Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

La condición de la cadena numerable en espacios topológicos

Tesis

Que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

Presenta

Idali Jiménez Cid del Prado

Directores:

Dr. Daniel Bernal Santos
Dr. Enrique Castañeda Alvarado

El Cerrillo Piedras Blancas, Toluca, Estado de México.

Agosto de 2020.

La condición de la cadena numerable

en

espacios topológicos

Idali Jiménez Cid del Prado
Universidad Autónoma del Estado de México
Facultad de Ciencias
idali.jicid@gmail.com

Índice general

Introducción **5**

1. Preliminares **7**
1.1. Ordinales y cardinales 7
1.2. Conjuntos linealmente ordenados 12
1.3. Espacios topológicos 20
1.4. Espacios topológicos linealmente ordenados 28

2. La condición de la cadena numerable **31**
2.1. Resultados Básicos 31
2.2. Espacios de Baire, ccc y paracompactos 34
2.3. Espacios localmente ccc 39
2.4. Ejemplos 40

3. El producto de espacios ccc **47**
3.1. Separabilidad en el producto topológico 47
3.2. Producto de espacios ccc 50
3.3. Conjuntos parcialmente ordenados 54
3.4. Axioma de Martin y el producto de espacios ccc 59

Bibliografía **71**

Introducción

El presente trabajo es una mezcla de Topología y Teoría de Conjuntos, por lo cual sugerimos al lector, tomar un primer curso de Topología de Conjuntos o tener presentes los conceptos básicos de este curso. En caso contrario les recomendamos consultar el libro [1].

Para mayor facilidad en este trabajo nombramos a las familias de conjuntos abiertos, ajenos dos a dos y no vacíos, como familia celular. Y decimos que un espacio tiene la Condición de la Cadena Numerable, o bien la ccc por sus iniciales en inglés (Countable Chain Condition), si toda familia celular del espacio es numerable. En la investigación previa, nos percatamos que la ccc no es solo para espacios topológicos, sino que también podemos hallar resultados en Teoría de Conjuntos. A lo largo de este trabajo tratamos de abarcar lo mas posible sobre la ccc y como utilizarla tanto en espacios topológicos como en conjuntos.

En el Primer Capítulo de este trabajo, podrá encontrar las definiciones y resultados preliminares tanto de Topología como de Teoría de Conjuntos, donde además de hallar conceptos que nos serán de utilidad a lo largo del trabajo, presentaremos algunos resultados que utilizaremos.

La definición de la ccc es presentada en la primer sección del Segundo Capítulo, junto con algunos resultados básicos; en la segunda sección se muestra la relación entre la ccc y los espacios Baire y paracompactos, incluyendo los localmente ccc. En este capítulo, también incluimos ejemplos en relación a dichos resultados; un ejemplo muy interesante que mencionamos es el de los hiperespacios Pixley-Roy. En este Segundo Capítulo se dan los resultados de la ccc en espacios topológicos.

Y finalmente en nuestro Tercer Capítulo, mostramos los resultados de la ccc en los conjuntos, donde encontrará el Lema del delta-sistema, definiciones como forcing, filtro, el Axioma de Martin y resultados acerca del producto de espacios ccc, ejemplos en los que se rompe con nuestra intuición y demás datos interesantes.

Esperamos que sea de su agrado y más aún que le sea de utilidad.

1 Preliminares

En este Capítulo haremos mención de las definiciones que necesitamos para poder entender el tema que desarrollaremos en el presente trabajo.

1.1. Ordinales y cardinales

En esta sección daremos al lector algunos conceptos acerca de la Teoría de Conjuntos que utilizaremos constantemente.
Durante todo el trabajo estaremos suponiendo los Axiomas de Zermelo-Fraenkel junto con el Axioma de Elección (ZFC).

Definición 1.1. Una *relación* es un conjunto formado por pares ordenados.

Dada una relación R, xRy abrevia $(x, y) \in R$. Decimos que R es una relación sobre un conjunto X si $R \subset X \times X$.

Definición 1.2. Una relación R sobre un conjunto X es llamado *orden lineal* sobre X si:

- ⋄ Para todo $x \in X$, $\neg(xRx)$;
- ⋄ Para cualesquiera $x, y, z \in X$, si xRy y yRz, entonces xRz;
- ⋄ Para cualesquiera $x, y \in X$ ocurre una y sólo una de las siguientes afirmaciones: $x = y$; xRy; yRx.

Dada una relación $<$, la expresión $a < b$ se leé como "a es menor que b". Comúnmente utilizaremos los símbolos $<$, $\prec$, $\sqsubset$ y $\ll$ para denotar ordenes lineales.

Definición 1.3. Decimos que R *bien ordena* a A o que (A, R) es un *conjunto bien ordenado* si R es un orden lineal sobre A y todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo, es decir, si $B \subset A$ y $B \neq \emptyset$, existe $b \in B$ tal que bRx para todo $x \in B - \{b\}$.

Definición 1.4. Un conjunto x es *transitivo* si para cada $y \in x$, $y \subset x$.

Dado un conjunto x, definimos $\in_x = \{(z, w) \in x \times x : z \in w\}$.

Definición 1.5. Un conjunto x es un *ordinal* si x es transitivo y $(x, \in_x)$ es un conjunto bien ordenado.

Los conjuntos $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}$ y en general $n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ son ordinales. Comúnmente utilizaremos letras griegas α, β y γ para denotar ordinales. Si α y β son ordinales, decimos que $\beta < \alpha$ si $\beta \in \alpha$. Y $\beta \leq \alpha$ si $\beta = \alpha$ o $\beta < \alpha$. La clase de los ordinales satisface tricotomía, es decir, si α y β son ordinales, entonces ocurre una y sólo una de las siguientes afirmaciones: $\alpha = \beta$; $\alpha < \beta$; $\beta < \alpha$. Más aún, cualquier subclase no vacía de ordinales tiene un elemento mínimo, esto es, si $P(x)$ es una propiedad y existe un ordinal β que satisface $P(\beta)$, entonces existe un ordinal α que satisface $P(\alpha)$ tal que si γ es cualquier ordinal que satisface $P(\gamma)$ se tiene que $\alpha \leq \gamma$ (véase [3, Teorema I.7.11, pág. 36]).
Dado un ordinal α, definimos el *sucesor de* α como $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. $\alpha+1$ es un ordinal, $\alpha < \alpha + 1$ y $\gamma < \alpha + 1$ si y sólo si $\gamma \leq \alpha$ ([3, Lema I.7.15]).

La siguiente proposición es una herrramienta útil para generar ordinales.

Proposición 1.6. *Si B es un conjunto formado por ordinales, entonces $\bigcup B$ es un ordinal y $\beta \leq \bigcup B$ para todo $\beta \in B$.*

Demostración. Sea $\alpha = \bigcup B$. Dados $\gamma \in \alpha$ y $\delta \in \gamma$, existe $\beta \in B$ tal que $\gamma \in \beta$. Como β es ordinal, $\gamma \subset \beta$ y por tanto $\delta \in \beta \subset \alpha$. Esto muestra que α es transitivo.
Ahora verifiquemos que $(\alpha, \in_\alpha)$ es bien ordenado. Sea A un subconjunto no vacío de α y fijemos $\mu \in A$. Si $\mu \cap A = \emptyset$, μ es el elemento mínimo de A. En caso contrario, $\mu \cap A$ es un subconjunto no vacío de μ, el cual es un ordinal, en consecuencia tiene un elemento mínimo ζ. Luego, si $\nu \in A$, por tricotomía tenemos dos casos; $\nu \geq \mu$ o $\nu < \mu$. Si ocurre el primer caso, $\zeta \in \mu \leq \nu$. En el segundo caso, $\nu \in \mu \cap A$, y por la elección de ζ, $\zeta \in_\mu \nu$ o $\zeta = \nu$. En ambos casos, concluimos que $\zeta \leq \nu$ o bien $\zeta \in_\alpha \nu$ o $\zeta = \nu$. Esto muestra que ζ es el elemento mínimo de A.
Para demostrar la segunda parte de la proposición, fijemos $\beta \in B$, entonces $\beta \subset \alpha$. Luego, si suponemos que $\beta > \alpha$, $\alpha \subset \beta$ y por tanto $\alpha = \beta$ lo cual es una contradicción a la tricotomía de los ordinales. $\square$

Definición 1.7. Sea α un ordinal.

- α es llamado *sucesor* si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$;
- α es llamado *límite* si $\alpha \neq \emptyset$ y α no es sucesor;
- α es llamado *número natural* si para todo $\beta \leq \alpha$, $\beta = 0$ o β es sucesor.

El conjunto de los números naturales existe y es un ordinal límite [3, Lema I.7.17, pág. 37].

Definición 1.8. $\omega = \{n : n \text{ es un número natural}\}$.

A partir de ω podemos construir algunos otros ordinales. Podemos definir $\omega+0 = \omega$, recordemos que $\omega + 1$ está definido y por recursión, para cada $n \in \omega$, podemos definir $\omega + (n+1) = (\omega + n) + 1$. Entonces por definición $\omega + n$ es un ordinal para cada $n \in \omega$. Luego, aplicando la Proposición 1.6, el conjunto $\bigcup\{\omega + n : n \in \omega\}$ es un ordinal al cual denotaremos como $\omega + \omega$ o bien $\omega \cdot 2$. Nuevamente, $(\omega + \omega) + 1$ está definido y no resulta difícil definir $(\omega + \omega) + n$, para cada $n \in \omega$, así como $\omega + \omega + \omega$ o bien $\omega \cdot 3$. Para un análisis mas profundo acerca de los ordinales y sus operaciones aritméticas véase [3, Secciones I.7 y I.8, pág. 34-41].

El Axioma de Elección junto con el Teorema I.8.2 en [3] afirman que para cualquier conjunto A existe una función biyectiva de A en α para algún ordinal α. Con esto podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.9. Dado un conjunto A, $|A|$ es el mínimo ordinal α para el cual existe una función biyectiva de A en α. $|A|$ es llamado la *cardinalidad* de A.

Si α es un ordinal, como la función identidad sobre α es biyectiva, $|\alpha| \leq \alpha$.

Definición 1.10. Un ordinal α es llamado *cardinal* si $\alpha = |\alpha|$.

Para cualquier ordinal α, $|\alpha|$ es un cardinal [3, Lema I.10.13, pág. 64] y ω es un cardinal véase esto en [3, Teorema I.10.8, pág. 64].

Definición 1.11. Dado un conjunto A, decimos que:

- A es *finito* si $|A| < \omega$;
- A es *numerable* si $|A| \leq \omega$;
- A es *no numerable* si $\omega < |A|$.

Acerca de los conjuntos numerables tenemos el siguiente resultado bastante conocido.

Teorema 1.12 ([3]). *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

No resulta difícil convencerse que si existe una función biyectiva entre dos conjuntos A y B, entonces $|A| = |B|$. Sin embargo este resultado puede obtenerse del siguiente teorema el cual es mas general.

Teorema 1.13 ([3]). *Sean A y B dos conjuntos. Entonces los siguientes son equivalentes.*

- $|A| \leq |B|$;
- *Existe una función inyectiva de A en B;*
- *Existe una función suprayectiva de B en A.*

Se sigue del teorema anterior que si $A \subset B$ (usando la función identidad de A en B) que $|A| \leq |B|$. Usando esto último y aplicando el Teorema 1.12 tenemos que $|\omega + n| = \omega$ para cada $n \in \omega$ y por tanto $|\omega + \omega| = \omega$.

Sea $f : X \to Y$ una función y $A \subseteq X$, definimos *la restricción de la función f al subconjunto A* $f \restriction_A$ como la función $f : A \to [Y]$ tal que para cada $a \in A$ $f \restriction_A (a) = f(a)$.

El Teorema de Cantor [3, Teorema I.10.4, pág. 63] afirma que para cualquier conjunto A, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, donde $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$. En particular, $|\omega| < |\mathcal{P}(\omega)|$, y dado que cualquier subclase no vacía de ordinales tiene elemento mínimo podemos definir lo siguiente:

Definición 1.14. ω_1 es el mínimo cardinal mayor que ω.

Por definición ω_1 es nuevamente un cardinal y $\omega < \omega_1 \leq |\mathcal{P}(\omega)|$. Así como ω es el conjunto de ordinales finitos, ω_1 tiene la siguiente caracterización.

Proposición 1.15. *ω_1 es el conjunto de los ordinales numerables.*

Demostración. Si α es un ordinal no numerable, entonces $\alpha \geq |\alpha| \geq \omega_1$, lo cual implica que $\alpha = \omega_1$ o $\alpha > \omega_1$ y por tanto $\alpha \notin \omega_1$. Ahora, si suponemos que α es un ordinal numerable que no pertenece a ω_1. Entonces $\alpha > \omega_1$, y puesto que α es transitivo, $\omega_1 \subset \alpha$ lo cual implica que $\omega_1 = |\omega_1| \leq |\alpha|$. Esto es una contradicción. □

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que el siguiente:

Corolario 1.16. *ω_1 es el primer ordinal no numerable.*

Si A es un conjunto no numerable, entonces $\omega < |A|$, y por definición, $\omega_1 \leq |A|$. Por el Teorema 1.13, existe una función inyectiva de ω_1 en A. En resumen cualquier conjunto no numerable siempre contiene un subconjunto de cardinalidad ω_1.

A lo largo del trabajo estaremos utilizando la siguiente notación.

Notación.

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$;
- $\aleph_1 = \omega_1$;
- $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\omega)|$.

Un subconjunto C de un ordinal α es *acotado en α* si existe $\beta \in \alpha$ tal que $\gamma \leq \beta$ para todo $\gamma \in C$.

Lema 1.17. *Si $B \subseteq \omega_1$ y B no es acotado en ω_1, entonces $|B| = \aleph_1$*

Demostración. Claramente $|B| \leq |\omega_1| = \aleph_1$. Si $|B| < \aleph_1$, entonces $|B| \leq \aleph_0$. Como $B \subset \omega_1$, se sigue de la Proposición 1.6, el Teorema 1.12 y la Proposición 1.15 que $\bigcup B$ es una cota superior de B en ω_1. Esto es una contradicción. □

Recordemos que dada una función f, $\mathrm{dom}(f)$ denota el dominio de f y $\mathrm{ran}(f)$ denota su rango.

Definición 1.18. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección de conjuntos. Definimos $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ como el conjunto $\{f : f \text{ es función, } \mathrm{dom}(f) = I \text{ y para cada } \alpha \in I\, (f(\alpha) \in X_\alpha)\}$.

Cuando $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \in I$, denotamos a $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ como X^I.
Observemos que X^I denota el conjunto de funciones cuyo dominio es I y rango contenido en X.

Notación. Dado un cardinal κ y un conjunto X cualquiera,

- $[X]^\kappa = \{A \subset X : |A| = \kappa\}$;
- $[X]^{<\kappa} = \{A \subset X : |A| < \kappa\}$;
- $[X]^{\leq\kappa} = \{A \subset X : |A| \leq \kappa\}$.

Proposición 1.19. *Si A es un conjunto numerable, entonces $[A]^{<\aleph_0}$ es numerable.*

Demostración. Notemos que para cada $n \in \omega$, A^n es numerable. Definimos
$\mathcal{F} : \bigcup_{n\in\omega} A^n \to [A]^{<\aleph_0}$ dada por $\mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Así, por el Teorema 1.13 $\mathcal{F}$ es una función suprayectiva, dado que $\bigcup_{n\in\omega} A^n$ es numerable por el Teorema 1.12, concluimos que $[A]^{<\aleph_0}$ es numerable. □

1.2. Conjuntos linealmente ordenados

Definición 1.20. Un *conjunto linealmente ordenado* es un par ordenado $(L, <)$ donde $<$ es un orden lineal sobre L.

Dado un conjunto linealmente ordenado $(L, <)$ y $a, b \in L$, $a \leq b$ abrevia $a < b$ o $a = b$. Como es usual, si $a, b \in L$ y $a < b$,

$$(a, b)_L = \{u \in L : a < u < b\},$$

$$(-\infty, a)_L = \{u \in L : u < a\},$$

$$(b, \infty)_L = \{u \in L : b < u\},$$

$$(-\infty, a]_L = (-\infty, a)_L \cup \{a\} \text{ y}$$

$$[b, \infty)_L = (b, \infty)_L \cup \{b\}.$$

Cuando no haya posibilidad de confusión acerca del conjunto linealmente ordenado omitiremos el subíndice L y simplemente escribiremos (a, b), $(-\infty, a)$, (b, ∞), $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$, respectivamente.
Si $(L, <)$ es un conjunto linealmente ordenado y $A \subset L$, entonces $<$ induce un orden lineal sobre A de manera natural. En efecto, podemos definir la relación $<_A$ sobre A, como $a <_A b$ si y sólo si $a < b$, para cualesquiera $a, b \in A$. Entonces $<_A$ es un orden lineal sobre A y $(A, <_A)$ es un conjunto linealmente ordenado. Por tanto, siempre que $B \subset L$ y B sea considerado como un conjunto linealmente ordenado nos referiremos a $(B, <_B)$, a no ser que se especifique lo contrario.

Definición 1.21. Sean $(L, <)$ un conjunto linealmente ordenado y $A \subset L$. Un elemento $x \in L$ es llamado *cota superior (inferior)* de A si $a \leq x$ $(x \leq a)$ para todo $a \in A$. Un elemento $z \in L$ es llamado *supremo (ínfimo)* de A si z es cota superior (inferior) de A y $z \leq w$ $(w \leq z)$ para cualquier cota superior (inferior) w de A.

Decimos que un conjunto esta *acotado superiormente (inferiormente)*, si tiene una cota superior (inferior).

Proposición 1.22. *Sean $(L, <)$ un conjunto linealmente ordenado y $A \subset L$. Si A tiene un ínfimo (supremo) éste es único.*

Demostración. Supongamos que a y b son ínfimos de A, como b es cota inferior de A y a es ínfimo de A, entonces $b \leq a$. De manera similar, como a es cota inferior de A y b es ínfimo de A, entonces $a \leq b$. Por tanto $a = b$. La demostración para cuando A tiene supremo es similar. □

Si $(L,<)$ es un conjunto linealmente ordenado y $A \subset L$ tiene supremo (ínfimo), este lo denotaremos por $\sup_L(A)$ ($\inf_L(A)$). Cuando el conjunto linealmente ordenado en consideración es suficientemente claro omitiremos el subíndice L y simplemente escribiremos $\sup(A)$ ($\inf(A)$). También es importante observar que el conjunto vacío siempre esta acotado tanto superior como inferiormente en cualquier conjunto linealmente ordenado no vacío, más aún, notemos que el $\sup(\emptyset)$ existe si y sólo si $\inf(L)$ existe y $\inf(\emptyset)$ existe si y sólo si $\sup(L)$ existe.

Definición 1.23. Un conjunto linealmente ordenado $(L,<)$ es *completo* si todo subconjunto de L tiene supremo e ínfimo.

Proposición 1.24. *Si $(L,<)$ es un conjunto linealmente ordenado que tiene ínfimo y todo subconjunto no vacío tiene supremo, entonces $(L,<)$ es completo.*

Demostración. Sean G un subconjunto no vacío de L y l el ínfimo de L. Por hipótesis G tiene supremo. Veamos que G tiene ínfimo. Como L tiene ínfimo y $G \subseteq L$, entonces G está acotado inferiormente. Sea $I = \{a \in L : a \text{ es cota inferior de } G\}$. Como $I \subseteq L$, $l \in I$ y por hipótesis I tiene supremo, entonces $\sup(I) = \inf(G)$. Con lo que para todo $G \subseteq L$ tal que $G \neq \emptyset$, G tiene ínfimo y supremo. Por tanto, L es completo. □

Definición 1.25. Un orden lineal $<$ sobre un conjunto L es llamado *orden denso* si para cualesquiera $a, b \in L$, $a < b$, existe $c \in L$ tal que $a < c < b$.

El conjunto de los números reales, racionales e irracionales con el orden usual son ejemplos de conjuntos linealmente ordenados cuyo orden es denso.

Definición 1.26. Dado un conjunto linealmente ordenado $(L,<)$, $\inf(L)$ y $\sup(L)$, si existen, son llamados *puntos finales* de L. Y decimos que L *no tiene puntos finales* si L no tiene ínfimo ni supremo.

Notemos que un conjunto linealmente ordenado $(L,<)$, $\inf(L)$ ($\sup(L)$) existe si y sólo si $(-\infty, x) = \emptyset$ ($(x,\infty) = \emptyset$) para algún $x \in L$.

Definición 1.27. Sean $(X,<)$ y $(L,\prec)$ conjuntos linealmente ordenados. Un *encaje ordenado* de X en L es una función $f : X \to L$ que satisface $a < b$ si y sólo si $f(a) \prec f(b)$ para cualesquiera $a, b \in X$. Un *isomorfismo* de X en L es un encaje ordenado suprayectivo de X en L.

Decimos que dos conjuntos linealmente ordenados son *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos.

Teorema 1.28. *Cualesquiera dos conjuntos linealmente ordenados numerables sin puntos finales con orden denso son isomorfos.*

Demostración. Sean $(A,<)$ y $(B,\prec)$ dos conjuntos linealmente ordenados numerables sin puntos finales con orden denso. Procedamos por inducción, consideremos $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y definamos $k_0 = 0$, así la función $f_0 = \{(a_0, b_{k_0})\}$ es un isomorfismo. Supongamos que $n > 0$ y sean $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$, $k_n \in \omega$ y $\{b_{k_0}, b_{k_1}, \ldots, b_{k_n}\} \subseteq B$ tales que

(a) k_n está definida según cada uno de los siguientes casos:

(I) Si $a_n < \text{mín}\{a_i : i < n\}$, entonces $k_n = \text{mín}\{i \in \omega : b_i \prec \text{mín}\{b_{k_j} : j < n\}\}$.

(II) Si $a_n > \text{máx}\{a_i : i < n\}$, entonces $k_n = \text{mín}\{i \in \omega : b_i \succ \text{máx}\{b_{k_j} : j < n\}\}$.

(III) Si $\text{mín}\{a_i : i < n\} < a_n < \text{máx}\{a_i : i < n\}$. Entonces existen $p, q \in n$ tales que $a_p = \text{máx}\{a_j : j < n \text{ y } a_j < a_n\} < a_n < \text{mín}\{a_j : j < n \text{ y } a_n < a_j\} = a_q$, entonces $k_n = \text{mín}\{i \in \omega : b_{k_p} \prec b_i \prec b_{k_q}\}$.

(b) $f_n = \{(a_i, b_{k_i}) : 0 \leq i \leq n\}$ es un isomorfismo.

Consideremos $a_{n+1} \in A$ y definiremos k_{n+1} según cada uno de los siguientes casos.

(I) Si $a_{n+1} < \text{mín}\{a_i : i < n+1\}$, entonces $k_{n+1} = \text{mín}\{i \in \omega : b_i \prec \text{mín}\{b_{k_j} : j < n+1\}\}$, el cual existe debido a que B no tiene puntos finales.

(II) Si $a_{n+1} > \text{máx}\{a_i : i < n+1\}$, entonces $k_{n+1} = \text{mín}\{i \in \omega : b_i \succ \text{máx}\{b_{k_j} : j < n+1\}\}$ este existe debido a que B no tiene puntos finales.

(III) Si $\text{mín}\{a_i : i < n+1\} < a_{n+1} < \text{máx}\{a_i : i < n+1\}$. Entonces existen $p, q \in n$ tales que $a_p = \text{máx}\{a_j : j < n+1 \text{ y } a_j < a_{n+1}\} < a_{n+1} < \text{mín}\{a_j : j < n+1 \text{ y } a_{n+1} < a_j\} = a_q$, entonces $k_{n+1} = \text{mín}\{i \in \omega : b_{k_p} \prec b_i \prec b_{k_q}\}$ lo cual tiene sentido, puesto que el orden es denso.

Queda probar que $f_{n+1} = \{(a_i, b_{k_i}) : i \leq n+1\}$ es un isomorfismo. Sean $r, t \leq n+1$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $a_r < a_t$, si $a_r, a_t \in \text{dom}(f_n)$ como $f_{n+1} \restriction \text{dom}(f_n) = f_n$, entonces $f_{n+1}(a_r) \prec f_{n+1}(a_t)$, pues $b_{k_r} \prec b_{k_t}$. Ahora consideremos sin pérdida de generalidad, el caso en que $r = n+1$ y $t \leq n$, es decir, $a_{n+1} < a_t$. Tenemos que demostrar que $b_{k_{n+1}} \prec b_{k_t}$. Veamos los siguientes casos: Supongamos $a_{n+1} < \text{mín}\{a_j : j \leq n\}$, entonces por construcción $k_{n+1} = \text{mín}\{i \in \omega : b_i \prec \text{mín}\{b_{k_j} : j \leq n\}\}$, así $b_{k_{n+1}} \prec \text{mín}\{b_{k_j} : j \leq n\} \preceq b_{k_t}$. Notemos que el caso en que $a_{n+1} > \text{máx}\{a_j : j \leq n\}$ es imposible (pues $a_{n+1} < a_t$). Entonces resta ver el caso en que $a_p = \text{máx}\{a_j : j \leq n \text{ y } a_j < a_{n+1}\} < a_{n+1} < \text{mín}\{a_j : j \leq n \text{ y } a_{n+1} < a_j\} = a_q$. En este caso $k_{n+1} = \text{mín}\{i \in \omega : b_{k_p} \prec b_{k_i} \prec b_{k_q}\}$ y por tanto $b_{k_{n+1}} \prec b_{k_q}$. Por otro lado, notemos que $a_q \leq a_t$ y puesto que $q, t \leq n$, f_n es un isomorfismo y $f_{n+1} \restriction \text{dom}(f_n) = f_n$ tenemos que $b_{k_q} \preceq b_{k_t}$. Así, $b_{k_{n+1}} \prec b_{k_q}$.
Esto concluye el paso inductivo. Por recursión tenemos construidos $\{k_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$,

$\{b_{k_i} : i \in \omega\} \subseteq B$ y $\{f_i : i \in \omega\}$ conjunto de funciones tales que para cada $n \in \omega$, f_n, k_n, $\{b_{k_i} : i \leq n\}$ satisfacen la hipótesis de inducción. Consideramos $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$. Notemos que el $\mathrm{dom}(f) = A$ y que $f(a_j) = f_j(a_j) = b_{k_j}$. Por la construcción de cada f_n, f es un encaje ordenado de A en B. Para concluir la demostración del teorema veamos que f es una función suprayectiva.
Deseamos probar que para cada $n \in \omega$, existe $s_n \in \omega$ tal que $f(a_{s_n}) = b_n$. Procederemos por inducción sobre n.

Claramente $f(a_0) = b_{k_0} = b_0$.

Supongamos que hemos elegido $s_0, \ldots, s_n \in \omega$ tales que $f(a_{s_i}) = b_i$ (o bien, $b_{k_{s_i}} = b_i$) para cada $i \leq n$.

Sea $m = \max\{s_i : i \leq n\}$. Si algún $j \leq m$ satisface que $f(a_j) = b_{n+1}$, elegimos s_{n+1} como j. Supongamos lo contrario y veamos los siguientes casos para b_{n+1}.
Caso I. Supongamos que $b_{n+1} \prec f(a_i)$ para cada $i \leq m$. Dado que A no tiene puntos finales, podemos elegir el mínimo natural $j \in \omega$ para el cual $a_j < a_i$ para cada $i \leq m$. Entonces $j > m$, lo cual implica que $b_{k_j} \neq b_i$ para cada $i \leq n$ y, por consecuente, $k_j > n$. Por otro lado, de la suposición de este caso, la elección de j y la construcción de k_j, se sigue que $k_j \leq n + 1$. Así, $k_j = n + 1$. Por tanto, si $s_{n+1} = j$, se tiene que $f(a_{s_{n+1}}) = b_{n+1}$.
Caso II. Supongamos que existen $i, l \leq m$ tales que $f(a_i) \prec b_{n+1} \prec f(a_l)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(a_i) = \max\{f(a_t) : f(a_t) \prec b_{n+1} \text{ y } t \leq m\}$ y $f(a_l) = \min\{f(a_t) : b_{n+1} \prec f(a_t) \text{ y } t \leq m\}$. Dado que $(A, <)$ es denso, podemos elegir el mínimo natural $j \in \omega$ para el cual $a_i < a_j < a_l$. Entonces $j > m$, lo cual implica que $b_{k_j} \neq b_i$ para cada $i \leq n$ y, por consecuente, $k_j > n$. Por otro lado, de la suposición de este caso, la elección de j y la construcción de $k_j \leq n+1$. En consecuencia, $k_j = n+1$. Por tanto, si $s_{n+1} = j$, se tiene que $f(a_{s_{n+1}}) = b_{n+1}$.
Caso III. Supongamos que $f(a_i) \prec b_{n+1}$ para cada $i \leq m$. Un argumento análogo al Caso I muestra que existe $s_{n+1} \in \omega$ tal que $f(a_{s_{n+1}}) = b_{n+1}$.
Los casos anteriores muestran el paso inductivo y, por tanto, que f es suprayectiva, lo cual concluye la demostración. □

Corolario 1.29. *Cualquier conjunto linealmente ordenado numerable con orden denso sin puntos finales es isomorfo a* $(\mathbb{Q}, <)$.

Demostración. Notemos que $(\mathbb{Q}, <)$ es numerable sin puntos finales y $<$ es denso. Del Teorema 1.28, concluimos el corolario. □

Definición 1.30. Sea $(L, <)$ un conjunto linealmente ordenado. Una *completación* para $(L, <)$ es una terna $(M, \prec, \alpha)$, donde $(M, \prec)$ es un conjunto linealmente ordenado y $\alpha : L \to M$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

(C1) $(M, \prec)$ es completo.

(C2) α es un encaje ordenado.

(C3) Cada elemento de M es el supremo de $\alpha[A]$ para algún $A \subseteq L$.

(C4) Si a es el supremo en L de algún conjunto $A \subset L$, entonces $\alpha(a)$ es el supremo de $\alpha[A]$ en M.

Teorema 1.31. *Cualquier conjunto linealmente ordenado tiene una completación.*

Demostración. Sea $(L, <)$ un conjunto linealmente ordenado. Sea M la colección de todos los conjuntos $x \subset L$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) Para cualesquiera $a, b \in L$, si $a < b$ y $b \in x$, entonces $a \in x$.

(b) Si a es el supremo de x en L, entonces $a \in x$.

Definimos la relación $\prec$ sobre M como:

$$x \prec y \text{ si y sólo si } x \subset y \text{ y } x \neq y$$

Claramente $\prec$ satisface los primeros dos puntos de la Definición 1.2. Veamos que satisface el tercer punto. Sean $x, y \in M$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x - y \neq \emptyset$, entonces existe $a \in x - y$. Dado que x y y satisfacen (a), $y \subset (-\infty, a)_L \subset x$, y por definición, $y \prec x$.
Procedemos a verificar que $(M, \prec)$ es completo. Notemos que $\emptyset \in M$ si L no tiene ínfimo y $\{\text{ínf}_L(L)\} \in M$ si L tiene ínfimo. En ambos casos M tiene ínfimo, por tanto es suficiente ver que todo subconjunto no vacío de M tiene supremo (véase Proposición 1.24). Sea X un subconjunto no vacío de M. Entonces $\bigcup X$ claramente satisface (a). Si $\bigcup X$ no tiene supremo, $\bigcup X \in M$ y $\bigcup X$ es el supremo de X en M. Por otro lado, si suponemos que $\bigcup X$ tiene supremo en L, digamos $a \in L$, entonces $y = \bigcup X \cup \{a\}$ satisface (a) y (b), es decir, $y \in M$.

Afirmación: y es el supremo de X.

Claramente y es cota superior de X, luego si z es una cota superior de X, entonces $\bigcup X \subset z$, de manera que, si suponemos $z \prec y$ (es decir, $z \subset y$ y $z \neq y$), $z = \bigcup X$. Dado que z satisface (b), $a = \sup_L(\bigcup X) \in z$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto y es el supremo de X en M.
Notemos que $(-\infty, a] \in M$ para cada $a \in L$. Entonces la función $\alpha : L \to M$ dada por $\alpha(a) = (-\infty, a]$ está bien definida. Verifiquemos que α es un encaje ordenado. Sean $a, b \in L$. Si $a < b$, entonces $(-\infty, a] \subset (-\infty, b]$ y $b \in (-\infty, b] - (-\infty, a]$, en consecuencia, $\alpha(a) \prec \alpha(b)$. Recíprocamente, si $\alpha(a) \prec \alpha(b)$ y suponemos que $b \leq a$, se tiene que $(-\infty, a] = (-\infty, b]$ lo cual es imposible. Así que $a < b$.
Fijemos un elemento $x \in M$. Dada $a \in x$, como x satisface (a), $\alpha(a) = (-\infty, a] \subset x$. De

esta manera, por definición de $\prec$, x es cota superior del conjunto $M_x = \{\alpha(a) : a \in x\}$. Luego, si $y \in M$ es cota superior de M_x en M y $a \in x$, $\alpha(a) \preceq y$, por definición de α obtenemos que $a \in y$. Dado que a fue un elemento arbitrario de x, concluimos que $x \preceq y$. Lo anterior muestra que $x = \sup_M(M_x)$ y tenemos demostrado (C3).
Finalmente probemos (C4). Supongamos que $a = \sup_L(A)$ para algún conjunto $A \subset L$. Dado que α es un encaje ordenado, $\alpha(a)$ es una cota superior de $\alpha[A]$. Sea $x \in M$ una cota superior de $\alpha[A]$. Probemos que $\alpha(a) \subset x$. Dado cualquier $b < a$, como $a = \sup_L(A)$, existe $c \in A$ tal que $b < c$. Por consecuente, $\alpha(b) \prec \alpha(c) \preceq x$, y dado que $b \in \alpha(b)$, $b \in x$. Lo anterior muestra que $\alpha(a) - \{a\} \subset x$. Por tanto es suficiente demostrar que $a \in x$. Por el contrario supongamos que $a \notin x$. Como x satisface (a), $x \subset \{u \in L : u < a\}$. Usando el hecho que $a = \sup_L(A)$ y que x es cota superior de $\alpha[A]$, se tiene que $x \supset \{u \in L : u < a\}$. De esta manera $x = \{u \in L : u < a\}$, lo cual implica que a es un supremo de x, y por (b), $a \in x$, lo cual es una contradicción. □

El siguiente resultado establece que cualesquiera dos completaciones son isomorfas.

Teorema 1.32. *Si $(M, \prec, \alpha)$ y $(N, \sqsubset, \beta)$ son completaciones de $(L, <)$, entonces existe un isomorfismo $f : N \to M$ tal que $f \circ \beta = \alpha$.*

Demostración. Es suficiente probar esto cuando $(M, \prec, \alpha)$ es la completación construida en el Teorema 1.31. Para cada $x \in N$, definimos $f(x) = \{a \in L : \beta(a) \sqsubseteq x\} \subseteq L$. Veamos que $f(x) \in M$. Dado que β es un encaje ordenado, $f(x)$ satisface (a). Luego, si $f(x)$ tiene un supremo en L, digamos b, por (C4), $\beta(b)$ es un supremo de $\beta[f(x)]$. Como x es cota superior de éste último conjunto, $\beta(b) \sqsubseteq x$, lo cual implica que $b \in f(x)$. Concluimos que f es una función de N en M. Veamos que f es el isomorfismo requerido. Dada cualquier $c \in L$, como β es un encaje ordenado, $f(\beta(c)) = \{a \in L : a \leq c\} = (-\infty, c] = \alpha(c)$. Por tanto, $f \circ \beta = \alpha$. Sean $z, w \in N$. Si $z \sqsubset w$, $f(z) \subset f(w)$. Aplicando (C3) a w, existe $a \in L$ tal que $z \sqsubset \beta(a) \sqsubseteq w$ y por tanto $a \in f(w) - f(z)$. Así podemos decir que $f(z) \prec f(w)$. Recíprocamente, supongamos ahora que $f(z) \prec f(w)$. Si $w \sqsubseteq z$, entonces $f(w) \preceq f(z)$, pero esto contradice el hecho que $f(z) \prec f(w)$. Por tanto, $z \sqsubset w$. Esto prueba que, f es un encaje ordenado.
Ahora veamos que f es suprayectiva. Sea $y \in M$. Como $(N, \sqsubset)$ es completo el conjunto $\beta[y]$ tiene supremo, digamos z. Claramente $y \subset f(z)$. Luego, dada $a \in f(z)$, $\beta(a) \sqsubseteq z$. Si $\beta(a) \sqsubset z$, existe $w \in y$ tal que $\beta(a) \sqsubset \beta(w)$ por lo que $a < w$, pero $w \in y$ y y satisface (a), entonces $a \in y$. Por otro lado, si $\beta(a) = z$, entonces a es un supremo de y. Dado que y satisface (b), $a \in y$. De los dos casos anteriores podemos concluir que $f(z) = y$. □

Los teoremas 1.31 y 1.32 muestran que existe una única completación (salvo isomorfismos) para cada conjunto linealmente ordenado. Más aún, si $(M, \prec, \alpha)$ es una completación de $(L, <)$, como α es un isomorfismos entre L y $\alpha[L]$, podemos identificar estos dos conjuntos y pensar que L es un subconjunto de M. Dicho esto podemos dar la siguiente notación:

Notación. Dado un conjunto linealmente ordenado $(L,<)$, $(cL,\prec)$ denota la completación de $(L,<)$, es decir, $(cL,\prec)$ es el único conjunto linealmente ordenado (salvo isomorfismos) que satisface las siguientes propiedades:

(D1) $(cL,\prec)$ es completo y $L\subset cL$;

(D2) Para cada $a,b\in L$, $a<b$ si y sólo si $a\prec b$;

(D3) Cada elemento de cL es el supremo de un conjunto de elementos de L;

(D4) Si a es el supremo en L de algún conjunto $A\subset L$, entonces a es el supremo de A en cL.

Corolario 1.33. *Sean $(L,<)$ y $(M,\prec)$ conjuntos linealmente ordenados, donde $<$ es un orden denso. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *$(M,\prec)$ es la completación de $(L,<)$.*

(2) (a) *$(M,\prec)$ es completo y $L\subset M$;*

(b) *Para cada $a,b\in L$, $a<b$ si y sólo si $a\prec b$;*

(c) *Para cualesquiera $x,y\in M$, $x\prec y$ implica que existe $a\in L$ tal que $x\prec a\prec y$.*

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Notemos que (a) y (b) se satisfacen. Para probar (c) tomamos dos elementos $x,y\in M$ tales que $x\prec y$. Aplicando (D3) podemos elegir un elemento $b\in L$ para el cual $x\prec b\preceq y$. Si $x\in L$, se sigue de la densidad del orden $<$ que existe un elemento $a\in L$ tal que $x<a<b$, entonces $x\prec a\prec y$. Supongamos $x\notin L$. Notemos que b es cota superior en L de $\{u\in L:u\prec x\}$. Por (D4), b no es el supremo de $\{u\in L:u\prec x\}$ en L, entonces podemos elegir una cota superior en L, y por tanto en M, $a\in L$ de $\{u\in L:u\prec x\}$ tal que $a<b$. Aplicando (D3) a x y usando el hecho que $x\notin L$, tenemos que $x=\sup_M(\{u\in L:u\prec x\})$ y en consecuencia $x\prec a$. Concluimos que $x\prec a\prec b\preceq y$.
Ahora supongamos que (2) implica (1). Únicamente tenemos que demostrar (D3) y (D4). Sea $x\in M$, entonces x es cota superior en M del conjunto $\{u\in L:u\prec x\}$ y (c) implica que x es el supremo de $\{u\in L:u\prec x\}$. Esto muestra (D3). Ahora, supongamos que a es el supremo de un conjunto $A\subset L$ en L. De (D2) se sigue que a es una cota superior de A en M. Supongamos que $c\in M$ es una cota superior de A en M tal que $c\prec a$. Por (c), podemos elegir un elemento $b\in L$ tal que $c\prec b\prec a$. Como $b<a$, existe $d\in A$ para el cual $b<d\leq a$. Por (D2) se tiene que $c\prec b\prec d$ lo cual es imposible. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es presentar una caracterización del conjunto de los números reales. Para esto necesitamos definir la siguiente propiedad.

Definición 1.34. Un subconjunto A de un conjunto linealmente ordenado $(L,<)$ es *denso* si cualquier intervalo no vacío de la forma (x,y), $(-\infty,x)$ o (y,∞) contiene al menos un elemento de A.

Un conjunto linealmente ordenado $(L,<)$ es llamado *separable* si tiene un subconjunto denso numerable.

Necesitaremos algunos lemas, los cuales son consecuencias del último corolario, para mostrar la caracterización de los números reales.

Lema 1.35. *Si $(L,<)$ es un conjunto linealmente ordenado, $<$ es denso y $C \subset L$ es un subconjunto denso de $(L,<)$, entonces $(cL,\prec)$ es la completación de $(C,<_C)$.*

Demostración. Claramente $<_C$ es un orden denso sobre C, entonces para demostrar que $(cL,\prec)$ es la completación de $(C,<_C)$ es suficiente verificar que $(cL,\prec)$ satisface (a)-(c) del Corolario 1.33. Es claro que (a) y (b) se satisfacen y (c) se sigue del hecho que (c) se satisface para $(L,<)$, $<$ es denso y C es denso en $(L,<)$. $\square$

El Lema 1.35 muestra que la completación de $(\mathbb{R},<)$, $(c\mathbb{R},\prec)$, es la completación de $(\mathbb{Q},<)$. El siguiente lema muestra una descripción de $(cL,\prec)$.

Lema 1.36. *Sea $(L,<)$ un conjunto linealmente ordenado que satisface las siguientes condiciones:*

I. *L no tiene puntos finales;*

II. *$<$ es denso;*

III. *Todo subconjunto no vacío de L acotado superiormente tiene supremo.*

Entonces $cL - L$ consta únicamente del ínfimo y supremo de cL.

Demostración. Sea $L' = L \cup \{-\varpi,\varpi\}$, donde $-\varpi,\varpi \notin L$. Definimos sobre L' un orden lineal $\ll$ como sigue: cualesquiera dos elementos de L se comparan con el orden $<$ de L, $-\varpi$ es menor que cualquier otro elemento de L' y ϖ es mayor que cualquier otro elemento de L'. Si A es un subconjunto no vacío de L acotado superiormente, entonces A tiene un supremo en $(L,<)$. Por tanto en $(L',\ll)$. Si por el contrario, A no está acotado superiormente en $(L,<)$, entonces ϖ es el supremo de A en $(L',\ll)$. Esto muestra que todo subconjunto no vacío de L' tiene supremo. Dado que $(L',\ll)$ tiene elemento mínimo, se sigue de la Proposición 1.24 que $(L',\ll)$ es completo. Pero claramente (b) y (c) del Corolario 1.33 se satisfacen. Entonces $(L',\ll)$ es la completación de L y $L'-L$ consta únicamente del ínfimo y supremo de L'. $\square$

Con estos dos últimos lemas estamos listos para dar una caracterización del conjunto de los números reales.

Teorema 1.37. *Para cualquier conjunto linealmente ordenado* $(L, \prec)$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $(L, \prec)$ *es isomorfo a* $(\mathbb{R}, <)$*;*
2. I. L *no tiene puntos finales;*
   II. $\prec$ *es denso;*
   III. *Todo subconjunto no vacío de* L *acotado superiormente tiene supremo;*
   IV. L *es separable.*

Demostración. Por las propiedades de los números reales es inmediato que 1 implica 2. Ahora mostraremos que 2 implica 1. Como L es separable, podemos elegir un subconjunto numerable C de L tal que $C \cap (a, b) \neq \emptyset$ siempre que $a \prec b$. Entonces $(C, \prec_C)$ es un conjunto linealmente ordenado numerable denso sin puntos finales. Por el Corolario 1.29, $(C, <_C)$ es isomorfo a $(\mathbb{Q}, <)$. Del Lema 1.35 $(cL, \prec)$ y $(c\mathbb{R}, \ll)$ son completaciones de $(C, <_C)$ y $(\mathbb{Q}, <)$, respectivamente. Por el Teorema 1.32 $(cL, \prec)$ y $(c\mathbb{R}, \ll)$ son isomorfas. $\square$

1.3. Espacios topológicos

Para poder entender completamente el tema que desarrollaremos, es necesario tener presentes algunas definiciones básicas de Topología, las cuales mencionaremos a continuación.

Primero recordemos que un *espacio topológico* es un par ordenado (X, τ) donde τ satisface las siguientes condiciones:

1. $\{\emptyset, X\} \subseteq \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$;
2. Si $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$;
3. Si $n \in \omega$ y $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

La familia τ es llamada topología de X. Los elementos de τ son llamados abiertos. Y por espacio nos referiremos a espacio topológico no vacío.
Usualmente, hay varias formas de escribir el interior y la cerradura de un conjunto, nosotros utilizaremos la siguiente notación.

Notación. Denotaremos la cerradura de un conjunto U como $\overline{U}$ y el interior como $\mathrm{int}(U)$.

Recordemos la siguiente definición.

Definición 1.38. Un conjunto $D \subset X$ es *denso* en X, si para todo conjunto abierto no vacío A de X tenemos que $D \cap A \neq \emptyset$.

Llamaremos a un espacio *separable* si tiene un denso numerable.

Definición 1.39. Llamamos a un conjunto $V \subseteq X$ *vecindad* de un punto p en el espacio X , si existe un abierto U de X tal que $p \in U \subseteq V$.

Después de haber definido la mayor parte de los conjuntos con los que vamos a trabajar es preciso introducir algunas familias de subconjuntos de un espacio.

Definición 1.40. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un espacio X, $\mathcal{F}$ es:

- *abierta*, si todos sus elementos son abiertos en X;
- *ajena*, si cualesquiera dos elementos distintos de ella son ajenos;
- *celular*, si es abierta, ajena y todos sus elementos son distintos del vacío;
- *localmente finita (numerable) en x* si $x \in X$ tiene una vecindad W que intersecta a lo más una cantidad finita (numerable) de elementos de $\mathcal{F}$;
- *localmente finita (numerable)* si para cada $x \in X$ existe una vecindad W de x que intersecta a lo más una cantidad finita (numerable) de elementos de $\mathcal{F}$.

A una familia de subconjuntos de X, que cumple que $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ la llamaremos *cubierta*. Una *subcubierta* es un subconjunto de una cubierta que también es cubierta.

Definición 1.41. Un espacio de Hausdorff es *compacto* si toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita.

Tengamos en cuenta que una caracterización de la compacidad está dada por la siguiente propiedad.

Definición 1.42. Una familia $\mathcal{F}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* (pif), si $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ siempre que $\mathcal{A} \in [\mathcal{F}]^{<\aleph_0}$.

Teorema 1.43. [2, Teorema 3.1.1. pág. 123] *Un espacio X es compacto si y sólo si para cada familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados con la pif se tiene que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

A continuación definiremos lo que es la topología producto, para posteriormente enunciar un teorema que nos hable acerca del producto de espacios compactos.

Definición 1.44. Sea $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ la función que asigna a cada elemento del producto $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ su coordenada β-ésima, es decir, $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in J}) = x_\beta$. A π_β se le denomina *función proyección* asociada con el índice β.
Denotemos por $\mathcal{S}_\beta$ a la colección

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$$

y denotemos por $\mathcal{S}$ a la unión de esas colecciones,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in J} \mathcal{S}_\beta$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina *topología producto.*

Al espacio $(\prod_{\alpha\in J} X_\alpha, \tau_p)$ donde τ_p es la topología producto, se le conoce como producto topológico.

Teorema 1.45. [2, Teorema 3.2.4. pág.138] *El producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto.*

El teorema anterior es el conocido *Teorema de Tychonoff.*

Definición 1.46. Dada una cubierta $\mathcal{V}$ de X, decimos que $\mathcal{U}$ *refina* a $\mathcal{V}$ o bien que $\mathcal{U}$ es *refinamiento* de $\mathcal{V}$, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X y todo elemento de $\mathcal{U}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{V}$. En tal caso escribimos $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$.

Definición 1.47. Un espacio de Hausdorff es de *Lindelöf*, si toda cubierta abierta del espacio tiene una subcubierta numerable. Un espacio X es *hereditariamente de Lindelöf* si todo subespacio de X es de Lindelöf.

La propiedad de ser de Lindelöf es similar a la compacidad. Por ejemplo tenemos el siguiente lema.

Lema 1.48. *Un subespacio $A \subseteq X$ es de Lindelöf si y sólo si toda cubierta de A por abiertos de X tiene una subcubierta numerable.*

Demostración. Para la necesidad, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A por abiertos de X. La familia $\mathcal{U}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de A por abiertos de A, dado que A es de Lindelöf, existe $\mathcal{U}'_A \subseteq \mathcal{U}_A$ subcubierta numerable de A. Para cada $V \in \mathcal{U}'_A$, fijamos un $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V = U_V \cap A$. Sea $\mathcal{U}' = \{U_V : V \in \mathcal{U}'_A\}$. Como $\mathcal{U}'_A$ es numerable, $\mathcal{U}'$ es numerable. Finalmente, si $a \in A$, como $A = \bigcup \mathcal{U}'_A$, existe $V \in \mathcal{U}'_A$ tal que $a \in V$. Pero $V = U_V \cap A$, con lo que $a \in U_V$. Esto muestra que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$.
Para la suficiencia, consideremos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A por abiertos de A, para cada $U \in \mathcal{U}$, podemos fijar un abierto V_U en X tal que $U = V_U \cap A$. Entonces la familia

$\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de A por abiertos de X. Por hipótesis existe una subcubierta numerable $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ de A. Para cada $V \in \mathcal{V}'$, fijamos $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V = V_{U_V}$. Sea $\mathcal{U}' = \{U_V : V \in \mathcal{V}'\}$, claramente $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ es numerable y dado que para $a \in A$, existe $W \in \mathcal{V}'$ tal que $a \in W$. Así, $a \in W \cap A = V_{U_W} \cap A = U_W \in \mathcal{U}'$. Esto muestra que $\mathcal{U}'$ es cubierta de A. □

Proposición 1.49. *Un espacio X es de Lindelöf si y sólo si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento numerable.*

Demostración. Para la necesidad, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, por ser de Lindelöf existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V}$ es numerable y $\bigcup \mathcal{V} = X$, como $\mathcal{V}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$, tenemos que la implicación se cumple.
Para la suficiencia, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, entonces existe $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ tal que es numerable. Así, para todo $V \in \mathcal{V}$, existe $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U_V$, con lo que $\{U_V : V \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{U}$ y $X = \bigcup \mathcal{V} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} U_V$. □

Proposición 1.50. *Un espacio X es hereditariamente de Lindelöf si y sólo si todo subespacio abierto de X es de Lindelöf.*

Demostración. La necesidad es clara, pues si U es un subespacio abierto de X, por definición U es de Lindelöf. Para la suficiencia, sean $Y \subset X$ y $\mathcal{U}$ una cubierta de Y por abiertos de X, así $Z = \bigcup \mathcal{U}$ es abierto en X y $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de Z, así existe un subconjunto $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ numerable tal que $Z = \bigcup \mathcal{U}'$. Pero $Y \subseteq Z \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Se sigue de la Proposición 1.49 que Y es de Lindelöf. □

La propiedad de ser de Lindelöf no se hereda a cualquier subespacio, sin embargo, como la compacidad, se hereda a subespacios cerrados (véase [2, Teorema 3.8.4, pág. 192]). Con las definiciones anteriores podemos decir que todo refinamiento abierto localmente finito es una cubierta de un espacio que es localmente finito. Ahora definamos lo que es un espacio paracompacto.

Definición 1.51. Un espacio de Hausdorff X es *paracompacto* si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito. Y a un espacio lo llamaremos *hereditariamente paracompacto* si todos sus subespacios son paracompactos.

Un teorema importante que relaciona el concepto de ser espacio de Lindelöf con paracompacto es el siguiente.

Teorema 1.52. [2, Teorema 5.1.2. pág. 300] *Todo espacio de Lindelöf es paracompacto.*

Ahora recordemos cuando un espacio es metrizable, pero antes que eso tengamos en cuenta lo que es un espacio métrico.

Definición 1.53. Un espacio *métrico* es un par ordenado (X, d) donde d es una métrica sobre X, es decir, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

- Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = d(y, x)$;
- Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
- Para cada $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Dado un espacio métrico (X, d), la *topología inducida sobre X por la métrica d* es la topología generada por la base $\{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0 \text{ y } x \in X\}$, donde $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$. Dicha topología la denotamos por τ_d.

Definición 1.54. Un espacio topológico (X, τ) es *metrizable* si existe una métrica d definida sobre X tal que $\tau_d = \tau$.

Un resultado que relaciona la definición anterior con ser un espacio paracompacto es el siguiente.

Teorema 1.55. [2, Teorema 5.1.3. pág. 300] *Todo espacio metrizable es paracompacto.*

Regresando al tema de las familias, a continuación daremos una definición que ocuparemos posteriormente. Una familia $\mathcal{F}$ es *estrella numerable* si para cada $F \in \mathcal{F}$, la familia

$$\mathrm{st}(F, \mathcal{F}) = \{B \in \mathcal{F} : B \cap F \neq \emptyset\}$$

es numerable.

Teorema 1.56 ([2]). *Si toda cubierta abierta de un espacio regular X tiene un refinamiento abierto estrella numerable, entonces X es paracompacto.*

Tengamos presente de la Definición 1.40 que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un espacio X es localmente numerable si para cada $x \in X$ existe una vecindad W de x que intersecta a lo más a una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{F}$.

Definición 1.57. Un espacio X es *para-Lindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto locamente numerable.

Definición 1.58. Diremos que una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X es *punto finita* si cada $x \in X$ pertenece a un numero finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Definición 1.59. El espacio X es *metacompacto* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento punto finito. Y un espacio será *hereditariamente metacompacto* si todos sus subespacios son metacompactos.

Definición 1.60. Un espacio X es de *Baire* si la intersección de cada familia numerable de conjuntos abiertos densos en X es denso en X.

Algunas propiedades se heredan a subconjuntos del espacio, en el caso de la propiedad de ser de Baire, se hereda a subconjuntos abiertos.

Teorema 1.61. *Todo subconjunto abierto de un espacio de Baire es de Baire.*

Demostración. Sean X un espacio de Baire, $W \subset X$ abierto y $\{D_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de conjuntos abiertos densos en W. Así $\left\{D_n \cup (X - \overline{W}) : n \in \omega\right\}$ es una familia de abiertos densos en X, como X es de Baire, $\bigcap_{n\in\omega}\left(D_n \cup \left(X - \overline{W}\right)\right)$ es denso en X. Con esto $\left(\bigcap_{n\in\omega}\left(D_n \cup \left(X - \overline{W}\right)\right)\right) \cap W$ es denso en W, sin embargo,

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{n\in\omega}\left(D_n \cup \left(X - \overline{W}\right)\right)\right) \cap W &= \bigcap_{n\in\omega}\left(\left(D_n \cup \left(X - \overline{W}\right)\right) \cap W\right)\\ &= \left(\bigcap_{n\in\omega}(D_n \cap W)\right) \cup \left(\left(X - \overline{W}\right) \cap W\right)\\ &= \bigcap_{n\in\omega}(D_n \cap W)\\ &= \bigcap_{n\in\omega} D_n.\end{aligned}$$

Por tanto $\bigcap\{D_n : n \in \omega\}$ es denso en W. □

Proposición 1.62. *Un espacio X es de Baire si y sólo si para toda familia $\{U_n : n \in \omega\}$ tal que U_n es denso abierto y $U_{n+1} \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ es denso en X.*

Demostración. La necesidad es clara. Para la suficiencia fijamos una familia de densos abiertos $\{O_n : n \in \omega\}$ en X. Definimos $D_0 = O_0$ y $D_n = \bigcap_{k\leq n} O_k$. Claramente $D_n \supseteq D_{n+1}$ y D_n es abierto para toda $n \in \omega$.
Por inducción veamos que cada D_n es denso en X. Claramente D_0 es denso en X. Supongamos que D_n es denso en X. Como O_{n+1} es abierto en X, entonces $D_n \cap O_{n+1}$ es denso en O_{n+1}, pero O_{n+1} es denso en X. Así, $O_{n+1} \cap D_n = D_{n+1}$ es denso en X. Concluimos que $\{D_n : n \in \omega\}$ es una familia de densos abiertos que satisface las hipótesis. Entonces $\bigcap_{n\in\omega} O_n = \bigcap_{n\in\omega} D_n$ es denso en X. □

Definición 1.63. Un espacio de Hausdorff es *localmente compacto* si cada uno de sus puntos tiene una vecindad compacta.

Todo espacio localmente compacto es Tychonoff y por tanto regular (véase [2, 3.3.1. Pág. 148]).

Teorema 1.64. *Todo espacio localmente compacto es de Baire.*

Demostración. Sea Y un espacio localmente compacto y $\{W_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos abiertos densos en Y. Dada $y \in Y$ y W un subconjunto abierto de Y tal que $y \in W$ y $\overline{W}$ es compacto. Mostremos que W contiene un punto que pertenece a todos los W_n. Sea $X_0 = W \cap W_0$ el cual es abierto y no vacío, como W_0 es denso y abierto entonces X_0 es abierto y no vacío. Como W_1 es denso y abierto, $X_0 \cap W_1$ es abierto y no vacío. Dado que X es localmente compacto y regular podemos elegir un conjunto abierto no vacío X_1 tal que $\overline{X_1}$ es compacto y $\overline{X_1} \subseteq X_0 \cap W_1$. De manera similar podemos elegir un conjunto abierto X_2 tal que $\overline{X_2}$ es compacto y $\overline{X_2} \subseteq X_1 \cap W_2$. Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de subconjuntos abiertos $\{X_n : n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$, $\overline{X_{n+1}} \subseteq X_n$, $\overline{X_n}$ es compacto y $\overline{X_n} \subseteq W_n$. El Teorema 1.43 aplicado a $\overline{W}$ muestra que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} \overline{X_n} = \bigcap_{n\in\omega} X_n \subseteq (\bigcap_{n\in\omega} W_n) \cap W$. □

Del mismo modo como un conjunto denso es aquel para el cual su cerradura coincide con el total, un conjunto denso en ninguna parte es aquel para el cual el interior de su cerradura es vacío.

Definición 1.65. Un conjunto $A \subseteq X$ es *denso en ninguna parte* en X si $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Definición 1.66. Un conjunto $A \subseteq X$ es de *primera categoría* en X si $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es denso en ninguna parte en X.

Decimos que un conjunto es de *segunda categoría* si no es de primera categoría.

Teorema 1.67. *Sea X un espacio topológico, X es de segunda categoría en si mismo si y sólo si la intersección de toda familia numerable de conjuntos abiertos densos en X es no vacía.*

Demostración. Probemos la necesidad. Sean $\{G_n : n \in \omega\}$ conjuntos densos abiertos, entonces $\{X - G_n : n \in \omega\}$ son conjuntos cerrados densos en ninguna parte. Así $\bigcup_{n\in\omega}(X - G_n)$ es de primera categoría, con lo que $\bigcap_{n\in\omega} G_n = X - \bigcup_{n\in\omega}(X - G_n) \neq \emptyset$ lo cual ocurre, pues X es de segunda categoría.
Para probar la suficiencia, supongamos que $X = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es denso en ninguna parte. Entonces $X = \bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n}$ y $\overline{A_n}$ es denso en ninguna parte. Así, por un lado, tenemos que

$$X - \bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n} = \emptyset$$

y por otra parte

$$X - \bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n} = \bigcap_{n\in\omega} (X - \overline{A_n}) \neq \emptyset$$

pues cada $X - \overline{A_n}$ es abierto denso en X. Por tanto $X \neq \bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n}$ lo cual es una contradicción. □

Corolario 1.68. *Todo espacio de Baire es de segunda categoría en si mismo.*

Demostración. Sea X un espacio Baire y $\{A_n : n \in \omega\}$ una familia de densos abiertos en X. Como X es Baire, $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ es denso. Dado que $X \neq \emptyset$, $\bigcap_{n\in\omega} A_n \neq \emptyset$. Se sigue del Teorema 1.67 que X es de segunda categoría. $\square$

El siguiente ejemplo muestra un espacio de segunda categoría que no es de Baire. para esto necesitamos definir la suma topológica.

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios. Definimos la suma topológica de X y Y como el conjunto $X \oplus Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ cuya topología esta dada por

$$\tau = \{(V \times \{0\}) \cup (U \times \{1\}) : V \in \tau_X \ \wedge \ U \in \tau_Y\}.$$

Observemos que X es homeomorfo al subespacio $X \times \{0\}$ de $X \oplus Y$. De manera similar ocurre con Y.

Ejemplo 1.69. Consideremos la suma topológica $X = I \oplus \mathbb{Q}$, donde $I = [0,1]$ y $\mathbb{Q}$ están dotados con la topología usual. Entonces X es de segunda categoría y no es de Baire.

Demostración. Notemos que los conjuntos $\{X - \{(p,1)\} : p \in \mathbb{Q}\}$ son abiertos densos en X, pero $\bigcap_{p\in\mathbb{Q}}(X - \{(p,1)\}) = I \times \{0\}$ no es denso en X. Esto muestra que X no es de Baire.
Si $\{O_n : n \in \omega\}$ es una familia de densos abiertos en X, entonces $\{O_n \cap (I \times \{0\}) : n \in \omega\}$ es una familia de densos abiertos en $I \times \{0\}$. Por el Teorema 1.64, I es de Baire. Entonces $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega}(O_n \cap (I \times \{0\})) \subset \bigcap_{n\in\omega} O_n$. Concluimos que X es de segunda categoría. $\square$

La recta real con la topología usual es de Baire (por el Teorema 1.64). La linea de Sorgenfrey S es de Baire. La demostración de esto puede ser obtenida usando las ideas de la demostración del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.70. El espacio $S \times S$, donde S es la recta de Sorgenfrey, es de Baire.

Demostración. Primero fijemos un subconjunto denso abierto D de $S \times S$. Veremos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(D)$ es denso en $\mathbb{R}^2$. Basta ver que cualquier conjunto de la forma $(a,b) \times (c,d)$ contiene un punto de $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(D)$. En efecto, como D es denso en $S \times S$, existe $x \in ([a,b) \times [c,d)) \cap D$. Como D es abierto, podemos encontrar $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ tales que $x \in [p,q) \times [r,s) \subseteq ([a,b) \times [c,d)) \cap D$. En consecuencia, $(p,q) \times (r,s) \subseteq (a,b) \times (c,d)$ y $(p,q) \times (r,s) \subseteq D$. Por tanto cualquier punto en $(p,q) \times (r,s)$ es un punto en el interior de D que pertenece a $(a,b) \times (c,d)$.
Para probar que $S \times S$ es de Baire aplicamos el hecho anterior de la siguiente manera: Sea $\{D_n : n \in \omega\}$ una familia de densos abiertos en $S \times S$. Entonces $\{\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(D_n) : n \in \omega\}$

es una familia de densos abiertos en $\mathbb{R}^2$ el cual es de Baire. Entonces $\bigcap_{n\in\omega} \operatorname{int}_{\mathbb{R}^2}(D_n)$ es denso en $\mathbb{R}^2$, pero cualquier denso en $\mathbb{R}^2$ es denso en $S \times S$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} \operatorname{int}_{\mathbb{R}^2}(D_n)$ es denso en $S \times S$ y por tanto $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ es denso en $S \times S$.

□

1.4. Espacios topológicos linealmente ordenados

A partir de este momento todos los conjuntos linealmente ordenados tienen al menos dos puntos.

Proposición 1.71. *Sea $(X,<)$ un conjunto linealmente ordenado. Entonces*

$$\mathcal{B} = \{(x,y) : x,\, y \in X \text{ y } x < y\} \bigcup \{(x,\infty) : x \in X\} \bigcup \{(-\infty,x) : x \in X\}$$

forma una base para alguna topología sobre X.

Demostración. Sea $x \in X$, como $|X| \geq 2$, existe $y \in X - \{x\}$. Dado que $(X,<)$ satisface tricotomía podemos suponer sin perdida de generalidad que $x < y$, de esta manera $x \in (-\infty, y) \in \mathcal{B}$. Por tanto $X = \bigcup \mathcal{B}$. Sean $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Probemos que $A \cap B \in \mathcal{B}$.
Caso I. $A = (x,y)$ y $B = (z,w)$. Entonces $A \cap B = (\sup\{x,\, z\}, \inf\{y,\, w\}) \in \mathcal{B}$.
Caso II. $A = (x,y)$ y $B = (z,\infty)$. Entonces $A \cap B = (\sup\{x,\, z\}, y) \in \mathcal{B}$.
Caso III. $A = (x,\infty)$ y $B = (-\infty, y)$. Entonces $A \cap B = (x,y) \in \mathcal{B}$.
El resto de los casos son análogos. □

Definición 1.72. Un *espacio topológico linealmente ordenado* (LOTS) por sus iniciales en íngles, es una terna $(L,<,\tau)$ donde $(L,<)$ es un conjunto linealmente ordenado y τ la topología generada por la familia $\mathcal{B}$ de la Proposición 1.71.

A partir de este momento cuando nos refiramos a un conjunto linealmente ordenado $(L,<)$ como espacio topológico estaremos pensando que L esta dotado con la topología generada por $\mathcal{B}$ de la Proposición 1.71.

Proposición 1.73. *Si $(X,<)$ es un LOTS, entonces X es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos, por tricotomía, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x < y$. Entonces veamos dos casos.
Caso I. Si $(x,y) = \emptyset$. Entonces $x \in (-\infty, y)$, $y \in (x,\infty)$ y $(-\infty,y) \cap (x,\infty) = (x,y) = \emptyset$.
Caso II. Existe $z \in (x,y)$. Entonces $x \in (-\infty,z)$, $y \in (z,\infty)$ y $(-\infty,z) \cap (z,\infty) = \emptyset$ □

El siguiente teorema muestra una caracterización de la compacidad en un LOTS en términos de su orden.

Teorema 1.74. *Un LOTS* $(X,<)$ *es compacto si y sólo si* $(X,<)$ *es completo.*

Demostración. Para la necesidad aplicaremos la Proposición 1.30. Primero demostremos que X tiene ínfimo. Supongamos por el contrario que no es así. Entonces, dada $x \in X$, x no es cota inferior de X y en consecuencia, existe $a \in X$ tal que $a < x$. Esto muestra que la familia $\{(a,\infty) : a \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, podemos elegir $a_1,...,a_k \in X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{k}(a_i,\infty)$. Sin embargo $\inf\{a_1,...,a_k\} \in X - \bigcup_{i=1}^{k}(a_i,\infty)$. Lo cual es una contradicción. Finalmente probemos que todo subconjunto no vacío de X tiene supremo. Sea $A \subseteq X$ un conjunto no vacío. Supongamos que A no tiene supremo, entonces dado $x \in X$, x no es supremo de A y por tanto x no es cota superior de A o existe una cota superior w de A tal que $w < x$, es decir, existe $a \in A$ tal que $x < a$ o existe una cota superior w de A tal que $w < x$. En consecuencia la familia $\{(-\infty,a) : a \in A\} \cup \{(b,\infty) : b \text{ es cota superior de } A\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, podemos elegir $E \subset A$ finito y un conjunto finito F de cotas superiores de A tales que $X = \bigcup_{a\in E}(-\infty,a) \cup \bigcup_{b\in F}(b,\infty)$. Dado que A no es vacío, podemos fijar $p \in A$. Luego, $p \notin \bigcup_{b\in F}(b,\infty)$ pues F está formado por cotas superiores de A. Entonces existe $q \in E$ tal que $p \in (-\infty,q)$, en particular, $E \neq \emptyset$ y por tanto podemos tomar su supremo, digamos e. Puesto que $e \in A$, $e \notin \bigcup_{b\in F}(b,\infty)$ y dado que $e = \sup(E)$, $e \notin \bigcup_{a\in E}(-\infty,a)$. Esto es una contradicción.

Para la suficiencia. Sea $\mathcal{F}$ una familia de cerrados en X con la pif. Sean $A = \{a \in X : [a,\infty) \cap (\bigcap \mathcal{F}') \neq \emptyset \text{ para cada conjunto finito } \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}\}$ y $b = \sup(A)$. Veamos que $b \in \bigcap \mathcal{F}$. Supongamos lo contrario, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $b \notin F$. Como F es cerrado, existe un básico B de la topología del orden tal que $b \in B \subseteq X - F$.
Caso I. $B = (-\infty,z)$. Como $b < z$, $z \notin A$. Así, existe una colección finita $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$ tal que $[z,\infty) \cap \bigcap \mathcal{F}'' = \emptyset$. Notemos que existe $a \in A$ tal que $a \leq b$ de modo que si $b = \text{ínf}(X)$, entonces $b \in A$. De esta manera, como $\mathcal{F}'' \cup \{F\} \subseteq \mathcal{F}$ y es finito, $\emptyset \neq [a,\infty) \cap (\bigcap(\mathcal{F}'' \cup \{F\}) = ([a,z) \cup [z,\infty)) \cap (\bigcap \mathcal{F}'' \cap F) = \emptyset$ lo cual es una contradicción.
Caso II. $B = (z,\infty)$. Si $b = \sup(X)$ y $b \in A$, entonces $\emptyset \neq [b,\infty) \cap F = \{b\} \cap F$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Por tanto $b \in \bigcap \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción. De lo anterior podemos suponer que $b \neq \sup(X)$ o $b \notin A$, en ambos casos podemos obtener un elemento $w \in X - A$ tal que $b \leq w$. Dado que $w \notin A$, existe $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}$ finito tal que $[w,\infty) \cap \bigcap \mathcal{F}'' = \emptyset$. Por otro lado, como $b = \sup(A)$, existe $a \in (z,b] \cap A$. Así, $\emptyset \neq [a,\infty) \cap (\bigcap \mathcal{F}'' \cap F) = ([a,w) \cup [w,\infty)) \cap (\bigcap \mathcal{F}'' \cap F) = \emptyset$ lo cual es una contradicción.
Caso III. $B = (x,y)$. Entonces $x < z < y$, pero como $b < y$, $y \notin A$, existe $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$ tal que $[y,\infty) \cap \bigcap \mathcal{F}'' = \emptyset$. Notemos que existe $a \leq b$ de modo que si $b = \text{ínf}(X)$, entonces $b \in A$, como $\mathcal{F}'' \cup \{F\} \subseteq \mathcal{F}$ y es finito, entonces $\emptyset \neq [a,\infty) \cap [\bigcap \mathcal{F}'' \cap F] = [[a,x] \cap (x,y) \cap [y,\infty)] \cap [\bigcap \mathcal{F}'' \cap F] = \emptyset$, lo cual es una contradicción. □

Así como la compacidad en un LOTS depende únicamente del orden, la conexidad también.

Teorema 1.75 ([2])**.** *Un LOTS* $(L, <)$ *es conexo si y sólo si el orden* $<$ *es denso y todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.*

Es claro que el conjunto linealmente ordenado $(L, <)$ es separable si y sólo si el espacio topológico $(L, <)$ es separable. Entonces, aplicando el Teorema 1.75, el Teorema 1.37 puede ser escrito de la siguiente forma:

Teorema 1.76. *Para cualquier LOTS* $(L, \prec)$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $(L, \prec)$ *es isomorfo a* $(\mathbb{R}, <)$*;*

2. $(L, \prec)$ *es separable, conexo y no tiene puntos finales.*

Como todo isomorfismo es un homeomorfismo tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.77. *Todo LOTS separable, conexo y sin puntos finales es homeomorfo a* $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $(L, \prec)$ un LOTS separable, conexo y sin puntos finales, por el Teorema 1.76 $(L, \prec)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}, <)$ por lo que cumple con ser un homeomorfismo. Así, $(L, \prec)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, <)$. $\square$

Proposición 1.78. *Si* cL *es un LOTS separable, entonces* L *es separable.*

Demostración. Sea Q un denso numerable de cL. Para cada $a, b \in Q$ tal que $a < b$ y $(a, b)_{cL} \neq \emptyset$, fijamos un elemento $x_{a,b} \in (a, b)_{cL} \cap L$. Sea $D = \{x_{a,b} : a, b \in Q \wedge a < b \wedge (a, b)_{cL} \neq \emptyset\} \cup \{x \in L : \{x\}$ es abierto en $cL\}$. Notemos que si $\{x\}$ es abierto en cL, entonces $x \in Q$. Con esto podemos concluir que D es numerable. Probemos que D es denso en L.
Consideremos el intervalo $(x, y)_L \neq \emptyset$, donde $x, y \in L$ y $x < y$ y probemos que contiene al menos un elemento de D. Entonces $(x, y)_{cL} \supseteq (x, y)_L \neq \emptyset$. Si $(x, y)_{cL}$ es infinito, entonces podemos tomar $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ elementos en $(x, y)_{cL}$. Así, $(x, x_2)_{cL} \neq \emptyset$, $(x_2, x_4)_{cL} \neq \emptyset$ y $(x_4, y)_{cL} \neq \emptyset$, por la densidad de Q, cada uno debe contener un punto de Q, digamos a, b, c, respectivamente. De esta manera, $x < a < b < c < y$, lo cual implica que $(a, c)_{cL} \neq \emptyset$. Por tanto $x_{a,c} \in D$ y por definición $x_{a,c} \in (a, c)_{cL} \cap L \subseteq (x, y)_{cL} \cap L = (x, y)_L$.
Por otro lado, si $(x, y)_{cL}$ es finito, entonces $\{z\}$ es abierto en cL para cada cada $z \in (x, y)_{cL}$, dado que $\emptyset \neq (x, y)_L \subseteq (x, y)_{cL}$, esto implica que existe $z \in (x, y)_L$ tal que $\{z\}$ es abierto en cL y en particular en L, esto implica que $(x, y)_L$ contiene un punto de D. De manera similar se puede demostrar que los intervalos no vacíos de la forma $(-\infty, x)_L$ y $(y, \infty)_L$ contienen al menos un elemento de D. $\square$

2

La condición de la cadena numerable

A lo largo de este capítulo, vamos a dar los resultados más importantes acerca de la condición de la cadena numerable. Empecemos por dar en forma general un concepto de lo que significa que un espacio tenga la condición de la cadena numerable o bien la ccc por sus iniciales en inglés (Countable Chain Condition).

Definición 2.1. Un espacio satisface la *ccc*, o bien es ccc, si toda familia celular del espacio es numerable.

2.1. Resultados Básicos

Algunos de los resultados básicos de la ccc se muestran a continuación. Lo primero que se nos ocurre preguntarnos acerca de la ccc, es si se preserva bajo una función continua y suprayectiva.

Proposición 2.2. *Sean X y Y espacios y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es ccc, entonces Y es ccc.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia celular en Y. Por ser $\mathcal{F}$ una familia celular, todo $F \in \mathcal{F}$ es un abierto no vacío en Y. Como f continua y suprayectiva, $f^{-1}(F)$ es un abierto no vacío en X para toda $F \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F}' = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es una familia abierta en X. Supongamos que $H \cap J \neq \emptyset$ y $H \neq J$, donde $H = f^{-1}(F_1)$ y $J = f^{-1}(F_2)$, para F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$. Como $F_1 \neq F_2$, entonces

$$\begin{aligned}\emptyset \neq H \cap J &= f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)\\ &= f^{-1}(F_1 \cap F_2)\\ &= f^{-1}(\emptyset) = \emptyset\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, por lo que $H \cap J = \emptyset$ para todos $H, J \in \mathcal{F}'$. Así, $\mathcal{F}'$ es una familia celular de X, por tanto $|\mathcal{F}'| \leq \aleph_0$. Como $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}|$, $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$. Por tanto Y es ccc. □

Otra cosa interesante sobre la ccc es que es una propiedad topológica.

Corolario 2.3. *La propiedad ccc es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Supongamos que X es ccc. Como f es una función continua y suprayectiva, entonces por la Proposición 2.2, Y es ccc. □

Al igual que los espacios Baire, la propiedad ccc se hereda a subespacios abiertos.

Proposición 2.4. *Todo subespacio abierto de un espacio ccc es ccc.*

Demostración. Sea X un espacio ccc y $O \subset X$, consideremos $\mathcal{U}$ una familia celular en O. Como O es un subconjunto abierto en X y cada elemento de $\mathcal{U}$ es abierto en O, todo elemento de $\mathcal{U}$ es un abierto en X. Así, $\mathcal{U}$ es una familia celular en X, el cual es ccc. Entonces $\mathcal{U}$ es numerable, por tanto O tiene la ccc. □

Proposición 2.5. *Todo espacio separable es ccc.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia celular. Como X es separable, contiene un denso numerable D. Por la densidad de D, se tiene que $U_\alpha \cap D \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$. Para cada $\alpha \in I$ elegimos $d_\alpha \in U_\alpha \cap D$. Notemos que $d_\alpha \neq d_\beta$ para todo α, $\beta \in I$, $\alpha \neq \beta$. Por lo que $|\{d_\alpha : \alpha \in I\}| \leq |D| \leq \aleph_0$. Como $|I| = |\{d_\alpha : \alpha \in I\}|$, $\mathcal{U}$ es numerable. □

Aunque pareciera ser que la propiedad ccc se hereda a cualquier subespacio, no es así, el siguiente ejemplo muestra que la propiedad ccc no es hereditaria a cualquier subespacio.

Ejemplo 2.6. Sea S la recta de Sorgenfrey. Entonces $S \times S$ es ccc y $\Delta = \{(x, y) \in S \times S : y = -x\}$ es un subespacio de $S \times S$ que no es ccc.

Demostración.

(1) $\mathbb{Q}$ es denso numerable de S.
Como $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable basta ver que $\mathbb{Q}$ es denso en S. Sean $[a, b)$ un abierto básico de S, existe (a, b) un abierto de $\mathbb{R}$, con la topología usual, tal que $(a, b) \subset [a, b)$, entonces $[a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. En consecuencia $\mathbb{Q}$ es denso en S.

(2) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ **es denso numerable de** $S\times S$**.**
Sea $[a,b)\times[c,d)$ un abierto básico de $S\times S$, existe $(a,b)\times(c,d)$ un abierto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con la topología usual tal que $(a,b)\times(c,d)\subset[a,b)\times[c,d)$, entonces $[a,b)\times[c,d)\cap\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\neq\emptyset$. En consecuencia $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ es denso en $S\times S$. Por la Proposición 1.19, sabemos que producto finito de conjuntos numerables es numerable así concluimos esta afirmación.

(3) $S\times S$ **es separable y ccc.**
como $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ es denso numerable en $S\times S$, por definición $S\times S$ es separable. Así por la Proposición 2.5, es ccc.

(4) Δ **es un subespacio discreto de** $S\times S$**.**
Sea $[a,b)\times[-a,d)$ un abierto básico de $S\times S$. Notemos que $([a,b)\times[-a,d))\cap\Delta=\{(a,-a)\}$, es decir, $\{(a,-a)\}$ es un conjunto abierto en Δ para todo $a\in\mathbb{R}$, por lo que Δ es discreto.

(5) Δ **no es ccc.**
Consideremos la familia $\mathcal{C}=\{\{(a,-a)\}:a\in\mathbb{R}\}$. Notemos que $\mathcal{C}$ es una familia celular de elementos de Δ. Además de que $|\mathcal{C}|=|\mathbb{R}|=\{0,1\}^{\aleph_0}>\aleph_0$ por lo que Δ no es ccc.

□

Recordemos que un espacio X es *hereditariamente de Lindelöf* si todo subespacio de X es de Lindelöf.

Proposición 2.7. *Todo espacio hereditariamente de Lindelöf es ccc.*

Demostración. Sean X un espacio hereditariamente de Lindelöf y $\mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in I\}$ una familia celular de X. Sea $Y=\bigcup\mathcal{U}=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$. Como X es hereditariamente de Lindelöf, Y es de Lindelöf. Notemos que $\mathcal{U}$ es una cubierta de Y. Entonces $\mathcal{U}$ contiene una subcubierta numerable $\mathcal{U}'$ de Y. Sea $U\in\mathcal{U}$, como $U\neq\emptyset$, existe $z\in U$, dado que $U\subseteq Y=\bigcup\mathcal{U}'$, entonces $z\in W$ para algún $W\in\mathcal{U}'$. Por tanto $U\cap W\neq\emptyset$. Como $\mathcal{U}$ es ajena, $U=W$. Por tanto $U\in\mathcal{U}'$. Así, $\mathcal{U}=\mathcal{U}'$. Lo cual prueba que $\mathcal{U}$ es numerable. □

Algo interesante sobre la ccc es que si un espacio es ccc entonces cualquier subespacio denso de este también es ccc. Más aún si hay un subespacio ccc que sea denso entonces todo el espacio será ccc.

Teorema 2.8. *Sea Y un subespacio denso en X. Entonces Y satisface la ccc si y sólo si X satisface la ccc.*

Demostración. Para probar la necesidad. Sea $\mathcal{U}$ una familia celular de X. Dado que Y es denso en X. Para todo $U \in \mathcal{U}$, $U \cap Y \neq \emptyset$. Así $\mathcal{V} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular de Y, por lo que $\mathcal{V}$ es numerable y dado que $\mathcal{U}$ es ajena, $|\mathcal{U}| = |\mathcal{V}| = \aleph_0$.
Para probar la suficiencia. Supongamos que Y no es ccc, entonces existe una familia celular $\mathcal{V}$ de Y no numerable. Para cada $V \in \mathcal{V}$ existe algún conjunto abierto V^* en X tal que $V = V^* \cap Y$. Definamos $\mathcal{V}^* = \{V^* : V \in \mathcal{V}\}$. Sean $V, W \in \mathcal{V}$ tales que $V \neq W$. Entonces $\emptyset = V \cap U = (V^* \cap Y) \cap (U^* \cap Y) = (V^* \cap W^*) \cap Y$. Dado que Y es denso en X y $V^* \cap W^* = \emptyset$. Tenemos que $\mathcal{V}^*$ es una familia celular en X no numerable. Lo cual es una contradicción, pues X tiene la ccc. $\square$

Es natural preguntarse. Si tenemos dos espacios ccc, ¿su producto será ccc? Para dar respuesta a esta cuestión es necesario conocer un par de resultados más, razón por la cual la atenderemos en el siguiente capítulo.

2.2. Espacios de Baire, ccc y paracompactos

Para el siguiente teorema, recordemos la Definición 1.40 que dice que dada una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un espacio X y $x \in X$, $\mathcal{F}$ es localmente finita (numerable) en x, si x tiene una vencindad que intersecta a lo más a una cantidad finita (numerable) de elementos de $\mathcal{F}$.

Teorema 2.9. *Sea X un espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *X es ccc;*

(b) *si $\mathcal{U}$ es una familia abierta de X con elementos no vacíos, de tal manera que el siguiente conjunto*

$$D(\mathcal{U}) = \left\{x \in \bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ es localmente numerable en } x\right\}$$

es denso en el subespacio abierto $\bigcup \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es numerable;

(c) *si $\mathcal{U}$ es una familia abierta de X cuyos elementos no son vacíos de tal manera que $\mathcal{U}$ es localmente numerable en cada punto del subespacio abierto $\bigcup \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es numerable;*

(d) *si $\mathcal{U}$ es una familia abierta de X con elementos no vacíos, de tal manera que $\mathcal{U}$ es localmente finita en cada punto del subespacio abierto $\bigcup \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es numerable.*

Demostración. Procedamos a demostrar que **(a) implica (b).** Sea $\mathcal{U}$ una familia abierta de X de tal manera que el conjunto $D(\mathcal{U})$ como se definió en (b) es denso en el subespacio abierto $\bigcup\mathcal{U}$. Supongamos que $\mathcal{U}$ no es numerable. Para cada $U \in \mathcal{U}$, como $U \cap D(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, podemos elegir un conjunto abierto no vacío $W_U \subset U$ de tal manera que W_U intersecta sólo una cantidad numerable de conjuntos de $\mathcal{U}$. Definimos

$$f : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$$

como $f(U) = W_U$ y $\mathcal{U}_f = \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$. Notemos que $|f^{-1}(W_U)| \leq \aleph_0$. En efecto, como $f^{-1}(W_U) = \{O \in \mathcal{U} : W_O = W_U\}$, dada $O \in f^{-1}(W_U)$, $W_U = W_O \subset O$, y dado que $W_U \neq \emptyset$, $W_U \cap O \neq \emptyset$, pero esto ocurre para a lo más una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{U}$.
Para H, $K \in \mathcal{U}_f$ definamos una cadena de H a K como una familia finita $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{U}_f$ tal que $A_1 = H$, $A_n = K$ y para $1 \leq j < n$, $A_j \cap A_{j+1} \neq \emptyset$. En tal caso decimos que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una cadena de longitud n de H a K. Ahora, para cada $V \in \mathcal{U}_f$ definimos $C(V)$ como sigue,

$$C(V) = \{W \in \mathcal{U}_f : \text{existe una cadena de } V \text{ a } W\}$$

Notemos lo siguiente: cada elemento en $\mathcal{U}_f$ intersecta sólo una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{U}$ y dado que, para cada $V \in \mathcal{U}$, $W_V \subset V$ se tiene que cada elemento de $\mathcal{U}_f$ intersecta a lo más una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{U}_f$.
Veamos que cada $C(V)$ es numerable. Para esto probemos que $C(V) = \bigcup_{n\geq 1} C_n(V)$ donde $C_n(V) = \{W \in \mathcal{U}_f : \text{existe una cadena de longitud } n \text{ de } V \text{ a } W\}$ y que, para cada $V \in \mathcal{U}_f$ y todo $n \in \mathbb{N}$, $|C_n(V)| \leq \aleph_0$.
Claramente para todo $V \in \mathcal{U}_f$, $|C_1(V)| = 1$. Sea $V \in \mathcal{U}_f$, como V intersecta sólo una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{U}_f$, $|C_2(V)| \leq \aleph_0$. Por lo que $|C_2(V)| \leq \aleph_0$ para todo $V \in \mathcal{U}_f$. Supongamos que para todo $V \in \mathcal{U}_f$, $\mid C_k(V) \mid \leq \aleph_0$ para toda $k \leq n$.
Para demostrar el paso inductivo, es suficiente mostrar que $\bigcup_{O\in C_n(V)} C_2(O) = C_{n+1}(V)$.
Sea $P \in \bigcup_{O\in C_n(V)} C_2(O)$, así existe $O \in C_n(V)$ tal que $P \in C_2(O)$, por tanto existen $A_1, \ldots, A_n$ elementos de una cadena de V a O, como $P \cap O \neq \emptyset$, con lo que $A_1, \ldots, A_n, P$ es una cadena de longitud $n + 1$ de V a P. Por tanto $P \in C_{n+1}(V)$.
Sea $P \in C_{n+1}(V)$, así existe una cadena $A_1, \ldots, A_{n+1}$ de V a P, entonces $A_n \in C_n(V)$ y $P \in C_2(A_n)$, así $P \in \bigcup_{O\in C_n(V)} C_2(O)$.
Ahora definamos $\varepsilon(V) = \bigcup C(V)$ para cada $V \in \mathcal{U}_f$. Notemos que para V_1, $V_2 \in \mathcal{U}_f$, si $\varepsilon(V_1) \cap \varepsilon(V_2) \neq \emptyset$, entonces $C(V_1) = C(V_2)$. En efecto esto ocurre, dado que $\varepsilon(V_1) \cap \varepsilon(V_2) \neq \emptyset$, entonces $[\bigcup C(V_1)] \cap [\bigcup C(V_2)] \neq \emptyset$, con lo que existen $W_1 \in C(V_1)$ y $W_2 \in C(V_2)$ tales que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ como $W_1 \in C(V_1)$ existe una cadena de V_1 a W_1, y como $W_2 \in C(V_2)$, existe una cadena de V_2 a W_2, y como $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, entonces que hay una cadena de V_1 a V_2. Ahora, dado cualquier elemento $W \in C(V_1)$, existe una cadena de V_1 a W y como existe una cadena de V_1 a V_2, tenemos que hay una cadena

de V_2 a W, por tanto $W \in C(V_2)$. Esto muestra que $C(V_1) \subset C(V_2)$. La otra contención es análoga. Concluimos que $C(V_1) = C(V_2)$.
Ahora, definimos $\mathcal{E} = \{\varepsilon(V) : V \in \mathcal{U}_f\}$. Por lo anterior esta familia es ajena y cada elemento de $\mathcal{E}$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Es decir, $\mathcal{E}$ es una familia celular de X y como X es ccc, $\mathcal{E}$ es numerable y por tanto $\{C(V) : V \in \mathcal{U}_f\}$ es numerable.
Por otro lado, $\bigcup_{V \in \mathcal{U}_f} C(V) = \mathcal{U}_f$. En efecto, si $W \in \bigcup_{V \in \mathcal{U}_f} C(V)$, entonces $W \in C(V)$ para algún $V \in \mathcal{U}_f$, con lo que $W \in \mathcal{U}_f$ por definición de $C(V)$. Ahora si $W \in \mathcal{U}_f$ entonces $W \in C_1(W)$ así $W \in C(V)$ y con esto $W \in \bigcup_{V \in \mathcal{U}_f} C(V)$.
Como cada $C(V)$ es numerable, concluimos que $\mathcal{U}_f$ es numerable. Sin embargo habíamos visto que $|f^{-1}(U)| \leq \aleph_0$, para cada $U \in \mathcal{U}_f$. Concluimos que $\mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_f} f^{-1}(U)$ es numerable.
Probemos que **(b) implica (c).** Sea $\mathcal{U}$ una familia abierta de X cuyos elementos no son vacíos de tal manera que $\mathcal{U}$ es localmente numerable en cada punto en el espacio abierto $\bigcup \mathcal{U}$. Entonces $D(\mathcal{U}) = \bigcup \mathcal{U}$ es denso en $\bigcup \mathcal{U}$. Se sigue de (b) que $\mathcal{U}$ es numerable.
Ahora demostremos que **(c) implica (d).** Sea $\mathcal{U}$ una familia de abiertos de X tal que $\mathcal{U}$ es localmente finita en el subespacio $\bigcup \mathcal{U}$. Al ser $\mathcal{U}$ localmente finita en $\bigcup \mathcal{U}$ es localmente numerable en $\bigcup \mathcal{U}$ y por hipótesis es numerable.
Finalmente, supongamos **(d) y probemos (a).** Sea $\mathcal{U}$ una familia celular de X. Notemos que $\mathcal{U}$ es localmente finita en $\bigcup \mathcal{U}$, pues dada $x \in \bigcup \mathcal{U}$, $x \in U$ para algún $U \in \mathcal{U}$, dicha U es una vecindad de x que sólo intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$. Así, por hipótesis, $\mathcal{U}$ es numerable. Y por tanto X es ccc. □

Corolario 2.10. *Sea X un espacio ccc. Entonces X es paracompacto si y sólo si X es de Lindelöf.*

Demostración. La suficiencia se sigue del Teorema 1.52. Para la necesidad, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Dado que X es paracompacto, existe un refinamiento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ localmente finito en X. Como X es ccc, tenemos que $\mathcal{V}$ es localmente finito en $\bigcup \mathcal{V} = X$, entonces $\mathcal{V}$ es numerable por Teorema 2.9 (d). Se sigue del Teorema 1.49 que X es de Lindelöf. □

Corolario 2.11. *Sea X un espacio metrizable. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *X es de Lindelöf;*

(b) *X es segundo numerable;*

(c) *X es separable;*

(d) *X es ccc.*

Demostración. La demostración de la equivalencia (a)-(c) puede ser encontrada en [2, Corolario 4.1.16. Pág. 256.]. La Proposición 2.5 muestra que (c) implica (d). Ahora, si X es ccc, como X es metrizable por el Teorema 1.55 X es paracompacto y aplicando el Corolario 2.10 concluimos que X es de Lindelöf. □

Corolario 2.12. *En todo espacio ccc, cualquier cubierta abierta localmente numerable es numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta localmente numerable de un espacio X. $\bigcup \mathcal{U} = X$, como X es ccc por el Teorema 2.9 (c), $\mathcal{U}$ es numerable. □

Corolario 2.13. *En todo espacio ccc cualquier cubierta abierta localmente finita es numerable.*

Demostración. Como toda familia localmente finita es localmente numerable, la conclusión se sigue del Corolario 2.12. □

Definición 2.14. Dado cualquier $x \in X$ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta punto-finita de X, definimos el orden de x respecto a $\mathcal{U}$ como

$$\operatorname{ord}(x,\mathcal{U}) = |\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}|.$$

Para cada $n \in \omega$, también definamos

$$H_n = \{x \in V : \operatorname{ord}(x,\mathcal{U}) \leq n\}.$$

Teorema 2.15. *En todo espacio de Baire ccc, cualquier cubierta abierta punto-finita es numerable.*

Demostración. Sean X un espacio de Baire ccc y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta punto-finita de X. Supongamos que $\mathcal{U}$ no es numerable. Por Teorema 2.9(b), $D(\mathcal{U})$ no puede ser denso en $\bigcup \mathcal{U} = X$. Entonces existe un conjunto abierto V en X, tal que V no contiene puntos de $D(\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{U}$ no es localmente numerable en cualquier punto de V.
Notemos que $H_n \subseteq V$ para todo $n \in \omega$, entonces $\bigcup_{n\in\omega} H_n \subset V$. Más aún, $V = \bigcup_{n\in\omega} H_n$. En efecto, sea $x \in V \subseteq X$, dado que $\mathcal{U}$ es cubierta de X punto-finita, entonces x pertenece a lo más a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Así, $x \in H_k$ para algún $k \in \omega$ con lo que $x \in \bigcup_{n\in\omega} H_n$.
Sea $x \in V - H_n$. Entonces $x \in H_m$ para algún $m > n$, por lo que existen $n < k \leq m$ y $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$, tales que $x \in U_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, de esta manera $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$. Si $y \in \bigcap_{i=1}^k U_i$, entonces $y \in U_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, así $y \notin H_n$. Esto muestra que H_n es cerrado en V. Dado que X es un espacio de Baire por el Teorema 1.61 y el Corolario 1.68, V es de segunda categoría. Por tanto no puede ser que cada H_n sea denso en ninguna parte en V. Entonces existe $n \in \omega$ tal que H_n tiene interior no vacío en V.

Sea m el mínimo elemento de ω que satisface la propiedad anterior. De esta manera el interior en V de H_k es vacío para todo $k < m$ y el interior en V de H_m es no vacío. Entonces existe un subconjunto abierto no vacío W en V tal que $W \subset H_m$. Entonces $\text{ord}(x,\mathcal{U}) \leq m$ para todo $x \in W$. Más aún, por la elección de m, podemos encontrar $z \in W$ cuyo orden es m. Observemos que el orden de cualquier elemento de X es mayor que cero pues $\mathcal{U}$ es cubierta de X. Si $m = 1$, existe un único elemento $U_1 \in \mathcal{U}$ que contiene a z. Dado que $W \subset H_1$, $U_1 \cap W$ es una vecindad de z que intersecta sólo un elemento de $\mathcal{U}$ (a saber, U_1), lo cual es una contradicción, pues $z \in V$.
Supongamos que $m > 1$ y sean $U_1, U_2, \dots, U_m$ elementos distintos de $\mathcal{U}$ que contienen a z. Definimos $U = (\bigcap_{i=1}^{m-1} U_i) \cap W$ y $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} - \{U_1, \dots, U_{m-1}\}$. Sea

$$\mathcal{M} = \{U \cap O : O \in \mathcal{U}^*\} - \{\emptyset\}.$$

Cada elemento de $\mathcal{M}$ está contenido en una intersección de exactamente m elementos de $\mathcal{U}$. Más aún, cada elemento esta contenido en H_m. Entonces cualesquiera dos elementos distintos de $\mathcal{M}$ no se pueden intersectar, es decir, $\mathcal{M}$ es una familia celular de X y por hipótesis $\mathcal{M}$ debe de ser numerable. Entonces U es una vecindad de z que intersecta sólo a una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{U}^*$ y por tanto de $\mathcal{U}$. Nuevamente tenemos una contradicción. □

Corolario 2.16. *Todo espacio ccc y para-Lindelöf es de Lindelöf.*

Demostración. Sean X un espacio ccc para-Lindelöf y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Existe un refinamiento abierto localmente numerable $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, como X es ccc, por el Teorema 2.9 (c), $\mathcal{V}$ es numerable. Por lo tanto del Teorema 1.49, X es de Lindelöf.. □

Teorema 2.17. *Todo espacio de Baire, ccc y metacompacto es de Lindelöf.*

Demostración. Sean X un espacio de Baire, ccc y metacompacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, así $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento $\mathcal{V}$ punto-finito, por ser metacompacto, y por el Teorema 2.15 $\mathcal{V}$ es numerable. Por el Teorema 1.49, X es de Lindelöf. □

Teorema 2.18. *Todo espacio de Baire, ccc y hereditariamente metacompacto es hereditariamente de Lindelöf.*

Demostración. Sea X un espacio de Baire, ccc y hereditariamente metacompacto. Por la Proposición 1.50, basta con probar que todo abierto no vacío de X es de Lindelöf. Sea $Y \subset X$ un abierto no vacío, entonces Y es ccc, metacompacto y es de Baire por el Teorema 1.61 y el Teorema 2.4. Así, por el Teorema 2.17, Y es de Lindelöf. Por tanto X es hereditariamente de Lindelöf. □

2.3. Espacios localmente ccc

Definición 2.19. Un espacio es *localmente ccc*, si todo punto tiene una vecindad abierta que satisface ser ccc.

Teorema 2.20. *Todo espacio localmente ccc, regular y para-Lindelöf es paracompacto.*

Demostración. Sean X un espacio regular, localmente ccc y para-Lindelöf y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, entonces existe $\mathcal{W}$ un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ con la ccc. Notemos que $\mathcal{W}$ también es una cubierta abierta de X. Como X es para-Lindelöf podemos tomar $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto localmente numerable de $\mathcal{W}$, el cual también es ccc.

Ahora veamos que $\mathcal{V}$ es estrella numerable. Sean $V \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{G} = \{V \cap W : W \in \mathcal{V}\}$. Notemos que $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta localmente numerable del subespacio V, que es ccc. Por el Corolario 2.12, $\mathcal{G}$ es numerable. La colección $\mathcal{G}$ representa todos los conjuntos abiertos en $\mathcal{V}$ que intersectan a V. Así $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto estrella numerable de $\mathcal{U}$. Así por el Teorema 1.56 X es paracompacto. $\square$

Teorema 2.21. *Todo espacio localmente ccc, regular, metacompacto y de Baire es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio localmente ccc, regular, metacompacto y de Baire, consideremos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Usando la hipótesis de que X es localmente ccc, supongamos sin perdida de generalidad que cada conjunto abierto en $\mathcal{U}$ es ccc. Como X es metacompacto existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ punto-finito de $\mathcal{U}$. Entonces cada elemento de $\mathcal{V}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$ los cuales son ccc. Por la Proposición 2.4, cada elemento de $\mathcal{V}$ es ccc. De la Proposición 1.61, cada elemento en $\mathcal{V}$ es un espacio de Baire.
Ahora veamos que $\mathcal{V}$ es estrella numerable. Sean $V \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{G}$ la siguiente familia,

$$\mathcal{G} = \{V \cap W : W \in \mathcal{V}\}$$

la cual es una cubierta abierta de V. Dentro del subespacio V, $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta punto-finita, por Teorema 2.15, $\mathcal{G}$ es numerable.
Sin embargo, $\mathcal{G}$ representa el conjunto de todos los conjuntos abiertos en $\mathcal{V}$ que intersectan a V. Entonces tenemos sólo una cantidad numerable de conjuntos abiertos de $\mathcal{V}$ que intersectan a V. Entonces $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto estrella numerable de $\mathcal{U}$. Así, por el Teorema 1.56, X es paracompacto. $\square$

Definición 2.22. Un espacio es *perfecto* si cada uno de sus subconjuntos cerrados son G_δ, es decir, son intersección numerable de abiertos. Un espacio es *perfectamente normal* si es perfecto y normal.

Teorema 2.23. *Cualquier espacio perfectamente normal, localmente compacto es localmente ccc.*

Demostración. Sea Y un espacio perfectamente normal y localmente compacto. Supongamos que Y no es localmente ccc en $y \in Y$. Sea $U \subset Y$ un abierto tal que $y \in U$ y $\overline{U}$ es compacto. Entonces U no tiene la ccc, es decir, U tiene una familia celular no numerable y por tanto una de cardinalidad $\aleph_1$. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ dicha familia celular. Definamos $O = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$ y $C = Y - O$, el cual es cerrado.
Entonces $C = \bigcap_{n\in\omega} V_n$ donde cada V_n es abierto en Y y $V_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \in \omega$. Para cada $\alpha < \omega_1$ fijamos $y_\alpha \in U_\alpha$. Para cada y_α, hay algún entero $f(y_\alpha)$ tal que $y_\alpha \notin V_{f(y_\alpha)}$. Entonces $f : \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\} \to \omega$. Como la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, debe existir algún entero k tal que $A = f^{-1}(k) = \{y_\alpha : f(y_\alpha) = k\}$ no es numerable.
El conjunto A es un subconjunto infinito del conjunto compacto $\overline{U}$. Entonces A tiene un punto de acumulación digamos p. Como $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es ajena, $p \notin O$, entonces $p \in C$, en particular $p \in V_k$. Así V_k tiene algunos puntos de A, digamos $y_\alpha \in V_k \cap A$, con esto $y_\alpha \notin V_{f(y_\alpha)} = V_k$ lo cual es una contradicción.
Por tanto Y debe ser localmente ccc. □

Corolario 2.24. *Todo espacio localmente compacto, metacompacto y perfectamente normal es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio localmente compacto, metacompacto y perfectamente normal. Por el Teorema 1.64 y el Teorema 2.23, X es un espacio de Baire, localmente ccc y metacompacto. Por el Teorema 2.21 X es paracompacto. □

2.4. Ejemplos

A continuación mostraremos un ejemplo con el que veremos que en el Teorema 2.12 y Corolario 2.13, lo localmente finito o localmente numerable no puede ser remplazado por punto-finito.

Ejemplo 2.25. Existe un espacio ccc con una cubierta abierta no numerable punto-finita.

Demostración. Consideremos el espacio $Y = \prod_{\alpha<\omega_1} \{0,1\} = \{0,1\}^{\omega_1}$, es decir, el espacio producto de ω_1 copias del espacio discreto $\{0,1\}$. Sea X el conjunto de todos los puntos $h \in Y$ tales que $h(\alpha) = 1$ solo para una cantidad finita de $\alpha < \omega_1$. En el Capitulo 3 probaremos que el producto de ω_1 espacios separables es separable (Teorema 3.6), utilizando esto concluimos que Y es separable y por tanto tiene la ccc. El espacio X es denso en Y, en efecto, pues sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \omega_1$ y $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0,1\}$ y definimos $h : \omega_1 \to \{0,1\}$ como:

$$h(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}; \\ i_j, & \text{si } \alpha = \alpha_j. \end{cases}$$

Entonces $h \in \pi_{\alpha_1}^{-1}(i_1) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(i_2) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(i_n)$ y $h^{-1}(1) \subseteq \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$, es decir, $h \in X$. Esto muestra que X es denso en Y. Y por el Teorema 2.8, X es ccc. Para cada $\alpha < \omega_1$ definamos $U_\alpha = \{h \in X : h(\alpha) = 1\} = \pi_\alpha^{-1}(1)$. Entonces $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{X\}$ es una cubierta abierta de X, que no es es punto-finita. Ya que dada $h \in X$, $h \in U_\alpha$ si y sólo si $\alpha \in h^{-1}(1)$ y como $|h^{-1}(1)| < \aleph_0$, h puede estar sólo en una cantidad finita de elementos de $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. También podemos concluir que X no es de Baire (por el Teorema 2.15). □

Los siguientes ejemplos están centrados en las cuatro propiedades del Teorema 2.17. Estos ejemplos muestran que cada propiedad en la hipótesis es crucial. En el siguiente ejemplo veremos que la suposición de ser metacompacto es necesaria en el Teorema 2.17.

Ejemplo 2.26. Existe un espacio ccc de Baire no de Lindelöf.

Demostración. Consideremos el plano de Sorgenfrey $S \times S$ donde S es la recta de Sorgenfrey. Notemos que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un denso numerable en $S \times S$, por la Proposición 2.5, $S \times S$ es ccc. Por el Ejemplo 1.70 el plano de Sorgenfrey es de Baire y $S \times S$ no es Lindelöf, véase [1, Ejemplo 4, p.193]. □

El siguiente ejemplo muestra que la condición de que el espacio sea ccc es necesaria en el Teorema 2.17, sino el espacio no es de Lindelöf.

Ejemplo 2.27. Existe un espacio metacompacto, de Baire no de Lindelöf.

Demostración. Recordemos que $\mathcal{P}(\omega_1)$ denota el conjunto potencia de ω_1, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de ω_1. Para cada $\alpha \in \omega_1$, definimos

$$f_\alpha : \mathcal{P}(\omega_1) \to \{0,1\}$$

como

$$f_\alpha(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in A, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $F = \{f_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ y denotemos por τ la topología producto de ${}^{\mathcal{P}(\omega_1)}$. Definamos

$$\tau^* = \{U \cup V : U \in \tau \text{ y } V \subseteq \{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)} \ (V \cap F = \emptyset)\}.$$

La familia τ^* es una topología para el conjunto $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}$.
Dada $f \in \{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}$, sea $S_f = \{A \in \mathcal{P}(\omega_1) : f(A) = 1\}$. Definimos el subespacio M de $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}, \tau^*)$ como el conjunto $F \cup \{f \in \{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)} : S_f$ es finito$\}$. El espacio requerido es M.
M **es metacompacto.** Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de M. Para cada $\alpha \in \omega_1$, fijemos $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $f_\alpha \in U_\alpha$. Para cada $\alpha \in \omega_1$, sea $W_\alpha = \{f \in M : f(\{\alpha\}) = 1\}$ y definimos

$$\mathcal{V} = \{U_\alpha \cap W_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{\{g\} : g \in M - F\}.$$

$\mathcal{V}$ es nuestra propuesta a ser refinamiento punto-finito de $\mathcal{U}$. Primero probemos que $\mathcal{V}$ es cubierta abierta de M.
Sea $g \in M$, si $g \in M - F$, $g \in \{g\} \in \mathcal{V}$, por otro lado si $g \in F$, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $g = f_\alpha \in U_\alpha \cap W_\alpha$, esto ocurre ya que $f_\alpha \in W_\alpha$, pues $f_\alpha(\{\alpha\}) = 1$ debido a que $\alpha \in \{\alpha\}$ y por definición de f_α. Esto muestra que $\mathcal{V}$ es cubierta de M.
Ahora veamos que $\mathcal{V}$ es abierta. Para $\alpha \in \omega_1$, definimos

$$V_\alpha = \{f \in \{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}) : f(\{\alpha\}) = 1\} = \pi^{-1}_{\{\alpha\}}[\{1\}] \cup \emptyset$$

Notemos que $V_\alpha \cap M = W_\alpha$ es abierto en M. Por tanto $U_\alpha \cap W_\alpha$ es abierto en M. Por otro lado, si $g \in M - F$, como $\{g\} \subseteq \{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}$ y $\{g\} \cap F = \emptyset$, entonces $\{g\} = \emptyset \cup \{g\} \in \tau^*$. Así, $\{g\} \cap M = \{g\}$ es abierto en M. Por lo tanto tenemos que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de M.
Para ver que es punto-finita procedemos como sigue, claramente cada $U_\alpha \cap W_\alpha$ contiene sólo a un elemento de F, f_α, por tanto cada elemento de F está en a lo más una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}$. Por otro lado, si S_f es finito para $f \in M$, claramente f sólo puede estar en a lo más un elemento del segundo uniendo de $\mathcal{V}$, entonces es suficiente ver que f está en a lo más una cantidad finita de $U_\alpha \cap W_\alpha$, pero como S_f es finito, f sólo puede pertenecer a una cantidad finita de W_α y por tanto de $U_\alpha \cap W_\alpha$.
Observemos que en $M - F$, la colección de elementos en $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}$ para los que S_f es finito es un conjunto denso en $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}, \tau)$. En efecto, si $V = \bigcap_{i=1}^n \pi^{-1}_{A_i}[U_i]$ es un abierto básico no vacío de $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}, \tau)$, podemos elegir $g \in V$ y definir $f \in \{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}$ como $f(A_i) = g(A_i)$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $f(A) = 0$, en cualquier otro caso. De esta manera S_f es finito y $f \in V$.
M **es de Baire.** Notemos que $\{g\}$ es abierto en M para cada $g \in M - F$ pues $\emptyset \cup \{g\} \in \tau^*$ siempre que $g \in M - F$. De la definición de τ^* y el hecho que $M - F$ es denso en $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}, \tau)$, se sigue que $M - F$ es denso en M. Por tanto $M - F$ es un subespacio abierto discreto denso de M. En consecuencia, cualquier subconjunto denso de M debe contener a $M - F$, en particular si $\{D_n : n \in \omega\}$ es una colección de subconjuntos densos abiertos de M, $M - F \subseteq \bigcap_{n\in\omega} D_n$ y por tanto $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ es denso.
M **no es de Lindelöf.** Una familia de conjuntos es llamada *discreta* si todo punto del

espacio tiene una vecindad que intersecta a lo más un elemento de la familia. Recordemos que un espacio X es *colectivamente normal* si siempre que $\{A_\beta : \beta \in I\}$ es una familia discreta de subespacios cerrados de X, existe una familia celular $\{U_\beta : \beta \in I\}$ de X tal que $A_\beta \subseteq U_\beta$ para cada $\beta \in I$. El [2, Teorema 5.1.2. Pág. 300] y el [2, Teorema 5.1.18. Pág. 305], demuestran que todo espacio de Lindelöf es colectivamente normal. Entonces para demostrar que M no es de Lindelöf es suficiente demostrar que M no es colectivamente normal. Por lo dicho en los párrafos anteriores, F es cerrado en M. Luego el conjunto W_α definido en los párrafos anteriores es abierto y $W_\alpha \cap F = \{f_\alpha\}$. Entonces F es cerrado y discreto en M, es decir, $\{\{f_\alpha\} : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia de cerrados discreta en M. Si suponemos que M es colectivamente normal, entonces, dado que M es denso en $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}, \tau)$, podemos elegir una familia celular $\{U_\alpha \cup V_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ en M, donde $U_\alpha \in \tau$ y $V_\alpha \cap F = \emptyset$, tal que $f_\alpha \in U_\alpha \cup V_\alpha$ para cada $\alpha \in \omega_1$. Como $V_\alpha \cap F = \emptyset$, se tiene que $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia celular en $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(\omega_1)}, \tau)$ lo cual es una contradicción (véase Corolario 3.12). $\square$

Finalmente pretendemos mostrar que las hipótesis del Teorema 2.17 son necesarias. Para esto necesitamos introducir los hiperespacios Pixley-Roy.

Hiperespacios Pixley-Roy

En toda esta subsección todos nuestros espacios topológicos son T_1.

Definición 2.28. Sea X un espacio. Definimos $\mathcal{F}[X]$ como el conjunto de todos los subconjuntos finitos no vacíos de X.

Dado $F \in \mathcal{F}[X]$ y un conjunto abierto U en X que contiene a F, definimos $[F : U] = \{G \in \mathcal{F}[X] : F \subset G \subset U\}$.

Proposición 2.29. *Dado un espacio (X, τ) la colección $\mathcal{B} = \{[F : U] : F \in \mathcal{F}[X]\ ,\ U \in \tau$ y $F \subseteq U\}$ forma una base para alguna topología en $\mathcal{F}[X]$. Más aún, si $\mathcal{F}[X]$ está dotado con la topología generada por $\mathcal{B}$, cada elemento de $\mathcal{B}$ es cerrado en $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Dado $F \in \mathcal{F}[X]$, $F \in [F : X]$. Esto muestra que $\mathcal{F}[X] = \bigcup \mathcal{B}$. Luego, si $H \in [F : U] \cap [G : V]$, entonces $H \in [H : U \cap V] \subseteq [F : U] \cap [G : V]$.
Ahora supongamos que $\mathcal{F}[X]$ está dotado con la topología generada por $\mathcal{B}$ y fijemos $G \notin [F : U]$. Entonces $F \not\subseteq G$ o $G \not\subseteq U$. Si $G \not\subseteq U$, entonces $[G : X]$ es un abierto que no intersecta a $[F : U]$ que contiene a G. Por otro lado, si $F \not\subseteq G$, existe $x \in F - G$. Como X es T_1, para cada $y \in G$, entonces existen dos abiertos U_y y V_y tales que $y \in V_y - U_y$ y $x \in U_y - V_y$. Entonces $V = \bigcup_{y \in G} V_y$ es abierto en X que contiene a G y no a x. En consecuencia, $[G : V]$ es un abierto que contiene a G y no intersecta a $[F : U]$. Los dos casos anteriores muestran que $[F : U]$ es cerrado. $\square$

Proposición 2.30. *Para cualquier espacio X, $\mathcal{F}[X]$ es de Hausdorff.*

Demostración. Sean F y G dos elementos distintos de $\mathcal{F}[X]$. Entonces $F - G \neq \emptyset$ o $G - F \neq \emptyset$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $F - G \neq \emptyset$ y fijemos $x \in F - G$. Para cada $y \in (G \cup F) - \{x\}$, como X es T_1, podemos fijar dos conjuntos abiertos V_y y U_y tales que $x \in V_y - U_y$ y $y \in U_y - V_y$. Definimos $W = \bigcup\{U_y : y \in (F \cup G) - \{x\}\}$ y $O = \bigcap\{V_y : y \in (F \cup G) - \{x\}\}$. De esta manera $x \in O - W$ y $(F \cup G) - \{x\} \subseteq W$. Entonces $[G : W]$ es un básico que contiene a G y no contiene a F (pues $F \nsubseteq W$). Se sigue de la Proposición 2.29 que $[G : W]$ y $\mathcal{F}[X] - [G : W]$ son los abiertos requeridos. $\square$

Un espacio es llamado *cero dimensional* si tiene una base formada por conjuntos cerrados.

Proposición 2.31. *Todo espacio cero dimensional es de Tychonoff.*

Demostración. Sea A es un subespacio cerrado de un espacio cero dimensional de Hausdorff X y $z \in X - A$, existe un conjunto abierto y cerrado U que contiene a z y $U \subseteq X - A$. De esta manera la función $f : X \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = 1$, si $x \in U$ y $f(x) = 0$ en otro caso, es una función continua que satisface $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f(z) = 1$. $\square$

Como consecuencia de la Proposición 2.29, la Proposición 2.30 y la Proposición 2.31 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.32. *Para cualquier espacio X, $\mathcal{F}[X]$ es un espacio cero dimensional y de Tychonoff.*

Definición 2.33. La topología generada por la colección $\mathcal{B}$ de la Proposición 2.29 es llamada *topología Pixley-Roy.* Dado un espacio X, $\mathcal{F}[X]$ siempre estará dotado por la topología Pixley-Roy y los elementos de $\mathcal{B}$, como es común, serán llamados básicos de $\mathcal{F}[X]$.

Proposición 2.34. *Si X es segundo numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ es ccc.*

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ una base numerable de X. Basta demostrar que toda familia formada por básicos de $\mathcal{F}[X]$ de cardinalidad $\aleph_1$ no es ajena. Tomemos una de tales, digamos $\{[F_\alpha : U_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, como F_α es finito y $F_\alpha \subseteq U_\alpha$, podemos elegir un conjunto finito $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{N}$ tal que $F_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{F}_\alpha \subseteq U_\alpha$. Como la colección de subconjuntos finitos de $\mathcal{N}$ es numerable y la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, la función $f : \omega_1 \to [\mathcal{N}]^{<\aleph_0}$ definida como $f(\alpha) = \mathcal{F}_\alpha$ debe de tener una fibra no numerable, esto es, existe un subconjunto finito $\mathcal{G}$ de $\mathcal{N}$ tal que el conjunto $E = f^{-1}(\mathcal{G}) = \{\alpha < \omega_1 : \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{G}\}$ no es numerable. Entonces, si F es un subconjunto finito de E, para cualesquiera $\alpha, \beta \in F$, $F_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{F}_\alpha = \bigcup \mathcal{F}_\beta \subseteq U_\beta$ y en consecuencia, $\bigcup_{\alpha \in F} F_\alpha \in \bigcap_{\beta \in F}[F_\beta : U_\beta]$. En particular, si tomamos dos elementos distintos α y β de E, $[F_\alpha : U_\alpha] \cap [F_\beta : U_\beta] \neq \emptyset$. Esto muestra que $\{[F_\alpha : U_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$ no es ajena. $\square$

Teorema 2.35. *Para cualquier espacio X, $\mathcal{F}[X]$ es hereditariamente metacompacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio de $\mathcal{F}[X]$. Sea $\mathcal{H}$ una cubierta abierta de Y. Para cada $F \in Y$, fijemos un elemento $H_F \in \mathcal{H}$ que contenga a F. Definimos $W_F = [F : X] \cap Y \cap H_F$. Entonces la familia $\mathcal{W} = \{W_F : F \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y que refina a $\mathcal{H}$. Observemos que, dada $A \in Y$ fija, $A \in W_F$ si y sólo si $A \in H_F$ y $F \subseteq A$. Sin embargo, puesto que A es finito, esta última afirmación ocurre sólo para una cantidad finita de F's. Esto muestra que $\mathcal{W}$ es punto-finita. □

En el siguiente ejemplo vamos a mostrar la existencia de un espacio que es ccc y metacompacto, pero no es de Lindelöf ni de Baire. Este ejemplo muestra que la suposición de ser de Baire es necesaria en el Teorema 2.17.

Ejemplo 2.36. Existe un espacio ccc y metacompacto que no es de Lindelöf ni de Baire.

Demostración. La Proposición 2.34 y el Teorema 2.35 prueban que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es ccc y metacompacto. Simplemente probaremos que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no es de Lindelöf ni de Baire.
Sea $\mathcal{E} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$. Observemos que $\mathcal{E}$ es cerrado y discreto en $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$. En efecto, si $F \in \mathcal{F}[\mathbb{R}] - \mathcal{E}$, entonces $[F : \mathbb{R}]$ es un abierto que contiene a F y no intersecta a $\mathcal{E}$. Y $\mathcal{E}$ es discreto pues, para cada $x \in \mathbb{R}$, $[\{x\} : \mathbb{R}] \cap \mathcal{E} = \{\{x\}\}$. En consecuencia $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no es de Lindelöf.
Finalmente veamos que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no es de Baire. Sean $V = [\{0\} : \mathbb{R}]$ y, para cada $n \in \omega$, $H_n = \{F \in V : |F| \leq n\}$. Notemos que $V = \bigcup_{n\in\omega} H_n$. Dado que V es abierto, por el Teorema 1.61 y el Corolario 1.68, es suficiente demostrar que H_n es cerrado y denso en ninguna parte en V.
Fijemos $n \in \omega$. Sea $F \in V - H_n$. Entonces $|F| > n$ y por tanto $[F : \mathbb{R}] \cap V$ es un abierto en V que contiene a F y no intersecta a H_n. Es decir, H_n es cerrado en V. Ahora, si $G \in H_n$ y W es un abierto en $\mathbb{R}$ tal que $G \subseteq W$. Notemos que existe un conjunto finito H tal que $G \subseteq H \subseteq W$ y $|H| = n+1$. Entonces $H \in ([G : W] \cap V) - H_n$. Esto muestra que H_n tiene interior vacío en V. □

3

El producto de espacios ccc

Algunas propiedades topológicas se preservan bajo el producto topológico, por ejemplo, si X y Y son espacios compactos, entonces $X \times Y$ es compacto. Y lo mismo sucede con la conexidad. Sin embargo hay propiedades en las que no sucede esto, por ejemplo, la recta de Sorgenfrey S, S es de Lindelöf pero $S \times S$ no es de Lindelöf. Esto nos lleva a preguntarnos si el producto de dos espacios ccc es ccc.

3.1. Separabilidad en el producto topológico

En capítulos anteriores nos habíamos preguntado si el producto de dos espacios ccc sería ccc, pues bien, dado que la separabilidad implica ccc, en esta sección analizaremos cuando un producto es separable.

Tengamos presente que dados un cardinal κ y un espacio X, X^κ denota el espacio $\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$, donde $X_\alpha = X$ para cada $\alpha \in \kappa$. En particular, $\{0,1\}^\kappa$ denota el producto del espacio discreto $\{0,1\}$ consigo mismo κ veces. El Teorema de Tychonoff 1.45 asegura que $\{0,1\}^\kappa$ es compacto para cualquier cardinal κ.

Recordemos que $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\omega)|$.

Proposición 3.1. *Para cada $i \in I$, sea X_i un espacio topológico de Hausdorff con más de un punto. Si $|I| > \mathfrak{c}$, entonces el producto $\prod_{i\in I} X_i$ no es separable.*

Demostración. Elijamos cualquier $x_n \in \prod_{i\in I} X_i$ para $n \in \omega$. Procedemos a probar que el conjunto numerable $\{x_n : n \in \omega\}$ no es denso en el producto.
Para cada X_i elegimos U_i, $V_i \subseteq X_i$ subconjuntos abiertos no vacíos ajenos. Cada x_n es una función con dominio I y $x_n(i) \in X_i$ para cada $n \in \omega$ y cada $i \in I$. Definamos para

cada $n \in \omega$ $g_n : I \to \{0,1\}$ como

$$g_n(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_n(i) \in V_i; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para cada $i \in I$ definimos $h_i \in \{0,1\}^\omega$ como $h_i(n) = g_n(i)$ para cada $n \in \omega$. Como $|I| > \mathfrak{c}$, podemos elegir $j \neq k$ en I tal que $h_j = h_k$, esto es $g_n(j) = g_n(k)$ para cada $n \in \omega$.
Ahora, sea $W = \pi_j^{-1}[U_j] \cap \pi_k^{-1}[V_k]$. Entonces W es un abierto no vacío, pues U_j y V_k son distintos del vacío. Luego, si $x_n \in W$, esto implicaría que $g_n(j) = 0$ y $g_n(k) = 1$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $\{x_n : n \in \omega\}$ no es denso en $\prod_{i \in I} X_i$. □

A continuación procedemos a caracterizar la separabilidad de un producto de espacios. Para esto necesitamos algunos conceptos y lemas.

Definición 3.2. Una colección $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ infinita es llamada *casi ajena* si la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de $\mathcal{A}$ es finito.

Lema 3.3. *Existe una familia casi ajena de cardinalidad* $\mathfrak{c}$.

Demostración. Definimos

$$\mathbb{T} = \{t \subseteq \omega \times \{0,1\} : t \text{ es una función y algún } n \in \omega \text{ tal que } (\mathrm{dom}(t) = n)\}.$$

Notemos que $\mathbb{T}$ es numerable (el árbol binario de Cantor). Para cada $f \in \{0,1\}^\omega$, sea $\mathcal{A} = \{A_f : f \in \{0,1\}^\omega\}$, donde $A_f = \{f \restriction n : n \in \omega\}$. Entonces $\mathcal{A} \subseteq [\mathbb{T}]^{\aleph_0}$. Veamos que la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de $\mathcal{A}$ es finito. En efecto, sean $f, g \in \{0,1\}^\omega$ tal que $f \neq g$. Existe $k \in \omega$ tal que $f(k) \neq g(k)$. Con lo que $A_f \cap A_g \subseteq \{f \restriction j : j \leq k\}$.
Tomando una función biyectiva $G : \mathbb{T} \to \omega$, la familia $\{G[A] : A \in \mathcal{A}\}$ es una familia casi ajena de cardinalidad $|\{0,1\}^\omega| = \mathfrak{c}$. □

Definición 3.4. Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ es llamada *familia independiente de funciones* si para todo $m \in \omega$, $j_1, \ldots, j_m \in \omega$ y distintas $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{F}$:

$$|\{e \in \omega : f_1(e) = j_1, \ \ldots, \ f_m(e) = j_m\}| = \aleph_0$$

Proposición 3.5. *Existe una familia independiente de cardinalidad* $\mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $E = \{(s,p) : s \in [\omega]^{<\aleph_0} \text{ y } p : \mathcal{P}(s) \to \omega\}$. Primero construimos una familia independiente de funciones en ω^E, es decir, una familia $\mathcal{F} \subseteq \omega^E$ tal que para cualesquiera $m \in \omega$, $j_1, \ldots, j_m \in \omega$ y $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{F}$, el conjunto $\{(s,p) \in E : f_1(s,p) = j_1 \ , \ \ldots \ , \ f_m(s,p) = j_m\}$ es infinito.

Para cada $A \in [\omega]^{\aleph_0}$, definimos $f_A : E \to \omega$ como $f_A(s,p) = p(s \cap A)$.
Por el Lema 3.3 podemos tomar una familia casi ajena $\mathcal{A}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Veamos que $\{f_A : A \in \mathcal{A}\}$ es una familia independiente en ω^E. Sean $m \in \omega$, $A_1, \ldots, A_m$ elementos distintos de $\mathcal{A}$ y $j_1, \ldots, j_m \in \omega$. Definimos $B_1 = A_1$ y, para cada $1 < k \leq m$, $B_k = A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$. Entonces cada $\{B_1, \ldots, B_m\}$ es una familia ajena de conjuntos infinitos. Numeramos cada B_k como $\{b_i^k : i \in \omega\}$. Definimos, para cada $1 \leq k \leq m$, $s_i = \{b_i^k : 1 \leq k \leq m\}$ y $p_i : \mathcal{P}(s_i) \to \omega$ como $p_i(t) = j_k$, si $t = \{b_i^k\}$, y $p_i(t) = 99$, en otro caso. Entonces $(s_i, p_i) \in E$ para cada $i \in \omega$ y $f_{A_k}(s_i, p_i) = p_i(A_k \cap s_i) = p_i(\{b_i^k\}) = j_k$ para cada $1 \leq k \leq m$ y cada $i \in \omega$. Por tanto $\{(s,p) \in E : f_{A_1}(s,p) = j_1 \,, \ \ldots \,, f_{A_m}(s,p) = j_m\}$ es infinito.
Observemos que E es numerable infinito y por consecuente, existe una función biyectiva $F : \omega \to E$. De esta manera, la familia $\{g_A : A \in \mathcal{A}\}$, donde $g_A(n) = f_A(F(n))$, es una familia independiente en ω^ω de cardinalidad $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$. □

Teorema 3.6. *Para cada $i \in I$, sea X_i un espacio topológico separable. Si $|I| \leq \mathfrak{c}$, entonces el producto $\prod_{i \in I} X_i$ es separable.*

Demostración. Supongamos que $|I| = \mathfrak{c}$. Para cada $i \in I$ elegimos $D_i \subseteq X_i$ un conjunto denso numerable de X_i y supongamos que $D_i = \{d_j^i : j \in \omega\}$. Por la Proposición 3.5, podemos tomar una familia independiente $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\} \subseteq \omega^\omega$ de funciones. Entonces $D = \{x_n : n \in \omega\}$ es denso en $\prod_{i \in I} X_i$, donde $x_n(i) = d^i_{f_i(n)}$. En efecto, basta mostrar que todo básico no vacío de Y intersecta a D. Sean $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ y U_m un abierto no vacío en X_{i_m} para cada $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Como D_{i_m} es denso en X_{i_m} podemos elegir $j_m \in \omega$ tal que $d^{i_m}_{j_m} \in U_m$. Dado que $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \omega$, $f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_k} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es independiente, se tiene que $A = \{n \in \omega : f_{i_1}(n) = j_1, \ \ldots \,, f_{i_k}(n) = j_k\}$ es infinito en particular no es vacío. Entonces si $n \in A$, $x_n(i_m) = d^{i_m}_{f_{i_m}(n)} = d^{i_m}_{j_m} \in U_m$ para todo $m \in \{1, 2, \ldots k\}$. Concluimos que $x_n \in \pi_{i_1}^{-1}[U_1] \cap \cdots \cap \pi_{i_k}^{-1}[U_k]$.
Ahora, supongamos que $|I| < \mathfrak{c}$. Sea J un conjunto tal que $I \subseteq J$ y $|J| = \mathfrak{c}$. Para cada $j \in J - I$, definimos $X_j = \{j\}$ y lo dotamos con la topología discreta. Entonces $\prod_{i \in J} X_i$ es separable. Como la función $\pi_I : \prod_{i \in J} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$ dada por $\pi_I(f) = f \restriction I$ es continua y suprayectiva, concluimos que $\prod_{i \in I} X_i$ es separable. □

Corolario 3.7. *Sea X_i un espacio de Hausdorff con más de un punto para cada $i \in I$. Entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es separable si y sólo si X_i es separable para cada $i \in I$ y $|I| \leq \mathfrak{c}$.*

Demostración. La suficiencia es inmediata del Teorema 3.6. Ahora recordemos que imagen continua y suprayectiva de espacios separables es separable, así por la Proposición 3.1, tenemos la necesidad. □

Con el Corolario 3.7 podemos asegurar que, si $\kappa \leq \mathfrak{c}$, entonces $\{0,1\}^\kappa$ es separable y por la Proposición 2.5, es ccc. Si $\kappa > \mathfrak{c}$ aún no podemos decir nada acerca de la propiedad ccc en $\{0,1\}^\kappa$. En la siguiente sección mostraremos algo muy interesante sobre este hecho.

3.2. Producto de espacios ccc

Es tiempo de dar solución a aquella pregunta que nos ha traído rompiéndonos la cabeza desde capítulos anteriores, para esto haremos uso de un resultado muy importante en la Teoría de Conjuntos, el Lema del delta-sistema.

Definición 3.8. Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ forma un *delta-sistema* con raíz R si y sólo si $X \cap Y = R$ para cualesquiera dos elementos distintos $X, Y \in \mathcal{A}$.

Notemos que R puede ser vacío, en tal caso $\mathcal{A}$ es una familia ajena.
A continuación presentaremos nuestra herramienta mas importante en esta sección.

Lema del delta-sistema. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos finitos con $|\mathcal{A}| = \aleph_1$. Entonces existe $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{\aleph_1}$ tal que $\mathcal{B}$ forma un delta-sistema.

Demostración. Como $\{|A| : A \in \mathcal{A}\}$ es numerable y $|\mathcal{A}| = \aleph_1$, existe un conjunto $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ no numerable tal que para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}'$, $|A| = |B|$, en efecto, podemos definir una función $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \omega$ como $\mathcal{F}(A) = |A|$. Entonces $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}^{-1}(n)$, si cada $\mathcal{F}^{-1}(n)$ es numerable, entonces por el Teorema 1.12, $\mathcal{A}$ es numerable, lo cual es imposible, entonces existe $k \in \omega$ tal que $\mathcal{F}^{-1}(k)$ es no numerable, el cual es el conjunto requerido. Para concluir la demostración es suficiente demostrar que $\mathcal{A}'$ contiene un delta-sistema. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todos los elementos de $\mathcal{A}$ tienen la misma cardinalidad, digamos n. Para encontrar el delta-sistema contenido en $\mathcal{A}$ procedemos por inducción sobre sobre n.
Si $n = 1$, entonces $\mathcal{A}$ ya es un delta-sistema con raíz vacía. Supongamos que para $n > 1$ y que cualquier colección de conjuntos de cardinalidad n contiene un delta-sistema. Ahora supongamos $|A| = n + 1$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Para cada a, sea $D_a = \{A \in \mathcal{A} : a \in A\}$. Tenemos dos casos.
<u>Caso I.</u> Si $|D_a| = \aleph_0$ para algún a. Podemos fijar dicha a y definir $\mathcal{B} = \{A - \{a\} : A \in D_a\}$, la cual es una familia de $\aleph_1$ conjuntos de tamaño n. Aplicando hipótesis de inducción fijamos $\mathcal{C} \in [\mathcal{B}]^{\aleph_1}$ que forme un delta-sistema con raíz R. Así $\mathcal{D} = \{C \cup \{a\} : c \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{A}$ y tiene raíz $R \cap \{a\}$.
<u>Caso II.</u> $|D_a| < \aleph_1$ para todo a. Observemos que para cualquier conjunto S, se tiene que $\{A \in \mathcal{A} : A \cap S \neq \emptyset\} = \bigcup_{a\in S} A_a$. Luego, si $|S| < \aleph_1$, es decir, si S es numerable, se sigue de la Proposición 1.12 que $\{A \in \mathcal{A} : A \cap S \neq \emptyset\}$ es numerable. Dado que $\mathcal{A}$ no es numerable, existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap S = \emptyset$. En resumen, dado cualquier conjunto numerable S, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap S = \emptyset$. Utilizamos esto para construir por recursión un delta-sistema contenido en $\mathcal{A}$ como sigue: fijemos $A_0 \in \mathcal{A}$, $\alpha < \omega_1$ y supongamos que tenemos elegida una familia ajena $\{A_\beta : \beta < \alpha\} \subset \mathcal{A}$. Tomando $S = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, por el Teorema 1.12, S es numerable. Entonces por lo anterior, podemos

elegir $A_\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $S \cap A_\alpha = \emptyset$. De esta manera la familia $\{A_\beta : \beta \leq \alpha\}$ es una familia ajena de elementos de $\mathcal{A}$. Por recursión tenemos construida una familia ajena $\{A_\gamma : \gamma < \omega_1\} \subseteq \mathcal{A}$, es decir, un delta-sistema con raíz vacía. $\square$

Una aplicación del Lema del delta-sistema a la Topología es el siguiente teorema.

Teorema 3.9. *Sea X_i un espacio topológico para cada $i \in I$. Si el producto $\prod_{i\in I} X_i$ no es ccc, entonces existe $J \in [I]^{<\aleph_0}$ tal que $\prod_{i\in J} X_i$ no es ccc.*

Demostración. Dado que $\prod_{i\in I} X_i$ no es ccc, podemos encontrar una familia celular no numerable de básicos en $\prod_{i\in I} X_i$. Supongamos que $\{V^\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es dicha familia celular de $\prod_{i\in I} X_i$. Como $V^\alpha = \prod_{i\in I} U_i^\alpha$, donde cada U_i^α es abierto en X_i y para cada α, $U_i^\alpha = X_i$ para todos los i's salvo una cantidad finita.
Sea S^α el conjunto finito $\{i \in I : U_i^\alpha \neq X_i\}$ y definamos $\mathcal{A} = \{S^\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Supongamos que $|\mathcal{A}| = \aleph_1$. Por el Lema del delta-sistema, existen $B \subseteq \omega_1$ no numerable y una $J \subseteq I$ tales que $S^\alpha \cap S^\beta = J$ para cualesquiera α, $\beta \in B$, $\alpha \neq \beta$. Como $\prod_{i\in I} U_i^\alpha \cap \prod_{i\in I} U_i^\beta = \emptyset$ para cualesquiera dos elementos distintos $\alpha, \beta \in B$, se tiene que existe algún $i \in I$ tal que $U_i^\alpha \cap U_i^\beta = \emptyset$. Dicho i debería estar en J, de lo contrario $U_i^\alpha = X_i$ o $U_i^\beta = X_i$. En consecuencia $\left\{\prod_{i\in J} U_i^\alpha : \alpha \in B\right\}$ es una familia celular en $\prod_{i\in J} X_i$, pues $\prod_{i\in J} U_i^\alpha \cap \prod_{i\in J} U_i^\beta = \prod_{i\in J} \left(U_i^\alpha \cap U_i^\beta\right)$ donde $U_i^\alpha \cap U_i^\beta = \emptyset$ para algún $i \in J$. Esto muestra que $\prod_{i\in J} X_i$ no es ccc.
Ahora, supongamos que $|\mathcal{A}| < \aleph_1$, entonces $|A| \leq \aleph_0$. Definimos $\mathcal{F} : \omega_1 \to A$ como $\mathcal{F}(\alpha) = S^\alpha$. Como $\omega_1 = \bigcup_{a\in A} \mathcal{F}^{-1}(a)$ y A es numerable, por el Teorema 1.12, existe $a \in A$ tal que $\mathcal{F}^{-1}(a)$ no es numerable. Tomando a $B = \mathcal{F}^{-1}(a)$, tenemos que B es un conjunto no numerable tal que para todo $\alpha, \beta \in B$ distintos, $S^\alpha = S^\beta$. Definimos $J = S^\alpha$ donde $\alpha \in B$. Entonces $\{\prod_{i\in J} U\alpha_i : \alpha \in B\}$ es una familia celular no numerable en $\prod_{i\in J} X_i$, es decir, $\prod_{i\in J} X_i$ no es ccc. $\square$

Por contrapositiva tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.10. *Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios tal que $\prod_{i\in J} X_i$ es ccc para todo $J \in [I]^{<\aleph_0}$, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es ccc.*

Un resultado del corolario anterior es el siguiente.

Corolario 3.11. $\{0,1\}^\kappa$ *es ccc para todo cardinal κ.*

Con ayuda del Corolario 3.11 y el Corolario 3.7 podemos garantizar la existencia de un espacio compacto ccc no separable, a saber $\{0,1\}^{2^{\mathfrak{c}}}$.

Corolario 3.12. *Si el producto de cualesquiera dos espacios ccc es ccc, entonces el producto arbitrario de espacios ccc es ccc.*

Demostración. Por el Corolario 3.10, es suficiente demostrar que el producto finito de espacios ccc es ccc. Para esto procedemos por inducción.
Tenemos que por hipótesis que $X_0 \times X_1$ es ccc, si X_0 y X_1 son ccc.
Fijemos $n \in \omega$ y supongamos que $\prod_{i\in n} X_i$ es ccc siempre que X_i es ccc para cada $i \in n$. Probemos ahora que $\prod_{i\in n+1} X_i$ es ccc si X_i es ccc para cada $i \in n+1$. Notemos que $\prod_{i\in n+1} X_i = \prod_{i\in n} X_i \times X_n$. Como por hipótesis de inducción tenemos que $\prod_{i\in n} X_i$ es ccc y dado que X_n también lo es, tenemos por hipótesis que $\prod_{i\in n} X_i \times X_n$ es ccc. □

Corolario 3.13. *Para cada $i \in I$, sea X_i un espacio separable, entonces el producto $\prod_{i\in I} X_i$ es ccc.*

Demostración. Sea $J \in [I]^{<\aleph_0}$. Como cada X_i es separable, existe un subconjunto denso numerable D_i de X_i. Notemos que $\prod_{i\in J} D_i$ es numerable. Y dado que $\overline{\prod_{i\in J} D_i} = \prod_{i\in J} \overline{D_i} = \prod_{i\in J} X_i$, tenemos que $\prod_{i\in J} X_i$ es separable y por la Proposición 2.5, es ccc. La conclusión se sigue del Corolario 3.10. □

El Corolario 3.12 nos ha ayudado a generar una gran cantidad de espacios ccc, partiendo de espacios ccc y por otro lado el Corolario 3.13 nos ha ayudado a generarlos partiendo de espacios separables. Esto podría ocasionarnos dudas, pues sabemos que separable implica ccc, [véase Proposición 2.5]. Y podíamos habernos ahorrado algunos resultados, ¿por qué no lo hicimos? pues, nos hemos tomado la libertad de colocar ambos resultados, debido a que todo esto es cierto bajo la suposición de los axiomas de ZFC, pero agregando una afirmación más, esto cambia, pues resulta que hay espacios que son ccc y no son separables. Para continuar con la explicación es preciso conocer la siguiente definición.

Definición 3.14. Una *línea de Suslin* es un LOTS que tiene la ccc y no es separable.

La *hipótesis de Suslin*, la cual denotamos por SH, es la afirmación de que no existen líneas de Suslin.

Regresando a la explicación anterior la afirmación que se agrega es la hipótesis de Suslin. La cual surge en 1920 cuando Mikhail Yakovlevich Suslin se hacía la siguiente pregunta. ¿Es cierto que todo orden lineal denso sin puntos finales que es tanto ccc como conexo con su topología del orden es isomorfo a $(\mathbb{R}, <)$?, aunque pareciera que se está hablado del Teorema 1.76, no es así, puesto que el Teorema 1.76 trabaja con un espacio separable, mientras que la pregunta menciona un orden denso, y sabemos que no todo espacio topológico generado por un orden denso es separable, por lo que no estamos hablando del mismo teorema. La hipótesis de Suslin da una respuesta afirmativa a dicha pregunta, mientras que una línea de Suslin es el contraejemplo y solamente existe si la SH es falsa.

Ahora bajo la suposición de ZFC y $\neg$SH, si L es una línea de Suslin, más adelante veremos que a pesar de que L es ccc, $L \times L$ no lo es.

Teorema 3.15. *Si L es una línea de Suslin, entonces cL es una línea de Suslin compacta.*

Demostración. El Teorema 1.74 muestra que cL es compacto. Dado que L es un subespacio denso ccc de cL, se sigue del Teorema 2.8 que cL es ccc. Entonces cL es un LOTS compacto ccc. Para concluir es suficiente ver que cL no es separable. Pero esto es inmediato de la Proposición 1.78 pues L no es separable. □

Teorema 3.16. *Si* $(L, <)$ *es cualquier línea de Suslin, entonces* $L \times L$ *no es ccc.*

Demostración. Primero sea I el conjunto de todos los puntos aislados de L, esto es $I = \{x \in L : \{x\} \text{ es abierto}\}$, entonces I es numerable, pues es una familia celular de L y L es ccc.
Procedemos a elegir por recursión elementos $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in L$ para cada $\alpha \in \omega_1$ satisfaciendo:

(a) $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$;

(b) $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$;

(c) Si $\xi < \alpha$, entonces $b_\xi \notin (a_\alpha, c_\alpha)$.

Supongamos que $\alpha < \omega_1$ y que tenemos elegidos a_ξ, b_ξ, c_ξ para cada $\xi < \alpha$ tales que satisfacen (a), (b) y (c). Luego elijamos a_α, c_α tales que $a_\alpha < c_\alpha$ y $(a_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$ y $(a_\alpha, c_\alpha) \cap (I \cup \{b_\xi : \xi < \alpha\}) = \emptyset$, esto es posible porque el conjunto numerable $I \cup \{b_\xi : \xi < \alpha\}$ no es denso en L. Entonces (a_α, c_α) no es vacío y no contiene puntos aislados por tanto debe ser infinito. Así, elijamos $b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ tal que $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$. Esto concluye la construcción por recursión.
Ahora procedemos a demostrar que $L \times L$ no es ccc. La familia de los conjuntos abiertos $(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha) \subseteq L \times L$ forma una familia celular en $L \times L$. En efecto, son no vacíos por (b), y son ajenos por parejas, ya que si $\xi < \alpha$, (c) implica que $b_\xi \leq a_\alpha$ o $b_\xi \geq c_\alpha$, cuyo primer caso implica que $(a_\xi, b_\xi) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \emptyset$ y el segundo caso implica que $(b_\xi, c_\xi) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \emptyset$. Esto muestra que $L \times L$ no es ccc.

□

Corolario 3.17 ($\neg$SH)**.** *Existe un LOTS compacto ccc* X *cuyo cuadrado,* $X \times X$*, no es ccc.*

Demostración. Sea L una línea de Suslin. Por el Teorema 3.15, cL es una linea de Suslin compacta. Así, $cL \times cL$ es el producto de dos líneas de Suslin y por el Teorema 3.16, $cL \times cL$ no es ccc. Por tanto cL es el espacio requerido. □

3.3. Conjuntos parcialmente ordenados

Dada una relación R sobre un conjunto $\mathbb{P}$ es *reflexiva* si cumple que pRp para todo $p \in \mathbb{P}$. Y si para cualesquiera p, q, $r \in \mathbb{P}$ ocurre que pRq y qRr, implica pRr, decimos que la relación es *transitiva*.

Definición 3.18. Un *pre-orden* es una relación transitiva y reflexiva.

Definición 3.19. Un *forcing* es una trupla, $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ tal que $\leq$ es un pre-orden sobre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{1} \in \mathbb{P}$ es el elemento más grande de $\mathbb{P}$, es decir, para todo $p \in \mathbb{P}$ $p \leq \mathbb{1}$.

Como es usual, omitiremos $\leq$ y $\mathbb{1}$ para decir simplemente que $\mathbb{P}$ es un forcing cuando $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ lo sea.

Notación. Los elementos de $\mathbb{P}$ son llamados condiciones de $\mathbb{P}$ y la expresión "$p \leq q$" se lee como p extiende a q.

Un pre-orden sobre un conjunto $\mathbb{P}$ es llamado *orden parcial* si satisface que no existen $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \leq q$, $q \leq p$ y $p \neq q$.

Definición 3.20. Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Decimos que p, $q \in \mathbb{P}$ son *compatibles*, lo cual denotamos por $p \not\perp q$ si tienen un extensión común, es decir, si existe una $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Diremos que p, q son *incompatibles* y lo denotamos por $p \perp q$, si no son compatibles.

Ejemplo 3.21. Sea $\mathbb{P} = [\omega]^\omega$ y dados p, $q \in \mathbb{P}$, definimos $p \leq q$ si y sólo si $p \subseteq^* q$, donde $p \subseteq^* q$ si y sólo si $p - q$ es finito. Entonces $(\mathbb{P}, \leq, \omega)$ es un forcing.

Demostración. Sean p, q, $r \in \mathbb{P}$ tales que $p \leq q$ y $q \leq r$, entonces $p \subseteq^* q$ y $q \subseteq^* r$. Así, $p \subseteq^* q \subseteq^* r$, con lo que $p \subseteq^* r$, pues $p - r \subseteq (p - q) \cup (q - r)$, por tanto $p \leq r$.
Sea $a \in \mathbb{P}$, como $a - a$ es finito, $a \subseteq^* a$ y por tanto $a \leq a$. Con esto tenemos que $\leq$ es transitiva y reflexiva.
Finalmente, dado $q \in \mathbb{P}$, como $q \subseteq \omega$ y $q - \omega = \emptyset$ por tanto $q \subseteq^* \omega$ y así $q \leq \omega$ para todo $q \in \mathbb{P}$. Por lo tanto $(\mathbb{P}, \leq, \omega)$ es un forcing. $\square$

Definición 3.22. Una *anticadena* es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ cuyos elementos son incompatibles por pares, es decir, para cualesquiera dos elementos distintos $p, q \in A$, $p \perp q$, o bien no existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.

Definición 3.23. Un forcing $\mathbb{P}$ es *ccc* si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es numerable.

El siguiente ejemplo muestra la razón por la que $\mathbb{P}$ es llamado ccc si toda anticadena es numerable.

Ejemplo 3.24. Sea X un espacio topológico no vacío. Definimos $\mathbb{O}_X$ como el conjunto de todos los subconjuntos abiertos no vacíos de X. Dados $p, q \in \mathbb{O}_X$, decimos que $p \leq q$ si y sólo si $p \subseteq q$. Entonces $(\mathbb{O}_X, \leq, X)$ es un forcing y $\mathbb{O}_X$ es ccc si y sólo si X es ccc.

Demostración. Primero veamos que $\leq$ es un pre-orden sobre $\mathbb{O}_X$. Sean p, q, $r \in \mathbb{O}_X$ tales que $p \leq q$ y $q \leq r$, entonces $p \subseteq q$ y $q \subseteq r$, con lo que $p \subseteq r$ y $p \leq r$. Por otro lado, como $q \subseteq q$ para todo $q \in \mathbb{O}_X$, $q \leq q$. Por lo que $(\mathbb{O}_X, \leq)$ es un pre-orden. Finalmente, dado que para cualquier $q \in \mathbb{O}_X$, $q \subseteq X \in \mathbb{O}_X$, entonces $q \leq X$. Por tanto $(\mathbb{O}_X, \leq, X)$ es un forcing.
Ahora, dados $p, q \in \mathbb{O}_X$, veamos que $p \not\perp q$ si y sólo si $p \cap q \neq \emptyset$. Para la necesidad, si $p \not\perp q$, entonces existe $r \in \mathbb{O}_X$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Así, $r \subseteq p$ y $r \subseteq q$, con lo que $\emptyset \neq r \subseteq p \cap q$. Por tanto $p \cap q \neq \emptyset$. Para la suficiencia, como p, $q \in \mathbb{O}_X$, p y q son abiertos, así $p \cap q$ es un abierto y por hipótesis $p \cap q \neq \emptyset$, entonces $p \cap q \in \mathbb{O}_X$, $p \cap q \subseteq p$ y $p \cap q \subseteq q$. Así, $p \cap q \leq p$ y $p \cap q \leq q$, por tanto p y q son compatibles.
En consecuencia, dados $p, q \in \mathbb{O}_X$, $p \perp q$ si y sólo si $p \cap q = \emptyset$. De esta manera una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es una familia celular de X si y sólo si $\mathcal{F}$ es una anticadena de $\mathbb{O}_X$. Por tanto toda familia celular de X es numerable si y sólo si toda anticadena de $\mathbb{O}_X$ es numerable. □

A continuación daremos un ejemplo de forcing que no es ccc.

Ejemplo 3.25. El forcing del Ejemplo 3.21, $\mathbb{P} = [\omega]^\omega$ no es ccc.

Demostración. Veamos que $p \not\perp q$ si y sólo si $p \cap q$ es infinito. Supongamos que $p \not\perp q$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Así, $r \subseteq^* p$ y $r \subseteq^* q$, en consecuencia $r \subseteq^* p \cap q$. Como $r \in \mathbb{P}$, r es infinito y por tanto $p \cap q$ es infinito. Recíprocamente, si $p \cap q$ es infinito, entonces $p \cap q \in \mathbb{P}$, $p \cap q \leq p$ y $p \cap q \leq q$, es decir $p \not\perp q$.
De esto concluimos que $p \perp q$ si y sólo si $p \cap q$ es finito. Entonces, una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es casi ajena si y sólo si $\mathcal{A}$ es una anticadena de $\mathbb{P}$.
El Lema 3.3 muestra la existencia de una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y por tanto una anticadena en $\mathbb{P}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$. □

Finalizaremos esta sección presentando el "forcing de Cohen" el cual será de utilidad para obtener algunas propiedades básicas del Axioma de Martin (que presentamos en la siguiente sección).

Definición 3.26. Para cualesquiera dos conjuntos I y J, $\mathrm{Fn}(I, J)$ es el *conjunto de todas las funciones parciales finitas* de I en J, esto es,

$$\mathrm{Fn}(I, J) = \{p \subseteq I \times J : p \text{ es una función y } |p| < \aleph_0\}.$$

Recordemos que dada una función p, el *dominio* de p, el cual denotaremos por $\mathrm{dom}(p)$, es el conjunto $\{x : \text{existe}\, y\, ((x,y) \in p)\}$. El *rango* de p es el conjunto $\{y : \text{existe}\ x\, ((x,y) \in p)\}$ y lo denotamos por $\mathrm{ran}(p)$.

Ejemplo 3.27. Sean I y J dos conjuntos. Si $p, q \in \mathrm{Fn}(I,J)$, decimos que $p \leq q$ si y sólo si $p \supseteq q$. Entonces $(\mathrm{Fn}(I,J), \leq, \emptyset)$ es un forcing. Además, para cuales quiera $p, q \in \mathrm{Fn}(I,J)$, $p \not\perp q$ si y sólo si $p \cup q$ es función.

Demostración. Se sigue de la definición de $\leq$ que $p \leq \emptyset$ para todo $p \in \mathrm{Fn}(I,J)$. Veamos que $\leq$ es un pre-orden. Sean p, q, $r \in F_n(I,J)$ tales que $p \leq q$ y $q \leq r$. Entonces $p \supseteq q$ y $q \supseteq r$. Así, $p \supseteq r$ y con esto $p \leq r$. Esto muestra que $\leq$ es transitiva. Claramente $p \supseteq p$ para todo $p \in F_n(I,J)$, es decir, $\leq$ es reflexiva.
Sean p, $q \in \mathrm{Fn}(I,J)$. Supongamos que $p \not\perp q$. Entonces existe $r \in \mathrm{Fn}(I,J)$ tal que $r \leq q$ y $r \leq p$, esto es $r \supseteq q$ y $r \supseteq p$, entonces $r \supseteq p \cup q$. Ahora mostremos que $p \cup q$ es función. Sean (x,y), $(x,z) \in p \cup q$, como $p \cup q \subseteq r$, entonces (x,y), $(x,z) \in r$, como r es función, $y = z$. Concluimos que $p \cup q$ es una función.
Recíprocamente, supongamos que $p \cup q$ es una función. Dado que $p, q \in \mathrm{Fn}(I,J)$, $p \cup q \in \mathrm{Fn}(I,J)$. Como $p \cup q \supseteq p$, $p \cup q \supseteq q$ y $p \cup q \in \mathrm{Fn}(I,J)$, entonces $p \not\perp q$. $\square$

La siguiente proposición caracteriza la propiedad ccc en el forcing de Cohen.

Proposición 3.28. *Sean I y J dos conjuntos.* $\mathrm{Fn}(I,J)$ *tiene la ccc si y sólo si* $I = \emptyset$ *o J es numerable.*

Demostración. Para la necesidad. Supongamos que $I \neq \emptyset$ y fijemos $i \in I$. Para cada $j \in J$, definimos $p_j = \{(i,j)\}$. Entonces $p_k \cup p_j$ no es función si $k \neq j$ y por el Ejemplo 3.27, $p_k \perp p_j$. De esta forma $\{p_j : j \in J\}$ es una anticadena de cardinalidad $|J|$ y como $Fn(I,J)$ ccc, concluimos que J es numerable.
Para la suficiencia. Si $I = \emptyset$, claramente $\mathrm{Fn}(I,J)$ es ccc, en efecto, pues si consideramos $\mathrm{Fn}(\emptyset, J)$, tenemos que $\mathrm{Fn}(I,J) = \{\emptyset\}$ el cual es ccc. Ahora supongamos que J es numerable. Fijemos $p_\alpha \in \mathrm{Fn}(I,J)$ para $\alpha < \omega_1$. Probemos que $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ no es una anticadena. Sea $s_\alpha = \mathrm{dom}(p_\alpha) \in [I]^{<\omega}$ y definimos $A = \{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.
Si $|A| < \aleph_1$, es decir, si A es numerable, existe un conjunto $B \subseteq \omega_1$ no numerable tal que para todos α, $\beta \in B$, $s_\alpha = s_\beta$. En efecto, pues consideremos $\mathcal{F} : \omega_1 \to A$ definida como $\mathcal{F}(\alpha) = s_\alpha$, dado que $\omega_1 = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{F}^{-1}(\alpha)$ y A es numerable, por el Teorema 1.12, debería existir $a \in A$ tal que $\mathcal{F}^{-1}(a)$ no es numerable. Tomando $B = \mathcal{F}^{-1}(a)$ tenemos que B es un conjunto no numerable, tal que para todo $\alpha, \beta \in B$ distintos, $s_\alpha = s_\beta$. De esta manera, si fijamos $\alpha_0 \in B$, se tiene que $\{p_\alpha : \alpha \in B\}$ es un conjunto de funciones de $\mathrm{dom}(p_{\alpha_0})$ en J, sin embargo, dado que $\mathrm{dom}(p_{\alpha_0})$ es finito y J es numerable, sólo pueden haber una cantidad numerable de estas funciones. Entonces podemos elegir dos elementos distintos α, $\beta \in B$ tales que $p_\alpha = p_\beta$ y esto implica que $p_\alpha \not\perp p_\beta$.

Ahora supongamos que $|A| = \omega_1$. Aplicando el Lema del delta-sistema existe un conjunto $B' \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\{s_\alpha : \alpha \in B'\}$ es un delta-sistema con raíz R. Luego $\{p_\alpha \restriction R : \alpha \in B'\}$ es nuevamente un conjunto de funciones de R en J y por consecuente es numerable. Por tanto existen dos elementos distintos $\alpha, \beta \in B'$ tales que $p_\alpha \restriction R = p_\beta \restriction R$. Como $R = \mathrm{dom}(p_\alpha) \cap \mathrm{dom}(p_\beta)$, se tiene que $p_\alpha \cup p_\beta$ es función. Por el Ejemplo 3.27, $p_\alpha \not\perp p_\beta$. Concluimos que $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ no es anticadena. □

Definición 3.29. Sea $\mathbb{P}$ un forcing, diremos que $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* en $\mathbb{P}$ si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Tenemos introducidas varias nociones de "conjunto denso", una de ellas es para conjuntos linealmente ordenados (véase Definición 1.34) y otra para un forcing, Definición 3.29. Notemos que, informalmente, un conjunto puede ser interpretado como conjunto linealmente ordenado y como un forcing, por ejemplo $[0, 1]$ con el orden usual ($<$ o $\leq$) y por consecuente tenemos dos nociones (distintas) de subconjunto denso en $[0, 1]$. Formalmente esto es imposible pues un conjunto linealmente ordenado es un par ordenado $(L, <)$ donde $<$ es un orden lineal (y por tanto no reflexivo), y un forcing es una terna $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$, donde $\leq$ (es reflexivo) y $\mathbb{1}$ satisfacen las condiciones de la Definición 3.19 y por tanto, se debe de aclarar si un conjunto es denso en $(L, <)$ o $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ y dependiendo del caso se deben interpretar como en la Definición 1.34 o en la Definición 3.29, respectivamente.

Para evitar confusiones a partir de este momento si $\mathbb{P}$ es un forcing y A es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ nos referiremos a que A satisface la Definición 3.29.

Ejemplo 3.30. Sean U cualquier conjunto abierto de un espacio topológico X y $D = \{q \in \mathbb{O}_X : q \subseteq U\}$. Entonces D es denso en $\mathbb{O}_X$ en el sentido de la Definición 3.29 si y sólo si U es denso en X en el sentido topológico, Definición 1.34.

Demostración. Sea τ_X^* la familia de abiertos de X que son no vacíos. Para la necesidad consideremos $W \in \tau_X^*$. Notemos que $W \in \mathbb{O}_X$, entonces existe $q \in D$ tal que $q \leq W$. Así, $q \subseteq W$ y como $q \in D$ y $q \subseteq U$, tenemos que $\emptyset \neq q \subseteq W \cap U$. Por tanto U es denso en X.

Para la suficiencia, sea $p \in \mathbb{O}_X$. Como $p \in \mathbb{O}_X$, p es un abierto no vacío de X, por lo que $p \cap U \neq \emptyset$, pues U es denso en X. Como U es abierto, entonces $p \cap U \in \mathbb{O}_X$, más aún $p \cap U \subseteq U$. Por lo que $p \cap U \in D$. Dado que $p \cap U \subseteq p$ tenemos $p \cap U \leq p$, por lo cual D es denso en $\mathbb{O}_X$. □

Ejemplo 3.31. Supongamos que I es infinito y J es no vacío. Entonces los conjuntos de la forma $D_i = \{q \in \mathrm{Fn}(I, J) : i \in \mathrm{dom}(q)\}$ y $R_j = \{q \in \mathrm{Fn}(I, J) : j \in \mathrm{ran}(q)\}$ son densos en $\mathrm{Fn}(I, J)$ para cualesquiera $i \in I$ y $j \in J$.

Demostración. Sea $p \in \mathrm{Fn}(I, J)$. Si $i \in \mathrm{dom}(p)$, entonces $p \in D_i$ y $p \leq p$. Si $i \notin \mathrm{dom}(p)$. Fijemos $j_0 \in J$ y definimos a $q : \mathrm{dom}(p) \cup \{i\} \to J$ por

$$q(l) = \begin{cases} p(l), & \text{si } l \neq i; \\ j_0, & \text{si } l = i. \end{cases}$$

Es decir, $q = p \cup \{(i, j_0)\}$. Notemos que $q \in D_i$ y $q \supseteq p$, entonces $q \leq p$. En ambos casos D_i es denso.
Ahora veamos que R_j es denso. Sea $p \in \mathrm{Fn}(I, J)$. Si $j \in \mathrm{ran}(p)$, entonces $p \in R_j$ y $p \leq p$. Si $j \notin \mathrm{ran}(p)$. Dado que I es infinito y $\mathrm{dom}(p)$ es finito, podemos fijar $x_0 \in I - \mathrm{dom}(p)$ y definamos $q = p \cup \{(x_0, j)\}$. Entonces q es una función, $q \in R_j$ y $p \subseteq q$. Por tanto $q \leq p$. En ambos casos R_j es denso. □

El ejemplo anterior muestra que cualquier función $p \in \mathrm{Fn}(I, J)$, puede ser extendida a una función finita más larga q con j en su rango donde siempre que $\mathrm{dom}(p) \neq I$ o con i en su dominio.

Definición 3.32. Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Entonces $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* en $\mathbb{P}$ si:

1. $\mathbb{1} \in G$;
2. para todos p, $q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$;
3. para todos p, $q \in \mathbb{P}$ si $q \leq p$ y $q \in G$, entonces $p \in G$.

El siguiente ejemplo nos muestra que la unión del filtro G del forcing $\mathrm{Fn}(I, J)$ es una función, además de que su dominio y rango está formado por la unión del dominio y rango de los elementos de G, según corresponde.

Ejemplo 3.33. Sean I y J dos conjuntos y definamos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, J)$. Si G es un filtro en $\mathbb{P}$, entonces $\bigcup G$ es una función, $\mathrm{dom}(\bigcup G) = \bigcup\{\mathrm{dom}(p) : p \in G\}$ y $\mathrm{ran}(\bigcup G) = \bigcup\{\mathrm{ran}(p) : p \in G\}$.

Demostración. Primero veamos que $\bigcup G$ es una función. Sean $(x, y), (x, z) \in \bigcup G$. Entonces existen $p, q \in G$ tales que $(x, y) \in p$ y $(x, z) \in q$. Dado que $p, q \in G$, existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, esto es, $r \supseteq p$ y $r \supseteq q$. Así que $(x, y), (x, z) \in r$ y dado que r es función, tenemos que $y = z$.
Ahora, mostraremos que $\mathrm{dom}(\bigcup G) = \bigcup\{\mathrm{dom}(p) : p \in G\}$. Sea $x \in \mathrm{dom}(\bigcup G)$, entonces existe y tal que $(x, y) \in \bigcup G$. Así, existe $p \in G$ tal que $(x, y) \in p$ y por definición $x \in \mathrm{dom}(p)$. Por otro lado, si $x \in \bigcup\{\mathrm{dom}(p) : p \in G\}$, existe $q \in G$ tal que $x \in \mathrm{dom}(q)$. Así, existe y tal que $(x, y) \in q$, pero $q \subseteq \bigcup G$, entonces $(x, y) \in \bigcup G$. Por tanto $x \in \mathrm{dom}(\bigcup G)$.
Finalmente, mostraremos que $\mathrm{ran}(\bigcup G) = \bigcup\{\mathrm{ran}(p) : p \in G\}$. Sea $y \in \mathrm{ran}(\bigcup G)$.

Entonces existe x tal que $(x, y) \in \bigcup G$. Así, existe $q \in G$ tal que $(x, y) \in q$ y $y \in \operatorname{ran}(q)$. Si $y \in \bigcup\{\operatorname{ran}(p) : p \in G\}$, entonces existe $q \in G$ tal que $y \in \operatorname{ran}(q)$, es decir, existe x tal que $(x, y) \in q$, y dado que $q \subseteq \bigcup G$, tenemos que $(x, y) \in \bigcup G$. Por lo que $y \in \operatorname{ran}(\bigcup G)$. □

A partir de este momento, si G es un filtro en algún $\operatorname{Fn}(I, J)$, denotamos por f_G a $\bigcup G$.

El siguiente lema será de utildad para la siguiente sección.

Lema 3.34. *Sea G es un filtro y $n \in \omega$. Si $p_0, \dots, p_n \in G$, entonces existe $q \in G$ tal que $q \leq p_i$ para todo $i \in n+1$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre n. Sean $p_0, p_1 \in G$, dado que G es filtro existe $q \in G$ tal que $q \leq p_0$ y $q \leq p_1$. Supongamos que el resultado es válido para n, es decir, siempre que tengamos $n+1$ elementos de G, digamos $p_0, \dots, p_n \in G$, existe $r \in G$ tal que $r \leq p_i$ para todo $i \in n+1$.
Sean $p_0, \dots, p_{n+1} \in G$. Por hipótesis de inducción, $p_0, \dots, p_n \in G$, existe $r \in G$ tal que $r \leq p_i$ para todo $i \in n+1$, entonces basta con probar que para r, $p_{n+1} \in G$, existe $s \in G$ tal que $s \leq r$ y $s \leq p_{n+1}$, pero esto ocurre ya que G es un filtro. Como $s \leq r$, entonces $s \leq p_i$ para todo $i \in n+1$. Así, $s \leq p_i$ para todo $i \in n+2$. □

3.4. Axioma de Martin y el producto de espacios ccc

A continuación definiremos el Axioma de Martin.

Definición 3.35. Sea κ un cardinal y $\mathbb{P}$ un forcing. $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ es la siguiente afirmación: Si $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, entonces existe un filtro G en $\mathbb{P}$ tal que $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$.

- $MA(\kappa)$ es la afirmación: $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ es válida para todo forcing $\mathbb{P}$ ccc.
- MA es la afirmación: Para todo $\kappa < \mathfrak{c}$, $MA(\kappa)$ es válido.

Proposición 3.36. *Sean λ y κ dos cardinales y $\mathbb{P}$ un forcing. Si $\lambda \leq \kappa$, entonces $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ implica $MA_{\mathbb{P}}(\lambda)$ y $MA(\kappa)$ implica $MA(\lambda)$.*

Demostración. Supongamos $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ y sea $\mathcal{D}$ una familia de densos de $\mathbb{P}$ tal que

$$|\mathcal{D}| \leq \lambda.$$

Como $\lambda \leq \kappa$, existe un filtro sobre $\mathbb{P}$ que intersecta a cada uno de los elementos de $\mathcal{D}$. Ahora, supongamos $MA(\kappa)$ y sea $\mathbb{P}$ un forcing ccc. Entonces $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ es válido para $\mathbb{P}$. Así, utilizando el hecho anterior $MA_{\mathbb{P}}(\lambda)$ se cumple para $\mathbb{P}$ y por tanto ocurre $MA(\lambda)$. $\square$

Proposición 3.37. *$MA(\kappa)$ implica que $\kappa < \mathfrak{c}$.*

Demostración. Supongamos que $\kappa \geq \mathfrak{c}$ y sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, \{0,1\})$. Por la Proposición 3.28, $\mathbb{P}$ es ccc. Definimos para cada $n \in \omega$ e $i \in \{0,1\}$, $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(p)\}$. Por el Ejemplo 3.31, D_n y R_i son densos en $\mathbb{P}$ para cada $n \in \omega$ e $i \in \{0,1\}$. Para cada $f \in \{0,1\}^\omega$, definimos $E_f = \{p \in \mathbb{P} : p \nsubseteq f\}$.
Afirmación: E_f es denso en $\mathbb{P}$ para cada $f \in \{0,1\}^\omega$.
En efecto, fijemos $f \in \{0,1\}^\omega$ y $p \in \mathbb{P}$. Si $p \nsubseteq f$, entonces $p \in E_f$ y $p \leq p$. Supongamos que $p \subseteq f$, fijemos $l \in \omega - \mathrm{dom}(p)$ y $j \in \{0,1\} - \{f(l)\}$. Definimos $q = p \cup \{(l,j)\}$. Claramente $q \supseteq p$, $q \in \mathbb{P}$, (pues $l \in \omega - \mathrm{dom}(p)$) y $q \in E_f$. Sea

$$\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in \{0,1\}^\omega\}.$$

Entonces $|\mathcal{D}| \leq |\{0,1\}^\omega| = \mathfrak{c} \leq \kappa$. Aplicando $MA(\kappa)$, obtenemos un filtro $G \in \mathbb{P}$ tal que $G \cap D_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$ y $G \cap E_f \neq \emptyset$ para todo $f \in \{0,1\}^\omega$. Por el Ejemplo 3.33, $f_G = \bigcup G$ es una función tal que $\mathrm{dom}(f_G) = \bigcup\{\mathrm{dom}(p) : p \in G\}$. Notemos que $\mathrm{dom}(f_G) = \omega$, en efecto, sea $n \in \omega$, como $G \cap D_n \neq \emptyset$, existe $p \in G \cap D_n$. Así, $\mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(f_G)$ y $n \in \mathrm{dom}(p)$, por lo que $n \in \mathrm{dom}(f_G)$. Concluimos que $f_G \in \{0,1\}^\omega$.
Sin embargo $G \cap E_{f_G} \neq \emptyset$, es decir, existe $q \in G \cap E_{f_G}$. Entonces $q \nsubseteq f_G = \bigcup G$ y $q \subseteq f_G = \bigcup G$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\kappa < \mathfrak{c}$. $\square$

Proposición 3.38. *Sea $\mathbb{P}$ cualquier forcing, $\mathcal{D}$ una familia numerable de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ y fijemos cualquier $p \in \mathbb{P}$. Entonces existe un filtro G en $\mathbb{P}$ tal que $p \in G$ y $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$. Usando recursión en ω, elegiremos $r_n \in \mathbb{P}$, para cada $n \in \omega$, tal que $r_0 = p$, $r_{n+1} \leq r_n$ y $r_{n+1} \in D_n$. Definimos $r_0 = p$. Sea $n \in \omega$ y supongamos que tenemos definida la colección $\{r_k : k \leq n\}$ que satisface la condición anterior, es decir, $r_0 = p$, $r_{k+1} \leq r_k$ y $r_{k+1} \in D_k$ para cada $k < n$. Para elegir r_{n+1} procedemos como sigue: Dado que D_n es denso en $\mathbb{P}$ y $r_n \in \mathbb{P}$, existe $r_{n+1} \in D_n$ tal que $r_{n+1} \leq r_n$. De esta manera la colección $\{r_k : k \leq n+1\}$ satisface las condiciones requeridas. Por recursión tenemos entonces definido el conjunto $\{r_n : n \in \omega\}$ tal que $r_0 = p$, $r_{n+1} \leq r_n$ y $r_{n+1} \in D_n$ para cada $n \in \omega$.
Sea $G = \{q \in \mathbb{P} : \text{ existe } n \in \omega\,(r_n \leq q)\}$. Notemos que $r_n \in G$ para cada $n \in \omega$. Veamos que G es un filtro. Como $r_0 \leq \mathbb{1}$, $\mathbb{1} \in G$. Para la segunda condición sean $q, s \in G$. Entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $r_n \leq q$ y $r_m \leq s$. Sea $t = \max(n,m)$.

Entonces $r_t \in G$, $r_t \leq r_n \leq q$ y $r_t \leq r_m \leq s$. Finalmente, sean $q, s \in \mathbb{P}$ tales que $q \leq s$ y $q \in G$, así existe $n \in \omega$ tal que $r_n \leq q$, por tanto $r_n \leq s$ y $s \in G$. Concluimos que G es un filtro. Claramente $p \in G$ y $r_{n+1} \in G \cap D_n$ para cada $n \in \omega$. $\square$

La *Hipótesis del Continuo*, CH, es la afirmación: $\aleph_1 = \mathfrak{c}$. Es decir, CH afirma que el único cardinal infinito menor que $\mathfrak{c}$ es $\aleph_0$. Y por el contrario, $MA(\aleph_1)$, por la Proposición 3.37, afirma que $\aleph_1 < \mathfrak{c}$, es decir, $MA(\aleph_1)$ implica ¬CH.
Una consecuencia de la Proposición 3.38 es el siguiente corolario.

Corolario 3.39. *$MA(\aleph_0)$ siempre es válido. En particular, CH implica MA.*

Demostración. Sea $\mathbb{P}$ un forcing ccc y $\mathcal{D}$ una familia de densos en $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \aleph_0$. Por la Proposición 3.38, existe $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro tal que $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$.
Para la segunda parte. Supongamos CH y tomamos $\kappa < \aleph_1$. Por tanto $\kappa \leq \aleph_0$. Por lo anterior $MA(\aleph_0)$ es válido. Por la Proposición 3.36, $MA(\kappa)$ es valido. $\square$

Proposición 3.40. *Existe un forcing $\mathbb{P}$ que no es ccc tal que $MA_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$ es falso.*

Demostración. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$. Por la Proposición 3.28 $\mathbb{P}$ no es ccc. Para cada $n \in \omega$ y $\alpha \in \omega_1$, definimos $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(p)\}$ y $R_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{ran}(p)\}$. Por el Ejemplo 3.33, D_n y R_α son densos en $\mathbb{P}$ para todo $n \in \omega$ y todo $\alpha \in \omega_1$. Supongamos que $MA_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$ es válido. Como $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{R_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia de densos de cardinalidad a lo más $\aleph_1$, existe $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro tal que $G \cap D_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$ y $G \cap R_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \omega_1$. Por el Ejemplo 3.33, $f_G = \bigcup G$ es una función, $\mathrm{dom}(f_G) = \{\mathrm{dom}(p) : p \in G\}$ y $\mathrm{ran}(f_G) = \bigcup\{\mathrm{ran}(p) : p \in G\}$. Luego, dado que $G \cap D_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$, $\mathrm{dom}(f_G) = \omega$ y puesto que $G \cap R_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \omega_1$, $\mathrm{ran}(f_G) = \omega_1$. Por tanto $f_G : \omega \to \omega_1$ es una función suprayectiva y por el Teorema 1.13, $\aleph_0 = |\omega| \geq |\omega_1| = \aleph_1$, lo cual es una contradicción. $\square$

Una de las primeras aplicaciones del Axioma de Martin a la Topología es el siguiente resultado.

Teorema 3.41 ($MA(\kappa)$)**.** *Sea X cualquier espacio ccc, compacto y de Hausdorff. Si $H_\alpha \subseteq X$, para $\alpha < \kappa$, es cerrado y denso en ninguna parte, entonces $\bigcup_{\alpha<\kappa} H_\alpha \neq X$.*

Demostración. Como X es ccc, por el Ejemplo 3.24, $\mathbb{O}_X$ es ccc. Si G es cualquier filtro en $\mathbb{O}_X$, entonces por el Lema 3.34, G tiene la pif y por tanto la colección $\{\overline{p} : p \in G\}$ es una familia de subconjuntos cerrados en X con la pif. Se sigue del Teorema 1.43 que $F_G = \bigcap\{\overline{p} : p \in G\}$ es no vacío.
Sea $D_\alpha = \{q \in \mathbb{O}_X : \overline{q} \cap H_\alpha = \emptyset\}$. Cada D_α es denso porque para todo $p \in \mathbb{O}_X$, $p - H_\alpha$ es abierto y no vacío, dado que los espacios compactos y Hausdorff son regulares, existe un conjunto abierto q tal que $\overline{q} \subseteq p - H_\alpha$. Entonces $q \in D_\alpha$ y $q \leq p$.

Notemos que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ implica que $F_G \cap H_\alpha = \emptyset$. Aplicamos $MA(\kappa)$ para elegir un filtro G en $\mathbb{O}_X$ tal que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para todo α, así $F_G \cap \bigcup_{\alpha<\kappa} H_\alpha = \emptyset$, y puesto que $F_G \neq \emptyset$, existe $x \in X$ tal que $x \notin \bigcup_{\alpha<\kappa} H_\alpha$. □

Corolario 3.42 ($MA(\kappa)$)**.** *Sea X un espacio ccc, compacto y de Hausdorff. Si $\{O_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos abiertos y densos de X, entonces $\bigcap\{O_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$.*

Demostración. Para cada O_α con $\alpha < \kappa$, sabemos que $X - O_\alpha$ es denso en ninguna parte, así por el Teorema 3.41 y por las leyes de Morgan tenemos que

$$X \neq \bigcup_{\alpha<k}(X - O_\alpha) = X - (\bigcap_{\alpha<\kappa} O_\alpha).$$

Esto implica que $\bigcap\{O_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$. □

La definición de espacio de Baire puede ser generalizada a la siguiente.

Definición 3.43. Sea κ un cardinal. Decimos que un espacio X es *κ-Baire* si siempre que $\{O_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de abiertos densos en X, se tiene que $\bigcap\{O_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es denso en X.

Un espacio es de Baire si y sólo si éste es $\aleph_0$-Baire.

Corolario 3.44 ($MA(\kappa)$)**.** *Todo espacio ccc, compacto y de Hausdorff es κ-Baire.*

Demostración. Sea $\{O_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de subconjuntos abiertos y densos de un espacio ccc, compacto y de Hausdorff X. Definimos $D = \bigcap\{O_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Tenemos que demostrar que D intersecta a cualquier abierto no vacío de X. Sea U un abierto no vacío de X. Como X es compacto, podemos elegir un abierto no vacío V tal que $\overline{V} \subseteq U$. Tenemos que $\overline{V}$ es un subespacio compacto, de Hausdorff y ccc por la Proposición 2.4 y el Teorema 2.8. Más aún, la colección $\{O_\alpha \cap V : \alpha < \kappa\}$ es una familia de densos abiertos en $\overline{V}$. Aplicando el Teorema 3.41 a $\overline{V}$, tenemos que $\emptyset \neq \bigcap\{O_\alpha \cap V : \alpha < \kappa\} = D \cap V$. Esto muestra que $U \cap D \neq \emptyset$. □

Definición 3.45. Un subconjunto C de un forcing $\mathbb{P}$ es *centrado* si para todo $n \in \omega$ y cualesquiera $p_0, \ldots, p_n \in C$ existe $q \in \mathbb{P}$ (no necesariamente en C) tal que $q \leq p_i$ para todo $i \in n + 1$.

Un forcing $\mathbb{P}$ es *σ-centrado* si es unión numerable de subconjuntos centrados, es decir, $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} C_n$, donde cada C_n es centrado.

Una consecuencia del Lema 3.34 es el siguiente lema.

Lema 3.46. *Todo filtro es centrado.*

Ejemplo 3.47. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Entonces X es separable si y sólo si $\mathbb{O}_X$ es σ-centrado si y sólo si $\mathbb{O}_X$ es unión numerable de filtros.

Demostración. Supongamos que X es separable. Sea D un denso numerable de X, definamos $C_d = \{p \in \mathbb{O}_X : d \in p\}$ para cada $d \in D$. Sean $p_0, \dots, p_k \in C_d$. Entonces $p_0 \cap \cdots \cap p_k$ es un abierto que contiene a d, por tanto $p_1 \cap \cdots \cap p_k \in \mathbb{O}_X$ y $p_1 \cap \cdots \cap p_k \leq p_i$ para todo $i \in k+1$, concluimos que C_d es centrada. Ahora, si $p \in \mathbb{O}_X$, p es un abierto no vacío en X, como D es denso existe $d \in D \cap p$. Así $p \in C_d$. Concluimos que $\mathbb{O}_X = \bigcup_{d \in D} C_d$, es decir, $\mathbb{O}_X$ es σ-centrado.
Si $\mathbb{O}_X$ es σ-centrado, podemos elegir, para cada $n \in \omega$, un subconjunto no vacío $C_n \subseteq \mathbb{O}_X$ centrado tal que $\mathbb{O}_X = \bigcup_{n \in \omega} C_n$. Definamos

$$G_n = \{p \in \mathbb{O}_X : \text{ existen } c_1, c_2, \dots, c_k \in C_n \text{ tales que } c_1 \cap c_2 \cap \cdots \cap c_k \subseteq p\}.$$

Entonces G_n es filtro y $C_n \subseteq G_n$ para todo $n \in \omega$. Así, $\mathbb{O}_X = \bigcup_{n \in \omega} C_n \subseteq \bigcup_{n \in \omega} G_n \subseteq \mathbb{O}_X$.
Supongamos que $\mathbb{O}_X = \bigcup_{n \in \omega} G_n$, donde cada G_n es un filtro en $\mathbb{O}_X$. Como G_n es un filtro, G_n tiene la pif (véase Lema 3.34), así $\{\overline{p} : p \in G_n\}$ tiene la pif, y puesto que X es compacto, se sigue del Teorema 1.43 que existe $d_n \in \bigcap \{\overline{p} : p \in G_n\}$. Sea $D = \{d_n : n \in \omega\}$ y consideremos V un abierto no vacío en X. Como X es regular existe un abierto no vacío W en X tal que $\overline{W} \subseteq V$. Como $W \in \mathbb{O}_X$, existe $k \in \omega$ tal que $W \in G_k$. Así, $d_k \in \overline{W} \subseteq V$. Por tanto D es denso en X. □

Lema 3.48. *Todo forcing σ-centrado es ccc.*

Demostración. Sea $\mathbb{P}$ un forcing σ-centrado. Entonces existe una familia $\{C_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos centrados de $\mathbb{P}$ tales que $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \omega} C_n$. Sea C una anticadena en $\mathbb{P}$, entonces $C \subseteq \bigcup_{n \in \omega} C_n$. Notemos que para cada $n \in \omega$ hay a lo más un elemento de C contenido en C_n, pues C es anticadena y C_n es centrado. Así

$$|C| = |\bigcup_{n \in \omega} (C \cap C_n)| \leq \aleph_0.$$

□

Definición 3.49. Sean $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ un forcing y $s \in \mathbb{P}$. Entonces $s\downarrow$ denota el forcing $(s\downarrow, \leq_s, \mathbb{1}_s)$, donde $s\downarrow = \{p \in \mathbb{P} : p \leq s\}$, $\mathbb{1}_s = s$ y $a \leq_s b$ si y sólo si $a \leq_{\mathbb{P}} b$, para todo $a, b \in s\downarrow$. Si $D \subseteq \mathbb{P}$, decimos que D es *denso abajo de s* si $D \cap s\downarrow$ es denso en $s\downarrow$, equivalentemente si para todo $p \leq s$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Lema 3.50. *Sea $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ un forcing.*

1. *Si* $\mathbb{P}$ *es ccc y* $s \in \mathbb{P}$*, entonces* $s\downarrow$ *es ccc.*
2. *Si* $G \subseteq s\downarrow$ *es un filtro en el forcing* $s\downarrow$ *y* $G^* = \{p \in \mathbb{P} : \text{ existe } q \in G(q \leq_{\mathbb{P}} p)\}$*, entonces* G^* *es un filtro en* $\mathbb{P}$ *y* $G^* \cap s\downarrow = G$*.*

Demostración.

1. Veamos que $s\downarrow$ es ccc. Sea C una anticadena en $(s\downarrow, \leq_s, \mathbb{1}_s)$. Veamos que C es una anticadena en $\mathbb{P}$. Sean $p, q \in C$ tales que $p \neq q$. Supongamos que p y q son compatibles en $\mathbb{P}$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$, dado que $p, q \in s\downarrow$ $r \in s\downarrow$, así $r \leq_s p$ y $r \leq_s q$, por lo que p y q son compatibles en $s\downarrow$ lo cual es una contradicción. Así, C es una anticadena en $\mathbb{P}$ y por tanto numerable.
2. Veamos que G^* es un filtro en $\mathbb{P}$. Para esto primero veamos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in G^*$. Como G es filtro en $s\downarrow$, entonces $s = \mathbb{1}_s \in G$ y como $s \in \mathbb{P}$, $s \leq_{\mathbb{P}} \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, así $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in G^*$. Ahora consideremos $p, q \in G^*$, entonces existen $t, u \in G$ tales que $t \leq_{\mathbb{P}} p$ y $u \leq_{\mathbb{P}} q$, y como G es filtro en $s\downarrow$, existe $r' \in G$ tal que $r' \leq_s t$ y $r' \leq_s u$ y como $r' \leq_{\mathbb{P}} r'$, entonces $r' \in G^*$, $r' \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r' \leq_{\mathbb{P}} q$. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $q \leq_{\mathbb{P}} p$ y $q \in G^*$. Entonces existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} q$ y como $q \leq_{\mathbb{P}} p$, entonces $r \leq_{\mathbb{P}} p$, por lo que $p \in G^*$.
   Falta ver que $G^* \cap s\downarrow = G$. Como $\leq_{\mathbb{P}}$ es reflexivo, $G \subseteq G^*$ y dado que $G \subseteq s\downarrow$, entonces $G \subseteq G^* \cap s\downarrow$. Ahora sea $p \in G^* \cap s\downarrow$ como $p \in G^*$ existe $q \in G$ tal que $q \leq_{\mathbb{P}} p$ y dado que $p \in s\downarrow$, entonces $p \leq s$, así $q \leq s$, con lo que $q \in s\downarrow$, con esto $q \leq_s p$, pero $q \in G$ y G es filtro en $s\downarrow$, entonces $p \in G$. □

Definición 3.51. Un cardinal infinito κ es un *pre-calibre* para el forcing $\mathbb{P}$ si para cualquier subconjunto $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathbb{P}$ existe un $B \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{p_\alpha : \alpha \in B\}$ es centrado.

Proposición 3.52. *Si* $\aleph_1$ *es pre-calibre para un forcing* $\mathbb{P}$*, entonces* $\mathbb{P}$ *es ccc.*

Demostración. Si $\mathbb{P}$ no es ccc, existe una anticadena de $\mathbb{P}$ de cardinalidad $\aleph_1$, digamos $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Como $\aleph_1$ es pre-calibre para $\mathbb{P}$, existe $B \in [\omega_1]^{\aleph_1}$ tal que $\{p_\alpha : \alpha \in B\}$ es centrado, pero $\{p_\alpha : \alpha \in B\}$ es una anticadena, lo cual es una contradicción. Por tanto $\mathbb{P}$ es ccc. □

El siguiente teorema es la clave para el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.53 ($MA(\aleph_1)$)**.** *Todo forcing ccc tiene a* $\aleph_1$ *como pre-calibre.*

Demostración. Fijemos $p_\alpha \in \mathbb{P}$ para cada $\alpha < \omega_1$, donde $\mathbb{P}$ es ccc. Basta encontrar un filtro que contenga $\aleph_1$ de los p_α, pues los filtros son centrados. Para cada $\alpha < \omega_1$, sea

$$D_\alpha = \{q : \text{existe } \beta \geq \alpha \text{ tal que } q \leq p_\beta\}.$$

Notemos que D_α se hace mas pequeño a medida que α se hace mas grande.
Supongamos que hay un $s \in \mathbb{P}$ tal que todos los D_α son densos abajo de s. Como $\mathbb{P}$ es ccc, $s\downarrow$ es ccc y dado que $\{D_\alpha \cap s\downarrow : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de densos de tamaño menor o igual $\aleph_1$, aplicando MA($\aleph_1$) garantizamos la existencia de un filtro $G \subseteq s\downarrow$ tal que $G \cap (D_\alpha \cap s\downarrow) \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \omega_1$. Luego, por el Lema 3.50, $G^* = \{p \in \mathbb{P} :$ existe $q \in G$ tal que $q \leq p\}$ es un filtro en $\mathbb{P}$. De esta manera $\emptyset \neq G \cap (D_\alpha \cap s\downarrow) \subseteq G^* \cap D_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$, y esto implica que existe $\beta \geq \alpha$ tal que $p_\beta \in G^*$. Sea $B = \{\beta < \omega_1 : p_\beta \in G^*\}$. Dado $\alpha < \omega_1$, como $G^* \cap D_{\alpha+1} \neq \emptyset$, por lo anterior, existe $\beta \geq \alpha + 1 > \alpha$ tal que $p_\beta \in G^*$. Esto muestra que B no es acotado en ω_1. Así que $|B| = \omega_1$ y $\{p_\beta : \beta \in B\} \subseteq G^*$.
Ahora supongamos que no hay tal s y lleguemos a una contradicción. Para cada $\xi < \omega_1$ hay un $\alpha_\xi > \xi$ tal que D_{α_ξ} no es denso abajo de p_ξ. En efecto, dada $\xi < \omega_1$. Por la suposición, existe $\gamma < \omega_1$ tal que D_γ no es denso abajo de p_ξ. Entonces $D_\gamma \cap p_\xi\downarrow$ no es denso en $p_\xi\downarrow$, dado que $D_\alpha \subseteq D_\gamma$ para todo $\alpha \geq \gamma$, entonces $D_\alpha \cap p_\xi\downarrow \subseteq D_\gamma \cap p_\xi\downarrow$ para todo $\alpha \geq \gamma$. Así D_α no es denso abajo de p_ξ, para todo $\alpha \geq \gamma$, de esta manera podemos encontrar una $\alpha_\xi > \xi$ tal que D_{α_ξ} no es denso abajo de p_ξ.
Continuando con la demostración. Para cada $\xi < \omega_1$, podemos fijar $r_\xi \leq p_\xi$ tal que no existe $q \leq r_\xi$ con $q \in D_{\alpha_\xi} \cap p_\xi\downarrow$. En particular, no existe $q \in D_{\alpha_\xi}$ tal que $q \leq r_\xi$. Es decir, no existen $\beta \geq \alpha_\xi$ y $q \leq p_\beta$ tales que $q \leq r_\xi$. Por tanto para todo $\beta \geq \alpha_\xi$, $p_\beta \perp r_\xi$. En resumen, para todo $\xi < \omega_1$ existe $r_\xi \leq p_\xi$ tal que $p_\beta \perp r_\xi$ para todo $\beta \geq \alpha_\xi$. En particular, dado que $r_\beta \leq p_\beta$, se tiene que $r_\beta \perp r_\xi$ para todo $\beta \geq \alpha_\xi$.
Ahora por recusión construiremos una sucesión $\{\xi_\nu : \nu < \omega_1\} \subseteq \omega_1$ tal que para todo $\mu < \nu < \omega_1$ se tiene que $\xi_\nu > \alpha_{\xi_\mu}$. Definimos $\xi_0 = 0$. Supongamos que $\alpha < \omega_1$ y que tenemos definida la sucesión $\{\xi_\nu : \nu < \alpha\} \subseteq \omega_1$ tal que si $\mu < \gamma < \alpha$, entonces $\xi_\nu > \alpha_{\xi_\mu}$. Definimos $\xi_\alpha = \sup\{\alpha_{\xi_\mu} : \mu < \alpha\} + 1 \in \omega_1$ y trivialmente $\{\xi_\nu : \nu \leq \alpha\}$ cumple lo requerido. Por recursión tenemos la sucesión requerida.
Finalmente, si $\nu < \mu < \omega_1$, entonces $\xi_\nu > \alpha_{\xi_\mu}$, y por lo anterior, $r_{\xi_\nu} \perp r_{\xi_\mu}$, es decir, $\{r_{\xi_\nu} : \nu < \omega_1\}$ es una anticadena no numerable de $\mathbb{P}$, lo cual es imposible. □

Como es usual el conjunto $\prod_{i \in I} X_i$ denota el conjunto de funciones f con $\mathrm{dom}(f) = I$ y $f(i) \in X_i$ para cada $i \in I$.

Definición 3.54. Sea $(\mathbb{P}_i, \leq_i, \mathbb{1}_i)$ un forcing para cada $i \in I$. La trupla $(\prod_{i \in I} \mathbb{P}_i, \leq, \mathbb{1})$ denota un forcing cuyo pre-orden está dado por: $\vec{p} \leq \vec{q}$ si y sólo si $\vec{p}(i) \leq_i \vec{q}(i)$, para todo $i \in I$, y $\mathbb{1}$ es la función definida como $\mathbb{1}(i) = \mathbb{1}_i$ para cada $i \in I$.

Dado $\vec{p} \in \prod_{i \in I} \mathbb{P}_i$, definimos el *soporte* de $\vec{p}$ como

$$\mathrm{supp}(\vec{p}) = \{i \in I : \vec{p}(i) \neq \mathbb{1}_i\}.$$

Definición 3.55. Sea $\mathbb{P}_i$ un forcing para cada $i \in I$. Definimos su

$$\prod_{i\in I}^{\text{fin}} \mathbb{P}_i = \{\vec{p} \in \prod_{i\in I} \mathbb{P}_i : |\text{supp}(\vec{p})| < \aleph_0\}.$$

El conjunto $\prod_{i\in I}^{\text{fin}} \mathbb{P}_i$ tienen el mismo $\leq$ y $\mathbb{1}$ dados en la Definición 3.54.

El Ejemplo 3.24 caracteriza la propiedad ccc de un espacio topológico en terminos del forcing de abiertos no vacíos. El siguiente lema muestra un hecho más general.

Lema 3.56. *Sean I un conjunto finito, para cada $i \in I$, X_i un espacio topológico y definamos $X = \prod_{i\in I} X_i$ y $\mathbb{O} = \prod_{i\in I} \mathbb{O}_{X_i}$. Entonces X es ccc si y sólo si $\mathbb{O}$ es ccc.*

Demostración. Dados $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{O}$, se sigue de la definición de $\leq$ y $\leq_i$ que $\vec{p} \not\perp \vec{q}$ si y sólo si $(\prod_{i\in I} \vec{p}(i)) \cap (\prod_{i\in I} \vec{q}(i)) \neq \emptyset$. Y por tanto $\vec{p} \perp \vec{q}$ si y sólo si $(\prod_{i\in I} \vec{p}(i)) \cap (\prod_{i\in I} \vec{q}(i)) = \emptyset$. Entonces, si X es ccc y $\{\vec{p}_j : j \in J\}$ es una anticadena de $\mathbb{O}$, la familia

$$\{\prod_{i\in I} \vec{p}_j(i) : j \in J\}$$

es una familia celular de X. Lo cual implica que $|J| \leq \aleph_0$. Reciprocamente, si $\mathbb{O}$ es ccc y $\{W_j : j \in J\}$ es una familia celular de X , se sigue de la definición de topología producto de X que existen, para cada $i \in I$ y $j \in J$, un conjunto abierto no vacío U_j^i de X_i tal que

$$\prod_{i\in I} U_j^i \subseteq U_j.$$

Entonces, si definimos, para cada $j \in J$, $\vec{p}_j(i) = U_j^i$ para cada $i \in I$, tenemos que $\vec{p}_j \in \mathbb{O}$ y la colecció $\{\vec{p}_j : j \in J\}$ es una anticadena de $\mathbb{O}$, lo cual implica que $|J| \leq \aleph_0$. $\square$

Una sencilla modificación de los argumentos utilizados en el Teorema 3.9 llevan al siguiente teorema.

Teorema 3.57. *Sea $\mathbb{P}_i$ un forcing para cada $i \in I$. Si el producto $\prod_{i\in I}^{\text{fin}} \mathbb{P}_i$ no es ccc, entonces existe $J \in [I]^{<\aleph_0}$ tal que $\prod_{i\in J} \mathbb{P}_i$ no es ccc.*

Demostración. Sea $\mathbb{P} = \prod_{i\in I}^{\text{fin}} \mathbb{P}_i$. Dados dos elementos $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{P}$, se tiene que $\vec{p} \not\perp \vec{q}$ si y sólo si $\vec{p}(i) \not\perp \vec{q}(i)$ para todo $i \in \text{supp}(\vec{p}) \cap \text{supp}(\vec{q})$.
Por hipótesis podemos elegir una anticadena C de $\mathbb{P}$ de cardinalidad $\aleph_1$. Sea $S = \{\text{supp}(\vec{p}) : \vec{p} \in C\}$. Entonces S es una colección de conjuntos finitos.
Si $|S| = \aleph_1$, podemos aplicar el lema de la raíz para obtener un subconjunto de S y por tanto de C de cardinalidad $\aleph_1$, digamos C', de tal manera que el conjunto $\{\text{supp}(\vec{p}) : \vec{p} \in C'\}$ tiene cardinalidad $\aleph_1$ y forma un delta sistema con raíz J. Por lo mencionado

en el primer párrafo, podemos decir que el conjunto $\{\vec{p} \restriction J : \vec{p} \in C'\}$ es una anticadena (de cardinalidad $\aleph_1$) del forcing $\prod_{i\in J} \mathbb{P}_i$.
Por otro lado, si suponemos ahora que $|S| < \aleph_1$, entonces podemos elegir un conjunto $C' \subseteq C$ de cardinalidad $\aleph_1$ para el cual

$$\operatorname{supp}(\vec{p}) = \operatorname{supp}(\vec{q})$$

para cualesquiera $\vec{p}, \vec{q} \in C'$. Sea J el soporte de cualquier elemento de C'. Entonces por lo escrito en el primer párrafo se tiene que $\{\vec{p} \restriction J : \vec{p} \in C'\}$ forma una anticadena no numerable en el forcing $\prod_{i\in J} \mathbb{P}_i$. □

El siguiente teorema es parte clave para demostrar que el producto de dos espacios topológicos ccc es ccc.

Teorema 3.58. *Sean $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ dos forcing tales que $\mathbb{P}$ es ccc y $\aleph_1$ es un pre-calibre para $\mathbb{Q}$. Entonces $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ es ccc.*

Demostración. Supongamos que $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Entonces, $\alpha \neq \beta$ implica que $p_\alpha \perp p_\beta$ o $q_\alpha \perp q_\beta$, en otro caso podríamos encontrar $r \in \mathbb{P}$ y $s \in \mathbb{Q}$ tales que $r \leq p_\alpha$, $r \leq p_\beta$, $s \leq q_\alpha$, $s \leq q_\beta$, esto es $(r, s) \leq (p_\alpha, q_\alpha)$ y $(r, s) \leq (p_\beta, q_\beta)$. Ahora fijemos $B \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\{q_\alpha : \alpha \in B\}$ es centrado. Entonces para α, $\beta \in B$, como $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha \in B\}$ es una anticadena, $\alpha \neq \beta$ implica que $p_\alpha \perp p_\beta$, contradiciendo la ccc en $\mathbb{P}$. □

Corolario 3.59. *Sea I un conjunto finito y, para cada $i \in I$, $\mathbb{P}_i$ un forcing. Si $\aleph_1$ es un pre-calibre para $\mathbb{P}_i$ para cada $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} \mathbb{P}_i$ es ccc.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre $|I|$. Supongamos que $|I| = 2$ y sean $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ dos forcing con pre-calibre $\aleph_1$. Veamos que $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ es ccc. Como tener pre-calibre $\aleph_1$ implica ser ccc (véase Proposición 3.52), entonces $\mathbb{P}_1$ es ccc y $\mathbb{P}_2$ tiene pre-calibre $\aleph_1$. Aplicamos el Teorema 3.58 para concluir que $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ es ccc.
Supongamos que $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i$ es ccc, siempre que $\mathbb{P}_i$ tiene a $\aleph_1$ como pre-calibre. Veamos que $\prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}_i$ es ccc, si $\mathbb{P}_i$ tiene pre-calibre $\aleph_1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Basta con probar que $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i \times \mathbb{P}_{n+1}$ es ccc. Por hipótesis de inducción $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i$ es ccc y como $\mathbb{P}_{n+1}$ tiene a $\aleph_1$ como pre-calibre, por el Teorema 3.58, tenemos que $\prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}_i$ es ccc. □

Finalmente estamos listos para demostrar el teorema principal del capítulo el cual dice que bajo $MA(\aleph_1)$, la propiedad ccc se preserva bajo el producto arbitrario de espacios.

Teorema 3.60 (MA($\aleph_1$))**.**

1. *Si $\mathbb{P}_i$ es un forcing ccc para cada $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I}^{\text{fin}} \mathbb{P}_i$ es ccc.*

2. *Si X_i es un espacio topológico ccc para cada $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es ccc.*

Demostración.

1. Supongamos que $\prod_{i\in I}^{\text{fin}} \mathbb{P}_i$ no es ccc. Entonces por Teorema 3.57 existe $J \subseteq I$ finito tal que $\prod_{i\in J} \mathbb{P}_i$ no es ccc. Por otro lado, como ocurre $MA(\aleph_1)$, entonces, por el Teorema 3.53, $\mathbb{P}_i$ tiene a $\aleph_1$ como pre-calibre para cada $i \in I$. Así, $\prod_{j\in C} \mathbb{P}_j$ es ccc para todo $C \in [I]^{<\aleph_0}$, y dado que $J \in [I]^{<\aleph_0}$ tenemos que $\prod_{i\in J} \mathbb{P}_i$ es ccc lo cual es una contradicción. Por tanto $\prod_{i\in I}^{\text{fin}} \mathbb{P}_i$ es ccc.

2. Supongamos que $\prod_{i\in I} X_i$ no es ccc. Entonces por Teorema 3.9, existe $J \in [I]^{<\aleph_0}$ tal que $\prod_{i\in J} X_j$ no es ccc. Se sigue del Lema 3.56 que $\prod_{i\in J} \mathbb{O}_{X_i}$ no es ccc. Por otro lado, como cada X_i es ccc, por el Ejemplo 3.24, cada $\mathbb{O}_{X_i}$ es ccc y por el Teorema 3.53, cada $\mathbb{O}_{X_i}$ tiene a $\aleph_1$ como precalibre. En consecuencia del Corolario 3.59, $\prod_{i\in J} \mathbb{O}_{X_i}$ es ccc, lo cual es una contradicción. □

Un caso particular del teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 3.61 ($MA(\aleph_1)$)**.** *El producto de dos espacios ccc es ccc.*

La negación de la hipótesis de Suslin implica la existencia de dos espacios ccc (incluso compactos) cuyo producto no es ccc (véase Teorema 3.16). Sin embargo, por el corolario anterior $MA(\aleph_1)$ implica completamente lo contrario. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.62. *$MA(\aleph_1)$ implica la Hipótesis de Suslin*

El Teorema 3.58 muestra que el pre-calibre es una propiedad suficientemente fuerte para preservar la propiedad ccc en el producto de dos forcing. Debido a la estrecha relación que hay entre un espacio topológico y el forcing $\mathbb{O}_X$, esto lleva a pensar que debería de existir una propiedad topológica que ayude a preservar la propiedad ccc en el producto de dos espacios. Esta propiedad viene dada por la siguiente definición.

Definición 3.63. Decimos que κ es un *calibre* para un espacio topológico X si y sólo si para cualquier $U_\alpha \subseteq X$ abierto y no vacío con $\alpha < \kappa$, existe un $B \subseteq [\kappa]^\kappa$ tal que $\bigcap_{\alpha\in B} U_\alpha \neq \emptyset$.

Con esta propiedad podemos caracterizar el pre-calibre en términos de una propiedad topológica.

Teorema 3.64. *Sea X un espacio de Hausdorff y compacto. Entonces X tiene $\aleph_1$ como calibre si y sólo si $\mathbb{O}_X$ tiene $\aleph_1$ como pre-calibre.*

Demostración. Para la necesidad, sea $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{O}_X$, como p_α es un abierto no vacío, para todo $\alpha < \omega_1$ y X tiene calibre $\aleph_1$, existe $B \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\bigcap_{\alpha\in B} p_\alpha \neq \emptyset$ y dado que esta intersección esta contenida en cualquier intersección finita de elementos de $\{p_\alpha : \alpha \in B\}$, tenemos que dichas intersecciones finitas son elementos de $\mathbb{O}_X$ que son menores o iguales que cada uno de los intersectandos. Por tanto $\{p_\alpha : \alpha \in B\}$ es centrado.
Para la suficiencia, sea $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de abiertos no vacíos de X. Para cada $\alpha < \omega_1$, como X es regular podemos elegir $q_\alpha \in \mathbb{O}_X$ tal que $q_\alpha \subseteq \overline{q_\alpha} \subseteq p_\alpha$. Si $\{q_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es numerable, existe un conjunto $B \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $q_\alpha = q_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in B$. De esta manera, si fijamos $\alpha_0 \in B$, tenemos que $q_{\alpha_0} \subseteq p_\beta$ para todo $\beta \in B$ y por tanto $\bigcap_{\alpha\in B} p_\alpha \neq \emptyset$.
Ahora, supongamos que $\{q_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ no es numerable. Entonces como $\mathbb{O}_X$ tiene pre-calibre $\aleph_1$, existe $C \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\{q_\alpha : \alpha \in C\}$ es centrada y por tanto tiene la pif. En consecuencia, $\{\overline{q_\alpha} : \alpha \in C\}$ tiene la pif la cual es una familia de cerrados en X el cual es compacto. Entonces $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha\in C} \overline{q_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha\in C} p_\alpha$, y concluimos que $\{p_\alpha : \alpha \in C\}$ es la colección requerida. □

Si X es un espacio compacto y de Hausdorff con calibre $\aleph_1$, por el teorema anterior, $\mathbb{O}_X$ tiene $\aleph_1$ como precalibre y esto implica que $\mathbb{O}_X$ tiene la ccc y por tanto X es ccc. Es decir, tener a $\aleph_1$ como calibre es un fortalecimiento de la propiedad ccc en la clase de los espacios compactos y Hausdorff. Como corolario del teorema anterior tenemos lo siguiente.

Corolario 3.65. *Si X es un espacio ccc y Y es un espacio compacto, Hausdorff y con calibre $\aleph_1$, entonces $X \times Y$ tiene la ccc.*

Demostración. Por el Lema 3.56 es suficiente demostrar que $\mathbb{O}_X \times \mathbb{O}_Y$ tiene la ccc. Pero esto es inmediato del Ejemplo 3.24, Teorema 3.64 y Teorema 3.58. □

Bibliografía

[1] J.R. Munkres, *Topología*. 2^a Edición. Pearson Educación, S. A., Madrid 2002.

[2] R. Engelking, *General Topology*.Vol. 6. Berlin, Heldermann, 1989.

[3] K. Kunen, *Set Theory*, Studies in Logic, Mathematical Logic and Fundations Vol. 34, 2011.

Índice alfabético

$\aleph_0$, 11
$\aleph_1$, 11
$\in_x$, 8
κ-Baire, 62
$\mathfrak{c}$, 11
ω, 9
ω_0, 11
ω_1, 10
σ-centrado, 62
$\mathrm{st}(F, \mathcal{F})$, 24
$|A|$, 9
ínfimo, 12

acotado, 11
anticadena, 54

Baire, 25
bien ordena, 8

calibre, 68
cardinal, 9
cardinalidad, 9
ccc, 31
centrado, 62
colectivamente normal, 43
completación de un conjunto linealmente ordenado, 15
conjunto bien ordenado, 8
conjunto de todas las funciones parciales finitas, 55
conjunto finito, 9
conjunto linealmente ordenado, 12
conjunto linealmente ordenado completo, 13
conjunto no numerable, 9
conjunto numerable, 9
conjunto transitivo, 8
cota inferior, 12
cota superior, 12
cubierta, 21

delta-sistema, 50
denso, 21
denso de un linealmente ordenado, 19
denso en ninguna parte, 26
denso en un forcing, 57
dominio, 56

elementos compatibles, 54
elementos incompatibles, 54
encaje ordenado, 13
espacio métrico, 24
espacio metrizable, 24

espacio topológico, 20
espacio topológico linealmente ordenado, 28
estrella numerable, 24

familia abierta, 21
familia ajena, 21
familia casi ajena, 48
familia celular, 21
familia discreta, 42
familia independiente de funciones, 48
filtro, 58
forcing, 54

hereditariamente de Lindelöf, 22
hereditariamente metacompacto, 24
hereditariamente paracompacto, 23
hipótesis de Suslin, 52

isomorfismo, 13
isomorfos, 13

línea de Suslin, 52
Lindelöf, 22
localmente compacto, 25
localmente finita, 21
localmente finita en x, 21
localmente numerable, 21
localmente numerable en x, 21

metacompacto, 24

número natural, 9
no tiene puntos finales, 13

orden denso, 13
orden lineal, 7
orden parcial, 54
ordinal, 8
ordinal límite, 9
ordinal sucesor, 9

para-Lindelöf, 24
paracompacto, 23
pre-calibre, 64
pre-orden, 54
primera categoría, 26
propiedad de la intersección finita, 21
puntos finales de un conjunto linealmente ordenado, 13

rango, 56
refinamiento, 22
relación, 7
restricción de una función, 10

segunda categoría, 26
separable, 21
soporte, 65
sucesor, 8
supremo, 12

vecindad, 21