., 1992; Hull y White, 1993; Hunt et al., 2000). Asimismo, existen modelos que consideran la incorporación de más de un factor de riesgo para explicar la dinámica de la estructura de dichas tasas (ver Brigo y Mercurio, 2007; Pelsser, 2000, para una extensa literatura de modelados de tasas de interés).

En este contexto, Ahlip (2008) considera una extensión del modelo de Schöbel y Zhu (1999) con tasas de interés estocásticas, para precios de opciones sobre tipo de cambio. Este modelo se



distingue de los de Scott (1997), Bakshi et al. (1997) y Amin y Ng (1994) y Andersen (2006) por su fórmula de fijación de precios de una opción *Call* europea con solución de forma cerrada tipo Heston (1993). A pesar de la correlación existente entre el activo subyacente y la estructura temporal de tasas de interés, el resultado final es muy complejo. Por ello los cálculos numéricos a los que da lugar son muy largos, otra característica es que sólo es un modelo teórico.

También surge el modelo teórico de vanHaastrecht y Lord (2009), debido a que establecen un modelo denominado Schöbel-Zhu-Hull-White que se aplica para obtener precios con volatilidad y tasas de interés, ambas estocásticas, para varios tipos de derivados. Estos autores extienden el modelo de volatilidad estocástica de Schöbel y Zhu (1999) combinando el modelo de Hull y White (1993) mediante la inclusión de tasas de interés estocásticas, para vencimientos de largo plazo, teniendo en cuenta la correlación entre los procesos Brownianos de los factores implicados de forma explícita, es decir, entre las tasas de interés, la volatilidad y el precio del activo subyacente. Derivan una integral para valuar la función característica del precio de la opción, con esto, obtuvieron valores de las opciones *Call* europeas de manera eficiente, por medio de un modelo de forma cerrada dando solución por la transformada inversa de Fourier (Lord y Kahl, 2008).

La dinámica neutral al riesgo del tipo de cambio para SZHW, es la siguiente:

$$dX(t) = X(t)(r_D(t) - r_F(t))dt + X(t)v(t)dW_x(t) \quad X(0) = x_0 \quad (2.51)$$

$$dr_D(t) = (\theta_D(t) - a_D r_D(t))dt + \sigma_D dW_{r_D}(t) \quad r_D(0) = r_0^D \quad (2.52)$$

$$dr_F(t) = (\theta_F(t) - a_F r_F(t) - \rho_{X_{r_F}} v(t) \sigma_F)dt + \sigma_F dW_{r_F}(t) \quad r_F(0) = r_0^F \quad (2.53)$$

$$dv(t) = k(\psi - v(t))dt + \tau dW_v(t) \quad v(0) = v_0 \quad (2.54)$$

siendo  $X(t)$  el tipo de cambio en el Mercado de Divisas (FX),  $v(t)$  la volatilidad,  $r_D$  tasa de interés doméstica y  $r_F$  tasa de interés extranjera;  $a_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $k$ ,  $\psi$ ,  $\tau$  son parámetros positivos.

Los procesos de difusión que rigen al modelo son:  $\tilde{W}(t) = (W_X(t), W_{r_D}(t), W_{r_F}(t), W_v(t))$ , denotando un movimiento Browniano bajo la medida neutral al riesgo  $Q$  con una matriz de covarianza positiva dada por:

$$Cov(\tilde{W}(t)) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{Xr_D} & \rho_{Xr_F} & \rho_{Xv} \\ \rho_{Xr_D} & 1 & \rho_{Xr_D r_F} & \rho_{Xr_D v} \\ \rho_{Xr_F} & \rho_{Xr_D r_F} & 1 & \rho_{Xr_F v} \\ \rho_{Xv} & \rho_{Xr_D v} & \rho_{Xr_F v} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Aplicando el teorema de Feynman-Kac para reducir la dinámica de la función característica del FX y dar solución sólo a una ecuación diferencial parcial, es decir, se determina la ecuación diferencial parcial de Kolmogorov de la función de probabilidad conjunta  $f = f(t, y, v)$ .

Considerando la medida libre de riesgo de FX y el proceso de volatilidad, se tiene:

$$\frac{dFFX_T(t)}{FFX_T(t)} = v(t) dW_X^T(t) + \sigma_D B_D(t, T) dW_{r_D}^T - \sigma_F B_F(t, T) dW_{r_F}^T(t) \quad (2.56)$$

$$dv(t) = k \left( \psi - \frac{\rho_{r_D v} \sigma_1 \tau}{k} B_D(t, T) - v(t) \right) dt + \tau dW_v^T(t) \quad (2.57)$$

Simplificando (2.56) por medio de cambios logarítmicos definidos por:  $y(t) = \ln(FFX_T(t))$ , aplicando el lema de Ito se obtienen los rendimientos:

$$dy(t) = -\frac{1}{2} v_f^2(t) dt + v(t) dW_X^T(t) + \sigma_D B_D(t, T) dW_{r_D}^T - \sigma_F B_F(t, T) dW_{r_F}^T(t) \quad (2.58)$$

$$dv(t) = k(\xi(t) - v(t)) dt + \tau dW_v^T(t) \quad (2.59)$$

con

$$\begin{aligned} v_f^2(t) & \succ v^2(t) + \sigma_D^2 B_D^2(t, T) + \sigma_F^2 B_F^2(t, T) + 2\rho_{X, r_D} v(t) \sigma_D B_D(t, T) \\ & - 2\rho_{X, r_F} v(t) \sigma_F B_F(t, T) - 2\rho_{r_D r_F} \sigma_D B_D(t, T) \sigma_F B_F(t, T) \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\xi(t) = \psi - \frac{\rho_{r_D v} \sigma_D \tau}{k} B_D(t, T) \quad (2.61)$$

Se debe tomar en cuenta que se ha reducido el sistema (2.51) de las variables  $X(t)$ ,  $r_D(t)$ ,  $r_F(t)$  y  $v(t)$ , bajo una medida neutral al riesgo doméstica, al sistema (2.58) de las variables  $y(t)$  y  $v(t)$  con una medida en el mercado interno. Lo que ahora queda es determinar la función característica de este nuevo sistema de ecuaciones reducido.

Posteriormente determinan la función característica del tipo de cambio futuro. Una vez más se aplica el teorema de Feynman-Kac. Para ello se toma en cuenta el término de covarianza

$$\begin{aligned} dy(t)dv(t) &= \left( v(t)dW_X^T(t) + \sigma_D B_D(t, T)dW_{r_D}^T(t) - \sigma_F B_F(t, T)dW_{r_F}^T(t) \right) \left( \tau dW_v^T(t) \right) \\ &= \left( \rho_{Xv} \tau v(t) + \rho_{r_D v} \tau \sigma_D B_D(t, T) - \rho_{r_F v} \sigma_F B_F(t, T) \right) dt \end{aligned} \quad (2.62)$$

La función característica doméstica del InFX-SZHW T-forward está dada por la siguiente solución de forma cerrada:

$$f(t, y, v) = \exp \left[ A(t) + B(t)y(t) + C(t)v(t) + \frac{1}{2}D(t)v^2(t) \right] \quad (2.63)$$

donde

$$\begin{aligned} A(u, t, T) &= \frac{1}{2} (B^2 + B) V_{FX}(t, T) + \\ &+ \int_t^T \left[ \left( k\psi + \rho_{r_D v} (iu - 1) \tau \sigma_1 B_1(s, T) \rho_{r_2} iu \tau \sigma_2 B_2(s, T) \right) C(s) + \frac{1}{2} \tau^2 (C^2(s) + D(s)) \right] ds \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$B = iu \quad (2.65)$$

Obteniendo finalmente el precio de una opción *Call* europea dado por:

$$C(u, t, T) = -u(i+u) \frac{\left( (y_3 - y_4 e^{-2y(T-t)}) - (y_5 e^{-a_1(T-t)} - y_6 e^{-(2y+a_1)(T-t)}) - y_7 e^{-y(T-t)} \right)}{y_1 + y_2 e^{-2y(T-t)}} +$$

$$+u(i+u) \frac{\left( (y_8 - y_9 e^{-2y(T-t)}) - (y_{10} e^{-a_2(T-t)} - y_{11} e^{-(2y+a_2)(T-t)}) - y_{12} e^{-y(T-t)} \right)}{y_1 + y_2 e^{-2y(T-t)}} \quad (2.66)$$

$$D(u, t, T) = -u(i+u) \frac{1 - e^{-2y(T-t)}}{y_1 + y_2 e^{-2y(T-t)}} \quad (2.67)$$

con

$$y = \sqrt{(k - \rho_{X_v} \tau B)^2 + \tau^2 (B^2 + B)} \quad (2.68)$$

$$y_1 = y + (k - \rho_{X_v} \tau B) \quad y_2 = y - (k - \rho_{X_v} \tau B)$$

$$y_3 = \frac{\rho_{X_{r1}} \sigma_1 y_1 + k a_1 \psi + \rho_{r1v} \sigma_1 \tau (iu - 1)}{a_1 y} \quad y_4 = \frac{\rho_{X_{r1}} \sigma_1 y_2 - k a_1 \psi - \rho_{r1v} \sigma_1 \tau (iu - 1)}{a_1 y}$$

$$y_5 = \frac{\rho_{X_{r1}} \sigma_1 y_1 + \rho_{r1v} \sigma_1 \tau (iu - 1)}{a_1 (y - a_1)} \quad y_6 = \frac{\rho_{X_{r1}} \sigma_1 y_2 + \rho_{r1v} \sigma_1 \tau (iu - 1)}{a_1 (y - a_1)}$$

$$y_8 = \frac{\rho_{X_{r2}} \sigma_2 y_1 + \rho_{r2v} \sigma_2 \tau B}{a_2 y} \quad y_9 = \frac{\rho_{X_{r2}} \sigma_2 y_1 + \rho_{r2v} \sigma_2 \tau B}{a_2 y}$$

$$y_{10} = \frac{\rho_{X_{r2}} \sigma_2 y_1 + \rho_{r2v} \sigma_2 \tau B}{a_2 (y - a_2)} \quad y_{11} = \frac{\rho_{X_{r2}} \sigma_2 y_1 + \rho_{r2v} \sigma_2 \tau B}{a_2 (y - a_2)}$$

$$y_7 = (y_3 - y_4) - (y_5 - y_6) \quad y_{12} = (y_8 - y_9) - (y_{10} - y_{11})$$

y

$$V_{FX}(t, T) = \frac{\sigma_1^2}{a_1^2} \left( (T-t) + \frac{2}{a_1} e^{-a_1(T-t)} - \frac{1}{2a_1} e^{-2a_1(T-t)} - \frac{3}{2a_1} \right) \\ + \frac{\sigma_2^2}{a_2^2} \left( (T-t) + \frac{2}{a_2} e^{-a_2(T-t)} - \frac{1}{2a_2} e^{-2a_2(T-t)} - \frac{3}{2a_2} \right)$$

$$-2\rho_{r_1 r_2} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{a_1 a_2} \left( (T-t) + \frac{e^{-a_1(T-t)} - 1}{a_1} + \frac{e^{-a_2(T-t)} - 1}{a_2} - \frac{e^{-(a_1+a_2)(T-t)} - 1}{a_1 + a_2} \right) \quad (2.69)$$

En cuanto a la relevancia práctica del modelo SZHW es limitada, ya que sólo hacen una aplicación numérica para examinar la eficiencia de la función característica, mostrando que las tasas de interés están correlacionadas con la volatilidad, por lo que estos efectos hacen más eficiente el modelo para vencimientos más largos, también revelan que la correlación entre el proceso de activo subyacente y la volatilidad incorporan un sesgo para opciones ATM para vencimientos cortos, tal como lo describe Heston (1993) y Schöbel y Zhu (1999). Es importante señalar que Grzelak et al. (2009) realiza una extensión del modelo de Schöbel y Zhu (1999) con Hull y White (1993), identificado como SZHW, el cual consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas con saltos, para la fijación de precios de opciones europeas sobre el índice CAC 40 de la Bolsa de París, considerando datos del día 17 de octubre de 2007 y, caplets y swaptions para las tasas de interés. Hacen una comparación del desempeño del modelo de Heston-Hull-White con el modelo clásico de Heston (1993). Los resultados comprueban que para vencimientos cortos SZHW supera el modelo de Heston, pero para vencimientos largos Heston se comporta mejor. HHW muestra resultados semejantes al modelo SZHW que, de manera general, los modelos de tres factores otorgan una mejor cobertura que con el modelo de Heston (1993).

Otra investigación teórica sobresaliente es la de Grzelak y Oosterlee (2010), también establecen un modelo relacionando la volatilidad estocástica (Heston, 1993) y la tasa de interés estocásticas (Hull y White, 1993). El modelo aumenta la precisión para opciones con vencimientos largos, describe una estructura de correlación diferente de cero entre todos los procesos subyacentes (Carr y Madan, 1999; Fang y Oosterlee, 2008), además de fácil calibración. Este modelo ofrece precios de opciones europeas más cercanos a los de mercado que el modelo de Heston (1993).

Por su parte, Haentjens y Hout (2012) estudian el modelo de tres factores compuesto por Heston (1993) junto con Hull y White (1990), cuyo objetivo principal era hallar un método de estimación eficiente de los parámetros que confirman los procesos de difusión y poder valorar las primas de las opciones sobre tipo de cambio con volatilidad y tasas de interés estocásticas con la mínima variación posible. También Haentjens (2012) analiza los precios teóricos de las

opciones *Call* europeas combinando el proceso de difusión de Heston (1993) y el modelo CIR, y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas para Heston-Cox-Ingersoll-Ross (HCIR), los resultados reflejaron mayor variación que con el modelo Heston-Hull-White. Más tarde, Anthonie et al. (2016) establecieron modelos híbridos, que consideran el modelo de Heston (1993) combinándolo con el modelo sobre tasas de interés establecido por Hull y White (1993). Este estudio también es teórico, y sobre todo estudian los métodos de estimación para mejorar la prima de la opción. Resultados semejantes fueron encontrados por Van der Stoep et al. (2014). Igualmente, Cozma y Reisinger (2016) estiman teóricamente los parámetros para Heston-CIR por medio de Montecarlo para opciones sobre tipo de cambio, con ello comprueban una vez más, que los modelos de tres factores reducen las variaciones de los precios teóricos con respecto a los del mercado.

Nuevamente el modelo Heston-Hull-White para la fijación del precio de la opción cuando la volatilidad y las tasas de interés libre de riesgo presentan un comportamiento estocástico, es estudiado por Hendricks et al. (2018) y Ullah (2019) ya que la evidencia teórica ha demostrado que al considerar estos procesos de difusión el precio de la opción es más justa, pero ahora la meta es hallar un método de estimación de los parámetros para que las primas teóricas sean consistentes. De igual manera Liang y Xu (2019) su estudio teórico tiene por objetivo estudiar métodos de estimación de los parámetros en un modelo de tres factores H-CIR, así como también su calibración.

Finalmente, usar este instrumento derivado denominado opciones sobre divisa, reduce el riesgo de mercado cambiario en tiempos de extrema volatilidad, los cuales son ocasionados por las fluctuaciones en las variables macroeconómicas. Pero, cabe resaltar que el uso inadecuado de dichos instrumentos es peligroso para todos los participantes en operaciones financieras. Por ejemplo, Comercial Mexicana utilizó instrumentos derivados en un mercado OTC con el fin de especular en el mercado cambiario, que representó un elevado riesgo macroeconómico. Asimismo, Grupo Mazeca contrató diversos instrumentos derivados de materia prima sujetos al tipo de cambio, similarmente Vitro a través de coberturas de gas natural, en la misma situación Cemex, Grupo Kuo, Herdez del Fuerte, Grupo Industrial Saltillo, de igual forma se encontraron algunos fondos de pensión y bancos comerciales que registraron grandes pérdidas (Ramírez et al., 2008). Desde el punto de vista macroeconómico, el uso del instrumento de opciones provoca

que los precios del tipo de cambio y tasas de interés estén controlados, mejora los niveles de liquidez en el mercado y permite coberturas de riesgo.

Es importante subrayar que México es uno de los países emergentes más globalizados, por su tamaño y participación de inversionistas extranjeros en su sistema financiero. Dadas las condiciones de globalización es necesario la búsqueda de estrategias y de instrumentos financieros para que haya una mayor canalización de flujos de capital. Por lo que es necesario incrementar las inversiones, ofrecer mayor rendimiento y reducir el riesgo por medio del instrumento de opciones sobre el tipo de cambio. Hoy en día los inversionistas institucionales andan en busca de inversiones dentro y fuera de sus límites geográficos de su mercado, canalizando sus recursos financieros hacia aquellos países con economías estables, que garanticen la transparencia de la información y de las operaciones. El tener un mercado de productos derivados eficiente permite a México convertirse en un país seguro para la inversión extranjera y reducir el riesgo ante fenómenos económicos (Fernández et al., 2003).

Por un lado, la evidencia empírica muestra que los modelos de opciones europeas sobre tipo de cambio se han aplicado a monedas duras, como: la libra esterlina, el marco alemán, el yen japonés y el franco suizo, que se negocian en la Bolsa de Valores de Filadelfia (PHLX) y otras bolsas internacionales (Chen y Gau, 2004; Hui et al., 2008), y por el otro, no existen estudios aplicados a monedas exóticas, tampoco un modelo que considere la volatilidad del tipo de cambio y la tasa de interés libre de riesgo, ambas estocásticas, para el mercado mexicano, y que ayuden a mitigar los riesgos externos que sufren los agentes financieros. Por tal motivo, en esta tesis su principal interés es reducir la brecha que existe en la literatura de estudios sobre el precio de opciones sobre divisas para economías emergentes.

### 3. Metodología: Modelo de tres factores para valorar opciones sobre tipo de cambio

#### Introducción

En la última década, los instrumentos financieros y en especial de opciones, han crecido de forma muy significativa constituyéndose un importante instrumento de cobertura para los inversionistas y las empresas, el cual contribuye a reducir el riesgo de mercado. Por ello en el presente capítulo se describe un modelo de tres factores para valorar el precio de la opción sobre tipo de cambio cuando la volatilidad del activo subyacente y las tasas de interés presentan un comportamiento estocástico. Asimismo, en esta sección se describe el algoritmo del método simplex de Nelder-Mead para estimar los parámetros de los modelos de Heston y Heston-Hull-White, los cuales son utilizados para calcular las primas de las opciones.

#### 3.1. Descripción del modelo

La evidencia empírica ha demostrado que los modelos de valuación de opciones requieren de un comportamiento estocástico para la volatilidad del activo subyacente y la tasa de interés. Por ello, se presenta un modelo que permite obtener el precio de la opción, por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\dv_t &= \kappa(\eta - v_t)dt + \lambda \sqrt{v_t} dW_t^2 \\dr_t &= a(\theta(t) - r_t)dt + \sigma dW_t^3\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $0 \leq t \leq T$  con  $T$  el vencimiento de la opción.  $S_t$ ,  $v_t$ ,  $r_t$  denotan variables aleatorias, que representan el precio del activo subyacente, la varianza de los rendimientos del activo subyacente y la tasa de interés libre de riesgo, respectivamente, para el tiempo  $t \geq 0$ . En este tenor, los parámetros  $\eta$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $\sigma$  y  $\rho_{S_t}$ , son estimados por el método de Nelder-Mead y el proceso de la volatilidad estocástica  $v_t$  converge a su media  $\eta$  a una velocidad  $\kappa$ , y  $\lambda$  es la volatilidad asociada a  $v_t$ , de manera semejante, el proceso de la tasa de interés libre de riesgo  $r_t$ , converge a su media  $\theta(t)$  con una velocidad  $a$  y,  $\sigma$  representa la volatilidad de la tasa de interés. Es importante señalar, que  $\theta(t)$  es una función continua, positiva y determinística, que puede ser seleccionada para que coincida con la estructura actual de la tasa de interés.



Finalmente,  $W_t^1$ ,  $W_t^2$  y  $W_t^3$  denotan movimientos Brownianos, asumiendo que el proceso  $W_t^3$  es independiente de  $W_t^1$  y  $W_t^2$ , pero estos dos últimos están correlacionados,  $\rho \in [-1, 1]$ .

De acuerdo con Bakshi et al. (1997), el modelo (3.1) constituye una extensión del modelo de Black-Scholes, donde la volatilidad y la tasa de interés tienen un comportamiento estocástico. Asimismo, para la varianza  $v_t$ , ha sido propuesto por Heston (1993) y para la tasa de interés por Hull y White (1990), que fue la forma de generalizar el modelo de Vasicek (1977). Es este contexto, sea  $C(S_t, v_t, r_t, t)$  el precio de la opción *Call* europea en tiempo  $t \in [0, T]$ , donde el precio del activo subyacente es  $S_t$ , su varianza  $v_t$  y la tasa de interés libre de riesgo  $r_t$ .

Con los argumentos de no arbitraje, el valor de la opción  $C(S_t, v_t, r_t, t)$  satisface la ecuación diferencial parcial parabólica (EDP)

$$0 = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} S_t^2 v_t \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 v_t \frac{\partial^2 C}{\partial v_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r_t^2} + \rho \lambda S_t v_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial v_t} + r_t S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \kappa(\eta - v) \frac{\partial C}{\partial v_t} + a(\theta(t) - r_t) \frac{\partial C}{\partial r_t} - r_t C \quad (3.2)$$

para  $0 \leq t \leq T$ ,  $S_t > 0$ ,  $v_t > 0$ ,  $-\infty < r_t < \infty$ .

La ecuación (3.2) puede ser vista como una función del tiempo de reacción-difusión-aversión<sup>23</sup>, además como una ecuación tridimensional con dominio espacial. La condición de la prima de la opción *Call* es:

$$C(S_t, v_t, r_t, T) = \max(0, S - K) \quad (3.3)$$

---

<sup>23</sup> Las ecuaciones de reacción-difusión surgen al modelar densidades de partículas (sustancias, organismos, precios) que se dispersan a través del espacio como resultado del movimiento irregular de cada una de éstas. Cuando este movimiento microscópico irregular resulta en un movimiento regular macroscópico, consideramos esto un proceso de difusión, y aversión al riesgo debido a la preferencia que tiene un inversionista a aceptar una oferta con cierto grado al riesgo antes que otra con algo más de riesgo, pero con mayor rendimiento (Smoller, 1983).

donde  $K > 0$ , representa el precio de la opción *Call*. Además, con una condición de frontera  $S_t = 0$  se mantiene:

$$C(0, v_t, r_t, t) = 0 \quad (0 \leq t < T) \quad (3.4)$$

En seguida, es necesario realizar cambios de variables, tal como se muestra a continuación:

$$\hat{C}(x, v_t, r_t, t) = C(e^x, v_t, r_t, t) \quad (3.5)$$

Entonces  $\hat{C}$  satisface la EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{C}}{\partial t} + \frac{1}{2} v_t \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 v_t \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial v_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial r_t^2} + \rho \lambda v_t \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial x \partial v_t} \\ + (r_t - \frac{1}{2} v_t) \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} + \kappa(\eta - v_t) \frac{\partial \hat{C}}{\partial v_t} + a(\theta(t) - r_t) \frac{\partial \hat{C}}{\partial r_t} - r_t \hat{C} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

para  $0 \leq t \leq T$  en el dominio espacial  $(x, v_t, r_t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}$  con la condición final de

$$\hat{C}(x, v_t, r_t, T) = \max(0, e^x - K) \quad (3.7)$$

al igual que en Heston (1993), se supone una solución de forma cerrada, también similar a la fórmula de BS

$$\hat{C}(x, v_t, r_t, t) = e^x P_1(x, v_t, r_t, t) - KB(t, T) P_2(x, v_t, r_t, t) \quad (3.8)$$

donde  $B(r, t)$  denota el precio de un bono cupón cero en el tiempo  $t$ , con pago de \$1 al vencimiento, y en el momento  $t$  se paga el valor de la tasa de interés  $r_t$ .

En la literatura, existen varios modelos de tasa de interés, sin embargo, en este estudio se considera el modelo de Hull y White (1990), en el cual extienden el estudio de Vasicek utilizando las ideas fundamentales del modelo de Ho y Lee (1986).

Este trabajo evalúa una estructura de plazos para una curva de bonos cupón cero, a través de observaciones del mercado por medio del cual se obtuvieron los precios de los bonos.

En el modelo de Vasicek, la dinámica de la tasa de interés es:

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.9)$$

donde  $a$ ,  $\theta$  y  $\sigma$  son parámetros y  $dW_t$  con  $t \geq 0$ , es un Movimiento Browniano Estándar definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ .

Al introducir un parámetro dependiente del tiempo  $\theta(t)$ , Hull y White (1990) hacen una extensión al modelo de Vasicek de la siguiente manera:

$$dr_t = a(\theta(t) - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.10)$$

donde  $\theta(t)$  es una función del tiempo, con  $t = 0$ , de tal manera que los precios del mercado y los teóricos coincidan.

En consecuencia, el precio del bono  $B(t, T)$  es determinado por la siguiente ecuación diferencial parcial parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(\theta(t) - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0 \quad (3.11)$$

donde la condición  $B(T, T) = 1$  y  $B(t, T)$  está definido por

$$B(t, T) = e^{b(r, t)} \quad (3.12)$$

El término  $b(r, t) = A(t, T) - r_t D(t, T)$ , además se cumple que  $A(T, T) = 0$  y  $D(T, T) = 0$ , ya que el valor nominal del bono en el tiempo  $T$  está dado por  $B(T, T) = 1$ .

Por lo que al tomar las derivadas parciales de  $B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}$  con respecto a  $t$  y  $r_t$ , se tiene que:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = -D B$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = D^2 B$$

como  $B(T, T) = 1$  y al sustituir las derivadas parciales anteriores en (3.11), da como resultado

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) (1) + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 (1) - a(\theta(t) - r_t) D(1) - r_t (1) = 0$$

Ahora bien, si se simplifica la ecuación anterior obtenemos que

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 - a(\theta(t) - r_t) D - r_t = 0 \quad (3.13)$$

Dado que  $A$  y  $D$  son funciones del tiempo, y derivando  $b(r, t)$  con respecto a  $r_t$  se tiene que

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0$$

Equivalente a

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1 \quad (3.14)$$

La ecuación diferencial parcial (3.14) tiene solución cuando la condición final  $D(T, T) = 0$ , es decir,

$$D(t, T) = D(T, T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{a(T-s)} ds$$

$$D(t, T) = (0)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{a(T-s)} ds$$

$$D(t, T) = -e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{a(T-s)} ds$$

Al realizar la integral da como resultado

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (3.15)$$

Después de sustituir la ecuación (3.14) en la (3.13) se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t(aD - 1) + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 - a(\theta(t) - r_t) D - r_t = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t aD + r_t + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 - a\theta(t)D + ar_t D - r_t = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - a\theta(t)D = 0$$

La derivada parcial de  $A$  con respecto a  $t$  puede ser expresada por

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a\theta(t)D - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 \quad (3.16)$$

si la ecuación (3.15) se sustituye en (3.16) se obtiene que

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a\theta(t) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2$$

De la misma manera, si simplificamos el resultado resulta

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \theta(t) \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 \quad (3.17)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial parcial (3.17) es

$$A(t, T) = \int_t^T \theta(s) \left( 1 - e^{-a(T-s)} \right) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) + \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T e^{-2a(T-s)} ds$$

$$A(t, T) = \int_t^T \theta(s) \left( 1 - e^{-a(T-s)} \right) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) + \frac{\sigma^2}{a^3} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( e^{-2a(T-t)} - 1 \right)$$

Al factorizar la expresión anterior se logra lo siguiente

$$A(t, T) = \int_t^T \theta(s) \left( 1 - e^{-a(T-s)} \right) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \quad (3.18)$$

Para resolver la integral del primer término de  $A(t, T)$  se procede de la siguiente manera:

Ya que se desea conocer  $A(t, T)$  con la curva del bono cupón cero  $B(t, T) = e^{b(r, T)}$  para  $t \in [0, T]$ , es decir, se quiere encontrar el valor de  $\theta(s)$ , tal que:

$$A(t, T) = \int_0^T \theta(s) \left( 1 - e^{-a(T-s)} \right) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T + \frac{2}{a} e^{-aT} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} - \frac{3}{2a} \right)$$

equivalentemente, se desea encontrar  $\theta(s)$ , se tiene:

$$-\int_0^T \theta(s)(1-e^{-a(T-s)})ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T + \frac{2}{a} e^{-aT} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} - \frac{3}{2a} \right) = \ln B(0,T) + r_0 D(0,T) \quad (3.19)$$

si se sustituye (3.15) con  $D(0,T)$ , da como resultado:

$$-\int_0^T \theta(s)(1-e^{-a(T-s)})ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T + \frac{2}{a} e^{-aT} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} - \frac{3}{2a} \right) = \ln B(0,T) + r_0 \left( \frac{1-e^{-aT}}{a} \right) \quad (3.20)$$

Cabe señalar que la ecuación anterior es integrable en  $\theta(s)$ , cuya solución se realiza calculando las dos primeras derivadas con respecto a  $T$ , para ello, se denota el integrando de (3.20) por un momento como  $g(T,s) = \theta(s)(1-e^{-a(T-s)})$ .

En este caso la integral de Leibnitz conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T g(T,s)ds &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} g(T,s)ds \\ \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} g(T,s)ds &= a \int_0^T \theta(s) e^{-a(T-s)} ds \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada parcial de (3.20) con respecto a  $T$  está definida por

$$-a \int_0^T \theta(s) e^{-a(T-s)} ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - 2e^{-aT} + e^{-2aT}) = \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0,T) + r_0 e^{-aT} \quad (3.21)$$

Al despejar la integral y simplificar, se obtiene

$$\int_0^T \theta(s) e^{-a(T-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-aT})^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0,T) - \frac{r_0}{a} e^{-aT} \quad (3.22)$$

Con el propósito de derivar nuevamente (3.21) con respecto a  $T$ , se define ahora  $g(T,s) = \theta(s)(1-e^{-a(T-s)})$ , y en este caso la regla de Leibnitz conduce a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T g(T,s)ds &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} g(T,s)ds + g(T,T) \frac{\partial T}{\partial T} - G(T,0) \frac{\partial 0}{\partial T} \\ \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T g(T,s)ds &= -a \int_0^T \theta(s) e^{-a(T-s)} ds + \theta(T) \end{aligned}$$

De esta manera al derivar (3.21), se tiene:

$$a^2 \int_0^T \theta(s) e^{-a(T-s)} ds - a\theta(T) + \frac{\sigma^2}{a} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) + r_0 a e^{-aT}$$

equivalente a

$$\int_0^T \theta(s) e^{-a(T-s)} ds = \frac{1}{a} \theta(T) - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - \frac{r_0}{a} e^{-aT} \quad (3.23)$$

Al igualar (3.23) con (3.22), se tiene:

$$\theta(T) - \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T)$$

Lo cual implica que:

$$\theta(T) = \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T)$$

Si se simplifica y se ordenan los términos semejantes, se tiene

$$\theta(T) = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT}) \quad (3.24)$$

$$\theta(T) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) + f(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT})$$

Para hallar  $A(t, T)$  a partir de (3.18), se escribe (3.24) al sustituir  $t$  en lugar de  $T$ , es decir:

$$\theta(t) = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln B(0, T) - \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at})$$

El término de la integral en la igualdad (3.18) satisface:

$$\int_t^T \theta(s) (1 - e^{-a(T-s)}) ds = \int_t^T \left( \left( -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) \right) - \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2as}) \right) (1 - e^{-a(T-s)}) ds$$

Al integrar la función anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_t^T \theta(s) (1 - e^{-a(T-s)}) ds &= -\frac{1}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds \\
&\quad - \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (1 - e^{-2as}) (1 - e^{-a(T-s)}) ds
\end{aligned} \tag{3.25}$$

El primer término de la expresión (3.25) se integra por partes y da como resultado lo siguiente

$$\int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds = -(1 - e^{-a(T-t)}) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) + a \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \tag{3.26}$$

De esta manera la segunda integral de la ecuación (3.25) satisface

$$\int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds = \int_t^T \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds$$

En consecuencia,

$$\int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds = \ln B(0, T) - \ln B(0, t) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds$$

Si se aplican las leyes de logaritmos, se tiene que

$$\int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds = \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \tag{3.27}$$

La tercera integral de la ecuación (3.25) está dada por

$$\begin{aligned}
\int_t^T (1 - e^{-2as}) (1 - e^{-a(T-s)}) ds &= \int_t^T (1 - e^{-2as} - e^{-a(T-s)} + e^{-a(T+s)}) ds \\
\int_t^T (1 - e^{-2as}) (1 - e^{-a(T-s)}) ds &= T - t - \frac{1}{2a} (e^{-2at} - e^{-2aT}) - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{1}{a} (e^{-a(T+t)} - e^{-2aT}) \\
\int_t^T (1 - e^{-2as}) (1 - e^{-a(T-s)}) ds &= T - t + \left( -\frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} - e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Después de sustituir las ecuaciones (3.26), (3.27) y (3.28) en (3.25), y simplificar se obtiene



$$\begin{aligned}
\int_t^T \theta(s)(1-e^{-a(T-s)})ds &= \left( \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0,t) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0,s) ds \\
&\quad - \ln \left( \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \right) + \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0,s) ds \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T-t - \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= -\int_t^T \theta(s)(1-e^{-a(T-s)})ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T-t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\
A(t,T) &= - \left( \begin{aligned} &\left( \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0,t) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0,s) ds \\ &- \ln \left( \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \right) + \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0,s) ds \end{aligned} \right) + \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T-t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right)
\end{aligned}$$

Una vez resuelta la integral anterior se tiene

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= - \left( \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0,t) + \ln \left( \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \right) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T-t - \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T-t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right)
\end{aligned}$$

Al factorizar la expresión anterior, resulta que

$$\begin{aligned}
A(t, T) = & \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\
& - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T - t - \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right) \\
& + \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( e^{-2aT} - e^{-2at} + 1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} + 2e^{-a(T+t)} \right)
\end{aligned}$$

finalmente

$$A(t, T) = \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - D(t, T) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) (1 - e^{-2at}) \quad (3.30)$$

Después de sustituir la ecuación (3.15) en (3.30), se tiene

$$A(t, T) = \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 (1 - e^{-2at}) \quad (3.31)$$

para valores infinitesimales  $\frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t)$  tiende a 0, por lo que

$$A(t, T) = \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{\sigma^2}{4a} \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 (1 - e^{-2at}) \quad (3.32)$$

La solución de forma semi-cerrada está dada por

$$B(t, T) = e^{b(r, t)} \quad (3.33)$$

Con  $b(r, t) = A(t, T) - r_t D(t, T)$  que es igual a

$$b(r, t) = \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{\sigma^2}{4a} \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 (1 - e^{-2at}) - r_t \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \quad (3.33)$$

donde el precio de un bono cupón cero que se coloca en un tiempo  $t$  y que al vencimiento  $T$  paga una unidad monetaria, se denota por  $B(t, T)$  y que obedece a la siguiente ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(\theta(t) - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0 \quad (3.34)$$

Retomando la ecuación (3.8), por linealidad, satisface la ecuación diferencial parcial (3.6), como tal y  $P_1$  con la ecuación que a continuación se muestra

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \rho \lambda v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \\ & + (r + \frac{1}{2} v) \frac{\partial P_1}{\partial x} + [\kappa(\eta - v) + \rho \lambda v] \frac{\partial P_1}{\partial v} + (\theta(t) - ar) \frac{\partial P_1}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.35)$$

y mediante la ecuación (3.9),  $P_2$  cumple con la EDP siguiente

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \rho \lambda v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} \\ & + (r - \frac{1}{2} v) \frac{\partial P_2}{\partial x} + \kappa(\eta - v) \frac{\partial P_2}{\partial v} + \left[ \theta(t) - ar + \sigma^2 \frac{\partial b}{\partial r} \right] \frac{\partial P_2}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Además de (3.7) las condiciones finales para las EDP (3.34) y (3.35) son

$$P_j(x, v, r, T) = 1 \quad \text{para } x > \ln K \quad \text{y} \quad P_j(x, v, r, T) = 0 \quad \text{para } x < \ln K \quad (3.37)$$

para  $j = 1, 2$ , respectivamente.

A partir del teorema multidimensional de Feynman-Kac (Shreve, 2004), se deduce que la solución para probabilidades  $P_1$  y  $P_2$  de las ecuaciones (3.35) y (3.36), se tiene la función característica del indicador correspondiente a (3.37). En seguida se obtiene la forma semi-cerrada para  $P_1$  y  $P_2$  para resolver sus funciones características y considerando el teorema de inversión de acuerdo con Heston (1993) se tiene

$$P_j(x, v, r, T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iu \ln K} f_j(x, v, r, t; u)}{iu} \right] du \quad (3.38)$$

donde  $i^2 = -1$

De acuerdo con el teorema de Feynman-Kac, las funciones  $f_1$  y  $f_2$  deben satisfacer las ecuaciones (3.35) y (3.36), bajo la siguiente condición:

$$f_j(x, v, r, T; u) = e^{iux} \quad (3.39)$$

donde  $f_1$  es una solución del tipo de Heston (1993), pero asumiendo que la tasa de interés tiene un comportamiento estocástico.

De esta manera, la función

$$f_1(x, v, r, t; u) = \exp\left[F_1(u, t) + G_1(u, t)v + H_1(u, t)r + iur\right] \quad (3.40)$$

De esta manera la expresión (3.40) puede ser una solución si las funciones  $F_1$ ,  $G_1$  y  $H_1$  satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$F_1'(t) + \kappa\eta G_1(t) + \theta(t)H_1(t)^2 = 0 \quad (3.41a)$$

$$G_1'(t) + \frac{1}{2}ui - \frac{1}{2}u^2 + (\rho\lambda ui + \rho\lambda - \kappa)G_1(t) + \frac{1}{2}\lambda^2 G_1(t)^2 = 0 \quad (3.41b)$$

$$H_1'(t) + ui - aH_1(t) = 0 \quad (3.41c)$$

con la condición terminal  $F_1(t) = G_1(t) = H_1(t) = 0$ .

De acuerdo con Bakshi y Chen (1997) y Heston (1993), una solución puede ser propuesta para  $f_2$  de la siguiente forma:

$$f_2(x, v, r, t; u) = \exp\left[F_2(u, t) + G_2(u, t)v + H_2(u, t)r + iur - b(r, t)\right] \quad (3.42)$$

De manera similar a  $f_1$ , la expresión (3.42) es una solución si las funciones  $F_2$ ,  $G_2$  y  $H_2$  satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F_2'(t) + \kappa\eta G_2(t) + \theta(t)H_2(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 H_2(t)^2 = 0 \quad (3.43a)$$

$$G_2'(t) - \frac{1}{2}ui - \frac{1}{2}u^2 + (\rho\lambda ui - \kappa)G_2(t) + \frac{1}{2}\lambda^2 G_2(t)^2 = 0 \quad (3.43b)$$

$$H_2'(t) + ui - aH_2(t) - 1 = 0 \quad (3.43c)$$

con la condición de frontera  $F_2(t) = G_2(t) = H_2(t) = 0$ .

Además, si se considera que

$$H_j(t;u) = \frac{ui - \delta_j}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad \text{para } j=1, 2 \quad (3.44)$$

las ecuaciones (3.41a) a (3.43c) son fáciles de resolver. Permitiendo que  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 1$ , entonces:

$$\alpha = k\eta, \quad \beta_1 = k - \rho\lambda, \quad \beta_2 = k, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2}$$

$$d_j = \sqrt{(\beta_j - \rho\lambda ui)^2 - \lambda^2(2\gamma_j ui - u^2)}, \quad \text{para } j=1, 2$$

$$g_j = \frac{\beta_j - \rho\lambda ui + d_j}{\beta_j - \rho\lambda ui - d_j} \quad \text{para } j=1, 2$$

De esta manera, las soluciones a las ecuaciones (3.17b) y (3.19b) están dadas por

$$G_j(t;u) = \frac{\beta_j - \rho\lambda ui + d_j}{\lambda^2} \left[ \frac{1 - e^{d_j(T-t)}}{1 - g_j e^{d_j(T-t)}} \right] \quad \text{para } j=1, 2 \quad (3.45)$$

Por su parte, las ecuaciones (3.41a) y (3.43a) pueden ser resueltas por integración y con ayuda del resultado de Heston (1993) para la integral de  $F_j$ , se tiene que

$$F_j(t;u) = \frac{\alpha}{\lambda^2} \left\{ (\beta_j - \rho\lambda ui + d_j)(T-t) - 2 \ln \left[ \frac{1 - g_j e^{d_j(T-t)}}{1 - g_j} \right] \right\}$$

$$+ \frac{ui - \delta_j}{a} \int_t^T \theta(s) (1 - e^{-a(T-s)}) ds \quad \text{para } j=1, 2 \quad (3.46)$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{ui - \delta_j}{a} \right)^2 \left( T-t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right)$$

Si suponemos que la integral del segundo término es definida por la expresión (3.29).

Por lo tanto, las ecuaciones (3.5), (3.8), (3.33), (3.38), (3.40), (3.42), (3.44), (3.45) y (3.46) constituyen la fórmula semi-cerrada de precios para opciones *Call* europeas, bajo la estructura (3.1). Esta fórmula de fijación de precios, como se puede observar es una extensión del modelo de Heston (1993).

Para el caso de la opción *Put*, el procedimiento es similar, pero con la siguiente condición  $\hat{P}(x, v, r_t, T) = \max(0, K - e^x)$ . En consecuencia, el precio de la opción *Put* para el tipo de cambio es definido de la siguiente manera:

$$\hat{P}(x, v_t, r_t, t) = KB(t, T)P_2(x, v_t, r_t, t) - e^x P_1(x, v_t, r_t, t) \quad (3.47)$$

## 3.2. Estimación de los parámetros

### 3.2.1. Antecedentes

Para implementar la fórmula de fijación de precios de opciones del modelo de Heston y Heston-Hull y White sobre tipo de cambio, se deben estimar los parámetros bajo la medida neutral al riesgo. En la literatura sobre la estimación de los parámetros del modelo de Heston se han aplicado diferentes técnicas entre los que se incluyen: los métodos de momentos generalizados (MMG), eficientes y simulados; el método de máxima verosimilitud, los métodos bayesianos como el de Cadena de Markov Monte Carlo (MCMC), así como los algoritmos numéricos entre ellos los de optimización no lineal, tal como el de Nelder-Mead, Diferencias finitas, etc.

En el ámbito de los modelos de difusión, Hansen (1982) es el pionero en la implementación de los modelos MMG para múltiples activos financieros. Para la valuación del precio de las opciones sobre divisas, Scott (1987), Chesney y Scott (1989) encontraron que el MMG revela estimaciones sesgadas en los parámetros, lo que conlleva a una divergencia entre las primas teóricas y de mercado. De igual manera, Liu (1998) estima los parámetros del modelo de Heston para tasas de interés mensuales, asumiendo un valor inicial constante. Este supuesto incorrecto proporcionó estimaciones inconsistentes en los parámetros debido a la presencia de no estacionariedad en los precios de las acciones. Por su parte, Pan (1998) también modifica el MMG para incluir la volatilidad estocástica en la valuación de los precios de las opciones sobre divisas. Sin embargo, los hallazgos confirman precios teóricos sesgados debido a la inconsistencia de los parámetros estimados.

Para relajar las debilidades del MMG, Bakshi et al. (1997) proponen una extensión al método incorporando dos procesos markovianos estacionarios, para la estimación de los modelos de Heston y Scott. Estos resultados revelan que el método de momentos simulados<sup>24</sup> proporciona

---

<sup>24</sup> Para explicación más detallada del método de momentos simulados consulte a Duffie y Singleton (1993).

estimadores más eficientes, puesto que las primas presentan menor discrepancia con respecto a las del mercado cuando el número de réplicas es suficiente grande. De igual forma los resultados Chernov y Ghysels (1998) reflejan el idéntico problema al usar la misma metodología. En cuanto al método de momentos eficientes, Chernov y Ghysels (1998) estiman el modelo de Heston (1993), utilizan un conjunto de datos formado por precios de ejercicio y diferentes vencimientos, pero el inconveniente a este método es el trabajo computacional que implica, también hallaron que no es factible para un conjunto de datos de panel para más de cuatro series. El principal atractivo de estos estimadores es que su implementación empírica es más sencilla, pero no son tan eficientes en los modelos de volatilidad estocástica, tal como lo muestra Jacquier et al. (2004) en su estudio, en el cual encuentra sesgo sustancial y los rendimientos empeoran cuando el coeficiente de variación es pequeño.

Existen métodos bayesianos basados en el procedimiento de Cadena de Markov Monte Carlo (MCMC). Este método es más simple computacionalmente y evita problemas de convergencia, además la precisión de los estimadores se puede incrementar aumentando el tamaño de la muestra y cuando éstas son de grandes dimensiones se dividen en submuestras para hacer más flexible el algoritmo. El primer algoritmo aplicado a modelos de volatilidad estocástica fue expuesto por Geweke (1994), comprobando la argumentación anterior; en este contexto, también existen los estudios de So et al. (2002) y Yu et al. (2002), por mencionar algunos. Por su parte, Andersen y Sørensen (2012) estiman de forma no paramétrica, en donde evalúa de forma conjunta los procesos de difusión contenidos en el modelo de Heston, fundamentando el efecto de apalancamiento y considerando la volatilidad con cambios bruscos (Mykland y Zhang, 2009).

Debido a que el método Máxima Verosimilitud (MV) presenta varios inconvenientes, y uno de ellos es la forma en que se evalúa la integral, ya que es difícil medir la precisión que otorga determinado método numérico. Para atender este problema Jacquier et al. (1994) propone realizar el procedimiento de MV en un marco bayesiano más amplio, utilizando métodos de integración numérica de Monte Carlo, pero solo queda en teoría. Posteriormente Fridman y Harris (1998) proponen la estimación directa de MV, a través de un filtro no gaussiano, el cual se considera como el método del filtro de Kalman. Este método no es fácil de extender a modelos con volatilidad estocástica, ya que estudios como el de Medina y Rodríguez (2010) utilizan

dicho filtro para estimar los parámetros de Heston para el índice de acciones que cotiza en la bolsa de Colombia de 2001 a 2005 y la experiencia muestra que dicho método implicó mayor costo computacional y los resultados presentaron sesgos por la volatilidad esperada sobre el resto del tiempo de vencimiento de la opción. Una desventaja de este método de estimación es que presenta inconsistencia para muestras pequeñas, además de que su convergencia computacional es lenta. Asimismo, Azencontt y Gadhyan (2014) y Azencott et al. (2015) aplican MV con ciertas modificaciones en la discretización para realizar la integral, estableciendo un estimador para reducir los errores estimados, para el índice S&P500 y para acciones Credit Agricole con datos minuto a minuto intradía, reflejando resultados consistentes, pero inconveniente que encontraron fue su implementación computacional muy grande.

La simulación Monte Carlo es una técnica versátil, es un método para estimar el valor de la esperanza de una variable aleatoria. Entre estos estudios teóricos se destaca el de Anthonie et al. (2016) para modelos híbridos, en este caso se analizó la combinación de volatilidad y tasas de interés estocásticas para hallar el precio de la opción (Heston-Hull-White), en el cual encontraron resultados consistentes, pero el método demostró mucho trabajo de cómputo. También Cozma y Reisinger (2016) estiman teóricamente los parámetros para Heston-CIR por este método de simulación, con el cual logra una reducción de la dimensión del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas y la solución es más fácil de obtener. Más tarde, Liang y Xu (2019) utiliza el método de estimación de Monte Carlo y el método ajustado denominado Monte Carlo Condicional, para el problema de fijación de precios de opciones europeas cuando se supone que el activo subyacente sigue un modelo que contempla volatilidad y las tasas de interés estocásticas. También comparan los resultados con el método de la transformada de Fourier y expresaron que este último no aplica a modelos de más de dos factores, debido a que no está definida la función característica y por lo tanto, requiere de mucho trabajo matemático, finalmente, el método Monte Carlo Condicionado fue el que arrojó estimadores más robustos.

Entre los métodos numéricos se tiene el método de diferencias finitas, que consiste en aproximar la solución de las derivadas parciales con el propósito de reemplazarlas en diferencias, lo que genera un conjunto de ecuaciones algebraicas. Haentjens y Hout (2012), y Hendricks et al. (2018) estudian de manera teórica la efectividad de dicho método para la solución del modelo de tres factores denominado Heston-Hull-White con correlación arbitraria, además con niveles



de reversión a la media en función del tiempo, para opciones *Call* europeas con vencimientos cortos y largos. A través de pruebas exhaustivas, muestran que el modelo que considera la volatilidad y las tasas de interés estocásticas en la valuación de los precios de las opciones, reflejan resultados estables y eficientes. También Haentjens (2012) en otro estudio teórico de tres factores Heston-Cox-Ingersoll-Ross (HCIR), resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas por medio de discretización de diferencias finitas en cuadrículas espaciales no uniformes. Los resultados muestran que dicho modelo otorga primas justas, pero su trabajo computacional sigue siendo muy grande.

En el estudio de Singh y Dixit (2016) se comparan 6 métodos numéricos de estimación de los parámetros de Heston aplicado al índice CNX Nifty en el mercado de la India. Entre los cuales se tienen: optimización heurística con dos variables de evolución diferencial, el algoritmo de Nelder-Mead (1965) que no requiere derivar la función objetivo, también por medio de un algoritmo métrico variable. De igual manera utilizan el método Cuasi-Newton que realiza una aproximación del hessiano, el método del gradiente conjugado no lineal que se usa para encontrar el mínimo local de una función no lineal basándose sólo en su gradiente; otro método que encuentra el mínimo local de una función no lineal, discontinua y estocástica y que trabaja sin restricciones y el método Cuasi-Newton de comunicación inversa, que utiliza el enfoque de la región de confianza. Los resultados mostraron que el método de Nelder-Mead y el de Newton son estables y eficientes, otorgando más precisión en los precios de las opciones, además el de Nelder-Mead (1965) requiere menos carga computacional; resultados semejantes argumentó Himmelblau (1992), al obtener mejores óptimos globales para funciones no lineales.

Por su parte, Ullah (2019) a través de un modelo de tres factores Heston-Hull-White estudia la fijación del precio de la opción cuando la volatilidad y las tasas de interés libre de riesgo presentan un comportamiento estocástico. Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, aplicó el método de diferencias finitas adaptativa en cuadrículas no uniformes y el método de Runge-Kutta explícito de sexto orden. El estudio es un experimento con datos de mercado no especificado, en donde utiliza precios de opciones *Call* para un año de vencimiento y un precio de ejercicio de 100 USD. Los resultados confirman que los parámetros estimados son estables y demostró ser eficiente al valuar los precios de las opciones, pero la carga computacional sigue siendo el problema.

Por todo lo anterior, en este trabajo se estiman los parámetros de los modelos Heston y HHW por el método numérico de Nelder-Mead, debido a que ha dado buenos resultados para obtener óptimos globales, además de que la elaboración del algoritmo no requiere tanta carga computacional y se puede implementar en Matlab, ya que este software cuenta con funciones auxiliares para el cálculo de mínimos globales en funciones no lineales.

### 3.2.2. Algoritmo general

Es este apartado se diseña el algoritmo del método de Nelder-Mead para estimar los parámetros de los modelos de Heston (1993) y Heston-Hull-White. Por medio de dicho algoritmo, se simulan las trayectorias de los rendimientos, al buscar su distribución de probabilidad de ajuste a la distribución de probabilidad de los rendimientos del activo subyacente. A través de éste, se captura la volatilidad estocástica y las causas de interdependencia de los procesos de difusión, que permiten obtener una imagen aproximada de la realidad. Si el sistema que considera el proceso estocástico se altera por uno o varios componentes, entonces se hacen experimentos bajo nuevas condiciones de simulación (Anu, 1997; Carson, 2004). Esto permite probar el funcionamiento del sistema bajo diferentes escenarios posibles. Un esquema aproximado del algoritmo se presenta en la figura (3.1).

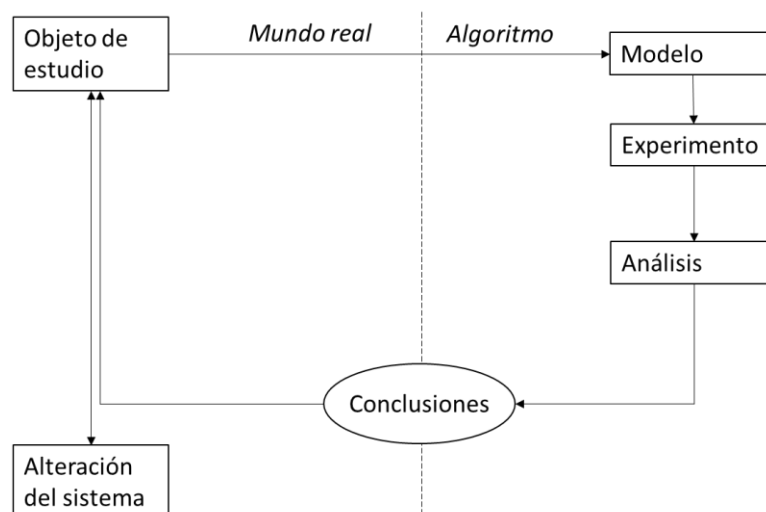


Figura 3.1. Proceso del algoritmo general.  
Fuente. Elaboración propia

### 3.3. Metodología de aproximación al modelo Heston-Hull-White

#### 3.3.1. Función objetivo

En la sección 3.1 se muestran los procesos de difusión que conforman el modelo de tres factores, y en la cual se expusieron aspectos básicos del precio del activo subyacente  $S_t$  con varianza  $v_t$  y tasas de interés libre de riesgo  $r_t$ , tales ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{aligned}dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\dv_t &= \kappa(\eta - v_t)dt + \lambda\sqrt{v_t} dW_t^2 \\dr_t &= a(\theta(t) - r_t)dt + \sigma dW_t^3\end{aligned}\tag{3.47}$$

Donde  $k, \eta, \lambda, a, \theta_t, \sigma, \rho_{S_v}$  son parámetros y el proceso de la volatilidad estocástica  $v_t$  converge a su media  $\eta$  a una velocidad  $\kappa$ , y siendo  $\lambda$  la volatilidad asociada a  $v_t$ ; de manera semejante, el proceso de la tasa de interés libre de riesgo  $r_t$ , converge a su media  $\theta(t)$  con una velocidad  $a$  y,  $\sigma$  representa la volatilidad de la tasa de interés. Además,  $\theta(t)$  es una función continua en el tiempo que permite ajustar al modelo a cierta estructura a plazos de tasas de interés. Finalmente  $W_t^1, W_t^2$  y  $W_t^3$  denotan Movimientos Brownianos, asumiendo que el proceso  $W_t^3$  es independiente de  $W_t^1$  y  $W_t^2$ , pero estos dos últimos sí están correlacionados, denotando dicha correlación con  $\rho \in [-1, 1]$ .

Ahora, siendo  $x = (k, \eta, \lambda, a, \theta_t, \sigma, \rho_{S_v}) \in \mathbb{R}^7$  el vector de parámetros del modelo de Heston-Hull-White, y  $\Psi(x)$  la función objetivo que incorpora la *serie de rendimientos de precios de cierre* del tipo de cambio. Dicha función objetivo se puede construir de la siguiente manera:

#### 1) Construcción de una función

$$\Gamma: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}_{m \times n} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}_{m \times n}\tag{3.48}$$

donde  $\mathbb{R}^5$  y  $\mathbb{R}^7$  son vectores para Heston (1993) y Heston-Hull-White, respectivamente; y  $\mathbb{R}_{m \times n}$  es el espacio vectorial de las matrices reales de orden  $m \times n$  y  $\Gamma(x)$  forma la matriz con  $m$  trayectorias  $r_i, 1 \leq i \leq n$ , para  $n$  días consecutivos. La matriz  $m \times n$  se expresa con las  $m$  trayectorias a través de la ecuación (3.49), y usando sus  $n$  entradas.

De acuerdo con el sistema de ecuaciones diferenciales (3.47) es necesario realizar una aproximación en tiempo discreto para obtener los precios, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
S_{t_i} &= S_{t_{i-1}} + r_{t_{i-1}} S_{t_{i-1}} \Delta t + \sqrt{v_{t_{i-1}}} S_{t_{i-1}} \Delta W_{t_i}^1 \\
v_{t_i} &= v_{t_{i-1}} + \kappa(\eta - v_{t_{i-1}}) \Delta t + \lambda \sqrt{v_{t_{i-1}}} [\rho \Delta W_{t_i}^1 - \sqrt{1 - \rho^2} \Delta Z_{t_i}] \\
r_{t_i} &= a(\theta(t) - r_{t_{i-1}}) \Delta t + \sigma \Delta W_{t_i}^3
\end{aligned} \tag{3.49}$$

siendo los rendimientos:  $rend_{t_i} = \ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)$  y con  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\Delta W_{t_j}^1 = (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1) \sim N(0, \sqrt{\Delta t}) \text{ y } \Delta Z_{t_j} = (Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}}) \sim N(0, \sqrt{\Delta t});$$

donde  $S_{t_0}$ ,  $v_{t_0}$  y  $r_{t_0}$  son valores iniciales.

## 2) Se establece una función

$$\Lambda : \mathbb{R}_{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}_m \tag{3.50}$$

Es este apartado se utiliza la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS) para dos muestras, para validar cada ingreso de  $h_i$  al vector  $h = \Lambda(Y)$ ; donde la primera muestra corresponde a la serie de rendimientos reales y segunda a los simulados de cada una de las  $m$  trayectorias, que conforman la matriz  $Y$ .

En la prueba no paramétrica KS para dos muestras, la hipótesis nula  $H_0$  establece que las dos muestras provienen de una misma distribución de probabilidad, mientras que la hipótesis alternativa  $H_1$  dice que las dos muestras no provienen de la misma distribución, dicha prueba a un nivel de significancia de 0.05. Además, la prueba KS usa como estadístico la máxima diferencia entre las funciones de distribución de probabilidad, por lo que, si  $F_1(\phi)$  es la distribución de probabilidad de los rendimientos reales  $\phi(t)$  y la distribución  $F_{2,i}(Y|x)$  de la  $i$  –ésima serie de los rendimientos simulados que conforma la matriz  $Y$  con un intervalo igual a  $1 \leq i \leq m$ , cuyo el estadístico de prueba KS es:

$$si = \max \left\{ \left| F_1(\phi(t_j)) - F_{2,i}(Y_{ij}|x) \right|, \quad j = 1, \dots, n \right\} \tag{3.51}$$

La prueba KS para dos muestras genera el *valor-p* a partir de la función  $\Lambda(Y)$ , y si  $p_i \geq 0.05$  se acepta  $H_0$  y  $h_i = 0$ , para el caso contrario,  $p_i \leq 0.05$  se rechaza  $H_0$  y  $h_i = 1$ .

### 3) Indica una función

$$\Xi : \mathbb{R}_m \rightarrow [0, 1]$$

Este intervalo se valida siempre y cuando la función  $\Xi(h)$  de la ec. 3.52 tome la probabilidad de rechazo de  $H_0$  de acuerdo con:

$$\Xi(h) = \frac{\sum_{i=1}^m h_i}{m} \quad (3.52)$$

Es indiscutible que la función  $\Xi(h)$  tome como valor máximo a 1 debido a que  $m$  es el número de rechazos de  $H_0$  y como mínimo valor 0.

Por medio de un algoritmo en Matlab se construye la función  $\Psi(x)$  expresada en la ec. 3.35, que considera las funciones  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  y  $\Xi$  (ecuaciones 3.48, 3.50 y 3.52, respectivamente) para validar la probabilidad de aceptación o de rechazo de  $H_0$ . Y si  $x = (k, \eta, \lambda, a, \theta_t, \sigma, \rho_{Sv}) \in \mathbb{R}^7$  es un vector de parámetros del modelo de Heston-Hull-White, la función objetivo  $\Psi(x)$  tiene la forma:

$$\Psi(x) = (\Xi \circ \Lambda \circ \Gamma)(x) = \frac{\sum_{i=1}^m h_i}{m} \quad (3.53)$$

### 3.3.2. Estimación de los parámetros

De acuerdo con lo anterior, el vector de parámetros  $x = (\kappa, \eta, \lambda, a, \theta_t, \sigma, \rho_{Sv})$  del modelo HHW puede ser estimado de manera numérica para la serie de los rendimientos  $\phi(t)$  de los precios del tipo de cambio, considerando  $m$  iteraciones para hallar el valor  $x_{optimo}$  con características semejantes a las de los rendimientos reales y con ello, se asume que los valores del vector  $n$ -ésimo de parámetros sea la aproximación que otorgue un óptimo global para la serie simulada. Cabe señalar que el valor óptimo del vector de parámetros no es determinístico, es decir, no es único, ya que se pueden ejecutar las iteraciones que se deseen y el valor de  $x_{optimo}$  puede ser diferente, y este valor se acepta siempre y cuando satisfagan las condiciones establecidas.

Y si el valor  $x_{optimo}$  existe, interpretamos la posibilidad que sea un mínimo local de la función (3.54), cercano a cero, pero distinto de él, avalado por la prueba KS para dos muestras, pero también se puede emplear un algoritmo auxiliar de optimización no lineal basándose en la función (3.54). Este problema de optimización estocástica se resuelve encontrando un valor del vector de parámetros  $x_{optimo}$ , tal que

$$x_{optimo} = argmin_x \Psi(x) \quad (3.54)$$

Al usar el algoritmo de búsqueda directa por medio Nelder-Mead simplex,  $x_{optimo}$  quedará definido.

### **Algoritmo auxiliar: *Nelder-Mead simplex***

*Nelder-Mead simplex* (Nelder y Mead, 1965; Lewis et al., 2000; Lagarias et al., 1998) es un algoritmo de optimización no lineal sin restricciones, para encontrar un mínimo local de una función escalar  $f(x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  variables, en este estudio la función es la ec. 3.53.

Básicamente el simplex se define como un objeto geométrico formado por  $n+1$  vértices en el espacio de búsqueda  $n$ -dimensional (hipertetraedro). Por ejemplo, en el caso de dos dimensiones (dos parámetros) se representa a través de un triángulo, para 3 dimensiones (3 parámetros) es un tetraedro, y para 5 dimensiones que es el modelo de Heston el simplex muestra 6 vértices, para el modelo de HHW son 7 dimensiones y un simplex de 8 vértices (octaedro).

En este sentido, la deformación y variación del hipertetraedro se deriva de 4 operaciones básicas: reflexión, expansión, contracción y encogimiento, que llevan asociados 4 parámetros  $\rho, \chi, \gamma$  y  $\sigma$  respectivamente. *Reflexión* es un movimiento donde el vértice más alejado se refleja de manera simétrica a través del centro de gravedad del lado opuesto comprendido por los dos vértices, ponderado por  $\rho$  (Figura 3.2 a). La reflexión se repite varias veces considerando los vértices más alejados, hasta detectar el que está más cerca de un punto estacionario, es decir,  $f(x_{refle}) < f(x_1)$ . Para el movimiento de *expansión*, se calcula respecto al punto gravitatorio para saber si se puede mejorar más, todo ello con movimientos de reflexión previos, y la *contracción* se realiza hacia el punto reflejado o en dirección del punto más malo o alejado.

Finalmente, el movimiento de *encogimiento* (Figura 3.4) se da cuando el vértice de un simplex se detecta como el mejor, realizando previamente los movimientos de reflexión, expansión y contracción.

De acuerdo con el algoritmo Nelder-Mead, los parámetros deben satisfacer  $\rho > 0$ ,  $\chi > 1$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $0 < \sigma < 1$ ,  $\chi > \rho$ . Para el algoritmo estándar los valores asumidos son:  $\rho = 1$ ,  $\chi = 2$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

**Desarrollo** obtenido de Lagarias et al. (1998).

Ejemplificando para la  $k$ -ésima iteración.

Con el propósito de obtener un nuevo simplex variando uno o más vértices, se parte de  $n+1$  puntos, los cuales forman un simplex no degenerado en  $\mathbb{R}^n$ , y si  $k = 1$ , se tiene los vértices iniciales  $n+1$ .

**Paso 1:** Primeramente, se ordenan los valores de la función objetivo  $f$  de manera creciente, es decir;

$$x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}, x_{n+1}^{k-1}, \quad k \geq 1$$

tal que

$$f(x_1^{k-1}) \leq f(x_2^{k-1}) \leq \dots \leq f(x_n^{k-1}) \leq f(x_{n+1}^{k-1})$$

Ya que *minimizar la función objetivo*  $f$  es el objetivo, se entiende que el mejor punto es el primero y el peor es el último, etc.

**Paso 2:** En seguida se encuentra el punto de reflexión (ver Figura 3.2) que será el punto simétrico ( $\rho$ ), el cual parte del punto más malo respecto al centro de gravedad, el cual está formado por los  $n$  puntos mejores, lo cual es:

$$\text{Si } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} \text{ entonces } x_{refle} = \bar{x} + \rho(\bar{x} - x_{n+1}^{k-1}), \text{ evaluando la función } f(x_{refle})$$

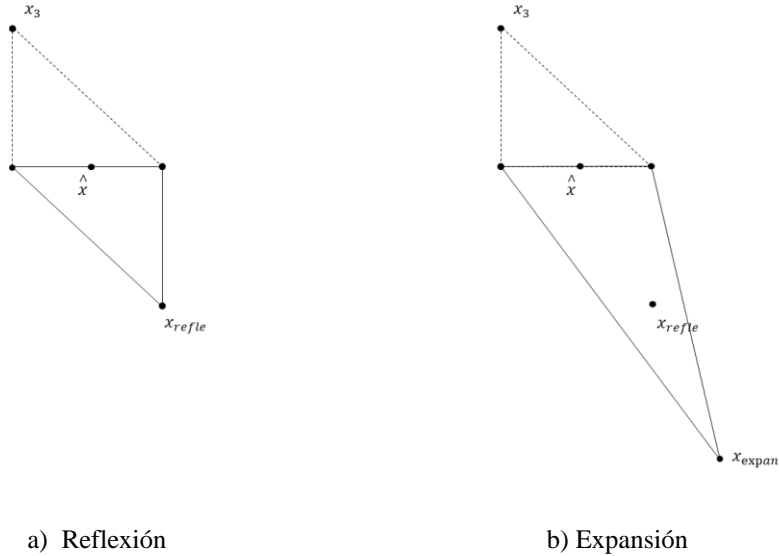


Figura 3.2. Reflexión y expansión en el método de Nelder-Mead.  
Fuente. Lagarias et al. (1998).

**Caso I: El punto de reflexión ha mejorado al mejor anterior**

$$f(x_{refle}) < f(x_1)$$

**Paso 3:** Para ver si se puede mejorar el punto anterior, se procede a calcular el punto de expansión respecto al centro de gravedad

$$x_{expan} = \bar{x} + \chi(x_{refle} - \bar{x})$$

de nuevo, se evalúa la función objetivo  $f(x_{expan})$ .

- Si se ha mejorado, es decir, si  $f(x_{expan}) < f(x_{refle})$ , se acepta el punto de expansión y se saca al punto más malo y se forma un simplex nuevo.
- Si no es mejor, es decir, si  $f(x_{expan}) \geq f(x_{refle})$ , se acepta el punto reflejado y se saca al punto más malo y se formar un simplex nuevo. **Termina la iteración.**



**Caso II: El punto de reflexión no mejoró al anterior, pero sí mejoró a alguno de los  $n$  mejores.**

$$f(x_1) \leq f(x_{refle}) < f(x_n)$$

Se acepta el punto reflejado y se saca al punto más malo y se formar un simplex nuevo. **Termina la iteración.**

**Caso III: El punto de reflexión no mejoró a ninguno de los  $n$  mejores anteriores.**

$$f(x_{refle}) \geq f(x_n)$$

**Paso 4:** La contracción se realiza hacia el punto reflejado o hacia el punto más malo, lo cual depende de cuál sea el mejor entre ellos (ver Figura 3.3).

**Contracción hacia fuera:** si el punto reflejado es mejor que el peor, es decir,

$$f(x_{refle}) < f(x_{n+1})$$

$$x_{con-f} = \bar{x} + \gamma(x_{refle} - \bar{x})$$

Posteriormente, en el punto contraído  $f(x_{con-f})$  se evalúa la función objetivo.

- Si mejoró, es decir,  $f(x_{con-f}) < f(x_{refle})$  se acepta el punto contraído y se saca al más malo y se formar el simplex nuevo. **Termina la iteración**
- Si no mejoró, es decir,  $f(x_{con-f}) \geq f(x_{refle})$  se continúa con el **paso 5**.

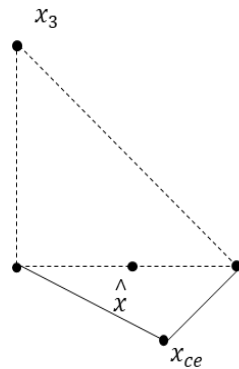
**Contracción hacia dentro:** si el punto reflejado es igual o empeora al más malo, es decir,

$$f(x_{refle}) \geq f(x_{n+1})$$

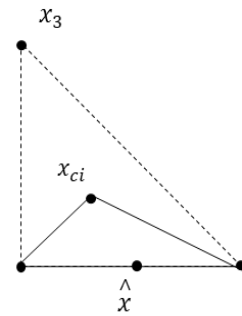
$$x_{con-d} = \bar{x} - \gamma(\bar{x} - x_{n+1})$$

Posteriormente, en el punto contraído  $f(x_{con-d})$  se evalúa la función objetivo.

- Si se mejoró, es decir,  $f(x_{con-d}) < f(x_{n+1})$  se acepta el punto contraído y se saca al más malo y se formar el simplex nuevo. **Termina la iteración**
- Si no se mejoró, es decir,  $f(x_{con-d}) \geq f(x_{n+1})$  continúa con el **paso 5**.



a) Contracción externa



b) Contracción interna

Figura 3.3. Contracción en el método simplex de Nelder-Mead.  
Fuente. Lagarias et al. (1998).

**Paso 5:** Se produce un encogimiento, tomando  $n$  puntos nuevos de la forma (ver Figura 3.4):

$$v_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1), i = 1, \dots, n + 1$$

Los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ , forman el nuevo simplex. **Termina la iteración.**

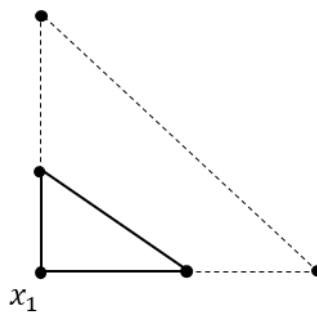


Figura 3.4. Encogimiento en el método simplex de Nelder-Mead.  
Fuente. Lagarias et al. (1998).

En la Figura 3.2 obtenida de Lagarias et al. (1998), se observa cómo ha variado tras una reflexión y expansión. En la Figura 3.3, se muestra la variación tras una contracción externa e interna, y en la Figura 3.4 se expresa la variación ante un encogimiento. En todos los casos el simplex de Nelder-Mead (1965) inicial aparece con líneas punteadas.

Siempre se debe tener un simplex inicial, ya que al inicio de cada iteración se obtiene un único simplex final al dar seguimiento a los pasos descritos anteriormente. Es importante cuidar el primer paso, si se da el caso de tener valores funcionales iguales, ¿cómo ordenarlos? Esta cuestión fue resuelta por Lagarias et al. (1998), al asignar el índice más alto posible de primer orden al nuevo vértice, repitiendo dichos movimientos hasta conseguir el simplex de dimensiones más pequeñas con determinado margen de error y con ello se encuentran las coordenadas del mínimo local. En la Figura 3.5 se observa el diagrama del método de Nelder-Mead para verificar la secuencia del programa.

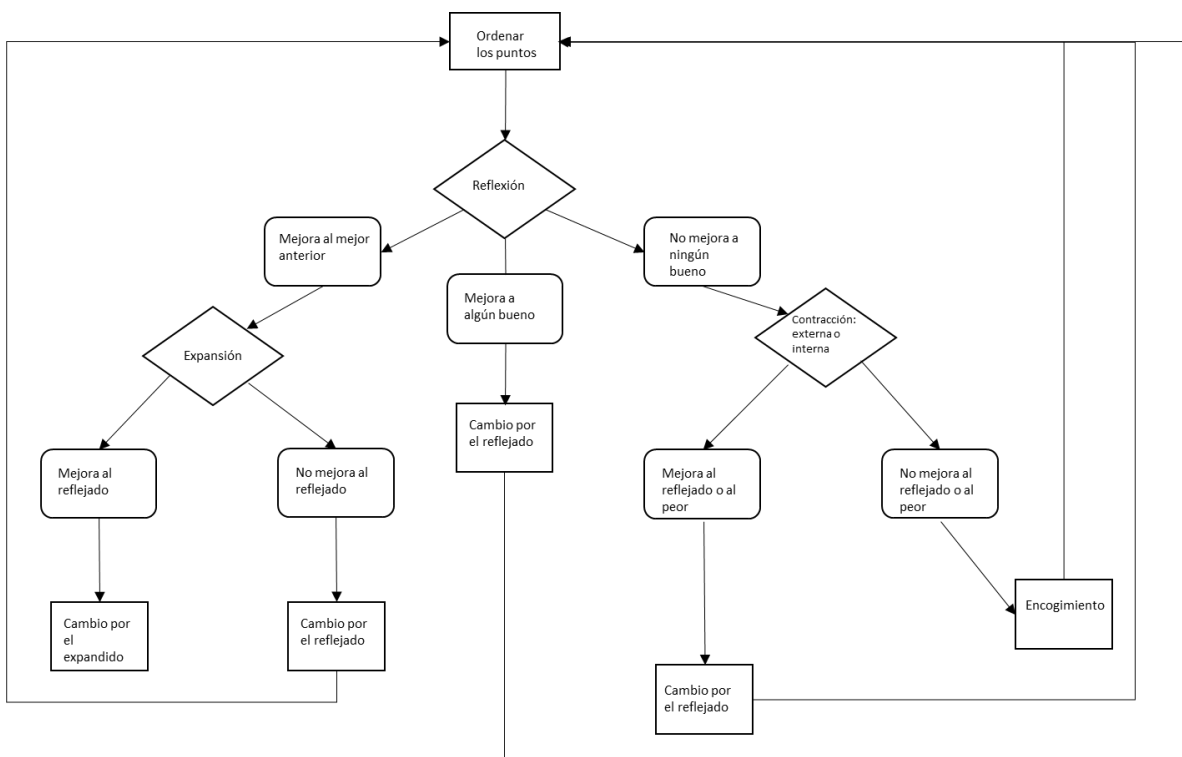


Figura 3.5. Organigrama del método de Nelder-Mead.  
Fuente. Elaboración propia.

El algoritmo Nelder-Mead se fundamenta en el algoritmo de búsqueda SHH (Spendley et al., 1962) para funciones de respuesta estocástica; opera relativamente bien, pero pueden obtenerse falsas convergencias del algoritmo. Este riesgo se puede reducir mediante nuevas modificaciones hechas al Nelder-Mead por Barton y Ivery (1996) pero por el momento no están implementadas en el Toolbox de Matlab y por lo que este problema está abierto para un futuro trabajo. Para dicho algoritmo se determina un vector inicial  $x_0$  con el cual darán inicio los cálculos, además se necesita llevar un control sobre los mínimos relativos que puede obtener para el caso de que la función  $\Psi(x)$  consienta más de uno. Un  $x_{optimo-mínimo}$  debe cumplir con la condición  $0 \leq \Psi(x_{opt}) \leq 0.05$ , además de que la función de densidad simulada con los parámetros de dicho  $x_{optimo-mínimo}$ , sea leptocúrtica y de colas anchas, así como en el caso de la densidad de los rendimientos reales  $\phi(t)$ .

Este tipo de optimización otorga un conjunto de valores  $\{x_{opt}, fval, exitflag, out put\}$  donde:  $x_{optimo}$  es el vector de parámetros en el modelo de HHW, que indica un mínimo local de la función  $\Psi(x)$ ;  $fval$  es un escalar de  $\Psi(x_{opt})$  que si es igual a 1 indica que ha llegado al óptimo;  $exitflag$  muestra las condiciones en que termina el algoritmo: si su valor es positivo indica convergencia, si es negativo, divergencia y si es cero entonces, avisa que se ha excedido el máximo de funciones evaluadas pero no obtuvo un óptimo punto;  $out put$  contiene el número de iteraciones, las veces que se evalúa la función objetivo, el nombre del algoritmo empleado y un registro de la historia de la optimización.

El procedimiento práctico requiere una exploración del vector de parámetros  $x_0$  que sea la base y de origen a la búsqueda de un mínimo local. Con el objetivo de reducir el espacio de indagación para la semilla seleccionada  $x = (\kappa_0, \eta_0, \lambda_0, a_0, \theta_{t_0}, \sigma_0, \rho_{Sv_0})$ , se obtiene a partir de la estadística descriptiva de los rendimientos del tipo de cambio del peso mexicano, de la volatilidad del activo subyacente y de los cambios en los diferenciales en las tasas de interés, que en el capítulo 4 se describen.

En el siguiente capítulo se realiza y se ejecuta el algoritmo para obtener el vector de parámetros de los modelos de Heston y Heston-Hull-White, utilizando la metodología descrita en este capítulo, y en seguida se obtienen los precios de la opción sobre el tipo de cambio peso

mexicano/dólar estadounidense para los modelos de BS, GK, H y HHW y comparar los errores que presentan respecto a los precios del MexDer.

## 4. Análisis de resultados

### Introducción

A lo largo de los capítulos anteriores se ha destacado que el proceso de difusión del activo subyacente puede considerar constantes a la volatilidad y a las tasas de interés (modelo de Black-Scholes), o volatilidad estocástica y tasas de interés constante (Heston), así como también, volatilidad y tasas de interés estocásticas (Heston-Hull-White). El propósito de este apartado es verificar que el modelo HHW que contempla la volatilidad del activo subyacente y las tasas de interés libre de riesgo con comportamiento estocástico, otorga un mejor cálculo de la prima de opciones sobre tipo de cambio, y a su vez se contrastará con los precios obtenidos de los modelos BS, GK, H y HHW descritos en los capítulos 2 y 3.

### 4.1. Descripción de los datos

Para obtener la prima de la opción sobre divisa utilizando el modelo de tres factores HHW, se deben tener los precios diarios de la divisa peso mexicano/dólar estadounidense, las tasas de interés libre de riesgo: 1) la tasa de CETES<sup>25</sup> a 91 días, que es la doméstica obtenida del mercado secundario y 2) la extranjera representada por las *Letras del Tesoro de Estados Unidos* o mejor conocidas como Treasury Bill (TBill, por sus siglas en inglés), a 90 días. La fuente de las series financieras es DataStream para el periodo del 14 de abril de 2003 al 9 de noviembre de 2018, integrando 3830 datos diarios de cada serie financiera. El periodo de estudio se eligió con el fin de considerar el inicio de las operaciones de las opciones en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), el periodo de alta volatilidad asociada a la crisis financiera global y las turbulencias de los mercados hasta el 2018.

Con el propósito de calibrar el modelo de opciones (BS, GK, H y HHW), se adquirieron los precios de cierre del mercado de opciones *Call* y *Put* sobre el tipo de cambio peso

---

<sup>25</sup> Los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) son el instrumento de deuda de renta fija más antiguo emitido por Gobierno Federal. Estos instrumentos se emitieron por primera vez en enero de 1978 y desde entonces constituyen un pilar fundamental en el desarrollo del mercado de dinero en México. Estos títulos pertenecen a la familia de los bonos cupón cero, esto es, se comercializan a descuento (por debajo de su valor nominal), no devengan intereses en el transcurso de su vida y liquidan su valor nominal en la fecha de vencimiento (Banxico, 2009).

mexicano/dólar estadounidense, registrados en el boletín del día 9 de noviembre de 2018 por el MexDer, regidos por 4 fechas de vencimiento: 14 de marzo, 13 de junio, 19 de septiembre y 19 de diciembre. Cabe señalar, que se consideran todos los precios de ejercicio registrados, que van desde 17.00 a 23.00 pesos con un incremento de 0.05 y el precio de contado con un valor de 20.1404 pesos, para la fecha ya mencionada.

#### **4.2. Análisis de los datos**

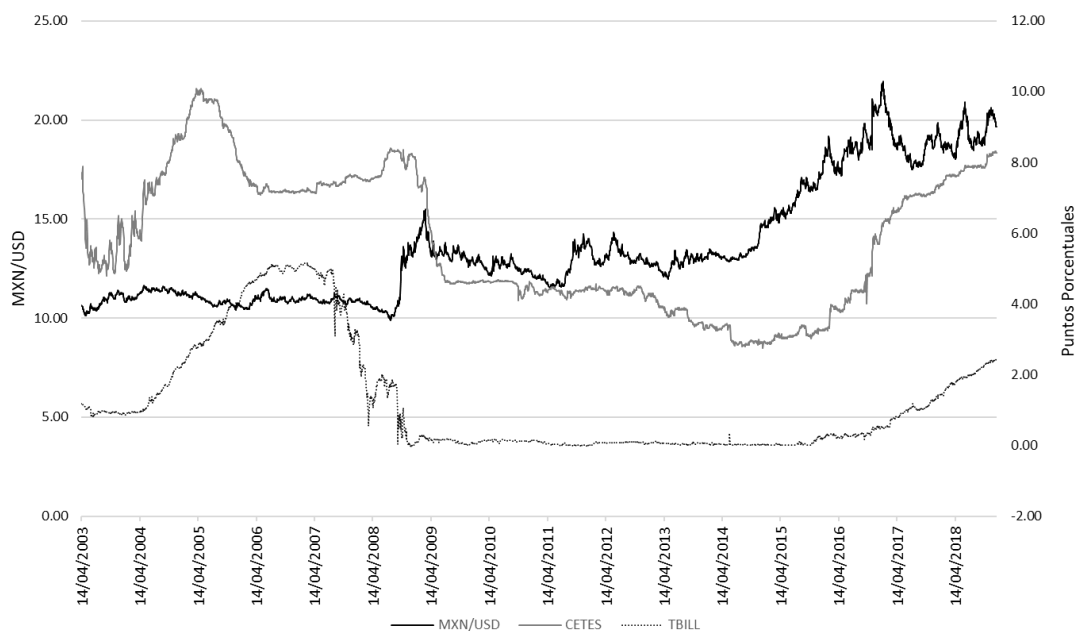
En la Gráfica 4.1 se puede apreciar, que la volatilidad diaria de la tasa de interés mexicana de corto plazo se redujo relativamente el 22 de abril de 2004, cuando Banco de México pasó del régimen de saldos diarios al de tasa de interés. Con respecto a la volatilidad del tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense, su variación fue mínima después de la transición al nuevo instrumento de política monetaria. El comportamiento observado durante 2004 a junio de 2005 está asociado básicamente a fenómenos como al incremento de la tasa de interés de los fondos federales<sup>26</sup> de Estados Unidos y los choques externos asociados con los aumentos en los precios del petróleo y los commodities. El 30 de junio de 2004 la tasa de fondos federales que sirve como referente a las tasas de interés, aumentó un 4.0 por ciento, ascendiendo en forma gradual para ubicarse a finales de junio del 2005 en 5.25 por ciento, respondiendo a este comportamiento, las tasas de interés libre de riesgo (Treasury Bill) pasan de 1.26 a 3.12 por ciento. De manera similar en México, la tasa de referencia se encontraba en 6.55 por ciento y en junio había ascendió a 9.75 por ciento, y los CETES partieron de 7.36 a 9.79 por ciento.

Posteriormente, Banxico desvinculó su política monetaria de la que sigue la Fed y a partir de junio de 2005 los CETES empiezan a observar una tendencia gradual hacia la baja, mientras que la tasa de interés libre de riesgo extranjera continúa incrementándose con el propósito de detener presiones inflacionarias originadas por los altos precios del petróleo y los efectos de los huracanes Katrina y Rita (Ramos-Francia y Torres, 2005).

---

<sup>26</sup> Es un instrumento a corto plazo que fija actualmente la Reserva Federal de los Estados Unidos (FED) a corto plazo al que los bancos se conceden préstamos unos a otros.

Grafica 4.1. Evolución del tipo de cambio y tasas de interés libre de riesgo.



Fuente: Elaboración propia, DataStream.

Nota: CETES equivalentes a T-Bill.

Siguiendo el análisis, durante 2006 el dinamismo de los mercados financieros internacionales, permitieron que las tasas de interés en países emergentes continuaran a niveles históricamente bajos. Sin embargo, durante el segundo trimestre la percepción de una posible transición hacia un entorno de mayor restricción monetaria global se vio acompañada de un incremento en la volatilidad en los mercados financieros internacionales. Este hecho provocó una disminución en los flujos financieros internacionales dirigidos hacia las economías emergentes, lo que condujo a que el tipo de cambio mexicano registrara importantes depreciaciones. Pero en la segunda mitad del 2007, el mercado de créditos hipotecarios en Estados Unidos generó una crisis en los mercados financieros de todo el mundo. Ante esta situación, Banxico restringió en dos ocasiones las condiciones monetarias. La primera de ellas fue en abril, llevando la tasa de interés de 7.16 a 7.37 por ciento en promedio durante 147 días (hasta octubre). En la segunda ocasión, la tasa se incrementó a 7.59 por ciento, con un nivel promedio de 7.61 por ciento en el que permaneció el resto del año (Banxico, 2007).

Más tarde, el 15 de septiembre de 2008 la empresa Lehman Brothers cae en bancarrota, y ante este evento, se incrementaron 25 puntos las tasas de interés en junio, julio y agosto,



representando una subida de 7.607 a 8.309 por ciento, permaneciendo este último valor hasta noviembre. De esta manera, los mercados financieros internacionales se tornaron muy riesgosos y con ello, el tipo de cambio fue altamente volátil, sobre todo para las monedas exóticas como la de México, que presentó una devaluación del 44.7 por ciento, a partir del 9 de marzo de 2008 hasta el 9 marzo de 2009 (Marichal, 2010).

Por su parte, la actividad económica mundial se empezó a recuperar a partir del segundo trimestre de 2009, la reactivación económica fue intervenida por los estímulos fiscales y monetarios en la mayoría de las economías avanzadas y en algunas emergentes. Así como, el Comité Federal del Mercado Abierto de la Fed (FOMC, por sus siglas en inglés), establece a la tasa de fondos federales en un rango de 0 a 0.25 por ciento, por lo que la tasa de interés libre de riesgo T-Bill se establece entre 0.005 y 0.193 por ciento, con el fin de promover el apoyo a la activación de los mercados financieros y estimular la economía a través de operaciones de mercado abierto. Ante estas situaciones México decide reducir las tasas de interés libre de riesgo en un total de 375 puntos base, pasando de 8.17 por ciento a finales de 2008, a 4.56 por ciento el 25 de agosto de 2009 con el fin de reactivar la producción, el empleo y fomentar el consumo (Banxico, 2011), y permanecieron a la baja hasta el primer trimestre del 2014.

Pero en 2011, la recuperación económica mundial perdió vigor por los efectos negativos de los desastres naturales en Asia, la fuerte alza en los precios de los productos primarios en la primera mitad del año y el agravamiento de la crisis de deuda soberana en la zona euro en el segundo semestre, provocó un impacto negativo en los mercados financieros de las economías emergentes en el último trimestre del año. En este entorno, los flujos de capital se vieron afectados y el tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense se depreció 13.11 por ciento. Ante esta situación, México se enfocó a mantener la estabilidad con el apoyo nuevamente de la política monetaria, lo que mantuvo a las tasas de interés en 4.36 por ciento en promedio el resto del año (Banxico, 2011). En el año 2012, la economía mundial creció menos que en 2011, debido a los problemas en la zona euro y a la incertidumbre ocasionada por el ajuste fiscal en Estados Unidos para el 2013, provocando, una depreciación del tipo de cambio el 1 de junio (hasta 14.35 pesos por dólar), pero la mejoría observada en los mercados financieros internacionales durante los últimos meses del año se reflejó en un repunte de los flujos de capital hacia los mercados emergentes. De hecho, el peso mexicano se apreció al valor de 12.898 pesos

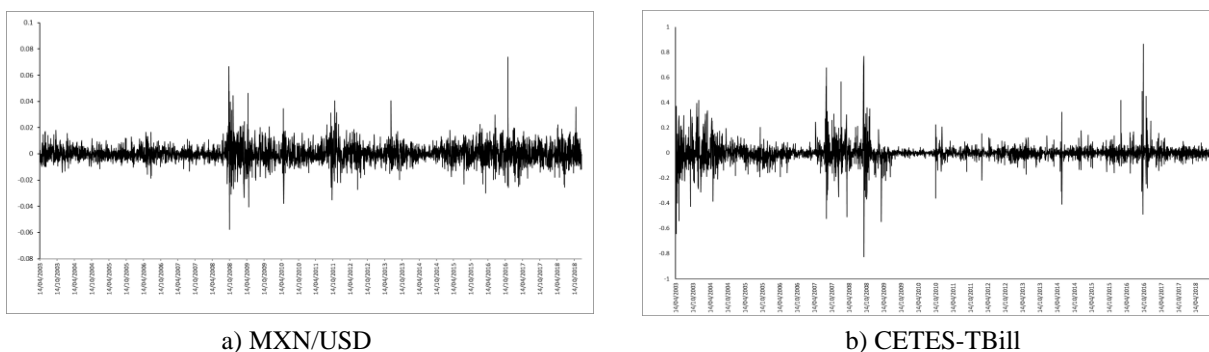
por dólar, al cierre del año (Malfeito, 2017).

A continuación, se presenta el análisis estadístico de los datos y posteriormente se estiman los parámetros de los modelos de H y HHW, en seguida se calcula la prima de la opción y se calibra con los precios de las opciones sobre el dólar estadounidense, obtenidos del boletín emitido por el MexDer para validar la eficacia de los modelos; asimismo, se obtiene la prima con los modelos de BS y GK, con el fin de verificar cuál de los cuatro modelos otorga un mejor precio respecto al precio de mercado.

### 4.3. Análisis estadístico

En el panel **a** de la Gráfica 4.2 se muestran los rendimientos del tipo de cambio, transformados en términos de la relación  $Tc_t = 100 * \ln\left(\frac{tc_t}{tc_{t-1}}\right)$ , siendo  $tc_t$  el tipo de cambio al cierre en el tiempo  $t$  y  $tc_{t-1}$  el tipo de cambio al cierre previo. En la misma gráfica del panel **b** se presentan los cambios en los niveles de la tasa de interés libre de riesgo doméstica y extranjera.

Grafica 4.2. Rendimientos del tipo de cambio y diferenciales en los niveles de las tasas de interés libre de riesgo.



Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream, para una muestra del 14 de abril de 2003 a 9 de noviembre de 2018.

En las gráficas 4.1 y 4.2 se aprecia que el tipo de cambio y los diferenciales en los niveles de las tasas de interés experimentan gran volatilidad, como en 2008 durante la crisis financiera global, en 2011 con los desastres naturales de Asia y la crisis de la deuda soberana en la zona euro y en 2012 la incertidumbre por el ajuste fiscal para 2013 en Estados Unidos. Por todo lo anterior, cabe resaltar la importancia de implementar modelos que consideren la volatilidad estocástica del tipo de cambio para determinar la prima de las opciones, que permitan mitigar

la exposición al riesgo cambiario.

En la Tabla 4.1 se expone el resumen estadístico del tipo de cambio MXN/USD junto con los diferenciales en los niveles de las tasas de interés libre de riesgo doméstica a 91 y extranjera a 90 días. El tipo de cambio tuvo un rendimiento promedio en este periodo de 0.0159 por ciento, observándose un mínimo de -5.7561 el 13 de octubre de 2008 ante el desplome de los mercados financieros del mundo, debido a la crisis provocada por Lehman Brothers. Otro evento importante que marcó la historia el 6 de mayo de 2010 es el llamado *flash crash*, producido por la *Negociación de Alta Frecuencia* afectando al índice Dow Jones Industrial con una caída de aproximadamente del 9 por ciento. El 9 de noviembre de 2016 después del triunfo inesperado del Brexit (la salida del Reino Unido de la Unión Europea), tuvo consecuencias bursátiles, reflejándose en las divisas y las tasas de interés (Malfeito, 2017).

Tabla 4.1. Resumen estadístico de las variables (14/04/2003-31/12/2018).

2003-2018		Diarios	
Variables		Rendimientos MXN/USD	Cambios ( $r_D - r_E$ )
Estadísticos	Media	0.0159	-0.0002
	Mediana	-0.0195	-0.0004
	Desviación estándar	0.7162	0.0757
	Varianza	0.5130	0.0057
	Asimetría	0.6836	0.5495
	Curtosis	12.6188	24.4243
	Máximo	7.3724	0.8640
	Mínimo	-5.7561	-0.8252
	Jarque-Bera	15196.8	64181797.2
	Valor- $p$	0.0000	0.0000
Heteroscedasticidad	Prueba de White		
	F-estadístico	53.4875	31.5729
	No. Obs*R <sup>2</sup>	52.7841	31.3331
	Valor- $p$	0.0000	0.0000
Prueba de raíces unitarias			
ADF	t-estadístico	-60.667	-52.445
	Valor- $p$	0.0000	0.0000
	Durbin-Watson	1.9992	2.0098
PP	t-estadístico	-60.650	-128.272
	Valor- $p$	0.0000	0.0001
	Durbin-Watson	1.9992	1.9268

Fuente: Elaboración propia en Eviews con datos DataStream.

NOTA: Las estadísticas básicas son expresadas en porcentajes. Con el fin de comprobar si las series son estacionarias se realiza la prueba Dickey Fuller Aumentada (ADF) y la de Phillips-Perron (PP). El análisis se realiza con un nivel de significancia del 5%.

Dados los acontecimientos mencionados, el tipo de cambio sufre mayor inestabilidad a diferencia de las tasas de interés, lo que se ve reflejado con una desviación estándar igual a 0.7162 contra 0.0757 de la tasa de interés. En cuanto a la serie de los diferenciales en los niveles de las tasas de interés, el valor promedio es de -0.0002 por ciento, con un valor máximo de 0.8640 el día 10 de octubre de 2016 y un mínimo igual a -0.8252 por ciento el 19 de septiembre de 2008. En conclusión, el peso mexicano sufrió grandes devaluaciones respecto al dólar estadounidense (gráficas 4.1 y 4.2 a y b), lo cual numéricamente se verifica con la diferencia que existe entre el valor máximo y mínimo de cada serie.

La serie de los rendimientos es positivamente sesgada, de igual manera la de las tasas de interés, además, ambas exhiben exceso de curtosis, es decir, presentan colas más anchas y largas que la distribución normal, particularmente la cola derecha de ambas series financieras. El signo positivo del coeficiente de asimetría revela que los rendimientos extremos positivos (una depreciación del peso mexicano) tienen una mayor probabilidad de ocurrencia que los negativos, de igual manera para los diferenciales en los niveles de las tasas de interés libre de riesgo, es decir, tiene mayor probabilidad de ocurrir una subida en las tasas de interés. Como el *valor-p* del estadístico Jarque-Bera es menor al nivel de significancia de 0.05, entonces ambas series no cumplen el supuesto de normalidad.

También se verifica con la prueba de White que los rendimientos del tipo de cambio y los diferenciales en los niveles de las tasas de interés presentan volatilidad estocástica, al rechazarse la hipótesis nula  $H_0: \sigma_t^2 = \sigma^2$ , dado que el estadístico es mayor al crítico ( $N * R^2 = 52.7841 > \chi^2 = 3.841$  y  $31.3331 > \chi^2 = 3.841$ , para ambas series respectivamente), además que el *Valor - p* es menor a 0.05. En seguida se muestran los resultados del análisis de estacionariedad sobre las variables financieras. A través de la prueba Aumentada de Dickey-Fuller (ADF) y la prueba de Phillips-Perron (PP), para identificar la presencia de raíz unitaria en las series<sup>27</sup>, éstas muestran que el *t-estadístico* es menor en todos los casos al valor crítico (-3.4318, -2.8620 y -2.5671) para ADF y PP, además presentan un *valor-p* menor al 5%, por lo que se rechaza la hipótesis nula, es decir, no hay presencia de raíz unitaria y por lo tanto las series son estacionarias.

---

<sup>27</sup> Se utilizó un nivel de significancia de 5% para las pruebas ADF y PP, su cálculo fue simple debido a que sólo se tienen dos variables.

#### 4.4. Estimación de los parámetros

Con el fin de realizar una mejor valuación de la prima de las opciones sobre tipo de cambio MXN/USD, en primer lugar, se estiman los parámetros del modelo de Heston y en seguida los de Heston-Hull-White, para después calcular la prima y validarla con los precios de las opciones sobre el dólar que emite MerDex para el 9 de noviembre de 2018.

Esta forma empírica de estimación exige una búsqueda muy intensa del vector de parámetros, tales como,  $x_0 = (\mu_0, \theta_0, \sigma_0, k_0, \rho_0) \in \mathbb{R}^5$  y  $x_0 = (k_0, \eta_0, \lambda_0, a_0, \theta_0, \sigma_0, \rho_{S_{v_0}}) \in \mathbb{R}^7$ . Se crea un vector inicial  $x_0$  conformado con los valores de la estadística de los rendimientos del tipo de cambio y los diferenciales en los niveles de las tasas de interés, que va a orientar al algoritmo de Nelder-Mead para hallar un mínimo local. Con el fin de reducir el espacio de búsqueda para el vector semilla seleccionado se realiza lo siguiente.

##### 4.4.1. Parámetros de Heston

Para el modelo de dos factores, propuesto por Heston (1993) se observa que los dos procesos de difusión contienen el vector de parámetros  $x_0 = (\mu_0, \theta_0, \sigma_0, k_0, \rho_0) \in \mathbb{R}^5$  y para obtenerlos se procede de la siguiente manera.

De la Tabla 4.1 para la serie de los rendimientos del tipo de cambio (denominada  $\phi(t)$ , en adelante), se puede observar el valor  $\max(\phi(t)) = 7.3724$  y  $\min(\phi(t)) = -5.7561$ , que establecen el intervalo para el cual la tasa de crecimiento ( $\mu$ ) es válida, el cual es  $[-5.7561, 7.3724]$ . Para formar la semilla  $x_0$ , se tiene que  $\mu_0 = 0.0159$  es la media de la serie  $\phi(t)$ . El parámetro  $\theta_0 = 0.5130$  es la varianza de los rendimientos y debido a las simulaciones que Heston (1993) realizó en su estudio, propone como intervalo de búsqueda  $[0, a]$  y para este estudio  $a = \max(\phi(t)) = 7.3724$ . Por la relación que tiene la volatilidad de la volatilidad  $v_t$  el intervalo de  $\sigma$  se considera  $(0,1]$ . El parámetro  $\sigma_0 = 0.0834$  se obtiene a partir del cálculo de la volatilidad de la volatilidad de los rendimientos del tipo de cambio. Tomando en cuenta que  $\kappa$  representa a la velocidad con que la varianza  $v_t$  retorna a su media de largo plazo  $\theta$  y con base a la experiencia de los estudios de Bakshi et al. (1997) y Grajales y Pérez (2008), el valor

del parámetro  $\kappa$  toma valores positivos, esto es  $(0, \infty)$ . Se toma el valor de  $\kappa_0 = 4$  considerando los valores de los modelos de Heston (1993) y Bakshi et al. (1997), ya que es un supuesto en dichos modelos. Finalmente, el parámetro de correlación  $\rho$ , tiene su intervalo natural  $[-1, 1]$  cuyo valor es  $\rho_0 = 0.0013$ , obtenido de la correlación entre los rendimientos y los diferenciales en los niveles de las tasas de interés libre de riesgo doméstica y extranjera.

Conforme a lo expuesto, el siguiente producto cartesiano conforma el dominio de la función  $\Psi(x_0)$  en  $\mathbb{R}^5$  (para el modelo de Heston):

$$[-5.7561, 7.3724] \times [0, 7.3724] \times (0, 1] \times (0, \infty) \times [-1, 1]$$

representando el intervalo para los parámetros  $\mu$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$ , y  $\rho$ , respectivamente.

En seguida se procede a las iteraciones del algoritmo de Nelder-Mead programado en Matlab (Anexo A.1) dando como valores iniciales al vector de parámetros  $x_0$  para el modelo de Heston. En seguida se ejecutan 1000 trayectorias para la serie de los rendimientos del activo subyacente considerados en el espacio vectorial  $\Gamma(x)$ , que al término de cada ejecución se toman los valores calculados y se sustituyen en los parámetros iniciales, nuevamente se reanuda el algoritmo y así sucesivamente hasta llegar a un óptimo global ( $x_{\text{óptimo}}$ ), el cual se aceptará si el valor de la función  $\Psi(x_{\text{óptimo}})$  es igual a 1.

En la Tabla 4.2 se presentan los resultados de las estimaciones de los parámetros del modelo de Heston para periodos diarios (3830 observaciones), semanales (802), quincenales (453) y mensuales (227), con el propósito de verificar la estabilidad de dichos parámetros estimados a través del método para el periodo del 14 de abril de 2003 al 9 de noviembre de 2018. Los resultados muestran el valor de la función objetivo  $\Psi(x_0)$  para valores iniciales dados en el vector de parámetros  $x_0$  con  $m = 1000$  trayectorias de los rendimientos y con  $n$  que representa el número de datos a considerar en el espacio vectorial  $\Gamma(x)$ . La dinámica del algoritmo consiste en que la primera réplica del algoritmo ejecutó 1000 iteraciones internas, dando un valor de  $\Psi(x_0)$  igual a 0.946 para converger a un óptimo global, posteriormente, se da la orden de una segunda réplica con los valores resultantes de la primera, es decir, se toman los valores estimados del vector  $x_1$  y así la tercera, cuarta y hasta la n-ésima réplica  $x_n$ , hasta que la función

objetivo  $\Psi(x_n)$  es igual a 1, lo que indica que se ha alcanzado un óptimo global.

De igual manera, se muestran los resultados de las cuatro primeras réplicas y de las cuatro últimas, en las que se observa que conforme van incrementando las ejecuciones del algoritmo se reducen las iteraciones internas, esto se debe a que se está llegando a un óptimo global. Por ejemplo, la penúltima réplica realizó 150 iteraciones y obtuvo un  $\Psi(x_{38}) = 0.998$ , es decir, 99.8% de probabilidad de haber encontrado un óptimo global y desde esta réplica la prueba de KS muestra que los resultados provienen de la misma distribución de probabilidad ( $h_{38} = 0$  y *valor - p* = 0.527), pero en la réplica número 39 se encuentra el vector de parámetros óptimo del modelo de Heston, ya que se obtiene  $\Psi(x_{39}) = 1$  con tan sólo 13 iteraciones internas, el cual se muestra a continuación:

$$x_{\text{óptimo}}(\mu, \theta, \sigma, \kappa, \rho) = (0.0596, 0.0185, 0.2996, 4.9002, 0.0014)$$

Es importante señalar que para los parámetros estimados con datos semanales, quincenales y mensuales (Tabla 4.2) la prueba de KS también indica que los rendimientos reales y los simulados provienen de la misma distribución de probabilidad, cuyo *valor - p* es mayor a 0.05, además se hace notar que para realizar estimaciones con datos de temporalidades mayores se requieren más ejecuciones para llegar al vector óptimo. También se observa que el coeficiente de variación de la volatilidad  $\sigma$  para los 4 periodos: diarios, semanales, quincenales y mensuales (0.2996, 0.0479, 0.0866 y 0.1651) respectivamente, reflejan la volatilidad muy fluctuante, sobretodo para la estimación con datos diarios, donde el mercado presenta movimientos extremos.

También  $\sigma$  afecta la curtosis correspondiente al precio del activo subyacente; cuanto mayor es el valor de  $\sigma$  más anchas son las colas de la distribución de los rendimientos de los precios del tipo de cambio, lo que produce un efecto creciente en la prima de la opción *Call* y *Put* fuera-del-dinero (OTM) y hace más probable que la opción venzan dentro-del-dinero (ITM), es decir, su precio es más alto.

Tabla 4.2. Estimación de los parámetros del modelo de Heston.

MODELO DE HESTON									
Periodo 14/04/2003-09/11/2018									
Diarios									
No. de réplica	1	2	3	4	...	36	37	38	39
$\mu$	0.0416	0.0418	0.0435	0.0446		0.0584	0.0584	0.0596	0.0596
$\theta$	0.0134	0.0135	0.0134	0.0134		0.0181	0.0181	0.0185	0.0185
$\sigma$	0.2176	0.2230	0.2271	0.2282		0.2937	0.2937	0.2996	0.2996
$\kappa$	4.0000	4.0200	4.0028	4.0343		4.8042	4.8042	4.9002	4.9002
$\rho$	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013		0.0014	0.0014	0.0014	0.0014
$\Psi(x_0) = 1$	0.9460	0.9490	0.9230	0.9330		0.9980	0.9980	0.9980	1.0000
<i>Finaliza si es igual a 1</i>	0	0	0	0		0	0	0	1
<i>No. Iteraciones internas</i>	347	365	369	329		150	152	150	13
<i>No. de evaluaciones de la función objetivo</i>	1000	1003	1000	1005		1005	1003	1006	90
$h_i$ , valor-p	1, 1.524E-02	1, 1.37E-04	1, 1.380E-07	1, 1.531E-08		0, 0.723	0, 0.681	0, 0.527	0, 0.789
Semanales									
No. de réplica	1	2	3	4	...	32	33	34	35
$\mu$	0.2001	0.1999	0.2106	0.2106		0.2528	0.2528	0.2528	0.2528
$\theta$	0.0585	0.0586	0.0573	0.0573		0.0851	0.0851	0.0851	0.0851
$\sigma$	0.0406	0.0425	0.0410	0.0431		0.0479	0.0479	0.0479	0.0479
$\kappa$	4.0225	4.0464	4.2417	4.2417		5.9948	5.9948	5.9948	5.9948
$\rho$	0.1639	0.1636	0.1638	0.1638		0.1835	0.1836	0.1836	0.1836
$\Psi(x_0) = 1$	0.7060	0.7130	0.7160	0.6900		0.9980	0.9990	0.9990	1.0000
<i>Finaliza si es igual a 1</i>	0	0	0	0		0	0	0	1
<i>No. Iteraciones internas</i>	373	365	373	357		164	143	144	13
<i>No. de evaluaciones de la función objetivo</i>	1004	1001	1004	1000		1003	1001	1000	90
$h_i$ , valor-p	1, 4.82E-05	1, 1.75E-03	1, 1.601E-03	1, 1.954E-07		0, 0.827	0, 0.768	0, 0.527	0, 0.653
Quincenales									
No. de réplica	1	2	3	4	...	91	92	93	94
$\mu$	0.3576	0.3662	0.3754	0.3849		0.7182	0.7182	0.7326	0.7326
$\theta$	0.1075	0.1091	0.1124	0.1138		0.2014	0.2014	0.2055	0.2055
$\sigma$	0.0587	0.0601	0.0599	0.0575		0.0849	0.0849	0.0866	0.0866
$\kappa$	4.0172	3.9483	3.8701	3.8491		7.8545	7.8576	8.0147	8.0147
$\rho$	0.1964	0.2067	0.1995	0.2052		0.5516	0.5516	0.5241	0.5241
$\Psi(x_0) = 1$	0.1270	0.1390	0.1550	0.2190		0.9990	0.9990	0.9990	1.0000
<i>Finaliza si es igual a 1</i>	0	0	0	0		0	0	0	1
<i>No. Iteraciones internas</i>	347	349	355	354		146	148	147	13
<i>No. de evaluaciones de la función objetivo</i>	1001	1001	1000	1003		1003	1001	1006	90
$h_i$ , valor-p	1, 3.94E-06	1, 1.72E-04	1, 9.59E-05	1, 3.95E-06		0, 0.438	0, 0.392	0, 0.786	0, 0.682
Mensuales									
No. de réplica	1	2	3	4	...	128	129	130	131
$\mu$	0.7355	0.7739	0.7741	0.7819		2.3457	2.3457	2.3458	2.3458
$\theta$	0.2265	0.2220	0.2330	0.2274		0.7283	0.7289	0.7289	0.7289
$\sigma$	0.0860	0.0845	0.0845	0.0849		0.1651	0.1651	0.1651	0.1651
$\kappa$	4.1927	4.3379	4.3368	4.4820		13.3759	13.3759	13.3759	13.3759
$\rho$	0.1671	0.1643	0.1644	0.1662		0.2822	0.2822	0.2822	0.6822
$\Psi(x_0) = 1$	0.0280	0.0240	0.0260	0.0350		0.9980	0.9990	0.9980	1.0000
<i>Finaliza si es igual a 1</i>	0	0	0	0		0	0	0	1
<i>No. Iteraciones internas</i>	358	340	366	344		146	145	144	14
<i>No. de evaluaciones de la función objetivo</i>	1005	1002	1001	1004		1005	1002	1002	97
$h_i$ , valor-p	1, 1.524E-02	1, 1.37E-04	1, 1.380E-07	1, 1.531E-08		0, 0.723	0, 0.681	0, 0.527	0, 0.489

Fuente. Elaboración propia

NOTA: Se realizaron 39, 35, 94 y 131 réplicas del algoritmo de Nelder-Mead para los periodos diarios, semanales, quincenales y mensuales, respectivamente; mostrando sólo los resultados de las cuatro primeras y las cuatro últimas.



Por su parte, la velocidad de reversión a la media  $k$ , determina los pesos relativos de la varianza actual y de largo plazo en los rendimientos del activo subyacente. Si se observa la tabla 4.2, se tiene para datos diarios un valor de 4.9002, lo cual implica que existe una gran variación en los precios de las opciones y esto se debe a la alta volatilidad que hubo en este tiempo, por ejemplo el periodo de 2008-2009 con la crisis financiera global (Grafica 4.1). Cabe hacer referencia al estudio de Guo (1998) que obtiene la medida de la velocidad de reversión a la media con un valor igual a 8.1663 para el caso del marco alemán que tuvo una alta volatilidad durante 1987-1992, el cual es aún mucho mayor al obtenido en este estudio. Pero para periodos de relativa estabilidad la magnitud de dicho parámetro es menor, tal como lo muestran Bakshi et al. (1997) ( $k = 1.15$ ) para opciones sobre el índice S&P500 en el periodo 1988-1991 y Nandi (1998) para opciones sobre futuros ( $k = 3.29$ ). En cuanto al parámetro  $\rho$  de correlación se tiene un valor positivo en todos los periodos, pero la correlación entre los rendimientos del activo subyacente y los diferenciales en los niveles de las tasas de interés domésticas y extranjeras, va siendo mayor para los periodos semanales, quincenales y mensuales (0.1836, 0.5241 y 0.6822, respectivamente).

#### 4.4.2. Parámetros Heston-Hull-White

Para el modelo Heston-Hull-White, se tienen tres procesos de difusión (ver ec. 3.1), que contienen el vector de parámetros  $x_0 = (k_0, \eta_0, \lambda_0, a_0, \theta_0, \sigma_0, \rho_{S,v_0}) \in \mathbb{R}^7$  y para obtenerlos se procede de manera semejante al modelo de Heston.

Como parte del vector inicial con respecto al proceso de la volatilidad, se tomaron los mismos valores iniciales del modelo de Heston, esto es: la velocidad  $\kappa$  con que la varianza retorna a un valor constante en el largo plazo, inicia con un valor igual a 4 que pertenece a un intervalo  $(0, \infty)$ . El parámetro  $\eta$  se considera igual al parámetro  $\theta$  del modelo de Heston, que indica el tamaño de la varianza  $(\phi(t))$  de los rendimientos del tipo de cambio a largo plazo, es decir,  $\eta_0 = \theta_{0(Heston)} = 0.5130$ , con un intervalo  $[0, 7.3724]$ . En cuanto al parámetro  $\lambda_0 = \sigma_{0(Heston)} = 0.0834$  se obtuvo del cálculo de la volatilidad de la volatilidad de los rendimientos, dentro de un intervalo  $(0, 1]$ .

Para el proceso de difusión de la tasa de interés, se calculan los parámetros iniciales  $a$ ,  $\phi(t)$ <sup>28</sup> y  $\sigma$ , en donde  $a$  es la velocidad con la que converge su media  $\phi(t)$  y  $\sigma$  representa la volatilidad de la volatilidad de los diferenciales en los niveles de las tasas de interés domésticas y extranjeras. Cabe mencionar que  $\phi(t)$  es una función continua, positiva y determinística que, en este caso, se considera constante sólo para tener el valor semilla, mientras que con el proceso de estimación se obtiene el valor óptimo.

Dado lo anterior, se procede a calcular los valores iniciales de los parámetros del proceso de difusión de la tasa de interés. De la Tabla 4.1 para la serie de los diferenciales en los niveles entre CETES y TBill, la media es igual a  $\theta_0(t) = -0.0002$ . Respecto a  $\sigma_0$  se parte del cálculo de la volatilidad de la volatilidad de la serie de los diferenciales en los niveles de las tasas libre de riesgo dando un valor igual a  $\sigma_0 = 0.0001$ , el cual pertenece al intervalo de  $(0,1]$ . En cuanto a la velocidad  $a$  con que la tasa de interés  $r_t$  retorna a su varianza en el largo plazo, se elige  $a_0 = 0.5130$  que equivale al parámetro de la varianza ( $\theta_0 = 0.5130$ ) del modelo de Heston estimado y consistente en el intervalo  $(0, \infty)$ . Finalmente, considerando la correlación entre los procesos del activo subyacente y la volatilidad, el parámetro  $\rho_0 = 0.0013$ , perteneciente al intervalo  $[-1, 1]$ .

En resumen, el dominio de la función objetivo  $\Psi(x_0)$ , para el vector de parámetros  $x_0 = (k_0, \eta_0, \lambda_0, a_0, \theta_0, \sigma_0, \rho_{S,v_0}) \in \mathbb{R}^7$  en el modelo de Heston-Hull-White puede restringirse al producto cartesiano determinado por:

$$[0, 7.3724] \times (0, 1] \times (0, \infty) \times [-1, 1] \times (0, 1] \times (0, \infty) \times [-1, 1]$$

En seguida se inician las iteraciones del algoritmo Nelder-Mead en Matlab para el modelo de tres factores (Anexo A.2) dando como valores iniciales al vector  $x_0$  (Tabla 4.3) para el modelo de Heston-Hull-White.

---

<sup>28</sup> En la programación del algoritmo en Matlab se usa  $\theta(t) = \theta_2$  por condiciones del programa.

En la Tabla 4.3 para el periodo 14/04/2003-09/11/2018 con datos diarios, se muestra el valor de  $\Psi(x_0)$  para  $m = 1000$  trayectorias internas y los valores iniciales del vector de parámetros. Es importante señalar que se replicó 50 veces el algoritmo y tan sólo en la primera realizó 1400 iteraciones internas, proporcionando un valor de  $\Psi(x_0)$  igual a 0.4, es decir, se tiene el 40% para converger a un óptimo global.

Tabla 4.3. Estimación de los parámetros del modelo de Heston-Hull-White.

MODELO DE HESTON-HULL-WHITE									
Periodo 14/04/2003-09/11/2018									
Diarios									
No. de réplica	1	2	3	4	...	47	48	49	50
a	0.5130	0.0138	0.0143	0.0142		0.0186	0.0186	0.0186	0.0186
$\sigma$	0.2907	0.2934	0.2944	0.2973		0.4102	0.4095	0.4095	0.4095
$\kappa$	5.4216	5.4714	5.5136	5.5237		7.5226	7.5226	7.5226	7.5226
$\rho$	0.0012	0.0012	0.0012	0.0013		0.0014	0.0014	0.0014	0.0014
$\lambda$	0.2108	0.2093	0.2109	0.2108		0.2550	0.2550	0.2550	0.2550
$\theta$	-0.0810	-0.0817	-0.0824	-0.0818		-0.1080	-0.1087	-0.1087	-0.1087
$\eta$	0.0149	0.0151	0.0147	0.0147		0.0144	0.0144	0.0144	0.0144
$\Psi(x_0)$	0.4	0.3	0.3	0.5		0.99	0.99	0.99	1
Finaliza si es igual a 1	0	0	0	0		0	0	0	1
No. Iteraciones internas	393	415	395	374		160	159	162	13
No. de evaluaciones de la función objetivo	1400	1406	1406	1400		1403	1407	1403	116
$h_i$ , valor-p	1, 7.18E-11	1, 3.82E-12	1, 2.580E-05	1, 7.54E-09		0, 0.479	0, 0.679	0, 0.758	0, 0.807

Fuente. Elaboración propia con resultados de la valuación del modelo HHW.

En la última columna de la Tabla 4.3 se muestran los parámetros óptimos locales para el modelo de HHW, con un valor igual:

$$x_{\text{óptimo}}(\eta, \lambda, \kappa, \theta, \sigma, a, \rho) = (0.0144, 0.2550, 7.5226, -0.1087, 0.4095, 0.0186, 0.0014)$$

En la última réplica el algoritmo sólo realizó 13 iteraciones internas para llegar al vector óptimo y como se puede observar en la Tabla 4.3 desde la ejecución número 47 la hipótesis nula  $H_0$  no se rechaza por la prueba KS, ya que  $h_i = 0$  y *valor - p* son mayores a 0.05, lo que valida que los rendimientos reales y estimados provienen de la misma distribución de probabilidad. Por lo tanto, se concluye que los parámetros obtenidos del modelo de Heston-Hull-White son confiables y se pueden obtener los precios teóricos de la opción *Call* y *Put*.

En el modelo de HHW se obtuvo un valor mayor del parámetro de velocidad de reversión a la media en comparación con el obtenido en la estimación del modelo de Heston ( $\kappa = 7.5226$ , 4.9002, respectivamente), debido a que el modelo HHW captura los efectos de la volatilidad y

tasas de interés (domésticas y extranjeras) estocásticas, lo que revela valores extremos en los rendimientos del tipo de cambio y, por lo tanto, una gran variación en el precio de las opciones (Guo, 1998, Bakshi et al., 1997, Nandi, 1998).

Respecto a la volatilidad de la volatilidad de los rendimientos del tipo de cambio y de la volatilidad de los diferenciales en los niveles de las tasas de interés libre de riesgo (doméstica y extranjera), se obtuvo:  $\lambda = 0.2550$  y  $\sigma = 0.0410$ , respectivamente, con mayor varianza en la volatilidad del activo subyacente; nuevamente se corrobora que existe mayor probabilidad de que la prima de las opciones se eleve sobretodo para *Call* y *Put* fuera-del-dinero. Finalmente, el parámetro de correlación  $\rho = 0.0014$  indica que existe una correlación directa y debil entre los rendimientos del subyacente y los diferenciales en los niveles de las tasas de interés domésticas y extranjeras.

Finalmente, los parámetros estimados de los modelos de Heston y Heston-Hull-White, son consistentes para todos los periodos analizados, y por ello, al momento de valuar la prima de la opción sobre tipo de cambio se esperan primas teóricas confiables, para la toma de decisiones al momento de colocar posiciones en el mercado de derivados, en especial para el instrumento de opciones sobre tipo de cambio, que es un instrumento de cobertura ante acontecimientos adversos en el mercado cambiario.

Es importante señalar, que una de las aportaciones de esta investigación es la estimación de los parámetros del modelo HHW, por medio del método numérico Simplex Nelder-Mead y el algoritmo para su ejecución en Matlab, no obstante, la metodología utilizada y el algoritmo propuesto, son susceptibles a mejoras.

#### **4.5. Cálculo de la prima de la opción aplicado al Mercado Mexicano de Derivados.**

Una vez estimados los parámetros, en esta sección se determinan las primas de las opciones a través de 4 modelos: BS, GK, H y HHW, las cuales se comparan con las primas del mercado que cotizan en el MexDer. Las primas corresponden a 57 precios de ejercicio con incrementos de 5 centavos cuando la opción se encuentra fuera del mercado (OTM), 63 dentro del mercado (ITM) y solamente 1 para el caso en el mercado (ATM), es decir, cuando el precio de ejercicio es igual al precio del activo subyacente.

En los anexos del A.3 hasta el A.12 se presenta el código utilizado para obtener los precios de las opciones *Call* y *Put* para diferentes precios de ejercicio. En la Gráfica 4.3 se muestran las primas teóricas de los cuatro modelos propuestos y los precios de mercado, para las opciones *Call* y *Put* cuando las opciones se encuentran fuera del mercado (OTM).

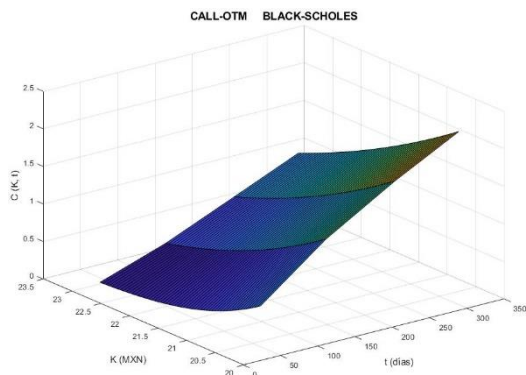
Tabla 4.4. Variación de los precios teóricos respecto a los precios del mercado.

<b>Error promedio</b>	<b>BS</b>	<b>GK</b>	<b>H</b>	<b>HHW</b>
<i>CALL_OTM_2018</i>				
Diciembre	8.24	6.28	5.87	2.05
Marzo	24.99	14.24	12.42	5.95
Junio	38.81	24.16	18.32	8.62
Septiembre	49.99	29.24	21.51	11.79
<i>CALL_ITM_2018</i>				
Diciembre	8.57	2.62	3.46	2.81
Marzo	25.99	10.21	9.24	5.31
Junio	41.59	18.33	12.62	8.05
Septiembre	53.80	22.55	16.31	11.15
<i>PUT_OTM_2018</i>				
Diciembre	6.71	2.89	3.23	2.76
Marzo	14.21	14.96	6.29	3.75
Junio	18.87	24.12	9.31	5.10
Septiembre	21.79	30.21	11.41	7.08
<i>PUT_ITM_2018</i>				
Diciembre	6.13	4.32	4.55	3.05
Marzo	13.64	19.43	8.97	6.05
Junio	17.03	30.90	12.14	7.40
Septiembre	19.50	38.41	13.88	8.71

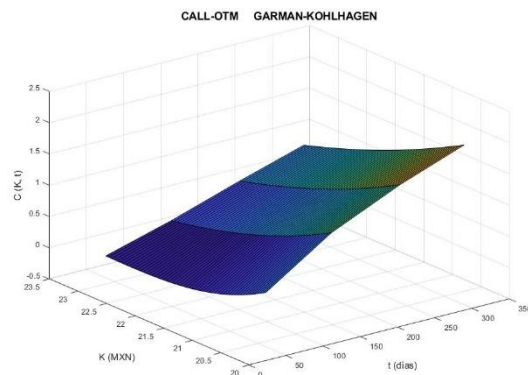
Fuente: Elaboración propia.

Grafica 4.3. Precio de la opción *Call* fuera-del-mercado.

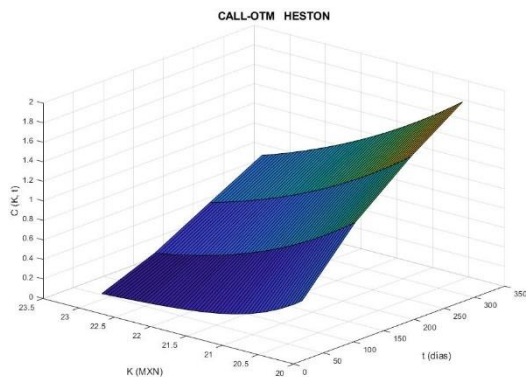
a)



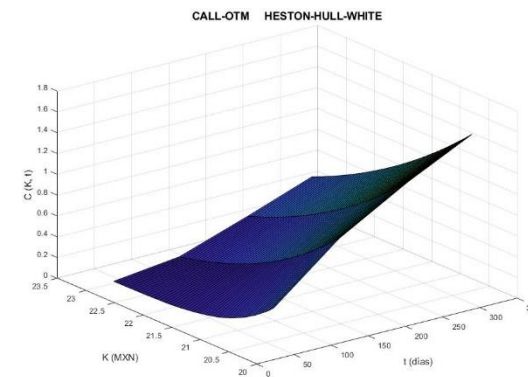
b)



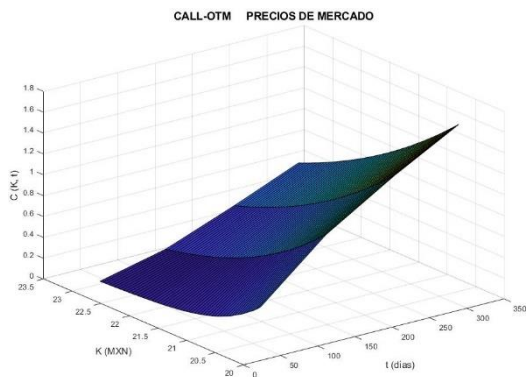
c)



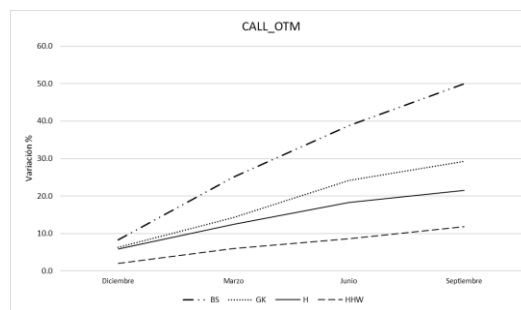
d)



e)



f)



Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream.

Nota. La tabla de valores de los precios teóricos de aprecia en el Anexo B y en Anexo C la tabla de variaciones.

La Gráfica 4.3 inciso a) revela que en las opciones *Call* muy profundamente fuera del mercado y vencimientos cortos, el precio de BS presenta una diferencia mínima de 8.24% y a mayor tiempo de vencimiento la variación incrementa<sup>29</sup>, alcanzando una máxima del 49.99% (Tabla 4.4). De manera general se encuentra que Black-Scholes sobrevalora las opciones *Call* OTM y ITM. En cambio, GK subvalora el precio de la opción y otorga precios negativos, para opciones *Call* muy profundamente fuera del mercado y vencimiento próximo, debido a que las tasas de interés domésticas son más altas que las tasas extranjeras (Gráfica 4.3 b)). La diferencia de las tasas de interés varía entre economías desarrolladas y emergentes debido a los costos de flujos de capital y del régimen de tipo de cambio que adopten los países relacionados (Stiglitz, 2002). También se observa que para opciones *Call* OTM y vencimientos de mediano y largo plazo, los precios por GK son sobrevalorados en menor medida que con BS, con un máximo del 29.24% para 308 días. Para opciones *Call* ITM la variación es menor, en el orden del 22.55% como máximo (Gráfica 4.3 inciso f), Tabla 4.4). En este contexto cabe resaltar que, estudios como los de Carr y Wu (2007), Chen y Gau (2004) y Medina et al. (2003) aplican el modelo de Garman-Kohlhagen para diferentes mercados cambiarios, y obtuvieron resultados semejantes al presente estudio.

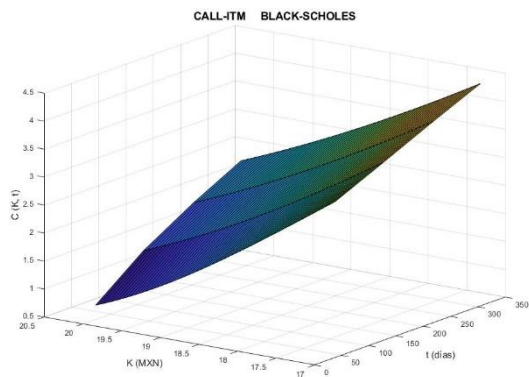
Asimismo, el modelo de Heston (1993) (H) aproxima más sus precios a los del mercado, con tan sólo una diferencia máxima del 21.51% para opciones *Call* OTM y vencimientos grandes, además muestra menor variación que BS y GK (Tabla 4.4). Es importante resaltar que Heston (1993) en su estudio teórico obtuvo que su modelo sobrevalora las opciones OTM, lo cual coincide con los resultados obtenidos en el presente estudio para el tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense, de manera semejante Abraham y Taylor (1993), Bates (1996) y Bakshi et al. (1997), replicaron a H y encontraron primas muy cercanas a las del mercado cambiario.

---

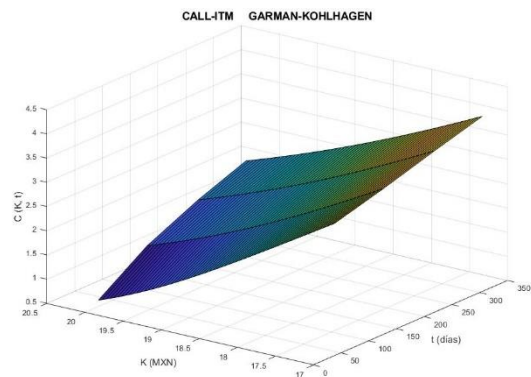
<sup>29</sup> Se reportan parte de resultados en el Anexo B y las variaciones en el Anexo C, y por falta de espacio, los resultados están disponibles para una justificación más profunda del modelo en la siguiente liga <https://drive.google.com/open?id=1NAhx6HD1sjrYFDZ1HdUQIBppz78tjSka>.

Grafica 4.4. Precio de la opción *Call* dentro-del-mercado.

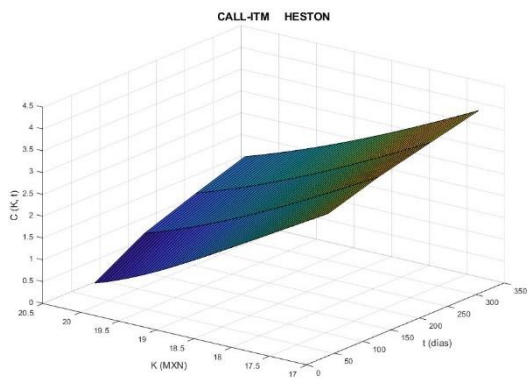
a)



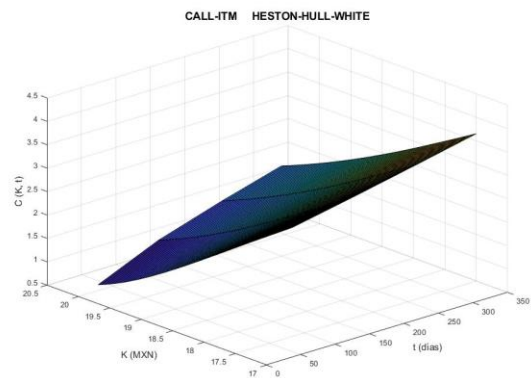
b)



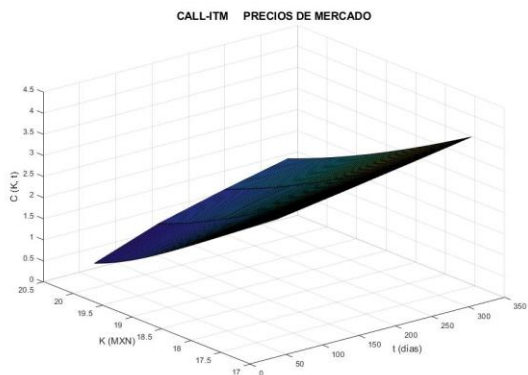
c)



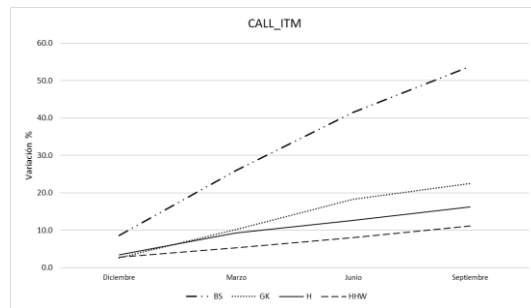
d)



e)



f)



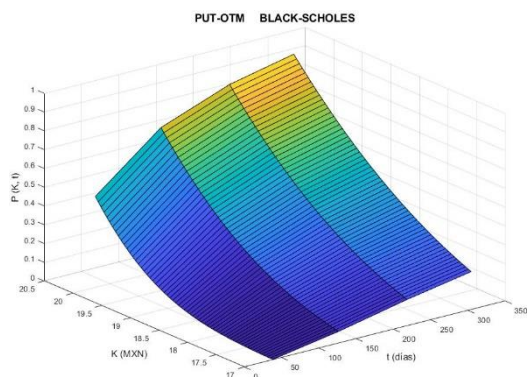
Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream.

Nota. La tabla de valores de los precios teóricos de aprecia en el Anexo B y en Anexo C la tabla de variaciones.

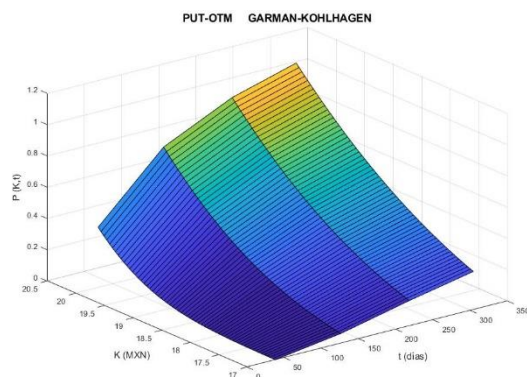


Grafica 4.5. Precio de la opción *Put* fuera-del-mercado.

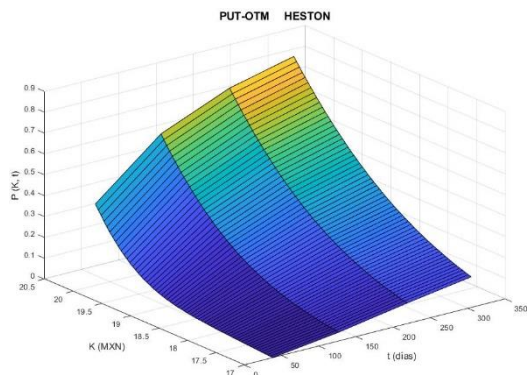
a)



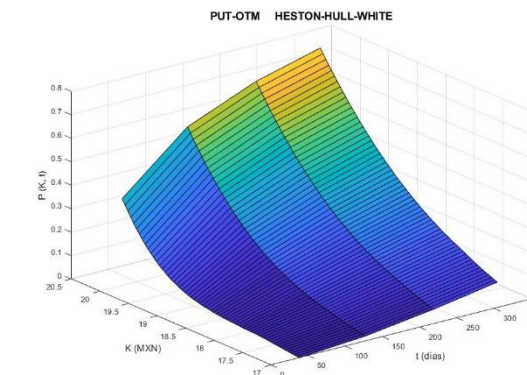
b)



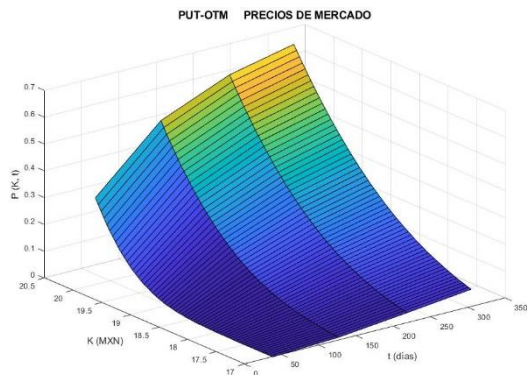
c)



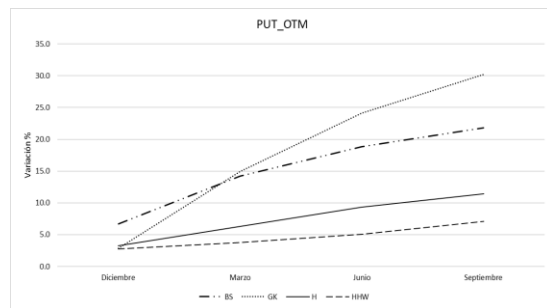
d)



e)



f)

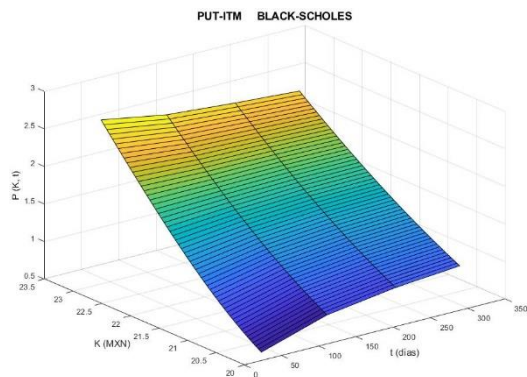


Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream.

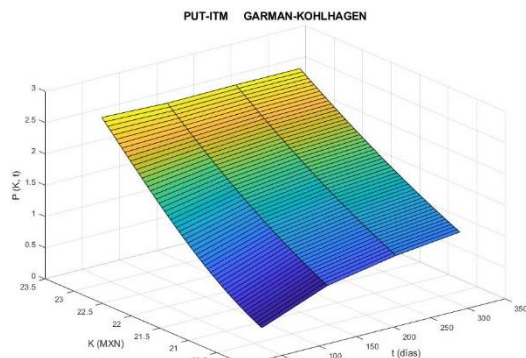
Nota. La tabla de valores de los precios teóricos de aprecia en el Anexo B y en Anexo C la tabla de variaciones.

Grafica 4.6. Precio de la opción *Put* dentro-del-mercado.

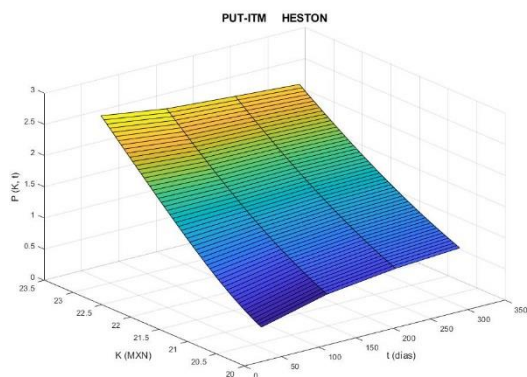
a)



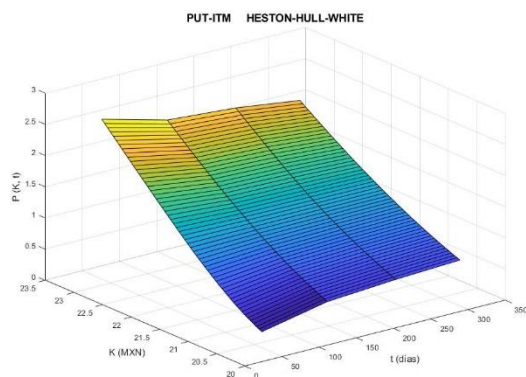
b)



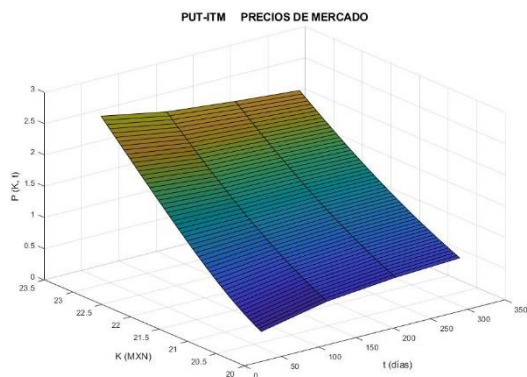
c)



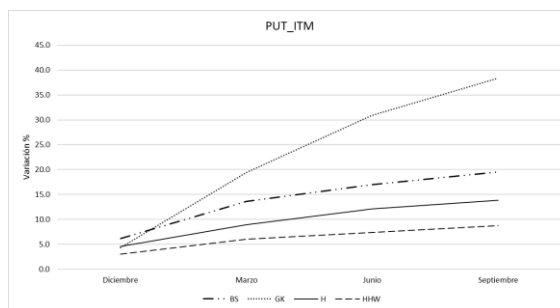
d)



e)



f)



Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream.

Nota. La tabla de valores de los precios teóricos de aprecia en el Anexo B y en Anexo C la tabla de variaciones.

De igual manera estudios para monedas fuertes como el de Levendorskii (2012), Crisóstomo (2014) y Azencott et al. (2015), fortalecen los resultados obtenidos, y Roldán (2018) con su trabajo para economías emergentes, compara los precios reflejados por BS y H para el peso colombiano/dólar estadounidense, sustentando resultados parecidos a los obtenidos en esta tesis.

También se observa en los paneles de las gráficas 4.5 y 4.6, que el modelo que proporciona primas con mayor variación es el modelo de GK. Para opciones *Put* ITM existe la máxima diferencia entre el precio teórico y del mercado con un 38.41% (Gráfica 4.5 incisos c y f; Tabla 4.4) para el vencimiento más largo. En seguida, BS se va acercando a los precios del mercado, con una variación de 21.70% para opciones *Put* muy profundamente OTM. Respecto a los precios *Put* calculados por Heston, son sobrevalorados en el orden del 13.88% como máximo, para opciones dentro del mercado, siendo menor que el 19.50% y 38.41% de BS y GK, respectivamente.

Por su parte, el modelo HHW muestra ser el más eficiente que los modelos ya mencionados. Se puede apreciar en los paneles de las gráficas 4.3-4.6 que subvalora los precios de la opción *Call* OTM y *Put* ITM y los sobrevalora para opciones *Call* ITM y *Put* OTM (Gráfica 4.4 y 4.5), pero con una variación mucho menor que todos los modelos anteriores. La magnitud de los errores es de 11.79% para *Call* OTM con mayor vencimiento y de tan sólo 2.05% para el vencimiento próximo. Respecto al comportamiento de las opciones *Put*, es semejante el error al de opciones *Call*, señalando un máximo igual a 8.71%, mucho menor que el que se obtiene con los modelos de BS, GK y H (19.50%, 38.41% y 13.88%, respectivamente (Tabla 4.4)).

HHW ofrece mayor confianza en las predicciones de las primas de las opciones europeas sobre divisas, ya que incorpora más factores de riesgo como: el tipo de cambio, la volatilidad y tasas de interés cuando presentan un comportamiento estocástico. Es importante señalar que hasta el momento sólo existen estudios teóricos de tres factores, como el de vanHaastrecht y Lord (2009) que obtienen a través de un modelo de forma cerrada, el precio de la opción sobre tipo de cambio considerando la volatilidad y tasas de interés estocásticas, y encontraron una prima más justa para vencimientos más largos. Otros estudios teóricos como el de Grzelak y Oosterlee (2010), Haentjens y Hout (2012), Hendricks et al. (2018) y Ullah (2019), muestran de manera general, que la precisión de los precios teóricos respecto a los de mercado son mejores con los modelos

HHW que con el modelo de Heston, lo cual se corrobora en esta investigación aplicada a una divisa exótica (MXN/USD).

En este contexto, cabe señalar que los inversionistas, las empresas y las instituciones financieras que deseen cubrirse del riesgo de mercado con este instrumento, limitan sus pérdidas al pago de una prima (ya calculada), o pueden obtener beneficios, dependiendo de la posición que se tenga en el mercado y hacia donde se dirija el precio del activo subyacente. Como un primer caso, si se tiene una posición alcista por la compra de una opción *Call*, el inversionista o agente financiero, paga la prima de la opción en caso de que el precio del tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense vaya a la baja, es decir, sea una opción OTM y por lo tanto se debe ejercer inmediatamente la opción, pero si el precio del activo subyacente favorece la posición, es decir vaya a la alza (ITM), la opción otorga beneficios ilimitados y el comprador decide hasta qué momento cierra la posición. Se considera también posición alcista, cuando vende una opción *Put*. En este caso, el vendedor obtiene pérdidas ilimitadas cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio (OTM) y para el comportamiento contrario de la moneda (ITM), el vendedor del *Put* obtiene ganancias limitadas equivalentes a la prima que pagó. En cambio, para posiciones bajistas, como en la compra de un *Put* o la venta de una opción *Call*, se tienen beneficios cuando el precio del activo subyacente va a la baja (para opciones ITM) y para el caso de la compra de un *Put*, los beneficios son ilimitados y las pérdidas máximas son equivalentes a la prima de la opción *Put*, y con comportamiento contrario cuando se vende un *Call*.

Por lo ya expuesto, se puede decir, que los instrumentos derivados y en este caso las opciones, protegen a los agentes financieros e instituciones que las adquieran, ante movimientos adversos del tipo de cambio y las tasas de interés, dicha cobertura propicia el control en la toma de decisiones en la administración de riesgos en el mercado mexicano, y a la vez induce a estabilizar el mercado cambiario. Como podemos ver, las opciones proporcionan cobertura a cambio de la prima de la opción, limita pérdidas y puede otorgar ciertos beneficios de acuerdo con las posiciones que se tengan en el mercado.

## Conclusiones

La administración de riesgos se ha convertido en una característica general de los mercados financieros, pero de manera específica de los mercados de derivados, porque estos últimos han sido concebidos y presentados como herramientas que van dirigidos a la diversificación del riesgo entre los participantes del mercado. Los derivados financieros, en particular las opciones, permiten disminuir o transferir el riesgo incorporado en sus posiciones de mercado a otros que están interesados en tomarlo, a la expectativa de una mayor utilidad.

En un mercado global, los efectos financieros por cambios violentos en las variables macroeconómicas, como los tipos de cambio y las tasas de interés, tienen diferentes niveles de afectación en las organizaciones, en las Instituciones Financieras, inversionistas individuales e institucionales y el Estado. Esto principalmente deteriora la capacidad de pago, liquidez, calificación crediticia y hasta se puede presentar la posibilidad de suspender sus operaciones en el mercado de derivados. Por ello, son necesarios instrumentos financieros actualizados y sofisticados, que permitan evaluar el entorno de la organización o institución en cuanto a los riesgos que enfrenta, y prevenir o reducir los efectos financieros negativos del mercado.

Debido a la globalización de los mercados, las importaciones, las exportaciones, así como la inversión extranjera son actividades que se encuentran en su máximo dinamismo, es por ello, que las empresas están expuestas al riesgo cambiario, dadas las transacciones que realizan diariamente. En este contexto, las opciones sobre divisas son un instrumento de cobertura para empresas, ya que incursionan en nuevos riesgos, dado que se exponen al cambio en el precio de la divisa con la que exportan, afectando su cartera por cobrar. De igual manera, el importador con este instrumento cubre sus pagos futuros a proveedores ante subidas inesperadas del tipo de cambio, así como sus portafolios de inversión y si presenta deuda, también la protege ante posibles incrementos en el precio de la divisa pactada y en las tasas de interés.

Por su parte, los Bancos Centrales han presentado gran interés en el mercado de derivados, en especial para el manejo de la política monetaria. Ante una crisis económica o financiera, el Banco Central puede utilizar opciones como un estabilizador del mercado cambiario y con ello evitar el uso de las reservas internacionales, por lo tanto, evadir sus impactos en la política monetaria. De esta manera los derivados financieros relajan el mercado cambiario. En este escenario, existen bancos que han aplicado estrategias con opciones *Put* ITM para controlar la

volatilidad del tipo de cambio, tales como, Banco de México en 1996, Banco de China en 1998 y Banco de Colombia en 1999, logrando estabilizar el mercado spot. Una vez controlado el tipo de cambio, acumularon las reservas internacionales necesarias, las cuales pueden ser vendidas en el mercado para defender la moneda doméstica, lo cual da lugar a detener una fuerte depreciación.

Definitivamente, el contar con instrumento de cobertura que considera más factores macroeconómicos, como el tipo de cambio, las tasas de interés domésticas y extranjeras, y la volatilidad, estocásticos, garantiza reducciones de exposición al riesgo de mercado cambiario para todos los agentes financieros y no financieros. Las empresas importadoras y exportadoras confían sus flujos financieros cuando aseguran sus portafolios de inversión por medio de opciones; los Bancos Centrales, si utilizan dicho instrumento fortalecen la economía a través de una política monetaria eficiente, estabilizando el tipo de cambio y las tasas de interés, también crea un país más competitivo y confiable para la inversión, aunado a ello, los bancos protegidos por dicho instrumento derivado, hará que sean más rentables y con mayor calificación crediticia.

Por lo anterior, en este trabajo se presenta un instrumento de cobertura que contenga más información del mercado, denominado opciones sobre tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense, con tasas de interés doméstica y extranjera, y volatilidad, cuando presentan un comportamiento estocástico, aplicado al Mercado Mexicano de Derivados. Los resultados obtenidos del modelo Heston-Hull-White, demuestran que se cumplió con el objetivo de la investigación y se acepta la hipótesis nula, ya que se obtuvo una prima más justa al precio del mercado.

Sin embargo, existen limitaciones técnicas para el cálculo del precio de la opción europea, tal como la aproximación generalizada para obtener los coeficientes o parámetros de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Para futuras investigaciones se deja el rediseño del modelo Heston-Hull-White para opciones sobre acciones y opciones sobre cualquier par de divisas. También queda la agenda abierta de trabajo para calibrar el modelo fuera de la muestra.

## Bibliografía

- Abraham, A. y Taylor, W. M. (1993). Pricing Currency Options with Scheduled and Unscheduled Announcement Effects on Volatility. Source: *Managerial and Decision Economics*. Vol. 14. No. 4, 311-326.
- Ahlip, R. (2008). Foreign exchange options under stochastic volatility and stochastic interest rates. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 11, No. 3, 277–294.
- Amin, K. I. and V. K. Ng. (1994). A comparison of predictable volatility models using option data. Research Department working paper, International Monetary Fund.
- \_\_\_\_\_, and R. Jarrow. (1991). Pricing foreign currency options under stochastic interest rates, *Journal of International Money and Finance* Vol. 10, 310–330.
- Andersen, T.G. and B.E. Sørensen. (2012). GMM Estimation of a Stochastic Volatility Model: a Monte Carlo Study. *Journal of Business and Economic Statistics*. Vol. 14, pp. 328–352.
- \_\_\_\_\_. (2006). Closed form pricing of FX options under stochastic rates and volatility. Presentation at Global Derivatives Conference, Paris.
- Anthonie, W., van del Stoep, L. Grzelak and C. Oosterlee. (2016). A Novel Monte Carlo Approach to Hybrid Local Volatility Models. *Quantitative Finance*, Vol. 00, No. 00, pp. 1-31.
- Anu, M. (1997). Introduction to Modeling and Simulation. WSC97: 1997 Winter Simulation Conference, ed. IEEE Computer Society, pp. 7-13.
- Arenas, R. (1999). Cambios financieros globales y su impacto sobre el Sistema Monetario Internacional. *Convergencia*. No. 19, pp. 111-132.
- Azencott, R., Y. Gadhyan and R. Glowinski. (2015). Option Pricing Accuracy for Estimated Heston Models. *Quantitative Finance*, Vol. 00, No. 00, pp. 1-18.
- Bachelier, L. (1900). "Theory of Speculation", *The Random Character of Stock Market Prices*, ed. P. H. Cootner, Cambridge, Mass.:M.I.T. Press, 1967, pp. 17-78.
- Banco de México (2011). Informe Anual 2011. Banco de México, México.
- \_\_\_\_\_. (2009). Regímenes cambiarios en México a partir de 1954. Trabajo de Investigación.
- \_\_\_\_\_. (2007). Resumen Informe Anual 2006. Banco de México. México.
- Barton, R. and J. Ivery. (1996). Nelder-Mead Simplex Modifications for Simulation Optimization. *Management Science*, Vol. 42, No. 7, pp. 954–973.

- Bates, D. (1996). Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Market Options. *Reviews of Financial Studies*, No. 9, pp. 69-107.
- \_\_\_\_\_. (2000). Post-'87 Crash Fears in the S&P 500 Futures Option Market. *Journal of Econometrics*, No. 94, pp.181-238.
- \_\_\_\_\_. (2003). Empirical Option Pricing: A Retrospection. *Journal of Econometrics*, No. 116, pp. 387-404.
- Bakshi, C. Cao, C., and Z. Chen. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models, *The Journal of Finance*, Vol. 52, pp. 2003-2049.
- \_\_\_\_\_ and Chen, Z. (1997). Equilibrium Valuation of Foreign Exchange Claims. *The Journal of Finance*. Vol. LII. No. 2. 799-826.
- Biger, N. and Hull, J. (1983). *The Valuation of Currency Options*. York University. Canada.
- Bitroes, J. y A. Lagunilla (1981). *Historia de la banca y moneda en México*. México.
- Black, F. and M. Scholes. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*. Vol. 81, pp. 637-65.
- Bodurtha, J. N. and Courtadon, G. R. (1987). "The statistical distribution of exchange rates". *Journal of International Economics*. Vol. 22, pp. 297-319.
- Bolsa Mexicana de Valores (1994). *Cien años de la Bolsa Mexicana de Valores en México*, México: BMV.
- Brace, D. Gatarek, and M. Musiela. (1977). The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, Vol. 7, 127-155.
- Bray, N. (1988). *Report of the Presidential Task Force on Market Mechanisms*. Washington, D.C.
- Brigo. D. and F. Mercurio. (2007). *Interest rate models. Theory and practice*. Springer Finance.
- Carr and D.B. Madan. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, 61–73.
- Carr, P. and L., Wu. (2007). Stochastic Skew in Currency Options, *Journal of Financial Economics*, 86(1), 213-247.
- Carson, J. S. (2004). Introduction to modeling and simulation. *Proceedings of the 36<sup>th</sup> Conference on Winter Simulation*, Association for Computing Machinery, pp. 9-16.
- Castellanos, S.G. (2000). El efecto del 'corto' sobre la estructura de tasas de interés, Banco de México, Documentos de Investigación no. 2000-1.



- Chen, M. H. and Gau, Y. F. (2004). Pricing Currency Options Under Stochastic Volatility. Department of International Business Studies, National Chi Nan University. No. 545. Taiwan.
- Chernov, M. and E. Ghysels. (1998). A study towards a unified approach to the joint estimation of objective and risk neutral measures for the purpose of options valuation. Working paper, Pennsylvania State University.
- Chesney M. and L. Scott. (1989). Pricing European Currency Options: A Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 24, No. 3, 267-284.
- Climent-Hernández, J. A. y F., Venegas. (2012). Valuación de opciones sobre subyacentes con rendimientos  $\alpha$ -estables. *Contaduría y Administración*, UNAM. Próxima publicación.
- Correa, E. (2000). "Conglomerados y reforma financiera", en *Comercio Exterior*, vol. 50, núm. 6, pp. 458-468
- (1998). *Crisis y desregulación financiera*, México: Siglo XXI.
- Corradi, V. and Distaso, W. (2006). Semi-parametric comparison of stochastic volatility models using realized measures, *Review of Economic Studies*, Vol. 73, pp. 635-667
- Cox, J., Ingersoll, J. y Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, Vol. 53, 385-407.
- Cozma, A. and Reisinger, C. (2016). A mixed Monte Carlo and PDE variance reduction method for foreign exchange options under the Heston-CIR model. Working paper, arXiv:1509.01479v3 [q-fin.CP].
- Crisóstomo, R. (2014). An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab. CNMV Working Paper No. 58.
- Day, T. E., and Lewis, C. M. (1992). Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options. *Journal of Econometrics*, 52, 267-287.
- De Jesús, R. y E. Ortiz. (2013). El efecto de la volatilidad del peso mexicano en los rendimientos y riesgo de la Bolsa Mexicana de Valores. *Contaduría y Administración*. Vol. 58, No. 3. Pp. 89-119.
- Duffie, D. and K. Singleton. (1993). Simulated moments estimation of Markov models of asset prices. *Econometrica*, No. 61, pp. 929-952.

- Fang, F. and C. W. Oosterlee. (2008). A Novel Pricing Method for European Options Based On Fourier-Cosine Series Expansions. Munich Personal RePEc Archive.
- Fernández B., M., Galán y P., Saavedra. (2003). Dos estrategias ganadoras para la opción Banxico. *Economía Mexicana*. Vol 2.
- Fleming, J. (1998). The Quality of Market Volatility Forecasts Implied by S&P 100 Index Option Prices. *Journal of Empirical Finance*, 5, 317-345.
- Fondo Monetario Internacional (2002). *Market developments and issues*, Washintong: *Global Financial Stability Report*.
- Fridman, M. and Harris, L. (1998). A maximum likelihood approach for non-Gaussian stochastic volatility models. *Journal of Business and Economic Statistics*, No. 16, pp. 284–291.
- Garber, P. (1998). *Derivates international capital flows: working paper 6623*, Massachusetts: National Bureau Economic Research.
- Garman, M. and Kohlhagen, S. (1983). Foreign Currency Option Values. *Journal of International Money and Finance*, Vol. 2, 231-237.
- Geweke, J. (1994). Bayesian comparison of econometric models. Working Paper, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Minnesota.
- Girón, A. (2003). *Crisis financiera*, México: Miguel Ángel Porrúa. México.
- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer-Verlag. ISBN 0-387-00451-3.
- Grabbe, J. O. (1983). The Pricing of *Call* and *Put* Options on Foreign Exchange, *Journal of International Money and Finance*, Vol. 2, 239-253.
- Grajales, C. C, y Pérez, R. F. (2008). Modelos discretos y continuos para estimar la densidad de probabilidad de la volatilidad estocástica de los rendimientos de series financieras, *Cuadernos de Administración*, Vol. 21, No. 036, pp. 113-132.
- Grzelak, L. and C. W. Oosterlee. (2010). On the Heston Model with stochastic Interest Rates. Munich Personal RePEc Archive.
- \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, and S. van Weeren. (2009). Extension of Volatility Equity Models with Hull-White Interest Rate Process. Munich Personal RePEc Archive.

- Güemez, G. (2008). The development of local financial markets: The Mexican Experience. MexDer Mexico, consultado el 1 de junio de 2009 [<https://www.mexder.com.mx/mex.presentaciones.html>].
- Guillén, I. A. (2007). *Mito y realidad de la globalización neoliberal*, México: Miguel Ángel Porrúa.
- Guo, D. (1996). The Predictive Power of Implied Stochastic Variance from Currency Options. *Journal of Futures Markets*, 16, 915-942.
- \_\_\_\_\_. (1998). The Risk Premium of Volatility Implicit in Currency Options. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16, 498-507.
- Haentjens, T. (2012). ADI FD Schemes for the Numerical Solution of the Three-dimensional Heston–Cox–Ingersoll–Ross PDE. *Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM*, Vol. 1479, pp. 2195-2199.
- \_\_\_\_\_ and in't Hout, K. J. (2012). ADI finite difference schemes for the Heston-Hull-White PDE. *The Journal of Computational Finance*, Vol 16, pp. 83-110.
- Hansen, L. P. (1982). Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators, *Econometrica*, Vol 50; No. 4, pp. 1029-1054.
- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology. *Econometrica*, Vol. 60, 77-105.
- Hendricks, C., M. Ehrhardt, and M. Günther. (2018). Hybrid finite difference/pseudospectral methods for the Heston and Heston-Hull-White PDE. *Journal of Computational Finance*, Vol. 21, No 5, pp. 1-33.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies*. Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.
- Himmelblau, D. (1992). *Applied Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, NY-London-Toronto.
- Ho, T., y Lee, S (1986). Term structure movements and pricing interest rates contingent claims. *Journal of Finance*, Vol. 41, 1011-1029.
- Hui, C. H., Lo, C. F. y Fung, L. (2008). Valuation currency options with a mean reverting process: a study of Hong Kong dollar. *International Journal of Finance and Economics*. InterScience. Vol. 13. Pp 118-134.

- Hull, J. C. (2008). *Options, Futures and Other Derivates*. Pearson. Prentice Hall. Toronto. Pp. 822.
- Hull, J. and A. White. (1996). Using Hull-White Interest Rate Trees. *J. Derivatives*, Vol. 3, No. 3, 26– 36.
- \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_. (1993). One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 28, No. 2, 235-253.
- \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_. (1990). Pricing Interest-Rate-Derivative Securities, *Review of Financial Studies*. Vol. 3, No. 4, 573-592.
- \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance*, 42, No. 2, 281-300.
- Hunt, J. Kennedy, and A. Pelsser. (2000). Markov functional interest rate models. *Finance and Stochastics*, Vol. 4, 391–408.
- Jacquier, E., Polson, N. G. and Rossi, P. E. (1994). Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion). *Journal of Business and Economic Statistics*, No. 12, pp. 371–417.
- \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ (2004). Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. *Journal of Econometrics*, No. 122, pp. 185–212.
- Kanaya, S. and Dennis, Kristensen. (2010). Estimation of Stochastic Volatility Models by Nonparametric Filtering. Center for Research in Econometric Analysis of Time Series. No. 67.
- Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H. and Wright, P. E. (1998). Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9, No. 1, pp. 112–147.
- Lagunilla, I. A. (1973). *Historia de la Bolsa de México*, México: BMV.
- Levendorskii, Sergei Z. (2012). Efficient Pricing and Reliable Calibration in the Heston Model. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1979225>.
- Lewis, Robert M., Torczon, Virginia and Trosset, Michael. (2000). Direct Search Methods: Then and Now. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 124, pp. 191-207.

- Liang, Y. and C. Xu. (2019). An Efficient Conditional Monte Carlo Method for European Option Pricing with Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rate. *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 97, No. 3, pp. 638-655.
- Lin, Y. N., Strong, N., and Xu, X. (2001). Pricing FTSE 100 Index Options Under Stochastic Volatility. *Journal of Futures Markets*, No. 21, pp. 197-211.
- Liu, J. (1998). Portfolio selection in stochastic environments. Working Paper, Stanford University.
- López, H. F., Rodríguez, B. D., y Ortiz, A. F. (2011). Volatilidad estocástica del tipo de cambio peso-dólar: el regimen flotante en México. *Investigación Económica*. Vol. 70, No. 276, pp. 19-50.
- Lord and J. Kahl. (2008). Optimal Fourier inversion in semi-analytical option pricing. *Journal of Computational Finance*, Vol. 10, No. 4.
- Malfeito, J. G. (2017). Brexit: Efectos económicos en un escenario incierto. *La Albolafia: Revista de Humanidades y cultura*, pp. 55-74.
- Marichal, C. (2010). *Nueva historia de las grandes crisis financieras: una perspectiva global, 1873-2008*. Barcelona: Debolsillo, pp. 424.
- Medina, M. G. González, J. D. y García, A. T. (2003). Una Estrategia de Acumulación de Reservas Mediante Opciones de Venta de Dólares. El Caso de Banco de México. Banco de México.
- Medina, R.T., y H.Y. Rodríguez. (2010). Una reversión de los modelos de volatilidad estocástica. *Comunicaciones en Estadística*, Vol. 3, No. 1, pp. 79-98.
- Melino, A. and S. Turnbull. (1991). The Pricing of Foreign Currency Options, *Canadian Journal of Economics*. Vol. 24, 455-480.
- \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_. (1990). The Pricing of Foreign Currency Options with Stochastic Volatility, *Journal of Econometrics*. Vol. 45, 239-265.
- Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Beil Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, 141-183.
- Miltersen, K. Sandmann, and D. Sondermann. (1977). Closed-form solutions for term structure derivatives with lognormal interest rates. *Journal of Finance*, Vol 52, 409-430.

- Mondal, M.K., A. Alim, F. Rahman, and H.A. Biswas. (2017). Mathematical Analysis of Financial Model on Market Price with Stochastic Volatility. *Journal of Mathematical Finance*, No. 7, pp. 351-365.
- Mykland, P. A., and L. Zhang. (2009). The Econometrics of High Frequency Data, in *Statistical Methods for Stochastic Differential Equations*, ed. by M. Kessler, A. Lindner, and M. Sørensen. New York: Chapman & Hall/CRC Press (forthcoming). No. 1405, pp. 1406-1421.
- Najera, L. y R. De Jaesús. (2013). Evolución del tipo de cambio peso mexicano/dólar estadounidense y el uso de derivados financieros. *Análisis Económico*, vol. XXVIII, No. 67, pp. 153-170
- Nandi, S. (1998). How Important Is the Correlation Between Returns and Volatility in A Stochastic Volatility Model? Empirical Evidence from Pricing and Hedging in the S&P 500 Index Options Market. *Journal of Banking and Finance*, 22, 589-610.
- Nelder, J. A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, No. 7, pp. 308–313.
- Ortiz, M., G. (1994). *La reforma financiera y la desincorporación bancaria*, México: FCE.
- Ortiz, G. y L. Solís (1978). *Estructura Financiera y Experiencia Cambiaria: México 1954-1977*, México: Banco de México.
- Pan, J. (1998). Integrated time-series analysis of spot and option prices. Working Paper, Stanford University.
- Partnoy, F. (2003). *Codicia contagiosa*, Argentina: El Ateneo.
- Pascale, R. (1999). *Decisiones Financieras*. Tercera Edición, Ediciones Machi, Argentina.
- Pelsser. (2000). *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*. Springer Finance.
- Ramírez, Z., G. Vázquez y A. Bello. (2008). *El casino de los derivados. Expansión*. Pp. 129-140.
- Ramos-Francia, M. y Torres, G. A. (2005). Reducción de la Inflación a Través de un Esquema de Objetivos de Inflación: La Experiencia Mexicana. Banco de México, Documentos de Investigación. No. 2005-01.
- Rastrigin, L. (1975). *Methods of random search*. House FML, Moscow.
- Rodríguez, J. F. (2010). La crisis del 2010. *Análisis Económico*. Vol. XXV, No. 60, pp. 333-344.

- Roldán, L.C. (2018). Pronóstico de divisas latinoamericanas con modelos de Volatilidad Estática y Estocástica. *Ingeniería, Universidad Piloto de Colombia*, Vol. 23, No.2, pp. 166-189.
- Rubinstein, M. (1983). Displaced Diffusion Option Pricing, *Journal of Finance*. Vol. 38, No. 1, 213-217.
- Samuelson, P. A. (1965). Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*. Vol. 6, 13-31.
- \_\_\_\_\_ and Merton, R. C. (1969). A complete model of warrant pricing that maximizes utility. *Industrial Management Review*, Vol 10, No.2, pp. 17-46.
- Schwert, G. W. (1990). Stock Volatility and the Crash of 87, *Review of Financial Studies*. No. 3, pp. 77-102.
- Schiller, R. (2003). *Risk management for the masses*, EE.UU.: The Economist.
- Schinasi, G. (2006). *Safeguarding financial stability. Theory and practice*, Washintong: IMF.
- Schöbel, R. y Zhu, J. (1999). Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: An extension. *European Finance Review*, No. 4, 23–46.
- Scott, L. O. (1997). Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimators and applications. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, 419–438.
- \_\_\_\_\_. (1987). Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation, and application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. No. 22, pp. 419-438.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer.
- Singh, S. and A. Dixit. (2016). Performance of the Heston's Stochastic Volatility Model: A Study in Indian Index Options Market. *Theoretical Economics Letters*, No. 6, pp. 151-165.
- Smoller, J. (1983). *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer- Verlags.
- So, M. K. P., W.K., Li and K., Lam. (2002). A threshold stochastic volatility model. *Journal of Forecasting*, No. 21, pp. 473–500.
- Spendley, W., G. R. Hext and F. R. Himsworth. (1962), Sequential applications of simplex designs in optimization and evolutionary operation, *Technometrics* No. 4, pp. 441-461.
- Stein, E. M. and J. C. Stein. (1991). Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach, *Review of Financial Studies*. Vol. 4, 727-752.

- Stiglitz, J. (2002). “The Insider-What I Learned at the World Economic Crisis”, *The New Republic*, No. 57.
- Ullah, M.Z. (2019). Numerical Solution of Heston-Hull-White Three-Dimensional PDE with a High Order FD Scheme. *Mathematics*, No. 7, pp.
- Van der Stoep, A.W., Grzelak, L.A. and Oosterlee, C.W. (2014). The Heston Stochastic-Local Volatility Model: Efficient Monte Carlo Simulation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, No. 17.
- Vargas, G. y L. Pérez. (2014). Gruma. Un análisis microeconómico. ELSEVIER Economía Informa, Vol. 2014, No. 386, pp. 31-50.
- Venegas-Martínez, F. (2006). Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, 1a. edición. International Thomson Editors, México. ISBN: 13-978-970-686-574-8, ISBN: 10-970-686-574-8. (1139 págs.).
- vanHaastrecht, R., Lord, A. (2009). Pelsser, and D. Schrager. (2009). Pricing long-dated insurance contracts with stochastic volatility and stochastic interest rates. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 45, No. 3.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, 177-188.
- Wiggins, J. B. (1987). Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates, *Journal of Financial Economics*. Vol. 19, pp. 351-372.

### **Referencias electrónicas**

- Banco de México (varias estadísticas) (<http://www.banxico.org.mx>). Base de datos Bloomberg (varias estadísticas). Bolsa Mexicana de Valores (varias estadísticas) (<http://www.bmv.com.mx>). Mercado Mexicano de Derivados (varias estadísticas) (<http://www.mexder.com.mx>).



## ANEXO A

### A.1. ALGORITMO PARA ESTIMAR LOS PARÁMETROS DEL PRECIO DE LA OPCIÓN SOBRE DIVISAS

#### MODELO DE HESTON (1993)

##### Optimización no lineal: Método de Nelder\_Mead

```
function [xoptimo,fval,exitflag,output] = buscar()

x=[0.059561186021790,0.018451576117155,0.299609479972259,4.9002418477966
63,0.001361643104666];

options=optimset('OutputFcn',{@outfun},'LargeScale','off');
[xoptimo,fval,exitflag,output]=fminsearch(@Heston_fnc, x, options);

tic
return

end

*****

function Pr_rechazo = Heston_fnc()

format long;

x=[0.059561186021790,0.299609479972259,0.018451576117155,4.9002418477966
63,0.001361643104666];

mu=x(1);
sigma=x(3);
theta=x(2);
kapa=x(4);
rho=x(5);
m=1000;
n=3830;
T=14.804598;
var_o=theta;
S_o=10.6102;

dt=T/n;
raiz_dt=sqrt(dt);

fiddw2=fopen('dw2.bin','w');
fclose(fiddw2);
fiddw1=fopen('dw1.bin','w');
fclose(fiddw1);
fiddw2=fopen('dw2.bin','a');
```

```

fiddw1=fopen('dw1.bin','a+');

for i=1:m
    rand('state',2*i-1);
    dw1=raiz_dt*randn(1,n);
    fwrite(fiddw1,dw1,'double');
    rand('state',2*i);
    dZ=raiz_dt*randn(1,n);
    dw2=rho*dw1+sqrt(1-rho*rho)*dZ;
    fwrite(fiddw2,dw2,'double');
end

clear dw2;
clear dw1;

fids=fopen('s.bin','w');
fclose(fids);
fidv=fopen('v.bin','w');
fclose(fidv);
fidr=fopen('r.bin','w');
fclose(fidr);
fids=fopen('s.bin','a+');
fidv=fopen('v.bin','a+');

S=zeros(1,n+1);
var=zeros(1,n+1);
Ret=zeros(1,n+1);

var(1)=var_o;
S(1)=S_o;
for k=1:m
    jumpw=(n)*8*(k-1);
    fseek(fiddw1,jumpw,-1);
    fseek(fiddw2,jumpw,-1);
    dw1=fread(fiddw1,n,'double');
    dw2=fread(fiddw2,n,'double');
    for i=2:n+1
        S(i)=S(i-1)*(1+mu*dt+sqrt(var(i-1))*dw1(i-1));
        var(i)=var(i-1)+kapa*(theta-var(i-1))*dt+sqrt(var(i-1))*...
            *sigma*dw2(i-1);
        while var(i)<0
            var(i)=var(i-1)+kapa*(theta-var(i-1))*dt+sqrt(var(i-1))*...
                *sigma*(rho*dw1(i-1)+sqrt(1-rho*rho)*randn*raiz_dt);
        end
    end
    end
    fwrite(fids, S, 'double');
    fwrite(fidv, var, 'double');
end

fclose(fiddw1);
fclose(fiddw2);

REAL=xlsread('RealD.xlsx');

```

```

Test_KS=zeros(m,2);

fidr=fopen('r.bin','a');
for k=1:m
    jump=(n+1)*8*(k-1);
    fseek(fids,jump,-1);
    S=fread(fids,n+1,'double');
    Rendimiento=log(S(2:end)./S(1:end-1));
    fwrite(fidr,Retorno,'double');
    [H,P]=kstest2(Rendimiento,REAL);
    Test_KS(k,:)=[H,P];
end

Pr_rechazo=sum(Test_KS(:,1))/m;

fclose(fidr);
fclose(fids);
fclose(fidv);
fiddw1=fopen('dw1.bin','w');
fclose(fiddw1);
fiddw2=fopen('dw2.bin','w');
fclose(fiddw2);
return

end

*****
function stop=outfun(x, optimValues, state)

stop=false;

    switch state
        case 'init'
            hold on
        case 'iter'

            plot(x(1),x(2),'*');

            text(x(1)+.15,x(2),num2str(optimValues.iteration));
            case 'done'
                hold off
        otherwise
            end
    end
end

```

## A.2. ALGORITMO PARA ESTIMAR LOS PARÁMETROS DEL PRECIO DE LA OPCIÓN SOBRE DIVISAS

### MODELO DE HESTON-HULL-WHITE

#### Optimización no lineal: Método de Nelder\_Mead

```
function [xoptimo,fval,exitflag,output] = buscar()

x=[0.018602095714579,0.409511092232196,7.522613478760334,0.0014269769633
05,0.254982488808616,-0.108686167945116,0.014430342465004];

options=optimset('OutputFcn',{@outfun},'LargeScale','off');
[xoptimo,fval,exitflag,output]=fminsearch(@Heston_fnc, x, options)

tic
return
end

*****
function Pr_rechazo = HestonHullWhite_fnc(x);

format long;

x=[0.018602095714579    0.409511092232196    7.522613478760334
0.001426976963305    0.254982488808616    -0.108686167945116
0.014430342465004];

theta=x(1); sigma=x(2); kapa=x(3); rho=x(4); lambda=x(5); theta2=x(6);
eta=x(7);

S_o=10.6102;      %Precio de cierre de mercado del dia 14/04/2003
var_o=theta;
%r_o=0.002786;    %Rendimiento del dia 15/04/2003
fw_o=theta2;
tasa_o=0.077;    %Tasa de interes libre de riesgo del dia
%theta2=0.21;
n=3830;
T=14.8046;

dt=T/n;
raiz_dt=sqrt(dt);

fiddw1=fopen('dw1.bin','w');
fclose(fiddw1);
fiddw2=fopen('dw2.bin','w');
fclose(fiddw2);
fiddw3=fopen('dw3.bin','w');
fclose(fiddw3);
fiddw1=fopen('dw1.bin','a+');
fiddw2=fopen('dw2.bin','a+');
```

```

fiddw3=fopen('dw3.bin','a');

for i=1:m
    rand('state',2*i-1);
    dW1=raiz_dt*randn(1,n);
    fwrite(fiddw1,dW1,'double');
    rand('state',2*i);
    dZ=raiz_dt*randn(1,n);
    dW2=rho*dW1+sqrt(1-rho*rho)*dZ;
    fwrite(fiddw2,dW2,'double');
    rand('state',2*i-1);
    dW3=raiz_dt*randn(1,n);
    fwrite(fiddw3,dW3,'double');
end

clear dW1;
clear dW2;
clear dW3;

fids=fopen('s.bin','w');
fclose(fids);
fidv=fopen('v.bin','w');
fclose(fidv);
fidtasa=fopen('tasa.bin','w');
fclose(fidtasa);
fidr=fopen('r.bin','w');
fclose(fidr);
fids=fopen('s.bin','a');
fidv=fopen('v.bin','a');
fidtasa=fopen('tasa.bin','a');
fidr=fopen('r.bin','a');

s=zeros(1,n+1);
var=zeros(1,n+1);
tasa=zeros(1,n+1);
r=zeros(1,n+1);

s(1)=S_o;
var(1)=var_o;
theta2=fw_o;
tasa(1)=tasa_o;

for k=1:m
    jumpW=(n)*8*(k-1);
    fseek(fiddw1,jumpW,-1);
    fseek(fiddw2,jumpW,-1);
    fseek(fiddw3,jumpW,-1);
    dW1=fread(fiddw1,n,'double');
    dW2=fread(fiddw2,n,'double');
    dW3=fread(fiddw3,n,'double');
    for i=2:n+1
        s(i)=s(i-1)*(1+tasa(i-1)*dt+sqrt(var(i-1))*dW1(i-1));
        var(i)=var(i-1)+kapa*(theta-var(i-1))*dt+sqrt(var(i-1))...

```

```

        *sigma*dW2(i-1);
    while var(i)<0
        var(i)=var(i-1)+kapa*(theta-var(i-1))*dt+sqrt(var(i-1))...
            *sigma*(rho*dW1(i-1)+sqrt(1-rho*rho)*randn*raiz_dt);
        %theta2(i)=fw_0(i-1)+((eta^2)/(2*lambda^2))*(1-exp(-
lambda*t))^2);
        tasa(i)=tasa(i-1)+lambda*(theta2-tasa(i-1))*dt+eta*dW3(i-1);
    end

    end
    fwrite(fids, s, 'double');
    fwrite(fidv, var, 'double');
    %fwrite(fidtheta2, theta2, 'double');
    fwrite(fidtasa, tasa, 'double');
    fwrite(fidr, r, 'double');

end

fclose(fidw1);
fclose(fidw2);
fclose(fidw3);

REAL=xlsread('Real.xls');

Test_KS=zeros(m,2);

fidr=fopen('r.bin','a');
for k=1:m
    jump=(n+1)*8*(k-1);
    fseek(fids,jump,-1);
    S=fread(fids,n+1,'double');
    Rendimiento=log(S(2:end)./S(1:end-1));
    fwrite(fidr,Rendimiento,'double');
    [H,P]=kstest2(Rendimiento,REAL);
    Test_KS(k,:)=[H,P];
end

Pr_rechazo=sum(Test_KS(:,1))/m;
fclose(fidr); fclose(fids);
fclose(fidv); fclose(fidtasa);
fidw1=fopen('dw1.bin','w');
fclose(fidw1);
fidw2=fopen('dw2.bin','w');
fclose(fidw2);
fidw3=fopen('dw3.bin','w');
fclose(fidw3);
return
end

*****
function stop=outfun(x, optimValues, state)

stop=false;
    switch state

```

```
case 'init'
    hold on
case 'iter'

    plot(x(1),x(2),'*');

    text(x(1)+.15,x(2),num2str(optimValues.iteration));
case 'done'
    hold off
otherwise
end
end
end
```

### A.3. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN CALL Y PUT SOBRE TIPO DE CAMBIO

#### MODELO DE BLACK-SCHOLES

```
function [Call_BS] = CallBS(S0,K,T)

Call=xlsread('bscall.xlsx');
S0=20.1404;
K=Call(:,2);
T=Call(:,1)/360;

sigma=0.217580020;
r=0.0817;

for k=1:57

d1(k)=(log(S0/K(k))+r*T(k))/(sigma*sqrt(T(k)))+sigma*sqrt(T(k))/2;
d2(k)=d1(k)-sigma*sqrt(T(k));

Call_BS(k)=S0*normcdf(d1(k))-K(k)*exp(-r*T(k))*normcdf(d2(k));

end
*****

function [Put_BS] = PutBS(S0,K,T)

Put=xlsread('bsput.xlsx');
S0=20.1404;
K=Put(:,2);
T=Put(:,1)/360;

sigma=0.217580020;
r=0.0817;

for k=1:63

d1(k)=(log(S0/K(k))+(r-div)*T(k))/(sigma*sqrt(T(k)))+sigma*sqrt(T(k))/2;
d2(k)=d1(k)-sigma*sqrt(T(k));

Put_BS(k)=K(k)*exp(-r*T(k))*normcdf(-d2(k))-S0*normcdf(-d1(k));

end
```



#### A.4. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN CALL Y PUT SOBRE TIPO DE CAMBIO

##### MODELO DE GARMAN-KOHLHAGEN

```
function [Call_GK] = CallGK(S0,K,T)

Call=xlsread('gkcall_itm_dic.xlsx');
S0=20.1404;
K=Call(:,2);
T=Call(:,1)/360;

sigma=0.217580020;
rd=0.0817; %Tasa libre de riesgo doméstica
rf=0.02355; %Tasa libre de riesgo externa

for k=1:63

d1(k)=(log(S0/K(k))+(rd-rf+((sigma^2)/2)*T(k)))/(sigma*sqrt(T(k)));
d2(k)=d1(k)-sigma*sqrt(T(k));

Call_GK(k)=S0*exp(-rf*T(k))*normcdf(d1(k))-K(k)*exp(-
rd*T(k))*normcdf(d2(k));

End

*****
function [Put_GK] = PutGK(S0,K,T)

Put=xlsread('gkput_itm_dic.xlsx');
S0=20.1404;
K=Put(:,2);
T=Put(:,1)/360;

sigma=0.217580020;
rd=0.0817; %Tasa libre de riesgo doméstica
rf=0.02355; %Tasa libre de riesgo externa

for k=1:57

d1(k)=(log(S0/K(k))+(rd-rf+((sigma^2)/2)*T(k)))/(sigma*sqrt(T(k)));
d2(k)=d1(k)-sigma*sqrt(T(k));

rep(k)=K(k)*exp(-rd*T(k))*normcdf(-d2(k))-S0*exp(-rf*T(k))*normcdf(-
d1(k));

end
```

## A.5. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN CALL PARA OPCIONES SOBRE TIPO DE CAMBIO “ITM Y ATM”

### MODELO DE HESTON

```
function [CallValue]=HestonCallFft(~,~,~,~,~,~,~,~,~,~)
%HestonCallFftTimeValue
%kappa=tasa de reversión a la media
%theta=long run variance
%sigma=volatilidad de la volatilidad
%v0=varianza inicial
%rho=correlación
%T=Tiempo de vencimiento
%r=tasa de interés
%s0=precio spot

    kappa=4.90024;
    theta=0.01845;
    sigma=0.29960;
    rho=0.00136;
    r=0.05956;      %Diferencia de tasa de interés (mu estimado)
    s0=20.1404;    %Tipo de cambio del 9/11/2018
    x0=log(s0);
    v0=0.0008336; %Varianza inicial de los rendimientos (Volvol)
    strike=17.00;
    T=126/360; %diarios
    N=4096;
    alpha=3.7289;
    c=600;
    eta=c/N;
    b=pi/eta;
    u=(0:N-1)*eta;
    lambda=2*b/N;
    position=(log(strike)+b)/lambda+1; %posición de un call ITM y ATM
                                         %Valor en la matriz FFT

    v = u - (alpha+1)*1i;
    zeta = -.5*(v.^2 +1i*v);
    gamma = kappa - rho*sigma*v*1i;
    PHI = sqrt(gamma.^2 - 2*sigma^2*zeta);
    A = 1i*v*(x0 + r*T);
    B = v0*((2*zeta.*(1-exp(-PHI.*T)))./(2*PHI - ...
        (PHI-gamma).*(1-exp(-PHI*T))));
    C = -kappa*theta/sigma^2*(2*log((2*PHI - ...
        (PHI-gamma).*(1-exp(-PHI*T)))./( ...
        (2*PHI)) + (PHI-gamma)*T));
    charFunc = exp(A + B + C);
    ModifiedCharFunc = charFunc*exp(-r*T)./(alpha^2 ...
        + alpha - u.^2 + 1i*(2*alpha +1)*u);

    SimpsonW = 1/3*(3 + (-1i).^(1:N) - [1, zeros(1,N-1)]);
    FftFunc = exp(1i*b*u).*ModifiedCharFunc*eta.*SimpsonW;
    payoff = real(fft(FftFunc));
```

```
CallValueM = exp(-log(strike)*alpha)*payoff/pi;  
format short;  
CallValue = CallValueM(round(position));
```

```
end
```

## A.6. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN CALL PARA OPCIONES SOBRE TIPO DE CAMBIO “OTM”

### MODELO DE HESTON

```

function [CallValue]=HestonCallFftTimeValue(kappa,theta,...
    sigma,rho,r,v0,s0,strike,T)
%HestonCallFftTimeValue
%kappa=tasa de reversión a la media
%theta=long run variance
%sigma=volatilidad de la volatilidad
%v0=varianza inicial
%rho=correlación
%T=Tiempo de vencimiento
%r=tasa de interés
%s0=precio inicial

kappa=4.90024;
theta=0.01845;
sigma=0.29960;
rho=0.00136;
r=0.05956;      %Diferencia de tasa de interés (mu estimado)
s0=20.1404;     %Tipo de cambio del 9/11/2018
x0=log(s0);
v0=0.0008336;  %Varianza inicial de los rendimientos (Volvol)
strike=20.20;
T=126/360; %diarios
N=4096;
c=600;
eta=c/N;
b=pi/eta;
u=[0:N-1]*eta;
lambda=2*b/N;
alpha=1.7311;
position=(log(strike)+b)/lambda+1; %posición de un call OTM
                                     %Valor en la matriz FFT

w1=u-li*alpha;
w2=u+li*alpha;
v1=u-li*alpha-li;
v2=u+li*alpha-li;

zeta1=-.5*(v1.^2+li*v1);
gamma1=kappa-rho*sigma*v1*li;
PHI1=sqrt(gamma1.^2-2*sigma^2*zeta1);
A1=li*v1*(x0+r*T);
B1=v0*( (2*zeta1.*(1-exp(-PHI1.*T))) ./ (2*PHI1-...
    (PHI1-gamma1).*(1-exp(-PHI1*T))) );
C1=-kappa*theta/sigma^2*(2*log((2*PHI1-...

```

```

        (PHI1-gamma1) .* (1-exp(-PHI1*T)) ./ (2*PHI1)) ...
        + (PHI1-gamma1)*T);
charFunc1=exp(A1+B1+C1);
ModifiedCharFunc1=exp(-r*T)*(1./(1+1i*w1)-...
        exp(r*T) ./ (1i*w1)-charFunc1./(w1.^2-1i*w1));

zeta2=-.5*(v2.^2+1i*v2);
gamma2=kappa-rho*sigma*v2*1i;
PHI2=sqrt(gamma2.^2-2*sigma^2*zeta2);
A2=1i*v2*(x0+r*T);
B2=v0*((2*zeta2.*(1-exp(-PHI2.*T)))/(2*PHI2-...
        (PHI2-gamma2) .* (1-exp(-PHI2*T))));
C2=-kappa*theta/sigma^2*(2*log((2*PHI2-...
        (PHI2-gamma2) .* (1-exp(-PHI2*T)))/(2*PHI2)) ...
        + (PHI2-gamma2)*T);
charFunc2=exp(A2+B2+C2);
ModifiedCharFunc2=exp(-r*T)*(1./(1+1i*w2)-...
        exp(r*T) ./ (1i*w2)-charFunc2./(w2.^2-1i*w2));
ModifiedCharFuncCombo=(ModifiedCharFunc1-ModifiedCharFunc2)/2;
SimpsonW=1/3*(3+(-1i).^[1:N]-[1,zeros(1,N-1)]);
FftFunc=exp(1i*b*u).*ModifiedCharFuncCombo*eta.*SimpsonW;
payoff=real(fft(FftFunc));
CallValueM=payoff/pi/sinh(alpha*log(strike));
format short;
CallValue=CallValueM(round(position));

```

end

## A.7. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN PUT PARA OPCIONES SOBRE TIPO DE CAMBIO “ITM Y ATM”

### MODELO DE HESTON

```
function [PutValue]=HestonPutFft(~,~,~,~,~,~,~,~,~,~)
%HestonCallFftTimeValue
%kappa=tasa de reversión a la media
%theta=long run variance
%sigma=volatilidad de la volatilidad
%v0=varianza inicial
%rho=correlación
%T=Tiempo de vencimiento
%r=tasa de interés
%s0=precio inicial

kappa=4.90024;
theta=0.01845;
sigma=0.29960;
rho=0.00136;
r=0.05956;      %Diferencia de tasa de interés (mu estimado)
s0=20.1404;     %Tipo de cambio del 9/11/2018
x0=log(s0);
v0=0.0008336;  %Varianza inicial de los rendimientos (Volvol)
strike=20.20;
T=126/360;     %diarios
alpha=0.002534;
N=4096;
c=600;
eta=c/N;
b=pi/eta;
u=(0:N-1)*eta;
lambda=2*b/N;
position=(log(strike)+b)/lambda+1; %posición de un call ITM y ATM
                                     %Valor en la matriz FFT

v = u + (-alpha+1)*1i;
zeta = -.5*(v.^2 +1i*v);
gamma = kappa - rho*sigma*v*1i;
PHI = sqrt(gamma.^2 - 2*sigma^2*zeta);
A = 1i*v*(x0 + r*T);
B = v0*((2*zeta.*(1-exp(-PHI.*T)))./(2*PHI - ...
    (PHI-gamma).*(1-exp(-PHI*T))));
C = -kappa*theta/sigma^2*(2*log((2*PHI - ...
    (PHI-gamma).*(1-exp(-PHI*T)))./( ...
    (2*PHI)) + (PHI-gamma)*T));
charFunc = exp(A + B + C);
ModifiedCharFunc = charFunc*exp(-r*T)./(alpha^2 ...
    + alpha - u.^2 + 1i*(2*alpha +1)*u);

SimpsonW = 1/3*(3 + (-1i).^ (1:N) - [1, zeros(1,N-1)]);
```

```
FftFunc = exp(1i*b*u).*ModifiedCharFunc*eta.*SimpsonW;  
payoff = real(fft(FftFunc));  
PutValueM = exp(-log(strike)*alpha)*payoff/pi;  
format short;  
PutValue = PutValueM(round(position));
```

end

## A.8. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN PUT PARA OPCIONES SOBRE TIPO DE CAMBIO “OTM”

### MODELO DE HESTON

```
function [PutValue]=HestonPutFftTimeValue(~,~,...
    ~,~,~,~,~,~,~)
%HestonPutFftTimeValue
%kappa=tasa de reversión a la media
%theta=long run variance
%sigma=volatilidad de la volatilidad
%v0=varianza inicial
%rho=correlación
%T=Tiempo de vencimiento
%r=tasa de interés
%s0=precio inicial

    kappa=4.90024;
    theta=0.01845;
    sigma=0.29960;
    rho=0.00136;
    r=0.05956;          %Diferencia de tasa de interés (mu estimado)
    s0=20.1404;        %Tipo de cambio del 9/11/2018
    x0=log(s0);
    v0=0.0008336;     %Varianza inicial de los rendimientos (Volvol)
    strike=17.00;
    T=126/360; %diarios
    N=4096;
    c=600;
    eta=c/N;
    b=pi/eta;
    u=[0:N-1]*eta;
    lambda=2*b/N;
    alpha=0.10387;
    position=(log(strike)+b)/lambda+1; %posición de un call OTM
                                         %Valor en la matriz FFT

    w1=u+1i*alpha;
    w2=u-1i*alpha;
    v1=u+1i*alpha+1i;
    v2=u-1i*alpha+1i;

    zeta1=-.5*(v1.^2+1i*v1);
    gamma1=kappa-rho*sigma*v1*1i;
    PHI1=sqrt(gamma1.^2-2*sigma^2*zeta1);
    A1=1i*v1*(x0+r*T);
    B1=v0*((2*zeta1.*(1-exp(-PHI1.*T)))/(2*PHI1-...
        (PHI1-gamma1).*(1-exp(-PHI1*T))));
    C1=-kappa*theta/sigma^2*(2*log((2*PHI1-...
        (PHI1-gamma1).*(1-exp(-PHI1*T)))/(2*PHI1))...
        +(PHI1-gamma1)*T);
```



```

charFunc1=exp(A1+B1+C1);
ModifiedCharFunc1=exp(-r*T)*(1./(1+1i*w1)-...
    exp(r*T)./(1i*w1)-charFunc1./(w1.^2-1i*w1));

zeta2=-.5*(v2.^2+1i*v2);
gamma2=kappa-rho*sigma*v2*1i;
PHI2=sqrt(gamma2.^2-2*sigma^2*zeta2);
A2=1i*v2*(x0+r*T);
B2=v0*((2*zeta2.*(1-exp(-PHI2.*T)))./(2*PHI2-...
    (PHI2-gamma2).*(1-exp(-PHI2*T))));
C2=-kappa*theta/sigma^2*(2*log((2*PHI2-...
    (PHI2-gamma2).*(1-exp(-PHI2*T)))./(2*PHI2))...
    +(PHI2-gamma2)*T);
charFunc2=exp(A2+B2+C2);
ModifiedCharFunc2=exp(-r*T)*(1./(1+1i*w2)-...
    exp(r*T)./(1i*w2)-charFunc2./(w2.^2-1i*w2));
ModifiedCharFuncCombo=(ModifiedCharFunc1-ModifiedCharFunc2)/2;
SimpsonW=1/3*(3+(-1i).^(1:N)-[1,zeros(1,N-1)]);
FftFunc=exp(1i*b*u).*ModifiedCharFuncCombo*eta.*SimpsonW;
payoff=real(fft(FftFunc));
PutValueM=payoff/pi/sinh(alpha*log(strike));
format short;
PutValue=PutValueM(round(position));

```

end

## A.9. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN CALL PARA OPCIONES SOBRE TIPO DE CAMBIO “ITM Y ATM”

### MODELO DE HESTON-HULL-WHITE

```
function
CallValue=HestonCallFft_3prm(kappa,theta1,sigma,rho,r,v0,a,lambdal,integra,s0,strike,T)
%HestonCallFftTimeValue
%kappa=tasa de reversión a la media
%theta=long run variance
%sigma=volatilidad de la volatilidad
%v0=varianza inicial
%rho=correlación
%T=Tiempo de vencimiento
%r=tasa de interés
%s0=precio inicial

    kappa=7.5226135;
    theta1=-0.01086862;
    sigma=0.4095111;
    rho=0.001427;
    r=0.05815; % Diferencia en tasa de interés libre de riesgo del
9/11/2018
    a=0.0186021;
    s0=20.1404; %Tipo de cambio del 9/11/2018
    x0=log(s0);
    v0=0.000117763; %Varianza inicial de los rendimientos (Volvol)
    lambdal=0.2549825;
    strike=20.20;
    T=126/360; %diarios
    integra=0.0269271;
    alpha=0.044247;
    r0=0.05815; % Diferencia en tasa de interés libre de riesgo del
9/11/2018
    N=4096;
    c=600;
    eta=c/N;
    b=pi/eta;
    u=(0:N-1)*eta;
    lambda=2*b/N;
    position=(log(strike)+b)/lambda+1; %posición de un call ITM y ATM
    %Valor en la matriz FFT

    beta=kappa-rho*lambdal;
    alfa=kappa*theta1;
    gama=0.5;

    v = u - (alpha+1)*1i;
    d=sqrt((beta-rho*lambdal*v*1i).^2-lambdal^2*(2*gama*v*1i-v.^2));
    g=(beta-rho*lambdal*v*1i+d)/(beta-rho*lambdal*v*1i-d);
    A= 1i*v*r*T;
    H=((v*1i-0)/a)*(1-exp(-a*T));
```

```

G= ((beta-rho*lambda1*v*1i+d)/lambda1.^2)*((1-exp(d*T))/...
    (1-g*exp(d-T)));
F=(alfa/lambda1.^2)*((beta-rho*lambda1*v*1i+d)*T-...
    2*log((1-g*exp(d*T))/(1-g)))+(v*1i-0)/a)*integra+...
    (0.5*sigma.^2)*(((v*1i-1)/a).^2)*(T+(2*exp(-a*T))/a)-...
    (exp(-2*a*T)/(2*a))-3/(2*a));
b1=- (sigma.^2/(4*a))*(((1-exp(-a*T))/a).^2)*(1-exp(-2*a*T))-...
    r*((1-exp(-a*T))/a);

charFunc = exp(F + G*v0 + H*r + A - b1);

```

```

ModifiedCharFunc = charFunc*exp(-r*T)./(alpha^2 ...
    + alpha - u.^2 + 1i*(2*alpha +1)*u);
SimpsonW = 1/3*(3 + (-1i).^(1:N) - [1, zeros(1,N-1)]);
FftFunc = exp(1i*b*u).*ModifiedCharFunc*eta.*SimpsonW;
payoff = real(fft(FftFunc));
CallValueM = exp(-log(strike)*alpha)*payoff/pi;
format short;
CallValue = CallValueM(round(position));

```

end

## A.10. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN CALL PARA OPCIONES SOBRE TIPO DE CAMBIO “OTM”

### MODELO DE HESTON-HULL-WHITE

```
function
CallValue=HestonCallFftTimeValue_3prm(kappa,theta1,sigma,rho,r,v0,a,lamb
dal,integra,s0,strike,T)
%HestonCallFftTimeValue
%kappa=tasa de reversión a la media
%theta=long run variance
%sigma=volatilidad de la volatilidad
%v0=varianza inicial
%rho=correlación
%T=Tiempo de vencimiento
%r=tasa de interés
%s0=precio inicial

    kappa=7.5226135;
    theta1=-0.01086862;
    sigma=0.4095111;
    rho=0.001427;
    r=0.05815; % Diferencia en tasa de interés libre de riesgo del
9/11/2018
    a=0.0186021;
    s0=20.1404; %Tipo de cambio del 9/11/2018
    x0=log(s0);
    v0=0.000117763; %Varianza inicial de los rendimientos (Volvol)
    lambda1=0.2549825;
    strike=17.00;
    T=126/360; %diarios
    integra=0.00020741433;
    alpha=0.8678;
    r0=0.05815; % Diferencia en tasa de interés libre de riesgo del
9/11/2018
    N=4096;
    c=600;
    eta=c/N;
    b=pi/eta;
    u=(0:N-1)*eta;
    lambda=2*b/N;
    position=(log(strike)+b)/lambda+1; %posición de un call OTM
    %Valor en la matriz FFT

    beta=kappa-rho*lambda1;
    alfa=kappa*theta1;
    gama=0.5;

    w1=u-li*alpha;
    w2=u+li*alpha;
    v1=u-li*alpha-li;
    v2=u+li*alpha-li;
```

```

d1=sqrt((beta-rho*lambda1*v1*li).^2-lambda1^2*(2*gama*v1*li-v1.^2));
g1=(beta-rho*lambda1*v1*li+d1)/(beta-rho*lambda1*v1*li-d1);
A1= li*v1*r*T;
H1=((v1*li-0)/a)*(1-exp(-a*T));
G1=((beta-rho*lambda1*v1*li+d1)/lambda1.^2)*((1-exp(d1*T))/...
(1-g1*exp(d1-T)));
F1=(alfa/lambda1.^2)*((beta-rho*lambda1*v1*li+d1)*T-...
2*log((1-g1*exp(d1*T))/(1-g1)))+(v1*li-0)/a*integra+...
(0.5*sigma.^2)*(((v1*li-1)/a).^2)*(T+(2*exp(-a*T))/a)-...
(exp(-2*a*T)/(2*a))-3/(2*a));
b11=- (sigma.^2/(4*a))*(((1-exp(-a*T))/a).^2)*(1-exp(-2*a*T))-...
r*((1-exp(-a*T))/a);

charFunc1 = exp(F1 + G1*v0 + H1*r + A1 - b11);
ModifiedCharFunc1=exp(-r*T)*(1./(1+li*w1)-...
exp(r*T)./(li*w1)-charFunc1./(w1.^2-li*w1));

d2=sqrt((beta-rho*lambda1*v2*li).^2-lambda1^2*(2*gama*v2*li-v2.^2));
g2=(beta-rho*lambda1*v2*li+d2)/(beta-rho*lambda1*v2*li-d2);
A2= li*v2*r*T;
H2=((v2*li-0)/a)*(1-exp(-a*T));
G2=((beta-rho*lambda1*v2*li+d2)/lambda1.^2)*((1-exp(d2*T))/...
(1-g2*exp(d2-T)));
F2=(alfa/lambda1.^2)*((beta-rho*lambda1*v2*li+d2)*T-...
2*log((1-g2*exp(d2*T))/(1-g2)))+(v2*li-0)/a*integra+...
(0.5*sigma.^2)*(((v2*li-1)/a).^2)*(T+(2*exp(-a*T))/a)-...
(exp(-2*a*T)/(2*a))-3/(2*a));
b22=- (sigma.^2/(4*a))*(((1-exp(-a*T))/a).^2)*(1-exp(-2*a*T))-...
r*((1-exp(-a*T))/a);

charFunc2 = exp(F2 + G2*v0 + H2*r + A2 - b22);
ModifiedCharFunc2=exp(-r*T)*(1./(1+li*w2)-...
exp(r*T)./(li*w2)-charFunc2./(w2.^2-li*w2));

ModifiedCharFuncCombo=(ModifiedCharFunc1-ModifiedCharFunc2)/2;
SimpsonW=1/3*(3+(-li).^[1:N]-[1,zeros(1,N-1)]);
FftFunc=exp(li*b*u).*ModifiedCharFuncCombo*eta.*SimpsonW;
payoff=real(fft(FftFunc));
CallValueM=payoff/pi/sinh(alpha*log(strike));
format short;
CallValue=CallValueM(round(position));

```

end

## A.11. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN PUT PARA OPCIONES SOBRE TIPO DE CAMBIO “ITM Y ATM”

### MODELO DE HESTON-HULL-WHITE

```

function [PutValue]=HestonPutFft_3prm(~,~,~,~,~,~,~,~,~)
%HestonCallFftTimeValue
%kappa=tasa de reversión a la media
%theta=long run variance
%sigma=volatilidad de la volatilidad
%v0=varianza inicial
%rho=correlación
%T=Tiempo de vencimiento
%r=tasa de interés
%s0=precio inicial

    kappa=7.5226135;
    thetal=-0.01086862;
    sigma=0.4095111;
    rho=0.001427;
    r=0.05815;    % Diferencia en tasa de interés libre de riesgo del
9/11/2018
    a=0.0186021;
    s0=20.1404;    %Tipo de cambio del 9/11/2018
    x0=log(s0);
    v0=0.000117763; %Varianza inicial de los rendimientos (Volvol)
    lambda1=0.2549825;
    strike=20.20;
    T=126/360; %diarios
    integra=0.0269271;
    alpha=0.06489;
    r0=0.05815; % Diferencia en tasa de interés libre de riesgo del
9/11/2018
    N=4096;
    c=600;
    eta=c/N;
    b=pi/eta;
    u=(0:N-1)*eta;
    lambda=2*b/N;
    position=(log(strike)+b)/lambda+1; %posición de un call ITM y ATM
    %Valor en la matriz FFT

    beta=kappa-rho*lambda1;
    alfa=kappa*thetal;
    gama=0.5;

    v = u - (-alpha+1)*1i;
    d=sqrt((beta-rho*lambda1*v*1i).^2-lambda1^2*(2*gama*v*1i-v.^2));
    g=(beta-rho*lambda1*v*1i+d)/(beta-rho*lambda1*v*1i-d);
    A= 1i*v*r*T;
    H=((v*1i-0)/a)*(1-exp(-a*T));
    G=((beta-rho*lambda1*v*1i+d)/lambda1.^2)*((1-exp(d*T))/...
    (1-g*exp(d-T)));

```

```

F=(alfa/lambda1.^2)*((beta-rho*lambda1*v*1i+d)*T-...
  2*log((1-g*exp(d*T))/(1-g))+((v*1i-0)/a)*integra+...
  (0.5*sigma.^2)*(((v*1i-1)/a).^2)*(T+(2*exp(-a*T))/a)-...
  (exp(-2*a*T)/(2*a))-3/(2*a));
b1=-(sigma.^2/(4*a))*((1-exp(-a*T))/a).^2*(1-exp(-2*a*T))-...
  r*((1-exp(-a*T))/a);

```

```

charFunc = exp(F + G*v0 + H*r + A - b1);

```

```

ModifiedCharFunc = charFunc*exp(-r*T)./(alpha^2 ...
  + alpha - u.^2 + 1i*(2*alpha +1)*u);
SimpsonW = 1/3*(3 + (-1i).^(1:N) - [1, zeros(1,N-1)]);
FftFunc = exp(1i*b*u).*ModifiedCharFunc*eta.*SimpsonW;
payoff = real(fft(FftFunc));
PutValueM = exp(-log(strike)*alpha)*payoff/pi;
format short;
PutValue = PutValueM(round(position));

```

```

end

```

## A.12. ALGORITMO PARA VALUAR EL PRECIO DE LA OPCIÓN CALL PARA OPCIONES SOBRE TIPO DE CAMBIO “OTM”

### MODELO DE HESTON-HULL-WHITE

```
function [PutValue]=HestonPutFftTimeValue_3prm(~,~,~,~,~,~,~,~,~)
%HestonCallFftTimeValue
%kappa=tasa de reversión a la media
%theta=long run variance
%sigma=volatilidad de la volatilidad
%v0=varianza inicial
%rho=correlación
%T=Tiempo de vencimiento
%r=tasa de interés
%s0=precio inicial

    kappa=7.5226135;
    theta1=-0.01086862;
    sigma=0.4095111;
    rho=0.001427;
    r=0.05815;      % Diferencia en tasa de interés libre de riesgo del
9/11/2018
    a=0.0186021;
    s0=20.1404;    %Tipo de cambio del 9/11/2018
    x0=log(s0);
    v0=0.000117763; %Varianza inicial de los rendimientos (Volvol)
    lambda1=0.2549825;
    strike=17.00;
    T=126/360; %diarios
    integra=0.000269271;
    alpha=1.00073;
    r0=0.05815; % Diferencia en tasa de interés libre de riesgo del
9/11/2018
    N=4096;
    c=600;
    eta=c/N;
    b=pi/eta;
    u=(0:N-1)*eta;
    lambda=2*b/N;
    position=(log(strike)+b)/lambda+1; %posición de un call OTM
                                         %Valor en la matriz FFT

    beta=kappa-rho*lambda1;
    alfa=kappa*theta1;
    gama=0.5;

    w1=u+li*alpha;
    w2=u-li*alpha;
    v1=u+li*alpha+li;
    v2=u-li*alpha+li;
```



```

d1=sqrt((beta-rho*lambda1*v1*li).^2-lambda1^2*(2*gama*v1*li-v1.^2));
g1=(beta-rho*lambda1*v1*li+d1)/(beta-rho*lambda1*v1*li-d1);
A1= li*v1*r*T;
H1=((v1*li-0)/a)*(1-exp(-a*T));
G1=((beta-rho*lambda1*v1*li+d1)/lambda1.^2)*((1-exp(d1*T))/...
(1-g1*exp(d1-T)));
F1=(alfa/lambda1.^2)*((beta-rho*lambda1*v1*li+d1)*T-...
2*log((1-g1*exp(d1*T))/(1-g1)))+(v1*li-0)/a*integra+...
(0.5*sigma.^2)*(((v1*li-1)/a).^2)*(T+(2*exp(-a*T))/a)-...
(exp(-2*a*T)/(2*a))-3/(2*a));
b11=- (sigma.^2/(4*a))*(((1-exp(-a*T))/a).^2)*(1-exp(-2*a*T))-...
r*((1-exp(-a*T))/a);

charFunc1 = exp(F1 + G1*v0 + H1*r + A1 - b11);
ModifiedCharFunc1=exp(-r*T)*(1./(1+li*w1)-...
exp(r*T)./(li*w1)-charFunc1./(w1.^2-li*w1));

d2=sqrt((beta-rho*lambda1*v2*li).^2-lambda1^2*(2*gama*v2*li-v2.^2));
g2=(beta-rho*lambda1*v2*li+d2)/(beta-rho*lambda1*v2*li-d2);
A2= li*v2*r*T;
H2=((v2*li-0)/a)*(1-exp(-a*T));
G2=((beta-rho*lambda1*v2*li+d2)/lambda1.^2)*((1-exp(d2*T))/...
(1-g2*exp(d2-T)));
F2=(alfa/lambda1.^2)*((beta-rho*lambda1*v2*li+d2)*T-...
2*log((1-g2*exp(d2*T))/(1-g2)))+(v2*li-0)/a*integra+...
(0.5*sigma.^2)*(((v2*li-1)/a).^2)*(T+(2*exp(-a*T))/a)-...
(exp(-2*a*T)/(2*a))-3/(2*a));
b22=- (sigma.^2/(4*a))*(((1-exp(-a*T))/a).^2)*(1-exp(-2*a*T))-...
r*((1-exp(-a*T))/a);

charFunc2 = exp(F2 + G2*v0 + H2*r + A2 - b22);
ModifiedCharFunc2=exp(-r*T)*(1./(1+li*w2)-...
exp(r*T)./(li*w2)-charFunc2./(w2.^2-li*w2));

ModifiedCharFuncCombo=(ModifiedCharFunc1-ModifiedCharFunc2)/2;
SimpsonW=1/3*(3+(-li).^[1:N]-[1,zeros(1,N-1)]);
FftFunc=exp(li*b*u).*ModifiedCharFuncCombo*eta.*SimpsonW;
payoff=real(fft(FftFunc));
PutValueM=payoff/pi/sinh(alpha*log(strike));
format short;
PutValue=PutValueM(round(position));

```

end

## ANEXO B

### B.1. PRECIOS TEÓRICOS DE LOS MODELOS BLACK-SCHOLES, GARMAN-KOHLHAGEN, HESTON Y HESTON-HULL-WHITE.

Fecha de operación	FECHA_VENCIMIENTO	Spot	Expiracion-días	Precio de liquidación Opciones sobre dólar			Precios teóricos opciones sobre el dólar				error			
				OTM	ATM	ITM	BS	GK	H	HHW	eBS	eGK	eH	eHHW
09/11/2018		20.1404												
Precio de ejercicio 17.0000	15/03/2019	Call-Marzo	126			3.508	3.6825	3.5167	3.6314	3.5340	0.1745	0.0087	0.1234	0.0260
	17/06/2019	Call-Junio	218			3.764	4.1018	3.8377	3.9274	3.8174	0.3378	0.0737	0.1634	0.0534
	13/09/2019	Call-Sep	304			4.008	4.4765	4.1216	4.2021	4.0924	0.4685	0.1136	0.1941	0.0844
	17/12/2018	Call-Dic	38			3.274	3.2888	3.2704	3.2704	3.2750	0.0148	0.0036	0.0036	0.0010
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.011			0.0628	0.0624	0.0429	0.0215	0.0518	0.0514	0.0319	0.0105
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.038			0.1408	0.1619	0.1001	0.0620	0.1028	0.1239	0.0621	0.0240
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.065			0.2028	0.2444	0.1481	0.1088	0.1378	0.1794	0.0831	0.0438
	17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0025	0.0008	0.0013	0.0006	0.0025	0.0008	0.0013	0.0006
17.0500	15/03/2019	Call-Marzo	126		3.461	3.6373	3.4717	3.5834	3.4885	3.4885	0.1763	0.0107	0.1224	0.0275
	17/06/2019	Call-Junio	218		3.719	4.0597	3.7963	3.8812	3.7739	3.407	0.3407	0.0773	0.1622	0.0549
	13/09/2019	Call-Sep	304		3.965	4.4363	4.0825	4.1581	4.0509	4.0509	0.4713	0.1175	0.1931	0.0859
	17/12/2018	Call-Dic	38		3.224	3.2396	3.1878	3.2194	3.2265	3.2265	0.0156	0.0362	0.0046	0.0025
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.013			0.0663	0.0660	0.0459	0.0250	0.0533	0.0530	0.0329	0.0120
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.041			0.1463	0.1681	0.1041	0.0665	0.1053	0.1271	0.0631	0.0255
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.068			0.2093	0.2520	0.1521	0.1133	0.1413	0.1840	0.0841	0.0453
	17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0028	0.0010	0.0023	0.0021	0.0028	0.0010	0.0023	0.0021
17.1000	15/03/2019	Call-Marzo	126		3.413	3.5924	3.4268	3.5344	3.4420	3.4420	0.1794	0.0138	0.1214	0.0290
	17/06/2019	Call-Junio	218		3.674	4.0177	3.7551	3.8350	3.7304	3.437	0.3437	0.0811	0.1610	0.0564
	13/09/2019	Call-Sep	304		3.922	4.3963	4.0435	4.1141	4.0094	4.0094	0.4743	0.1215	0.1921	0.0874
	17/12/2018	Call-Dic	38		3.174	3.1904	3.1384	3.1684	3.1780	3.1780	0.0164	0.0356	0.0056	0.0040
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.014			0.0699	0.0697	0.0479	0.0275	0.0559	0.0557	0.0339	0.0135
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.043			0.1519	0.1745	0.1071	0.0700	0.1089	0.1315	0.0641	0.0270
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.072			0.2159	0.2597	0.1571	0.1188	0.1439	0.1877	0.0851	0.0468
	17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0032	0.0011	0.0033	0.0036	0.0032	0.0011	0.0033	0.0036
17.1500	15/03/2019	Call-Marzo	126		3.366	3.5476	3.3821	3.4864	3.3965	3.3965	0.1816	0.0161	0.1204	0.0305
	17/06/2019	Call-Junio	218		3.629	3.9759	3.7140	3.7888	3.6869	3.6869	0.3469	0.0850	0.1598	0.0579
	13/09/2019	Call-Sep	304		3.880	4.3564	4.0047	4.0711	3.9689	3.9689	0.4764	0.1247	0.1911	0.0889
	17/12/2018	Call-Dic	38		3.125	3.1413	3.0890	3.1184	3.1305	3.1305	0.0163	0.0360	0.0066	0.0055
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.015			0.0737	0.0735	0.0499	0.0300	0.0587	0.0585	0.0349	0.0150
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.046			0.1577	0.1810	0.1111	0.0745	0.1117	0.1350	0.0651	0.0285
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.076			0.2227	0.2676	0.1621	0.1243	0.1467	0.1916	0.0861	0.0483
	17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0036	0.0013	0.0043	0.0051	0.0036	0.0013	0.0043	0.0051
17.2000	15/03/2019	Call-Marzo	126		3.319	3.5030	3.3375	3.4384	3.3510	3.3510	0.1840	0.0185	0.1194	0.0320
	17/06/2019	Call-Junio	218		3.585	3.9343	3.6732	3.7436	3.6444	3.6444	0.3493	0.0882	0.1586	0.0594
	13/09/2019	Call-Sep	304		3.837	4.3167	3.9661	4.0271	3.9274	3.9274	0.4797	0.1291	0.1901	0.0904
	17/12/2018	Call-Dic	38		3.075	3.0922	3.0396	3.0674	3.0820	3.0820	0.0172	0.0354	0.0076	0.0070
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.016			0.0777	0.0775	0.0519	0.0325	0.0617	0.0615	0.0359	0.0165
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.049			0.1637	0.1877	0.1151	0.0790	0.1147	0.1387	0.0661	0.0300
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.079			0.2296	0.2757	0.1661	0.1288	0.1506	0.1967	0.0871	0.0498
	17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0041	0.0015	0.0053	0.0066	0.0041	0.0015	0.0053	0.0066

17.2500	15/03/2019	Call-Marzo	126			3.272	3.4585	3.2931	3.3904	3.3055	0.1865	0.0211	0.1184	0.0335
	17/06/2019	Call-Junio	218			3.541	3.8929	3.6325	3.6984	3.6019	0.3519	0.0915	0.1574	0.0609
	13/09/2019	Call-Sep	304			3.795	4.2771	3.9277	3.9841	3.8869	0.4821	0.1327	0.1891	0.0919
	17/12/2018	Call-Dic	38			3.026	3.0431	2.9902	3.0174	3.0345	0.0171	0.0358	0.0086	0.0085
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.018			0.0818	0.0817	0.0549	0.0360	0.0638	0.0637	0.0369	0.0180
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.052			0.1698	0.1946	0.1191	0.0835	0.1178	0.1426	0.0671	0.0315
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.083			0.2367	0.2839	0.1711	0.1343	0.1537	0.2009	0.0881	0.0513
17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0046	0.0017	0.0063	0.0081	0.0046	0.0017	0.0063	0.0081	
17.3000	15/03/2019	Call-Marzo	126			3.225	3.4142	3.2489	3.3424	3.2600	0.1892	0.0239	0.1174	0.0350
	17/06/2019	Call-Junio	218			3.497	3.8516	3.5920	3.6532	3.5594	0.3546	0.0950	0.1562	0.0624
	13/09/2019	Call-Sep	304			3.753	4.2377	3.8894	3.9411	3.8464	0.4847	0.1364	0.1881	0.0934
	17/12/2018	Call-Dic	38			2.976	2.9942	2.9409	2.9664	2.9860	0.0182	0.0351	0.0096	0.0100
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.019			0.0861	0.0861	0.0569	0.0385	0.0671	0.0671	0.0379	0.0195
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.055			0.1761	0.2017	0.1231	0.0880	0.1211	0.1467	0.0681	0.0330
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.087			0.2440	0.2923	0.1761	0.1398	0.1570	0.2053	0.0891	0.0528
17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0052	0.0020	0.0073	0.0096	0.0052	0.0020	0.0073	0.0096	
17.3500	15/03/2019	Call-Marzo	126			3.178	3.3701	3.2049	3.2944	3.2145	0.1921	0.0269	0.1164	0.0365
	17/06/2019	Call-Junio	218			3.453	3.8105	3.5517	3.6080	3.5169	0.3575	0.0987	0.1550	0.0639
	13/09/2019	Call-Sep	304			3.711	4.1985	3.8514	3.8981	3.8059	0.4875	0.1404	0.1871	0.0949
	17/12/2018	Call-Dic	38			2.927	2.9453	2.8916	2.9164	2.9385	0.0183	0.0354	0.0106	0.0115
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.021			0.0906	0.0907	0.0599	0.0420	0.0696	0.0697	0.0389	0.0210
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.058			0.1826	0.2090	0.1271	0.0925	0.1246	0.1510	0.0691	0.0345
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.092			0.2514	0.3009	0.1821	0.1463	0.1594	0.2089	0.0901	0.0543
17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0059	0.0023	0.0083	0.0111	0.0059	0.0023	0.0083	0.0111	
17.4000	15/03/2019	Call-Marzo	126			3.132	3.3262	3.1610	3.2474	3.1700	0.1942	0.0290	0.1154	0.0380
	17/06/2019	Call-Junio	218			3.409	3.7696	3.5116	3.5628	3.4744	0.3606	0.1026	0.1538	0.0654
	13/09/2019	Call-Sep	304			3.669	4.1594	3.8135	3.8551	3.7654	0.4904	0.1445	0.1861	0.0964
	17/12/2018	Call-Dic	38			2.877	2.8964	2.8424	2.8654	2.8900	0.0194	0.0346	0.0116	0.0130
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.023			0.0953	0.0954	0.0629	0.0455	0.0723	0.0724	0.0399	0.0225
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.062			0.1893	0.2165	0.1321	0.0980	0.1273	0.1545	0.0701	0.0360
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.096			0.2590	0.3097	0.1871	0.1518	0.1630	0.2137	0.0911	0.0558
17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0066	0.0026	0.0093	0.0126	0.0066	0.0026	0.0093	0.0126	
17.4500	15/03/2019	Call-Marzo	126			3.085	3.2824	3.1174	3.1994	3.1245	0.1974	0.0324	0.1144	0.0395
	17/06/2019	Call-Junio	218			3.365	3.7288	3.4717	3.5176	3.4319	0.3638	0.1067	0.1526	0.0669
	13/09/2019	Call-Sep	304			3.627	4.1205	3.7758	3.8121	3.7249	0.4935	0.1488	0.1851	0.0979
	17/12/2018	Call-Dic	38			2.827	2.8477	2.7932	2.8144	2.8415	0.0207	0.0338	0.0126	0.0145
	15/03/2019	Put-Marzo	126	0.025			0.1001	0.1004	0.0659	0.0490	0.0751	0.0754	0.0409	0.0240
	17/06/2019	Put-Junio	218	0.065			0.1961	0.2242	0.1361	0.1025	0.1311	0.1592	0.0711	0.0375
	13/09/2019	Put-Sep	304	0.101			0.2668	0.3186	0.1931	0.1583	0.1658	0.2176	0.0921	0.0573
17/12/2018	Put-Dic	38	0.000			0.0074	0.0030	0.0103	0.0141	0.0074	0.0030	0.0103	0.0141	

Nota: Se pueden consultar todos los resultados en el siguiente link  
<https://drive.google.com/open?id=1NAhx6HD1sjrYFDZ1HdUQIBppz78tjSka>

