



UAEM

Universidad Autónoma
del Estado de México



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

“Distribución de pérdidas en la propiedad intelectual: Caso Estados Unidos, 2008-2018.”

TESINA

Para Obtener el Título De:

Licenciado en Actuaría

Presenta:

Juan Carlos Téllez Esquivel

Asesora:

Dra. en C. Annel Hurtado Jaramillo

Revisores:

M. en E.S.R.M. David Emilio Olvera Rebolledo

L. en A.F. Jaime Alberto Rangel Bernal

TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO A 20 DE AGOSTO DE 2021

Índice

I. Introducción	2
Capítulo 1. Antecedentes y conceptos de la Propiedad Intelectual	4
1.1. Antecedentes de la Propiedad Intelectual	4
1.1.1. El origen de la Propiedad Intelectual alrededor del Mundo	4
1.1.2 El origen de la Propiedad Intelectual en Estados Unidos	7
1.2. Definiciones	11
1.2.1 Conceptos Básicos.....	12
1.3 Clasificación y tipos de Propiedad Intelectual	15
Capítulo 2: Distribuciones estadísticas para el modelado de pérdidas	18
2.1 Distribuciones discretas para el modelado de la frecuencia	20
2.1.1 Distribución de Poisson	21
2.1.2 Distribución Binomial.....	23
2.1.3 Distribución Binomial Negativa.....	26
2.1.3.1 Características principales.....	27
2.2 Distribuciones continuas para el modelado de la Severidad.	28
2.2.1 Distribución Gamma.....	28
2.2.2 Distribución Lognormal.	30
2.2.3 Distribución Weibull.....	31
2.2.4 Distribución Pareto.	33
Capítulo 3: Pruebas de Bondad de Ajuste	35
3.1 Chi-Cuadrada.	39
3.1 Kolmogorov-Smirnov.....	40
3.3 Anderson-Darling.	42
Capítulo 4: Modelo estadístico y su aplicación.	44
4.1 Análisis de la base de Datos.....	45
4.2.1. Especificaciones del Modelo.	46
4.2.2. Determinación de Hipótesis.....	51
4.2.3 Ajuste del modelo.....	52
4.3. Resultados de las pruebas de bondad y ajuste.....	60
4.3.1. Prueba Chi-cuadrado.....	60
4.3.2. Pruebas K-S y A-D.....	62
II Conclusiones.	66
Anexo 1: Test de Kolmogorov-Smirnov.	68

Anexo 2: Tabla de Valores Críticos Prueba Anderson-Darling.....	69
Bibliografía	70

I. Introducción

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo principal identificar la distribución que mejor se ajuste a la Frecuencia y Severidad derivada de la base de datos de Propiedad Intelectual obtenida de Lex Machina, así como los parámetros estimados para la distribución seleccionada en cada caso. Además de identificar aquellas distribuciones que son recomendadas teóricamente y suelen emplearse en los modelos continuos de Severidad y en los discretos para la Frecuencia.

La Propiedad Intelectual es uno de los aspectos más comunes en la vida diaria, sin embargo, también es de aquellos a los que menos se les presta atención. Cualquier invento que hace nuestra vida más fácil está registrado por alguien, las marcas que observamos en la calle y en los centros comerciales pertenecen a alguien. Los libros, la música y cualquier otro bien tangible o intangible del cual una persona pueda obtener un beneficio económico deben estar regulados, y para ello la persona o entidad encargada de su desarrollo busca protegerse ante la explotación del bien por parte de un tercero, así como evitar disputas legales derivadas del uso indebido del bien.

La propiedad intelectual toma una mayor relevancia cuando su manejo es a gran escala, es decir, aquellas compañías globales que se dedican a la innovación tecnológica perderían millones de dólares si la tecnología que durante años han desarrollado fuese imitada libremente sin que exista un beneficio para el desarrollador. Por ejemplo, si la fórmula de un medicamento no pudiera protegerse de la imitación (dentro del periodo establecido) ningún laboratorio tendría la iniciativa de desarrollar innovaciones farmacéuticas, pues el beneficio económico resultaría mínimamente atractivo.

Hoy en día cualquier producto que sale de la mente de una persona es propenso de protección, cualquier desarrollo e innovación siempre que cumplan con las características necesarias. Sin embargo, existen muchas personas que buscan adueñarse de las ideas y las innovaciones de otra gente para lucrar con ellas, afectando directamente su patrimonio. Cualquier persona o entidad sabe que está expuesta a este riesgo, sin

embargo, ha sido poco explorado que tan propensa es una institución ante la materialización de este riesgo, así como los factores que pueden incrementar o disminuir su exposición. Además, el impacto económico casi nunca es evaluado hasta que se presenta el siniestro, resultando en estrategias reactivas en lugar de aquellas de planeación y mitigación.

En el capítulo 1 se abordan las cuestiones teóricas que sustentan el planteamiento. Se hace un breve repaso de los antecedentes históricos alrededor del mundo haciendo énfasis en Estados Unidos hasta llegar a la propiedad intelectual como la conocemos hoy en día, además de aquellos conceptos principales que se abordan dentro de la investigación. Este capítulo concluye haciendo un breve recuento de la clasificación y los tipos de propiedad intelectual con algunos de sus ejemplos.

Por su parte, en el capítulo 2 se estudian las distribuciones estadísticas para el modelado de pérdidas, se hace una breve mención a diversos autores, así como sus recomendaciones de distribuciones para el modelado de la frecuencia y la severidad de una cartera de reclamaciones, además, se describen algunas de las principales distribuciones con sus características principales.

A través del capítulo 3 se estudian las pruebas de bondad de ajuste, las cuales nos ayudan a identificar aquella distribución de entre las evaluadas que se ajusta de mejor manera a los datos, se analizan tres pruebas principales las cuales son la prueba Chi-Cuadrada, la Kolmogorov-Smirnov (K-S) y Anderson-Darling (A-D). Asimismo, se da a conocer el procedimiento sugerido para un adecuado uso y algunas definiciones necesarias para entender cada prueba.

En el capítulo 4 se define y aplica el método estadístico más adecuado para cumplir con el objetivo de la presente investigación. Primero, se describe la base de datos utilizada, así como el procedimiento de limpieza y las especificaciones del modelo. Posteriormente se realiza el análisis de las estadísticas obtenidas, y se pone a prueba cada grupo de hipótesis planteadas con la finalidad de obtener la distribución de probabilidad que mejor se ajuste a la frecuencia y la severidad de los montos de reclamación de propiedad intelectual. Se muestran los resultados obtenidos.

Finalmente se presentan las conclusiones. Además de los capítulos mencionados con anterioridad se incluyen dos anexos donde se muestran los valores de la prueba K-S para la distribución normal con los parámetros estimados y la tabla de valores críticos para la prueba de A-D.

Capítulo 1. Antecedentes y conceptos de la Propiedad Intelectual

A través de este capítulo se abordará una introducción al tema de la **Propiedad Intelectual (PI)**, partiendo desde sus inicios alrededor del mundo hasta llegar a como lo conocemos hoy en día en Estados Unidos, además, se plantea el objetivo de dar a conocer de manera puntual la clasificación de la propiedad intelectual. Lo anterior con la finalidad de comprender su importancia y centrarnos en los daños y perjuicios derivados de la violación que sufre un propietario por los derechos que posee frente a su creación.

1.1. Antecedentes de la Propiedad Intelectual

1.1.1. El origen de la Propiedad Intelectual alrededor del Mundo

Pedro Roffle (1987) menciona que “el sistema de la propiedad intelectual, particularmente en relación con las marcas y patentes, surgió antes de la revolución industrial, en pleno desarrollo del sistema corporativo. Las patentes eran privilegios otorgados por la corona o por los gobiernos en un marco típicamente mercantilista”, Mariano Zukerfeld (2011) menciona que primer antecedente del que se tiene registro acerca de la propiedad intelectual se dio en 1474 en la ciudad de Venecia, en la cual el senado introduce una legislación que se refiere como la primera forma de derecho de propiedad intelectual (sin usar estos significantes). A través de ésta las patentes aluden específicamente a la protección de los conocimientos.

La primera ley de la que se tiene conocimiento es el Estatuto de la Reina Ana promulgado por el Parlamento Británico en 1709, “este estatuto promovió la competencia entre editores, evitando con ello los monopolios y reconociendo en el autor al titular del derecho para autorizar la realización de copias y elegir editor. Esta ley otorgaba a los editores el privilegio de producir y distribuir obras durante un periodo de tiempo. Pasado este lapso,

el autor podía elegir otro, pero su obra tenía que estar registrada para proceder por daños y perjuicios en contra de un supuesto infractor” (López y Estrada, 2007).

IP Procure (2020) menciona que el convenio de París es un tratado firmado por Bélgica, Brasil, España, Francia, Italia, Países Bajos, Portugal y Suiza en el año de 1883 para la protección de la propiedad industrial, actualmente 177 países aún continúan siendo parte de este tratado. El convenio es aplicable a la propiedad industrial en su sentido más amplio, además de incluir las patentes, marcas de servicios y productos, dibujos y modelos industriales, así como indicaciones geográficas (denominaciones de origen) y la represión de la competencia desleal (WIPO, 2019). Según la *World Intellectual Property Organization* (WIPO) las disposiciones fundamentales del convenio se pueden catalogar en tres categorías principales: I) Trato Nacional, II) Derecho de Prioridad y III) Normas comunes.

El **Trato Nacional** establece, con respecto a la protección de la propiedad industrial que, “los Estados Contratantes deberán conceder a los nacionales de los demás Estados Contratantes la misma protección que concede a sus propios nacionales. También tendrán derecho a esa protección los nacionales de los Estados que no sean contratantes, siempre que estén domiciliados o tengan establecimiento industrial o comercial efectivo y serio en un Estado Contratante” (WIPO, 2020). El **Derecho de Prioridad**, en relación con las patentes, modelos y marcas que existan establece que se respetará la primera solicitud de patente de invención o registro que sea presentada en uno de los estados contratantes, por lo cual, el solicitante podrá solicitar protección en cualquiera de los demás estados contratantes por un periodo de tiempo determinado. Por último, en relación con las **Norma comunes** y por efectos de la presente investigación solo mencionaremos a) En relación con las Patentes: éstas son concedidas en diferentes Estados Contratantes y son independientes entre si aunque sean para la misma invención, ya que, la concesión en un estado no obliga a los demás a conceder la misma, además cualquier patente no se podrá considerar como denegada, anulada o caduca por el hecho de haber sido negada, anulada o caduca en otro Estado. b) En relación con las Marcas: el convenio no fija las condiciones de presentación y registro de las marcas. “En consecuencia, no se podrá rechazar la solicitud de registro de una marca presentada por un ciudadano de un Estado Contratante, ni se podrá invalidar el registro, por el hecho de

que no hubiera sido presentada, registrada o renovada en el país de origen. Una vez obtenido el registro de la marca en el Estado Contratante, esta se considera independiente de las marcas que, en su caso, se hayan registrado en otro país, incluido el propio país de origen; por consiguiente, la caducidad o anulación del registro de la marca en un Estado Contratante no afecta a la validez de los registros en los demás Estados Contratantes” (Barragan, 2018).

Otro de los antecedentes destacados dentro de la Propiedad Intelectual es el Convenio de Berna para la protección de las obras literarias, el cual fue firmado el 9 de septiembre de 1886 y hoy en día sigue amparando a los autores con el fin de que conserven el privilegio de controlar cada una de sus obras científicas, artísticas o literarias, así como el derecho a una remuneración por el uso de éstas. El convenio, además, otorgo en su momento una visión diferente acerca del derecho de autor y provocó que diversos países reformaran o adicionaran leyes para proteger a los autores (López y Estrada, 2007).

La WIPO es una organización mundial que fue fundada en el año de 1893 al fusionar las dos secretarías encargadas de administrar los Convenios de París y Berna, lo cual dio origen a la entidad precursora de la WIPO llamada Oficinas Internacionales Reunidas para la Protección de la Propiedad Intelectual (BIRPI por sus siglas en francés). Posteriormente en 1970 al entrar en vigor el Convenio que establece a la Organización mundial de la Propiedad Intelectual, las BIRPI se convierten en una nueva organización intergubernamental, la WIPO, con sede en Suiza, la cual cuatro años después ingresaría a la familia de Organizaciones de las Naciones Unidas en calidad de organismo especializado (WIPO, 2020).

El Sistema Internacional de patentes comienza a laborar en 1978 gracias a la puesta en marcha del Tratado de Cooperación en materia de Patentes (PCT), el cual proporciona asistencia a cualquier solicitante que busque protección internacional por patente ante sus invenciones, dicho tratado actualmente cuenta con 153 países afiliados siendo Estados Unidos uno de los primeros miembros. “Se trata esencialmente de un tratado destinado a racionalizar y a poner bajo el signo de la cooperación, la presentación de solicitudes de patente, la búsqueda y el examen, así como la divulgación de la información técnica contenida en las solicitudes, (...), no entra en competencia con el Convenio de

París, sino que lo complementa. En realidad, se trata de un acuerdo especial concertado en el marco del Convenio de París y que sólo está abierto a los Estados que ya son parte en dicho Convenio” (INAPI, 2020a).

1.1.2 El origen de la Propiedad Intelectual en Estados Unidos

The Association of research libraries menciona que la historia estadounidense de la propiedad intelectual comienza a finales del siglo XV, con la introducción de la imprenta en Inglaterra, lo anterior derivó en un gran número de imprentas, por lo cual las autoridades buscaron controlar las publicaciones de libros al otorgar a los impresores casi un monopolio sobre las publicaciones in Inglaterra. *The Licensing Act* de 1662 confirmó y estableció un registro de libros con licencia para ser administrados por *Stationers’ Company*, el cual era un grupo de impresores con autoridad suficiente para censurar publicaciones, *the Licensing Act* expiró en 1695 lo que significó una reducción en la censura gubernamental de obras literarias (ARL, 2017).

El estatuto de Monopolios (aprobado en 1624) fue una ley del parlamento de Inglaterra, destacada como la primera expresión legal de la ley de patentes, las patentes evolucionaron a partir de cartas de patentes, emitidas por el monarca para otorgar monopolios sobre industrias particulares a individuos calificados con nuevas técnicas. Se utilizó el sistema ampliamente, emitiendo patentes para productos comunes como el almidón y la sal (ARL, 2017).

Según diversos autores el primer antecedente conocido en Estados Unidos se dio en la Corte General de Massachusetts en 1641, en la cual se le otorgó la primera patente en el continente americano a Samuel Winslow por un método para producir sal.

Cuando el Parlamento británico promulgó *The Statute of Anne* fue para abordar lagunas de las principales preocupaciones de las imprentas. Esta ley estableció los principios para la propiedad de los autores y sus derechos, además fijó un periodo de protección a las obras protegidas por el derecho de autor, el cual era de 14 años y se podía renovar por un plazo idéntico si el autor seguía con vida al expirar el periodo, con lo cual se evitó un monopolio por parte de los librereros y se creó un dominio público para la literatura. (ARL, 2017).

IP Legal Services describe que la primera Ley de Patentes en EU se aprobó en 1790 para permitir que los ciudadanos registraran sus patentes además menciona que la primera patente otorgada en los estados unidos fue otorgada el 31 de julio de 1790 a Samuel Hopkins por un invento titulado “Fabricación de ceniza de olla y ceniza de perla mediante un nuevo aparato y proceso”. El Secretario de Estado Thomas Jefferson modificó la Ley de Patentes en 1793, y definió una patente como "cualquier arte, máquina, fabricación o composición de materia nueva y útil y cualquier mejora nueva y útil en cualquier arte, máquina, fabricación o composición de materia”.

Durante 1769 apareció la terminología de propiedad intelectual en la revista *Monthly Review*, dentro del contexto de una simple frase. En el mes de octubre de 1845, la terminología referida a la propiedad intelectual fue recogida por el Tribunal del Distrito de Massachusetts en el caso Davoll, al establecer que "la propiedad intelectual protege los trabajos fruto del intelecto, del mismo modo como si se tratara de la propiedad del cultivo de trigo que produce su finca o del ganado que padece en sus terrenos" (Virguri, 2016).

En 1831 se dio la revisión de *The Copyright Act*, en la cual el plazo de protección de los derechos de autor, así como sus obras se extendió de catorce a veintiocho años con una posible prolongación de catorce años al término de la primera etapa. En años posteriores también se realizaron revisiones, sin embargo, no todas han sido significativas. Durante la revisión de 1909 el proyecto de ley amplió el alcance de las categorías protegidas para incluir todas las obras de autoría y extendió el plazo de protección a veintiocho años con una posible renovación del plazo idéntica, mencionando lo siguiente: “El principal objetivo que se desea al expandir la protección de derechos de autor otorgada a la música ha sido darle al compositor un rendimiento adecuado por el valor de su composición, y ha sido una tarea seria y difícil combinar la protección del compositor con la protección de al público, y para enmarcar un acto que logre el doble propósito de asegurar al compositor un retorno adecuado por todo el uso que se haga de su composición y al mismo tiempo evitar la formación de monopolios opresivos, que podrían basarse en los mismos derechos otorgados al compositor con el propósito de proteger sus intereses ” (ARL, 2017).

Casi setenta años después de la última revisión a *The Copyright Act* un nuevo cambio se hizo presente, la revisión de 1976 se realizó teniendo en cuenta dos razones principales, “I) Los desarrollos tecnológicos y su impacto en lo que podría estar protegido por derechos de autor, cómo se podrían copiar los trabajos y qué constituía una infracción que debía abordarse, II) La revisión se llevó a cabo en anticipación de la adhesión a la Convención de Berna por parte de los EE. UU. Se consideró que el estatuto debía modificarse para que los EE. UU. estuvieran de acuerdo con las leyes, prácticas y políticas internacionales de derechos de autor” (ARL, 2017). Esta ley fue un avance significativo dentro de los derechos de autor anteriores y extendió el plazo de protección a la vida del autor 50 años más, además, proporcionó cobertura en las siguientes áreas: alcance y tema de las obras cubiertas, derechos exclusivos, término de derechos de autor, aviso de derechos de autor y registro de derechos de autor, infracción de derechos de autor, uso justo y defensas y remedios a la infracción. Este mismo año se creó la Comisión Nacional sobre Nuevos Usos Tecnológicos de Obras con Derecho de Autor (CONTU), la cual tuvo como objetivo establecer *the minimum standards of educational fair use*, estas pautas ayudaron a los propietarios de los derechos de autor a entender la cantidad de fotocopias permitidas a una obra. La última gran extensión del copyright se dio en 1999 ampliando los derechos a más de 70 años de la vida del autor (ARL, 2017).

Los delegados de 160 países consideraron dos tratados sobre derecho internacional de PI durante una Conferencia Diplomática convocada 1996 en Suiza. Los delegados adoptaron nuevas versiones de los tratados propuestos, lo que derivó en un nuevo enfoque de los problemas de *Copyright*. La Conferencia estableció una declaración asegurando que los dos tratados "permitirían la aplicación del uso justo en el entorno digital". Adicionalmente en el lenguaje del tratado se enfatizó "la necesidad de mantener un equilibrio entre los derechos de los autores y el interés público más amplio, particularmente la educación, la investigación y el acceso a la información".

Uno de los acontecimientos más recientes relacionado con la Propiedad Intelectual es la creación de la Ley de Derechos de Autor del Milenio Digital la cual surgió en 1998, cuando el entonces presidente de los Estados Unidos Bill Clinton firmó *The Digital Millennium Copyright Act* (DMCA por sus siglas en inglés) el 28 de octubre. “Los cinco títulos de la ley implementaron los Tratados de Internet de la WIPO; puertos seguros establecidos

para proveedores de servicios en línea; copias temporales permitidas de programas durante el mantenimiento de la computadora; realizó enmiendas diversas a la Ley de Derecho de Autor, incluidas enmiendas que facilitaron la transmisión por Internet; y creó protección *sui generis* para diseños de cascos de barcos. Una conferencia de la Cámara-Senado omitió un título controvertido que establece la protección de la base de datos” (ARL, 2017).

En 2006, la Biblioteca del Congreso de EU anunció que seis clases de obras quedarían exentas de la prohibición de eludir las medidas de protección tecnológica, “1) Obras audiovisuales incluidas en la biblioteca educativa del departamento de estudios de cine o medios de comunicación de un colegio o universidad con fines educativos, uso en el aula por medios o profesores de cine; 2) Programas de computadora y videojuegos distribuidos en formatos que se han vuelto obsoletos con el propósito de preservarlos o reproducirlos en una biblioteca o archivo; 3) Programas de computadora protegidos por *dongles* que impiden el acceso debido a mal funcionamiento o daños y que son obsoletos; 4) Obras literarias distribuidas en formato de libro electrónico cuando todas las ediciones existentes de la obra contienen controles de acceso que impiden la representación del texto en formatos especializados; 5) Programas de computadora en forma de *firmware* que permiten que los teléfonos inalámbricos se conecten a una red de comunicación telefónica inalámbrica; 6) Grabaciones sonoras y obras audiovisuales asociadas con esas grabaciones sonoras, distribuidas en formato de disco compacto y protegidas por medidas de protección tecnológica con el fin de probar de buena fe o corregir tales fallas o vulnerabilidades de seguridad.” Estas exenciones permanecerían vigentes hasta 2009 (U.S. Copyright Office, 2018).

En diciembre del 2008, el presidente George W. Bush firmó la Ley PRO-IP. La cual fue diseñada para fortalecer la protección de los titulares de derechos y endurecer las sanciones por falsificación e infracción de los derechos de PI. La Ley PRO estableció que un registro no es un requisito previo para enjuiciar penalmente por infracción de derechos de autor.

Uno de los últimos acontecimientos relevantes dentro de la Propiedad Intelectual ocurrió en durante el 2011, desde el 2008 el Comité Permanente de Derechos de Autor y

Derechos Conexos de la WIPO debatió las limitaciones y excepciones para bibliotecas y archivos, junto con las limitaciones y excepciones para instituciones educativas y de investigación. En noviembre de 2011, se convocó una reunión especial y se acordó la formación de "grupos" de temas para el debate, incluida la preservación, el derecho de reproducción, el depósito legal, el préstamo de la biblioteca, la importación paralela, los usos transfronterizos, los trabajos huérfanos, la responsabilidad, la tecnología medidas de protección y contratos (ARL, 2017).

1.2. Definiciones

Debido a la naturaleza misma de la propiedad intelectual surge la necesidad de protegerse frente al riesgo que inherentemente conlleva, ya que, como se abordó en el apartado anterior a lo largo de la historia se ha buscado proteger la creación de cada autor, tanto del plagio como en el apartado económico, para así asegurar el bienestar del autor.

La OMPI (2020a) define a la Propiedad Intelectual como aquello que se relaciona con las creaciones de la mente, es decir, invenciones, obras literarias y artísticas, así como símbolos, nombres e imágenes utilizados de forma comercial. La PI se divide en dos grandes áreas La Propiedad Industrial y El Derecho de Autor. Visto desde el punto de vista jurídico la Propiedad Intelectual puede considerarse como la disciplina jurídica que protege a las creaciones originales expresadas por cualquier medio o soporte, y que, desde el momento de registro, el autor y los sucesivos reciben plena protección de la Ley.

A título personal, la Propiedad Intelectual es todo aquello relacionado a la protección, y que es inherente la creación, de cualquier idea que surja, así como el manejo de la misma para evitar monopolios y un escaso acceso al conocimiento, además de proveer seguridad financiera y evitar plagio. Por lo anterior es normal que las leyes sean cada vez más completas en términos de protección al autor y que las disputas derivadas de litigios sean cada vez más frecuentes, pues cada empresa/autor busca fervientemente proteger su patrimonio.

1.2.1 Conceptos Básicos

Para comprender de una manera más sólida que es la Propiedad Intelectual, así como los términos que derivan de las litigaciones a continuación se encontrarán algunos conceptos básicos definidos por diversas instituciones dedicadas a la protección de la propiedad intelectual entre las que destacan: el INAPI, la WIPO, la UDC, USPTO (2020) etc.

La Propiedad Intelectual (PI) es una rama del derecho que busca fomentar la innovación, la creación y la transferencia tecnológica además de ordenar los mercados facilitando la toma de decisiones por el público consumidor.

Dentro de la PI se protege el **Derecho de Autor** o **Copyright** el cual se refiere a todos los derechos que presentan los creadores (los cuales son irrenunciables e inalienables) sobre sus obras literarias y artísticas, algunos ejemplos son los libros, la música, la pintura, dibujos técnicos y anuncios publicitarios. **El Derecho moral o personal** dentro de la PI se refiere al derecho de reconocimiento de autoría y de integridad, es decir, el respeto que se debe mantener a la obra y a cada uno de sus elementos, lo cual impide que la obra sea recortada o manipulada. Mientras que **el Derecho Económico o patrimonial** se refiere a aquellos que permiten al autor obtener una compensación monetaria por el uso que hace de sus obras cualquier tercero, como lo son la reproducción, distribución, transformación y remuneración lo cual se conoce también como compensación por copia privada. **El Derecho de Explotación por su parte** es aquel en el cual el autor es el titular, pero puede ceder total o parcialmente estos derechos a un tercero, por ejemplo, un editor. Por consiguiente, no cualquier persona puede explotar dicha obra y es aquí donde las demandas por el uso no autorizado representan fuertes cantidades de dinero derivadas de disputas legales (OMPI, 2020b).

Algunas de las obras que se encuentran protegidas por la ley son las creaciones originales literarias, artísticas o científicas expresadas en cualquier medio, tales como libros, escritos, composiciones musicales, obras dramáticas, coreografías, obras audiovisuales, esculturas, obras pictóricas, planos, maquetas, mapas, fotografías, programas de ordenador y bases de datos. También protege las interpretaciones

artísticas, fonogramas, grabaciones audiovisuales y las emisiones radiofónicas. Por otro lado, existen creaciones que no son sujetas a protección como las ideas, procedimientos u operaciones matemáticas, tampoco están protegidas las noticias del día ni los sucesos que tengan carácter de simples informaciones de prensa, además, existe un tipo de obra que no está sujeta a protección, conocida como **Obra de Dominio Público**, que es cuando los derechos de explotación se extinguen por el paso de un plazo de tiempo establecido generalmente 70 años después de la muerte del autor/a u 80 años si murió antes de 1987, estas obras se pueden utilizar sin necesidad de solicitar autorización al autor, siempre que se respete la integridad y se mencione la autoría.

Las **Licencias** son el conjunto de condiciones que establece el autor en relación con la forma y manera en que su obra puede ser utilizada, estas pueden ser abiertas o cerradas, según lo defina su autor (OMPI, 2020b).

Mientras que las **Patentes** son un derecho exclusivo que se concede sobre una invención. Es un derecho exclusivo que se concede sobre un producto o un proceso que, ofrece una nueva manera de hacer algo o una nueva solución técnica a un problema. Para obtener una patente, hay que presentar una solicitud en la que se divulgue públicamente información técnica acerca de la invención. Cuando vence la patente, normalmente después de 20 años, finaliza la protección conferida y la invención pasa al dominio público; en otras palabras, la invención se puede explotar comercialmente sin infringir la patente.

Trademark o **Marca Registrada** es una palabra, frase, símbolo y/o diseño que identifica y distingue la fuente de los productos contra cualquier otra. Algunos ejemplos incluyen marcas, eslóganes y logotipos. El término “marca registrada” se usa a menudo en un sentido general para referirse tanto a marcas registradas como a marcas de servicio. A diferencia de las patentes y los derechos de autor, las marcas comerciales no caducan después de un período de años establecido (PAREDRO, 2015).

Al momento de hablar de propiedad intelectual existen dos organizaciones relevantes, la primera es **World Intellectual Property Organization** (WIPO), que es el foro mundial en lo que refiere a servicios, políticas, cooperación e información en materia de propiedad

intelectual, y Tipos de Propiedad Intelectual. La segunda **United States Patent and Trademark Office** (USPTO) la cual es una agencia del Departamento de Comercio de Estados Unidos que otorga patentes a los inventores y las empresas para sus inventos, y registro de marcas para la identificación de cada producto y propiedad intelectual. (USPTO, 2020).

Debido a la naturaleza de la PI y por el enfoque del presente trabajo es importante mencionar que una compañía puede afrontar diversas reclamaciones en un periodo dado, y, por consiguiente, se ve obligada a cubrir una indemnización si el litigio resulta desfavorable, estos montos pueden afectar significativamente las finanzas de la compañía por lo que resulta relevante explicar dos conceptos. El primero es la frecuencia del evento que es la relación entre el número de reclamos y una base de exposición, la cual suele representarse como:

$$Frecuencia = \frac{N^{\circ} \text{ de siniestros}}{Expuestos}$$

El segundo concepto es la Severidad la cual puede describirse como el costo promedio por reclamación:

$$Severidad = \frac{\text{Costo de los siniestros}}{N^{\circ} \text{ de siniestros}}$$

Por otro lado, una demanda o litigio es la petición o solicitud de algo, especialmente si consiste en una exigencia o se considera un derecho, esencialmente se define como un conflicto entre dos partes las cuales poseen intereses contrapuestos.

Cada empresa tiene un nivel de riesgo diferente de acuerdo a su industria la cual podemos definir como una actividad económica y técnica que consiste en transformar las materias primas hasta convertirlas en productos adecuados para satisfacer las necesidades del hombre.

1.3 Clasificación y tipos de Propiedad Intelectual

La WIPO (2019) y el Instituto Mexicano de Propiedad Intelectual (IMPI, 2019) establecen una clasificación de la propiedad Intelectual en dos grandes campos,

- I. Propiedad Industrial: Es el conjunto de derechos que posee una persona física o jurídica sobre una invención, un diseño industrial o algún signo distintivo. Estos derechos se consideran bienes intangibles que forman parte de los activos fijos del titular, además, son bienes susceptibles de cesión a través de licencias. La propiedad Industrial protege de terceros que pretendan beneficiarse sin previo consentimiento del titular.

Según Grillo (2011) la Propiedad Industrial a su vez se divide en:

- a) Inventiones o Patentes, abarcan las patentes de invención, modelos de utilidad, diseños industriales y los esquemas de circuitos integrados.
 - i) Patentes de Invención: son títulos de propiedad otorgados por la autoridad competente, protegen toda creación que permita transformar la materia o energía que existe en la naturaleza y que se enfoca en el aprovechamiento y satisfacción de necesidades para el hombre. Estas patentes otorgan a su titular el derecho de impedir que terceros fabriquen, vendan y/o utilicen la invención en el comercio.
 - ii) Modelo de Utilidad: Son aquellos que protegen los objetos, aparatos o herramientas que, como resultado de una modificación en su configuración, disposición, estructura o forma, presentan una función diferente respecto al de las partes que lo integran, o añaden ventajas en cuanto a su utilidad. El modelo industrial debe cumplir con dos requisitos esenciales los cuales son novedad y aplicación industrial.
 - iii) Esquemas de Trazado de Circuitos Integrados: Es un producto que en su forma los elementos de mismo se encuentren en fase intermedia o final, y en la cual por lo menos uno de los elementos sea el activo y las conexiones formen parte del cuerpo o superficie del conductor. Estos esquemas están destinados a realizar una función electrónica.

- iv) Diseños o Modelos Industriales: Son todas las formas externas o que comprenden la apariencia estética de un producto que resulte de la combinación de líneas y colores, su protección no recae sobre el efecto técnico o funcional del producto. Esta protección impide que terceros sin autorización fabriquen, importen o utilicen comercialmente productos que incorporen o reproduzcan la forma del objeto protegido.
- b) Signos distintivos, son aquellos que tienen la capacidad de identificar productos y servicios dentro del mercado, y hacer diferencia con otros que pudieran ser similares. Para el titular son un medio para acercarse a los consumidores, valorar la empresa y la marca, además de evitar confusiones respecto a sus competidores comprende todo lo relacionado a:
- i) Marcas: Es todo signo visible que distinga productos o servicios de otros de su misma especie o clase dentro del mercado. Son susceptibles de registro aquellas denominaciones y/o figuras visibles que sean lo suficientemente distintivas (por ejemplo, Levi's, Apple, Pepsi). Una marca puede ser Normativa (aquellas conformadas únicamente por expresiones), figurativas (compuestas solo por elementos gráficos), mixtas, tridimensionales (aquellas que resultan de un cuerpo tridimensional, como una botella o un empaque), descriptivas, denominaciones geográficas, etc.
 - ii) Nombre comercial: Es cualquier denominación la cual tiene por objetivo distinguir una empresa o establecimiento industrial, comercial o de servicios dentro de una zona geográfica específica. La protección del nombre comercial abarcará la zona de demanda efectiva de la empresa y se extenderá de forma masiva y constante en el ámbito nacional o internacional según corresponda.
 - iii) Aviso comercial: Son aquellas frases u oraciones que tienen por objeto anunciar un producto o servicio, un establecimiento o negociaciones comerciales, industriales o de servicios, y que, para distinguirlos de sus similares, se adquieren mediante un registro.

II. Derecho de Autor, otorgan al propietario el derecho exclusivo sobre el uso de la obra. Cuando alguien crea una obra original fija en un medio tangible, automáticamente se convierte en el propietario de los derechos de autor de dicha obra. Abarca todas las obras literarias y los diseños arquitectónicos y los derechos conexos.

a) Obras literarias: Es una creación que realiza un escritor con el objetivo de transmitir una idea a través de una escritura con determinada estética. Las obras pueden ser de ficción o de no ficción, algunas obras que ampara el derecho de autor son:

- i. Novelas
- ii. Poemas
- iii. Obras de teatro
- iv. Documentos de Referencia
- v. Periódicos
- vi. Bases de Datos
- vii. Películas
- viii. Composiciones musicales
- ix. Dibujos
- x. Fotografías
- xi. Diseños arquitectónicos

b) Derechos Conexos: son aquellos que brindan protección a quienes, sin ser autores, contribuyen con creatividad, técnica y/u organización, en el proceso de poner a disposición del público una obra. Derivan directamente del derecho de autor y se encuentran ampliamente relacionados, engloban, además de los derechos correspondientes a los artistas, intérpretes o ejecutantes, los relativos a los productores de fonogramas y grabaciones audiovisuales, a las entidades de radiodifusión, a los realizadores de meras fotografías y a los editores de determinadas obras. El factor común entre ellos es el de estar vinculados en la mayoría de los casos con una obra intelectual preexistente y significar una actividad de mediación entre la obra y el público.

La protección por derecho de autor y derechos conexos es un componente esencial en el fomento de la creatividad e innovación. Ofrecer a los autores, artistas y creadores incentivos en forma de reconocimiento y retribución económica alienta a conseguir mejores resultados. Al garantizarse el amparo de los derechos, las personas y las empresas pueden invertir más fácilmente y con mayor confianza en la creación, el desarrollo y la difusión a escala mundial de las obras; a su vez contribuye a facilitar el acceso y a enriquecer la cultura, los conocimientos y las actividades recreativas en todo el mundo, y estimula el desarrollo económico y social.

Los Derechos inherentes a la propiedad intelectual como los conocemos hoy en día han sido el resultado de una larga lucha de autores, artistas y empresas que han buscado fervientemente la protección y remuneración económica derivada de sus creaciones, además de ser esto último uno de los principales motivos para la creación de obras literarias o la innovación de algún diseño o producto. Los esfuerzos históricos enfocados en la protección de la autoría dieron como fruto una organización internacional conocida como la WIPO, la cual se esfuerza en desarrollar un sistema de PI internacional que recompense la creatividad y fomente la difusión del conocimiento y el desarrollo tecnológico. Cada día existen nuevos avances relacionados a la protección y difusión de cualquier obra que contemplan los derechos de autor y las patentes, por lo que actualmente resulta sumamente lucrativo ser el creador de una nueva obra, aunque eso signifique estar expuesto al plagio o imitación que tanto se desea eliminar.

Capítulo 2: Distribuciones estadísticas para el modelado de pérdidas

En este apartado se abordarán aquellas distribuciones que con frecuencia son utilizadas para el cálculo y modelado de la frecuencia y la severidad en el ámbito de pérdidas, se abordarán tanto distribuciones discretas como continuas con la finalidad de encontrar aquella que se ajuste de mejor manera a los datos obtenidos de LexMachina (compañía de investigación de litigios de propiedad intelectual, que desarrolla datos y *software* de análisis legal), con base en la literatura de análisis de montos de siniestros el enfoque de

la presente investigación se centrará en aquellas distribuciones que han demostrado ajustarse teóricamente a este tipo de datos.

Omari *et al.*, (2018) en su artículo “*Modeling the Frequency and severity of Auto insurance Claims using statistical Distributions*” mencionan que la mayoría de las empresas aseguradoras basan sus estimaciones de frecuencia y severidad en su información histórica de reclamaciones; sin embargo, cuando una compañía carece de información histórica es posible recurrir al uso de los *Benchmarks*¹ por industria, línea de negocio o aquellos en los cuales se encuentren las características del producto que se desea analizar. Omari *et al.* también mencionan que los resultados empíricos indican que es mejor usar una distribución de colas pesadas para modelar la severidad de una cartera de reclamaciones, hacen referencia a la distribución Log-normal como la mejor distribución para el modelaje del tamaño de una reclamación, mientras que la binomial negativa y la geométrica son mejores para ajustar el comportamiento de la frecuencia. Fontnouvelle *et al.* (2007) resaltan a las distribuciones Poisson y Binomial negativa para estimar el número de pérdidas en un determinado periodo de tiempo (usualmente un año), además resaltan que es posible utilizar la simulación Monte Carlo para combinar distribuciones de frecuencia y severidad con el fin de obtener un estimador de la distribución total anual de pérdidas operativas y que los cuantiles de la distribución agregada de pérdida se interpretan como una estimación económica del riesgo operacional.

Arbelaéz (2008), por su parte, modela el número de reclamaciones y el monto de la pérdida usando distribuciones Log Normal o Weibull para la severidad y Poisson, binomial o binomial negativa para el cálculo de frecuencia. Este autor también menciona que es necesario realizar pruebas de bondad de ajuste a los resultados obtenidos de las distribuciones, resaltando entre estas las pruebas Chi-cuadrada, Anderson Darling (A-D) y Kolmogorov-Smirnov (K-S).

Según Gilenko y Mironova (2017) el modelado de la severidad de las reclamaciones puede llevarse a cabo mediante el uso de varios modelos posibles que difieren en sus

¹ *Benchmark*: punto de referencia con el que se puede comparar o evaluar cualquier cosa.

supuestos sobre la distribución de las reclamaciones. Dichas distribuciones son la distribución de Poisson y la distribución Gamma. Cabe señalar que una distribución de severidad de reclamo implica valores continuos positivos. Además, la distribución de la gravedad de los reclamos debe estar sesgada, ya que los reclamos grandes generalmente no son frecuentes (por ejemplo, en los seguros por desastres naturales), mientras que un mayor número de reclamos relativamente pequeños es común encontrar este comportamiento (por ejemplo, en seguros de automóviles). Por lo tanto, como generalmente se supone en la literatura, el costo de un reclamo individual tiene a la distribución Gamma con función de densidad de probabilidad.

Como resultado de la revisión de literatura realizada resulta notorio el hecho de que entre todas las distribuciones continuas y discretas sobresalen algunas por los resultados obtenidos empíricamente. Para modelar la frecuencia se utiliza una distribución discreta, las principales son la Poisson, la Binomial y la Binomial negativa. La distribución de Poisson se utiliza con variables aleatorias, las cuales podemos ejemplificar como el número de reclamaciones en un periodo de tiempo establecido. En el caso de las reclamaciones a una empresa relacionadas con la propiedad Intelectual, podemos definir nuestra variable como el número reclamaciones (juicios o demandas) que se presentan en contra de la entidad.

Por el contrario, para ajustar el monto de las reclamaciones (severidad) se utilizan distribuciones continuas como la Log-Normal, Gamma, Pareto y Weibull. Todas estas distribuciones poseen una característica en común, y es el hecho de que están sesgadas por la derecha debido a que la distribución de los reclamos suele ser de colas pesadas, es decir, se tiene una mayor probabilidad ante reclamaciones de bajo costo y conforme incrementa el costo de la reclamación decrece la probabilidad de este.

2.1 Distribuciones discretas para el modelado de la frecuencia

De acuerdo con la literatura explorada y a experiencia previa es conocido que la variable frecuencia adopta valores enteros no negativos, por lo cual las distribuciones discretas resultan la mejor opción. A continuación, se explorarán las principales distribuciones discretas usadas en el modelado de la frecuencia de siniestros, las cuales son:

- Distribución Binomial
- Distribución Binomial negativa
- Distribución Poisson

La frecuencia puede definirse de forma simple como el número de veces que se repite un suceso en un determinado periodo, Quishpe (2015) declara a la frecuencia como una variable aleatoria discreta y una medida de la tasa de reclamaciones o eventos, además su análisis sirve para identificar tendencias, por ejemplo, el número promedio de reclamaciones por sector es único, las cifras para *Information Technology (IT)* son mucho más altas que para los sector *Energy* o *Utilities*, lo cual resulta palpable si se toma en cuenta el número de patentes que se solicitan en cada sector. De esta manera empresas que pertenecen a un sector en específico y que no cuentan con información previa de reclamaciones, pueden tener una idea más clara de su posición a través de la frecuencia de empresas similares.

A continuación, en la Tabla 1 se muestra el número de reclamaciones presentadas en cada año para cada uno de los Sectores analizados.

Tabla 1. Número de Reclamaciones por Sector

Sectores	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	Total
Consumer Discretionary	299	322	310	430	750	757	648	650	590	544	60	5360
Consumer Staples	49	59	55	48	82	83	59	75	42	53	7	612
Energy	5	12	17	15	23	25	16	46	9	18	0	186
Financials	38	33	36	49	92	120	51	99	35	59	0	612
Health Care	129	135	162	170	178	162	216	217	167	209	37	1782
Industrials	74	89	77	115	139	135	122	157	93	92	11	1104
Information Technology	255	260	257	297	570	640	534	505	455	471	81	4325
Materials	24	25	22	14	23	25	32	39	26	22	3	255
Real Estate	2	1	2	8	9	4	8	13	4	3	2	56
Telecommunication Services	24	32	22	60	88	86	69	63	45	29	3	521
Utilities	1	6	4	11	7	3	10	20	11	10	2	85
Total	900	974	964	1217	1961	2040	1765	1884	1477	1510	206	14898

Fuente:Elaboración Propia

2.1.1 Distribución de Poisson

La distribución de Poisson es considerada la más importante entre las distribuciones de variables discretas, el nombre de esta distribución es en honor a Simeón Denis Poisson,

quien fue un probabilista francés, él fue el pionero en describirla en 1838 en su trabajo “*Recherches sur la Probabilité des Jugements en matières criminelles et matière civile*”, sus principales aplicaciones hacen referencia a la modelación de situaciones en las que nos interesa determinar el número de hechos de cierto tipo que se pueden producir en un intervalo de tiempo o de espacio, bajo supuestos de aleatoriedad y ciertas circunstancias restrictivas. Esta distribución es de tipo discreta y resulta muy útil ya que representa el número de eventos independientes que ocurren a una velocidad constante, es el principal modelo de probabilidad empleado para analizar problemas de línea de espera, y también ofrece una aproximación a la Función de Probabilidad Binomial cuando p es pequeño y n es grande (Mendenhall, Wakerly, & Scheaffer, 2008).

Matemáticamente podemos declararla como:

Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante sobre el tiempo o el espacio. Se deduce que la variable aleatoria X tiene una distribución Poisson con función de probabilidad:

$$p(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0 \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

En donde:

λ es el número de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo o espacio. Para valores positivos, λ define una familia de distribuciones con una función de probabilidad determinada.

Algunas de las propiedades importantes de la distribución de Poisson se presentan en la Tabla 2 a continuación:

Tabla 2. Propiedades (Distribución de Poisson)

NOMBRE	FÓRMULA
Función de Distribución Acumulada	$P(X \leq x) = F(x; \lambda) = \sum_{i=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$
Media	$E(x) = \lambda$
Varianza	$\sigma_x^2 = \lambda$
Moda	$[\lambda] - 1$
Mediana	Aproximadamente: $\left[\lambda + \frac{1}{3} - \frac{0.02}{\lambda} \right]$
Coeficiente de Asimetría	$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\frac{\mu_2^2}{\mu_2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donde μ_2 y μ_3 son el segundo y tercer momento respectivamente
FGM (Función Generadora de Momentos)	$m_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Fuente:Elaboración Propia

Algunas de las características principales de esta distribución son que el valor de la media y la varianza son iguales (λ), el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o región es independiente del número que ocurren en cualquier otro intervalo, además, la probabilidad de que un resultado muy pequeño ocurra en un intervalo de tiempo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo.

Algunas de los principales ejemplos y aplicaciones para esta distribución son el número de clientes que llegarán al negocio en una hora o un día, las llamadas que recibe un *call center* por concepto de quejas y reclamos, el número de accidentes de trabajo que ocurren en una fábrica al año y el número de siniestros en una cartera de seguros.

2.1.2 Distribución Binomial

Mendenhall *et al.* (2008) definen a la distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos si la variable es una variable aleatoria discreta, es decir, sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, ..., n suponiendo que se han realizado n pruebas. También se menciona que esta distribución fue desarrollada por

Jakob Bernoulli y que es la principal distribución de probabilidad discreta para variables dicotómicas, es decir, cuando el resultado del evento solo puede tener dos resultados posibles. Habitualmente se utiliza en casos de éxito-fracaso como cuando en una línea de producción una pieza resulta defectuosa (Calidad de producción), ventas, análisis de mercado, entre otras (Gómez & Marí, 2020).

Bernoulli definió el proceso conocido por su nombre, dicho proceso consiste en realizar un experimento aleatorio una sola vez y observar si cierto suceso ocurre o no, siendo p la probabilidad de que ocurra (éxito) y $q = (1-p)$ de que no ocurra (fracaso) , por lo que la variable sólo puede tomar dos posibles valores, el 1 si ocurre y el 0 sino sucede, distribución binomial es una generalización de la distribución de Bernoulli, cuando en lugar de realizar el experimento aleatorio una sola vez , se realiza n , siendo cada ensayo independiente del anterior.

Por lo cual podemos definir de una manera más formal a la distribución binomial de la siguiente manera.

Sea X una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayos y p la probabilidad de éxito en cualquiera de éstos. Se dice entonces que X tiene una distribución binomial con función de probabilidad:

$$p(x; n, p) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0, & 0 \leq p \leq 1, \text{ para } n \text{ entero} \\ & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

En donde los parámetros de la distribución binomial son n y p .

Algunas de las propiedades importantes de la distribución Binomial se presentan en la Tabla 3 a continuación:

Tabla 3. Propiedades (Distribución Binomial)

NOMBRE	FÓRMULA
Función de Distribución Acumulada	$I_{1-p}(n - [x], 1 + [x])$
Media	$\mu = np$
Varianza	$\sigma^2 = npq$
Moda	$[(n + 1)p]$
Mediana	Uno de $\{[np], [np]\}$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{npq}$
Coeficiente de sesgo	$\alpha_3 = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}$
Coeficiente de curtosis	$\alpha_4 = 3 + \frac{1 - 6pq}{\sqrt{npq}}$
FGM (Función Generadora de Momentos)	$M(t) = (q + pe^t)^n$

Fuente:Elaboración Propia

Algunas de las principales características de esta distribución es que los experimentos realizados son independientes, cada ensayo tiene únicamente dos posibles resultados, a los cuales por comodidad se les define acierto (a) y fallo (f). Otra característica es el hecho de que el conjunto de valores posibles para contar el número de aciertos y fallos pertenece al campo de los números naturales y que la probabilidad de que suceda a se conoce como p , y en consecuencia la probabilidad de f resulta $(1-p)=q$.

Algunos ejemplos y aplicaciones que se pueden encontrar al usar esta distribución es el hecho que al nacer se puede ser hembra o varón, un equipo de futbol puede ganar o perder durante un partido de futbol americano, el resultado de una prueba del polígrafo y el resultado de un tratamiento médico, donde puede ser efectivo o inefectivo.

2.1.3 Distribución Binomial Negativa

La distribución binomial negativa aparece en un estudio de Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) sobre los juegos de azar en 1714, pero años antes ya había sido descrita por Blaise Pascal (1623-1662). Más adelante, esta distribución fue propuesta como una alternativa a la distribución de Poisson para modelar el número de ocurrencias de un suceso cuando los datos presentan lo que se conoce como variación extra-Poisson o sobre dispersión. En estas situaciones, la varianza es mayor que la media, por lo que se incumple la propiedad que caracteriza a una distribución de Poisson, según la cual la media es igual a la varianza (Mendenhall, Wakerly, & Scheaffer, 2008).

Según Vargas-Chaves *et al.*, (2020) la distribución Binomial Negativa resulta adecuada para tratar aquellos procesos en los que se repite un determinado ensayo hasta conseguir un número determinado de eventos favorables (por vez primera). Si el número de resultados favorables buscados fuera 1 sería el caso de una distribución geométrica. La distribución binomial negativa implica también la existencia de una dicotomía de resultados posibles en cada prueba y la independencia de cada prueba o ensayo, o la reposición de los individuos muestreados. La probabilidad p de éxito sigue siendo igual de un intento a otro, es decir, cada intento es independiente del evento previo. La distribución geométrica maneja el caso donde se está interesado en el número de intentos en el que ocurre el primer éxito. Sin embargo, podemos generalizar este experimento, y buscar no solo un primer éxito, en lugar de ello se busca obtener un n -ésimo éxito. La distribución que se aplica a la variable aleatoria X , el número del intento en el que ocurre el n -ésimo éxito ($n = 1, 2, 3, \dots$), resulta ser una variable con distribución binomial negativa.

Si X es una variable aleatoria binomial negativa, su función de probabilidad se define como:

$$f(x; k, p) = \begin{cases} \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x, & x = 1, 2, 3, \dots \\ & k = 1, 2, \dots \\ & 0 \leq p \leq 1 \\ 0, & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

Los parámetros de la distribución binomial negativa son k y p , en donde k necesita ser un número natural. Si es así, entonces la distribución se conoce como distribución de Pascal, misma que se interpreta como el tiempo que hay que esperar para que ocurra el n -ésimo éxito.

Algunas de las propiedades importantes de la distribución Binomial Negativa se presentan en la Tabla 4 a continuación:

Tabla 4. Propiedades (Distribución Binomial Negativa)

NOMBRE	FÓRMULA
Función de Distribución Acumulada	$F_X(x) = \begin{cases} p^k \sum_{k=0}^x \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x; & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
Media	$\mu = \frac{k(1-p)}{p}$
Varianza	$\text{Var}(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
FGM (Funcion Generadora de Momentos)	$M(t) = p^k (1 - (1-p)e^t)^{-k}, t < \ln(1-p)$
Coficiente de simetría	$\frac{2-p}{\sqrt{k(1-p)}}$
Curtosis	$\frac{6}{k} + \frac{p^2}{k(1-p)}$
Función Característica	$\left(\frac{p}{1 - (1-p)e^{xt}} \right)^k$

Fuente:Elaboración Propia

2.1.3.1 Características principales

Algunas de las principales características de esta distribución es que los experimentos realizados son independientes, cada ensayo tiene únicamente dos posibles resultados, a los cuales por comodidad se les define acierto (a) y fallo (f), el conjunto de valores posibles para a y f pertenece al campo de los números naturales, la probabilidad de que suceda a se conoce como p , y en consecuencia la probabilidad de f resulta $(1-p) = q$. Su principal diferencia con la distribución binomial es el hecho de que se buscan n casos de éxito, por lo cual la probabilidad de éxito se ve afectada por eventos pasados

Algunos de los ejemplos más comunes son el número de canastas anotadas en un partido de basquetbol, los partidos ganados en una temporada de futbol y los pacientes recuperados de una enfermedad derivado de un medicamento experimental.

2.2 Distribuciones continuas para el modelado de la Severidad.

2.2.1 Distribución Gamma.

Se le conoce, también, como una generalización de la distribución exponencial, además, bajo ciertas características puede ser vista como la distribución de Erlang y la distribución Ji-cuadrada. Es una distribución de probabilidad continua adecuada para modelar el comportamiento de variables aleatorias con asimetría positiva y/o los experimentos en donde está involucrado el tiempo. Algunas variables aleatorias son siempre no negativas y por varias razones dan distribuciones de datos que están sesgadas a la derecha. Esto es, casi toda el área bajo la función de densidad está ubicada cerca del origen y la función de densidad cae gradualmente conforme y aumenta el parámetro.

Su aparición se debe a Leonard Euler quien escribió una carta a Christian Goldbachen el año de 1729 en la que hacía referencia a una función. Posteriormente Adrian Maria Legendre propuso llamar esta función gamma, la cual se define como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \text{para } \alpha > 0$$

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución gamma si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \left(\frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(\alpha) \theta^{\alpha}} \right), & x > 0, \quad \alpha, \quad \theta > 0 \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

La forma de la densidad gamma cambia entre los posibles valores de α , por lo cual, α recibe en ocasiones el nombre de parámetro de forma asociado con una

distribución gamma. El parámetro θ usualmente se conoce como parámetro de escala debido a que si se multiplica una variable aleatoria con distribución gamma por una constante positiva se produce una variable aleatoria que también tiene una distribución gamma con el mismo valor de α (parámetro de forma) pero con un valor diferente de θ .

Según los valores que tome el parámetro de forma, α , la función de densidad presenta perfiles muy diversos. Con valores de θ menores o iguales que 1, la función de densidad muestra un perfil decreciente; en cambio, si α es mayor que la unidad, la función de densidad crece hasta el valor $x = \left(\frac{\theta-1}{\alpha}\right)$ y decrece a partir de este valor.

Algunas de las propiedades importantes de la distribución Gamma se presentan en la Tabla 5 a continuación:

Tabla 5. Propiedades (Distribución Gamma)

<i>NOMBRE</i>	<i>FÓRMULA</i>
Función de Distribución Acumulada	$\frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx$ para $\alpha > 0$
Media	$\mu = \alpha\theta$
Varianza	$\text{Var}(X) = \alpha\theta^2$
Coeficiente de Asimetría	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$
Curtosis	$3\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)$

Fuente:Elaboración Propia

Algunas de las características principales de la distribución Gamma son:

- ❖ La distribución exponencial es una gamma con $\alpha=1$.

- ❖ Si X_1 es una gamma (α_1, β) y X_2 es una gamma (α_2, β) entonces $Y = X_1 + X_2$ es una gamma $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.
- ❖ Si X_1 es una gamma $(\alpha, 1)$ entonces βX es una gamma (α, β) para cualquier $\beta > 0$.

Los ejemplos más comunes para esta distribución son cuando se determina la probabilidad de que el mantenimiento de alguna maquina exceda x horas, el intervalo de tiempo entre la llegada de dos clientes a una tienda y el tiempo de vida útil de un aparato electrónico.

2.2.2 Distribución Lognormal.

Mendenhall *et al.* (2008) señalan que la distribución normal logarítmica fue propuesta por Galton en el año de 1879, Galton señalaba una distribución de probabilidad continua de una variable aleatoria cuyo logaritmo está normalmente distribuido, es decir, si X es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces $\exp(X)$ tiene una distribución log-normal. La base de una función logarítmica resulta poco relevante, ya que $\log_a(X)$ está distribuida normalmente si y solo si $\log_b(X)$ está distribuida normalmente, solo se diferencian por el factor constante.

La distribución log-normal puede mostrarse como el resultado de un número elevado de causas independientes con efectos positivos que se componen de manera multiplicativa y donde el efecto independiente de cada uno por si solo tiene un efecto insignificante frente al global.

La distribución log-normal tiende a la función densidad de probabilidad que se muestra a continuación:

$$f(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} \left(\frac{e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \right), & x > 0, \quad -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \\ 0, & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

En donde μ y σ son la media de valores logarítmicos (parámetro de escala) y desviación estándar de los valores logarítmicos (parámetro de forma) respectivamente.

Algunas de las propiedades importantes de la distribución Lognormal se presentan en la Tabla 6 a continuación:

Tabla 6. Propiedades (Distribución Lognormal)

<i>NOMBRE</i>	<i>FÓRMULA</i>
Media	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
Varianza	$(e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}$
Moda	$\mu_k = e^{k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}}$
FGM (Función Generadora de Momentos)	$\frac{e^{\mu}}{e^{\sigma^2}}$

Fuente:Elaboración Propia

Algunas de las principales características de esta distribución es el hecho de que asigna a valores de la variable < 0 la probabilidad 0 y de este modo se ajusta a las tasas y probabilidades de fallo que de esta forma sólo pueden ser positivas, depende de dos parámetros y se ajusta bien a un gran número de distribuciones empíricas, la esperanza matemática o media en la distribución Lognormal es mayor que su mediana.

Algunos ejemplos relevantes son los ingresos totales obtenidos en un periodo por concepto de ventas, el tiempo de supervivencia de pacientes con enfermedades letales o incurables y el costo de siniestralidad en una cartera derivada de Responsabilidad Laboral.

2.2.3 Distribución Weibull.

La distribución Weibull tienes sus antecedentes con el físico suizo Waloddi Weibull, quien demostró, con base en una evidencia empírica, que el esfuerzo al que se someten los materiales puede modelarse de manera adecuada mediante el empleo de esta distribución, todo esto durante el año de 1951, aunque fue descrita inicialmente en 1927 por Fréchet y aplicada por Rosin y Rammier pocos años más tarde (Arbeláez, 2008).

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de Weibull si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}}{\theta^\alpha} \right), & x > 0, \quad \alpha, \quad \theta > 0 \\ 0, & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

α es el parámetro de forma y θ el parámetro de escala, adicionalmente se podría contemplar un parámetro extra al reemplazar la variable aleatoria Weibull x por $x-a$, en donde a es un parámetro de localización que representa un valor umbral o tiempo de garantía. Existen dos casos especiales en la distribución Weibull 1) cuando el parámetro de forma es igual a uno, la distribución (al igual que la gamma), se reduce a una distribución exponencial, 2) cuando $\alpha=2$ y el parámetro de escala θ se reemplaza por la raíz de 2 multiplicada por la desviación estándar, esta función de densidad se le conoce como distribución Rayleigh.

Efecto del parámetro de forma: El parámetro de forma describe la manera en que se distribuyen los datos. Un valor del parámetro igual a 3 se aproxima a una curva normal. Un valor de forma bajo, por ejemplo 1, da una curva con asimetría hacia la derecha. Un valor de forma alto, por ejemplo 10, da una curva con asimetría hacia la izquierda.

Efecto del parámetro de escala: El parámetro de escala define la posición de la curva de Weibull respecto del valor de umbral, lo cual es similar a la manera en que la media define la posición de una curva normal.

Efecto del parámetro de valor umbral: El parámetro de valor umbral describe un desplazamiento de la distribución alejándose del 0. Un valor umbral negativo desplaza la distribución hacia la izquierda, mientras que un valor umbral positivo desplaza la distribución hacia la derecha.

Algunas de las propiedades importantes de la distribución Weibull se presentan en la Tabla 7 a continuación:

Tabla 7. Propiedades (Distribución Weibull)

NOMBRE	FÓRMULA
Función de Distribución Acumulada	$1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}$
Media	$\mu = \theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$
Varianza	$\text{Var}(X) = \theta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \mu^2$
Coeficiente de simetría	$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) - \theta^3 - 3\mu\sigma^2 - \sigma\mu^3}{\sigma^3}$
FGM (Función Generadora de Momentos)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \theta^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right), \alpha \geq 1$
Función Característica	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xi)^n \theta^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)$

Fuente:Elaboración Propia

Dentro de la literatura podemos encontrar dos características principales, 1) Los valores de X y θ siempre son valores positivos y 2) Si existe el parámetro de valor umbral todos los datos deben ser mayores que el valor del parámetro.

Algunos de los ejemplos más comunes para esta distribución son la teoría de valores máximos, el modelado de la siniestralidad en seguros y el análisis de variables meteorológicas como lluvia, temperatura o caída de nieve.

2.2.4 Distribución Pareto.

La distribución de Pareto fue introducida por el economista italiano Vilfredo Pareto (1848-1923) como un modelo para explicar la distribución de las rentas de los individuos de una población, siempre y cuando se partiera de dos supuestos, la existencia de un umbral inferior (x_m) de forma que no haya rentas inferiores a dicho umbral y el decrecimiento de manera potencial del porcentaje de individuos con una renta superior o igual a un cierto

valor de renta a medida que dicho valor de renta crece. El uso de esta distribución se ha ido ampliando a diferentes ámbitos de estudio. Se trata de una distribución biparamétrica, con parámetros de forma (α) y de situación (x_m). El parámetro x_m es un indicador de posición (valor mínimo) que, en términos económicos, puede interpretarse como el ingreso mínimo de la población. El parámetro α está asociado con la dispersión, donde a mayor valor se obtienen densidades de Pareto más concentradas en las proximidades de x_m , es decir, menos dispersas (Mendenhall, Wakerly, & Scheaffer, 2008).

Mendenhall *et al.* mencionan que a la ley de Pareto también se le conoce como ley de 80/20, ya que establece de forma general y para un amplio número de casos aproximadamente el 80% de las consecuencias proviene del 20% de las causas, se puede describir bajo esta ley que el 80 de la riqueza mundial pertenece solo al 20% de la población. La distribución de Pareto resulta adecuada para aquellas circunstancias en las que se pretenda establecer una distribución de alguna magnitud acumulable entre pocos que acumulan grandes cantidades o viceversa.

Se dice que una variable aleatoria X de tipo continuo tiene distribución Pareto si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{1+\alpha}} \right), & x > x_m \\ 0, & x < x_m \end{cases}$$

En donde x_m es el valor mínimo posible (positivo) de X , y α es un parámetro. La familia de las distribuciones de Pareto se parametriza por dos cantidades, x_m y α .

Algunas de las propiedades importantes de la distribución Pareto se presentan en la Tabla 8 a continuación:

Tabla 8. Propiedades (Distribución de Pareto)

<i>NOMBRE</i>	<i>FÓRMULA</i>
Función de Distribución Acumulada	$1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha$
Media	$\mu = \frac{\alpha x_m^\alpha}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1$
Varianza	$\text{Var}(X) = \frac{\alpha x_m^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2$
Coefficiente de Asimetría	$\frac{2(1+\alpha)}{\alpha - 3} \sqrt{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}, \quad \alpha > 3$
FGM (Funcion Generadora de Momentos)	$\alpha (-x_m t)^\alpha \Gamma(\alpha, -x_m t), t > 0$
Curtosis	$\frac{6(\alpha^3 + \alpha^2 - 6\alpha - 2)}{\alpha(\alpha - 3)(\alpha - 4)} \quad \alpha > 4$
Función Característica	$\alpha (-ix_m t)^\alpha \Gamma(\alpha, -ix_m t)$

Fuente:Elaboración Propia

Algunas de las características principales para esta distribución es el hecho de que cuando esta distribución es usada en un modelo sobre la distribución de riqueza, el parámetro α es conocido como índice de Pareto y que es una distribución decreciente y convexa, cuya característica fundamental es que está basada en una Ley de potencia.

Las aplicaciones más comunes se encuentran el análisis de variables aleatorias como valores máximos de la precipitación y la descarga de ríos y el análisis y descripción para temporada de secas.

Capítulo 3: Pruebas de Bondad de Ajuste.

A lo largo de este capítulo se abordarán aquellas pruebas de bondad de ajuste que con frecuencia son utilizadas para validar si los datos observados en una muestra se ajustan con algún nivel de significancia a determinada distribución de probabilidad, las cuales se

estudiaron en el capítulo anterior. Se estudiarán las pruebas más comunes utilizadas para la validación de un modelo, las cuales son 1) Prueba Chi-Cuadrada, 2) Kolmogorov-Smirnov y 3) Anderson-Darling.

La bondad de ajuste de un modelo estadístico detalla lo bien que se ajusta un conjunto de observaciones. Las medidas de bondad generalmente resumen la discrepancia entre los valores observados y los k valores esperados en el modelo de estudio. Dichas medidas se pueden emplear en el contraste de hipótesis, por ejemplo, la prueba de normalidad de los residuos, al comprobar si dos muestras se obtienen a partir de dos distribuciones idénticas o si las frecuencias siguen una distribución específica, al probar la bondad de ajuste de un grupo de datos, se comparan las frecuencias reales en cada categoría (o intervalo de clase) con las frecuencias que, teóricamente, se esperarían si los datos siguieran una distribución específica de probabilidad.

Dentro de las pruebas de bondad de ajuste siempre se encuentran hipótesis, las cuales se pueden rechazar o no rechazar según su resultado. Una hipótesis estadística se puede definir, según Mendenhall *et al.* (2008), como una aseveración o conjetura de una o más poblaciones, las hipótesis se establecen de tal manera que pueden ser evaluadas por medio de técnicas estadísticas.

Según Mendenhall *et al.* (2008) los elementos de una prueba estadística son cuatro, el primero es el estadístico de prueba, el segundo la región de rechazo, y los últimos dos son la formulación de dos hipótesis las cuales se describen a continuación:

- **Hipótesis Nula:** es la hipótesis que se desea poner a prueba, es decir, es la que se rechaza o no se rechaza como resultado final, se denota como H_0 ,
- **Hipótesis Alternativa:** es la alternativa que debe ser cierta en caso de que la hipótesis nula sea considerada falsa y se rechace, se denota por H_1 .

Dado que cada hipótesis afirma lo contrario de la otra resulta imposible que ambas sean ciertas, por lo tanto, si la hipótesis nula no se cumple podemos afirmar que si se cumple la hipótesis alternativa y viceversa.

Las pruebas de bondad de ajuste, por facilidad, comúnmente se expresan de la siguiente manera, a modo de rechazar o no rechazar la hipótesis nula.

H_0 : *Los datos siguen la distribución seleccionada.*

H_1 : *Los datos no sigue la distribución seleccionada.*

Al proceso que verifica si la información de una muestra de datos sostiene o refuta la hipótesis estadística, se le conoce como Prueba de Hipótesis, sin embargo, desde un punto de vista estricto no es posible determinar la veracidad o falsedad de la hipótesis sin que se examine en su totalidad la población, lo cual generalmente resulta impráctico o imposible. Derivado de lo anterior debe mantenerse una postura flexible al rechazar o no rechazar H_0 , ya que el en caso de “aceptar” esto solo significa que dada la información actual no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula.

En general, el procedimiento al momento de aplicar una prueba de bondad de ajuste puede agruparse en cinco sencillos pasos:

Paso 1. Formular la hipótesis nula y alternativa

Paso 2. Seleccionar el nivel de significancia

Paso 3. Seleccionar el estadístico de prueba.

Paso 4. Formular la regla de decisión.

Paso 5. Calcular el valor del estadístico y tomar una decisión.

Antes de comenzar con las pruebas de bondad de ajuste es importante definir algunos conceptos previos para un mejor entendimiento.

- **Nivel de confianza:** Representa el porcentaje de intervalos que incluirían el parámetro si se tomaran muestras de la misma población una y otra vez. Se denota por:

$$1 - \alpha = P[\text{No rechazar } H_0 | H_0]$$

- **Potencia Estadística:** es la probabilidad de que una prueba identifique correctamente un efecto genuino, es decir, representa la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es falsa, se denota por:

$$1 - \beta = P[\text{Rechazar } H_0 | H_1]$$

La estimación de la potencia estadística está determinada por dos factores. Primero, por el tamaño de la muestra, ya que cuanto mayor sea, mayor será la potencia, cuando el tamaño es pequeño, la prueba pierde potencia estadística. Segundo, el valor de significancia establecido, ya que, al incrementarse este valor, también incrementa la potencia y viceversa.

- **Estadístico de Prueba:** es una función de las observaciones muestrales, el cual, permite extraer conclusiones que permitan rechazar o no rechazar H_0 .
- **Región de no rechazo:** es el rango de valores en el cual si H_0 se encuentra dentro, se declara aceptable la hipótesis.
- **Región de Rechazo:** es el rango de valores en el cual si H_0 se encuentra dentro, se rechaza la hipótesis. En otras palabras, es el complemento de la región de no rechazo, el punto que divide ambas regiones es conocido como Valor Crítico y depende del nivel de significancia seleccionado.
- **P-Value:** se puede definir como el nivel de significancia observado más pequeño dentro del cual se puede rechazar H_0 . Al ser una probabilidad sus valores siempre se encuentran en un rango $0 \leq p \text{ value} \leq 1$.
- **Error tipo I:** Este error es aquel que se comete al rechazar H_0 cuando en realidad es verdadera, se le considera el error más grave y peligroso de dentro de cualquier investigación de carácter cuantitativo, por lo tanto, es el que mayor atención recibe y aquel que se controla más, comúnmente se establece con el valor de 0.05, se denota con la letra α y es equivalente a encontrar un resultado falso positivo (Carmona y Carrión, 2015).

Se le conoce también como **Nivel de significancia** y se define en términos de una probabilidad condicionada, como la probabilidad de rechazar H_0 cuando en realidad es cierta.

$$\alpha = P[\text{Error Tipo I}] = P[\text{Rechazar } H_0 | H_0]$$

- **Error tipo II:** Es el error que se comete cuando no se rechaza una H_0 que es en realidad falsa, se denota por β y es común por diversas razones, como un tamaño de muestra bajo. Es equivalente a encontrar un resultado falso negativo, y en términos de probabilidad condicionada, se establece como la probabilidad de no rechazar H_0 cuando esta es falsa (Carmona y Carrión, 2015).

$$\beta = P[\text{No rechazar } H_0 | H_1]$$

3.1 Chi-Cuadrada.

Los autores Reza y Garcia (1996) mencionan que esta prueba se utiliza para encontrar la distribución de probabilidad de una serie de datos, a través de la comparación de frecuencias teóricas esperadas con frecuencias obtenidas del conjunto de datos. Para una adecuada aplicación de esta prueba es necesario un número mínimo de datos (al menos 30), además, es necesario que las frecuencias esperadas sean mayores o iguales a cinco, una ventaja es que es válida para variables discretas y continuas

La metodología adecuada de la prueba χ^2 es la siguiente:

- 1) Se colocan los n datos históricos en una tabla de frecuencias con $m = \sqrt{n}$ intervalos. Posteriormente obtener la frecuencia observada en cada intervalo i (FO_i). Calcular la media y la varianza de los datos
- 2) Se propone una distribución de probabilidades de acuerdo con la forma de la tabla de frecuencias obtenidas en el paso anterior.
- 3) Con la distribución propuesta, se calcula la frecuencia esperada para cada uno de los intervalos (FE_i) mediante la integración de la distribución propuesta y su posterior multiplicación por el número total de datos

4) Se calcula el estimador:

$$C = \sum_{i=1}^m \frac{(FE_i - FO_i)^2}{FE_i}$$

5) Si el estimador C es menor o igual al valor correspondiente χ^2 con $m - k - 1$ grados de libertad (donde k = número de parámetros estimados de la distribución) y a un nivel de confiabilidad $1 - \alpha$, entonces no se puede rechazar la hipótesis de que la información histórica sigue la distribución propuesta en el punto 2.

El estadístico de prueba determina si las frecuencias observadas en la muestra están lo suficientemente cerca de las frecuencias esperadas bajo la hipótesis nula. Se observa que cuanto más se aproxima a cero el valor de χ^2 , mejor será el ajuste de a los datos observados. Si las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas son significativas, entonces el valor del estadístico χ^2 será grande indicando que se debe rechazar la hipótesis nula (H_0) (Gilenko & Mironova, 2017).

Como se mencionó previamente, la prueba ji-cuadrada se puede aplicar para cualquier distribución (ya sea discreta o continua), además, se recomienda que, para una mejor calidad de la aproximación a través de la distribución asintótica, que los intervalos se construyan de tal manera que sus probabilidades sean aproximadamente iguales.

3.1 Kolmogorov-Smirnov.

Reza y García (1996) indican que, si el objetivo es encontrar el tipo de distribución de probabilidad de una serie de datos, es posible utilizar la prueba de bondad de ajuste de K-S, la cual, comparándola con la de χ^2 , es más eficiente en varios aspectos ya que trabaja con la distribución de probabilidad acumulada, esta prueba solo es válida para variables continuas, y en especial resulta atractiva para muestras pequeñas en las cuales no es factible aplicar la prueba ji-cuadrada, por otro lado, una limitación de la prueba es que solo trabaja con distribuciones continuas, lo que limita su uso.

La metodología sugerida para el uso adecuado de esta prueba es la siguiente:

1. Se colocan los n datos históricos en una tabla de frecuencias con $m = \sqrt{n}$ intervalos. Para cada intervalo se tendrá la frecuencia observada i (FO_i). Se calcula la media y la varianza de los datos.
2. Se divide la frecuencia observada de cada intervalo por el número total de datos. A este resultado para obtener la probabilidad observada i (PO_i).
3. Se calcula la probabilidad acumulada de cada intervalo (PAO_i) del paso 2.
4. Se propone una distribución de probabilidad de acuerdo con la forma de la tala de frecuencias obtenidas en el paso 1.
5. Con la distribución propuesta se calcula la probabilidad esperada para cada uno de los intervalos (PE_i) mediante la integración de la distribución propuesta.
6. Se coloca la probabilidad acumulada esperada (PAE_i) para cada intervalo de clase.
7. Se calcula el valor absoluto entre PAO_i y PEO_i para cada intervalo y se selecciona la máxima diferencia, llamándola DM .
8. El estimador DM se compara con un valor limite correspondiente a la tabla correspondiente (ver anexo 1), con los n datos a un nivel de confiabilidad de $1 - \alpha$. Si el estimador DM es menor o igual al valor límite de la tabla, entonces no se puede rechazar que la información histórica sigue la distribución propuesta en el paso 4.

Sea $X_1 \dots X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución seleccionada, la función de distribución empírica se define por

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)$$

Donde:

$$I(X_i \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x, \\ 0 & \text{si } X_i > x. \end{cases}$$

Si $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ son los estadísticos de orden observados de la muestra aleatoria, entonces el estadístico de prueba de K-S se describe como

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max \left[F_0(x_{(i)}) - \left(\frac{i-1}{n} \right), \frac{1}{n} - F_0(x_{(i)}) \right] \right\}$$

Donde es posible observar que el estadístico de prueba es la distancia vertical más grande entre la función de distribución empírica F_n y la distribución F_0 . La hipótesis nula se rechaza para valores grandes de D_n , ver anexo 1.

3.3 Anderson-Darling.

El estadístico de bondad de ajuste de Anderson-Darling (A-D) es una medida de las desviaciones entre la línea ajustada (con base en la distribución seleccionada) y los puntos de los datos observados. El estadístico de Anderson-Darling es una distancia elevada al cuadrado que tiene mayor ponderación en las colas de la distribución, es posible utilizarlo con un número muestral bajo ($n \leq 25$). En tamaños muestrales muy grandes se puede rechazar el supuesto con tan solo pequeñas imperfecciones (Carmona y Carrión, 2015).

La prueba A-D es una modificación de la prueba K-S y da mayor peso a las colas que ésta última. La K-S es libre de distribución en el sentido que los valores críticos no dependen en la distribución específica que se está probando. La prueba A-D hace uso de la distribución específica al calcular los valores críticos. Esto tiene la ventaja de permitir una prueba más sensible y la desventaja de tener que calcular los valores críticos para cada distribución.

Al igual que las pruebas anteriores el estadístico de A-D pone a prueba una distribución seleccionada. La fórmula del estadístico A para corroborar si los datos provienen de una distribución con función de distribución F es $A^2 = -n - S$. Para lo cual, los datos $\{Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n\}$ deben estar ordenados.

$$S_k = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n} [\ln F(Y_k) + \ln(1 - F(Y_{n+1-k}))]$$

$$S = \sum_{k=1}^n S_k$$

El estadístico de prueba puede entonces ser comparado contra los valores críticos de la distribución teórica para determinar el *p-value*. La prueba A-D para normalidad es una prueba de distancia o prueba de función de distribución empírica que está basada en el concepto de que cuando se da una distribución subyacente hipotética, los datos pueden ser transformados a una distribución uniforme. Los datos muestrales transformados pueden entonces ser probados para uniformidad con una prueba de distancia (Omari, *et al.*, 2018)

El procedimiento sugerido para el uso de esta prueba es el siguiente:

1. Obtener los n datos de la variable aleatoria a analizar
2. Calcular la media y la varianza de los datos. Organizar los datos de forma ascendente: $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$
3. Establecer explícitamente la hipótesis nula, proponiendo una distribución de probabilidad.
4. Calcular la probabilidad esperada acumulada para cada número Y_i , $PEA(Y_i)$, y la probabilidad esperada acumulada para cada numero $PEA(Y_{n+1-i})$ (es decir los datos ordenados de forma descendiente), a partir de la función de probabilidad propuesta.
5. Calcular el estadístico de prueba:

$$A = - \left[n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i + 1)(\ln PEA(Y_i) + \ln (1 - PEA(Y_{n+1-i}))) \right]$$

$$PEA(Y_i) = I \left[\frac{(x_{(i)} - \bar{x})}{S} \right]$$

Dónde:

I : Función de distribución acumulada de una normal estándar.

\bar{x} : Media muestral

S : Desviación estándar

n : Tamaño de muestra

6. Ajustar el estadístico de prueba de acuerdo con la distribución de probabilidad propuesta.
7. Definir el nivel de significancia de la prueba α , y determinar su valor crítico.
8. Comparar el estadístico de prueba con el valor crítico, si el estadístico es menor que el valor crítico no se puede rechazar la hipótesis nula H_0 . Ver anexo 2.

Capítulo 4: Modelo estadístico y su aplicación.

A lo largo de los capítulos previos se describieron conceptos, términos y la base teórica de las distribuciones de probabilidad y las pruebas estadísticas que corroboran su utilidad, para poder realizar el ajuste de un modelo a los datos tomados de la siniestralidad de Lex Machina en el periodo comprendido de 2008 a 2018 en Estados Unidos y así poder ajustarlos a una distribución de probabilidad específica.

La información y las bases de datos necesarias para crear la tabla usada en el modelo se encuentran en el sitio web llamado Lex Machina², la cual es una compañía de investigación de litigios de propiedad intelectual que desarrolla datos y softwares de análisis legal, el acceso a esta información se logra mediante una cuenta que el mismo sitio brinda, sin embargo, el proceso de depuración y manipulación para lograr el *output* final es complicado debido a que se deben juntar los más de 1000 archivos disponibles con información de las reclamaciones y litigios derivados de la propiedad intelectual en

²<https://lexmachina.com/>

Estados Unidos, todo este proceso se ha llevado a cabo con la intención de encontrar la distribución que mejor se ajuste a la frecuencia de siniestros (o demandas legales), así como a la severidad de éstos (pérdidas y gastos derivados del juicio) aplicando las pruebas de bondad y ajuste correspondientes para determinar el mejor modelo.

4.1 Análisis de la base de Datos.

Los campos que contiene la base de datos y que son utilizados dentro del modelo se listan en Tabla 9.

Tabla 9. Campos de la Base de Datos.

Campos
Damages
First Case Indicator
Claim Id
Client Name
Sector
Risk Level
Industry
Accident Year
NZ
Total Revenue
Litigation Type
Cost
File

La base se conforma de un total de 33459 renglones durante el periodo 2008-2018, posteriormente se realizó un proceso de manipulación y limpieza, quedando un conjunto de 347 registros, con la cual se realizará el análisis y modelado de la información.

El proceso de depuración y limpieza se describe a continuación:

- Eliminación de reclamaciones no “NZ” (*non zero*), manteniendo únicamente aquellas reclamaciones con monto diferente de \$0.
- Se eliminaron las reclamaciones con montos negativos.
- Se mantuvieron los registros no duplicados con ayuda de la columna *First case indicator* (1 para el primer caso registrado y 0 para los casos derivados o duplicados del primero).

4.2 Aplicación del modelo a los datos obtenidos de Lex Machina.

Una vez descritos los conceptos estadísticos y teóricos relativos a la estimación tanto del número de siniestros como de la severidad en las reclamaciones y juicios derivados de la Propiedad Intelectual, es momento de emplear estas herramientas para generar una estimación adecuada de las mismas, que permita a cualquier entidad que pertenezca a las industrias analizadas cubrir las reclamaciones de los siniestros, así como obtener una idea del número esperado de reclamaciones para el caso de entidades de reciente creación.

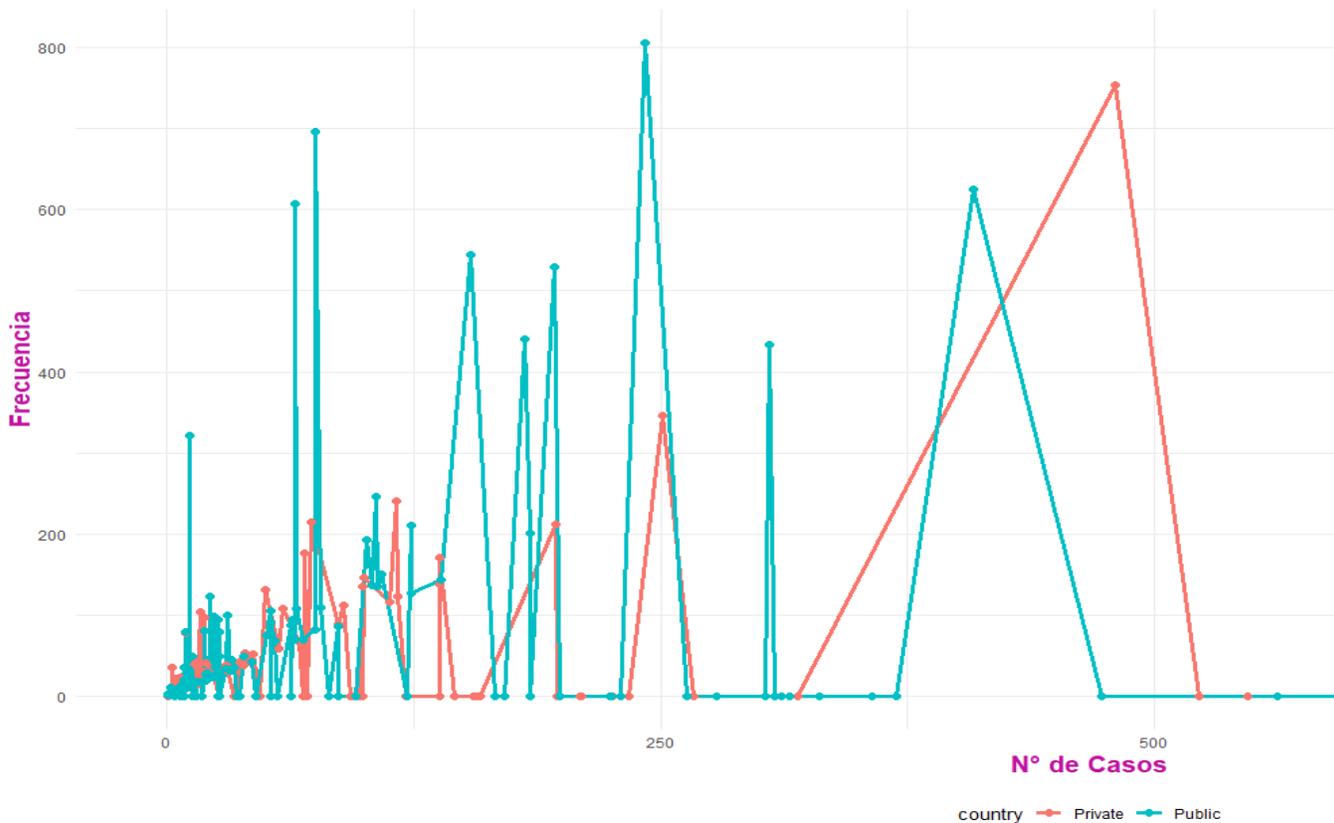
4.2.1. Especificaciones del Modelo.

Para la variable frecuencia se tomará en cuenta el campo *First Case Indicator*, ya que este corresponde al número de primeras reclamaciones ocurridas para un litigio, evitando que juicios secundarios afecten el monto y frecuencia del juicio principal, a continuación, en la gráfica 4.2.1 se muestra la frecuencia dividida por sector (Público y Privado).

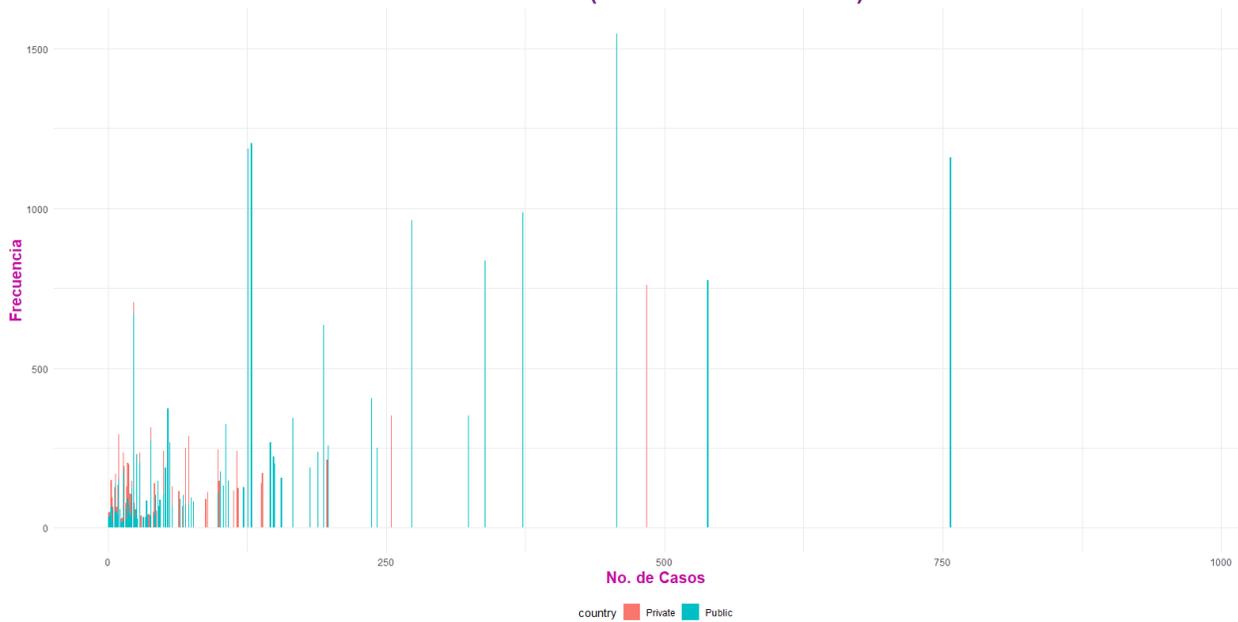
Podemos observar que las compañías que reciben un mayor número de reclamaciones promedio son aquellas instituidas como Privadas, sin embargo, la empresa con el mayor número de reclamaciones es de carácter Pública y pertenece a la industria *Financials* con un total de 983.

Si analizamos la frecuencia usando los cuantiles podemos observar que en el percentil 25 tenemos 5 reclamaciones, en el 50 obtenemos 18 reclamaciones, para el percentil 75 son 70 y adicionalmente para el percentil 95 obtenemos 380 reclamaciones, lo cual acompañados de la gráfica nos demuestra que el grueso de la frecuencia se encuentra entre 1 y 70 reclamaciones promedio.

Gráfica 4.1.2. Frecuencia de Reclamaciones por Compañía



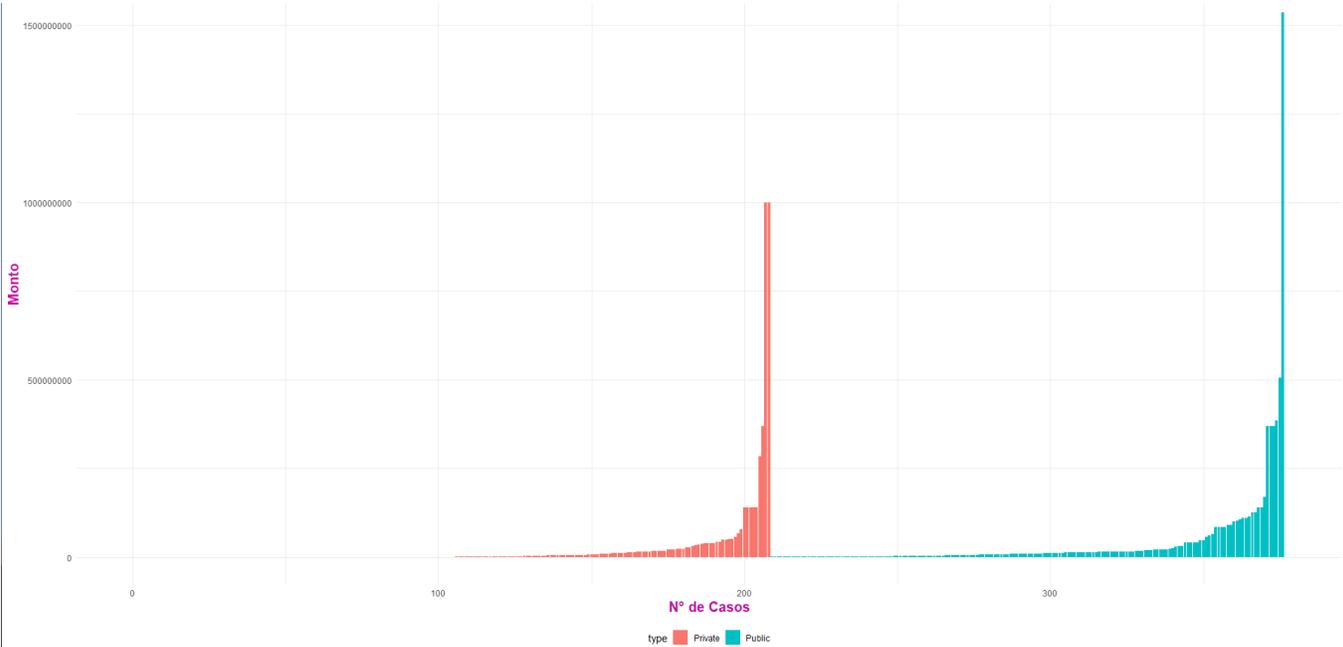
Frecuencia (Numero de siniestros)



Fuente: Elaboración propia con datos de Lex Machina.

Mientras que, para la variable severidad se tomará en cuenta la columna *Damages*, la cual corresponde a la pérdida monetaria derivada del juicio, y si aplica, los gastos de defensa, el conjunto de datos de esta variable se muestra en la gráfica 4.2.1.2, dividido por sector.

Gráfica 4.2.1.2. Severidad de Reclamaciones por Compañía



Fuente: Elaboración propia con datos de Lex Machina.

En la gráfica 4.2.1.2 es posible identificar que la severidad máxima que han alcanzado aquellas empresas de carácter público es mayor que las privadas, sin embargo, el promedio resulta un poco diferente, ya que la siniestralidad promedio para las empresas públicas es de \$21,798,599 mientras que para las privadas es de \$32,942,990 lo cual es ligeramente superior.

En la tabla 4.2 se muestra un resumen con las estadísticas más relevantes de la base de datos, enfocados a frecuencia y severidad.

Tabla 4.2. Estadísticas de frecuencia y severidad.

<i>Estadística</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Severidad</i>
Media	41.38	\$ 27,123,623
Mediana	7	\$ 130,750
Moda	2	\$ 200,000
Desviación estándar	105.36	\$ 175,535,346
Varianza muestral	11100.73	\$ 30,812,657,695,339,700
Curtosis	24.3	\$ 137
Mínimo	0	\$ 273
Máximo	806	\$ 2,540,000,000
1er Cuartil	0	\$ 21,296
3er Cuartil	27	\$ 2,836,352
Total	14690	\$ 9,411,897,265

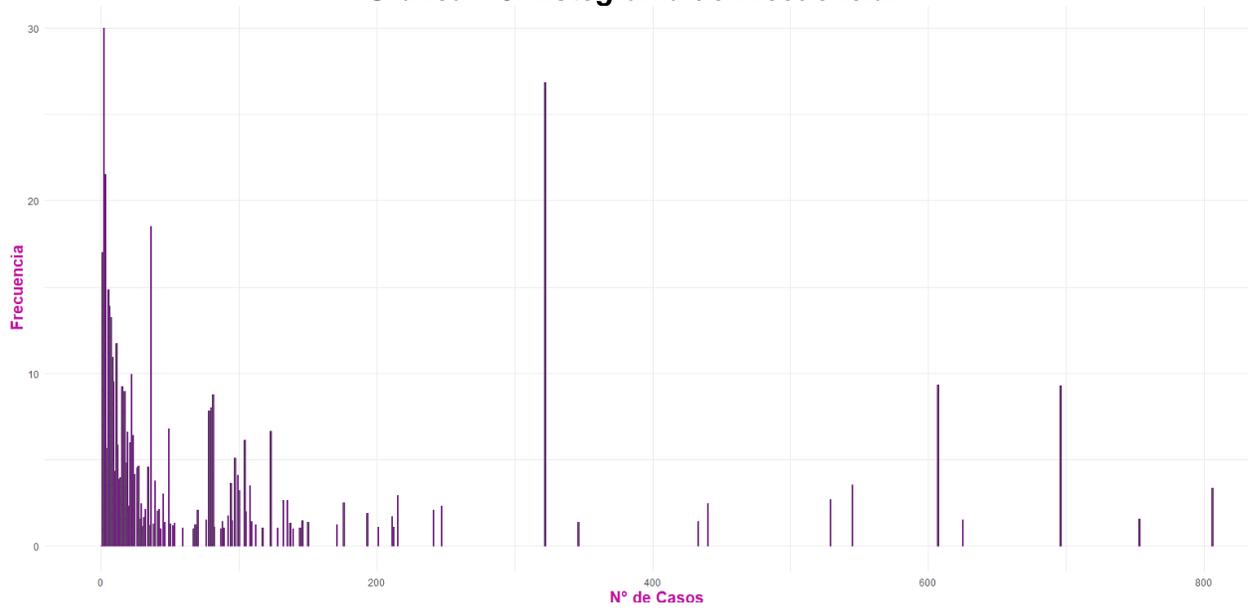
De la tabla 4.2 se puede decir que, en promedio, una compañía recibió 42 reclamaciones al año durante el periodo de 2008 al 2018, y el costo medio de reclamación fue de \$ 27,123,623 dólares.

Además, se puede notar que en la variable frecuencia la moda, la mediana y hasta el tercer cuartil son menores que la media, por lo que se puede identificar que esta variable tiene una distribución sesgada a la derecha (se dice que hay asimetría positiva (o a la derecha) si la "cola" hacia la derecha de la media es más larga que la de la izquierda, es decir, si existen valores más separados de la media a la derecha). La severidad se comporta de forma similar, además, se cumple que la condición que mencionan Vergara y Quesada (2007) la cual dice que $moda \leq mediana \leq media$. Es de llamar la atención que para ambas variables el tercer cuartil es menor que la media, lo cual nos indica que existen valores extremos a la derecha de la media, pero son poco frecuentes.

Otro detalle que resaltar es que la desviación estándar es de 105.36 y \$175,535,346 para la frecuencia y severidad, respectivamente; mientras mayor es el valor de la desviación estándar, mayor es la dispersión de los datos. Además, la curtosis de ambas variables es mucho mayor que 3, lo cual indica que los datos no corresponden a una distribución normal ya que un valor muy grande de curtosis indica que la distribución tiene colas más pesadas que la distribución normal.

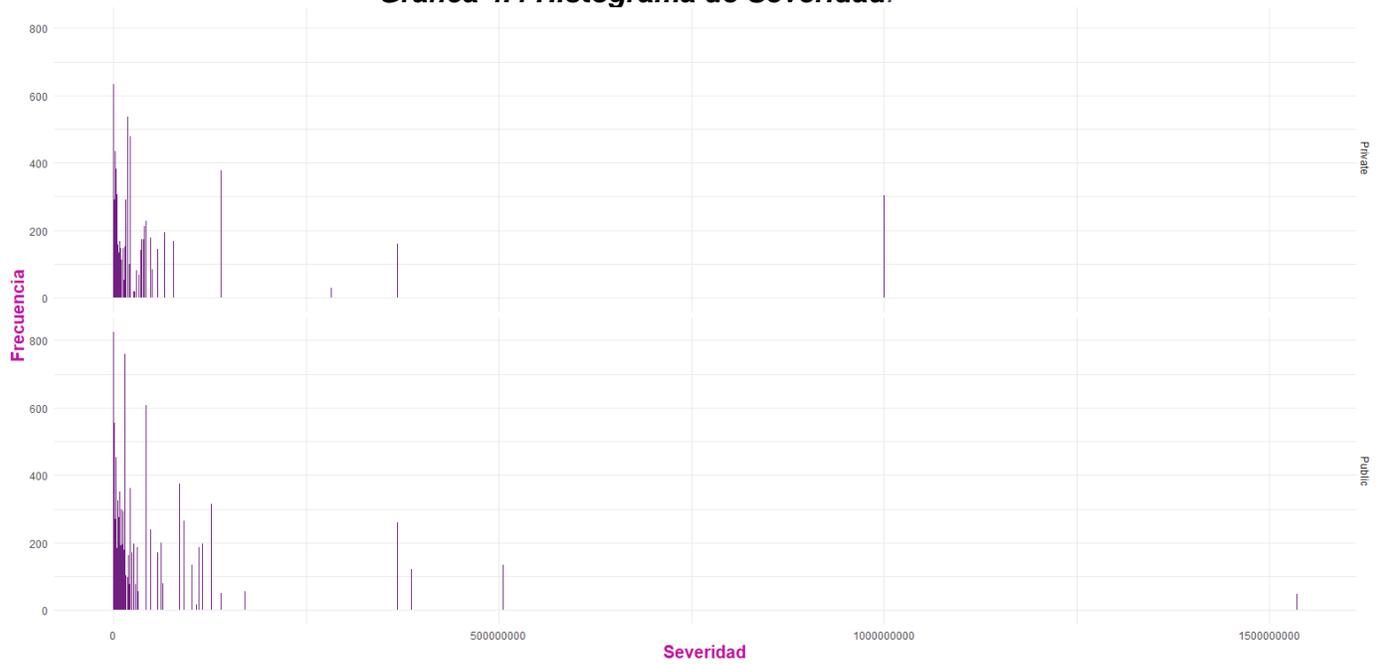
A continuación, se muestran en las gráficas 4.3. y 4.4. los histogramas de frecuencia y severidad, respectivamente.

Gráfica 4.3 Histograma de Frecuencia.



Fuente: Elaboración propia con datos de Lex Machina.

Gráfica 4.4 Histograma de Severidad.

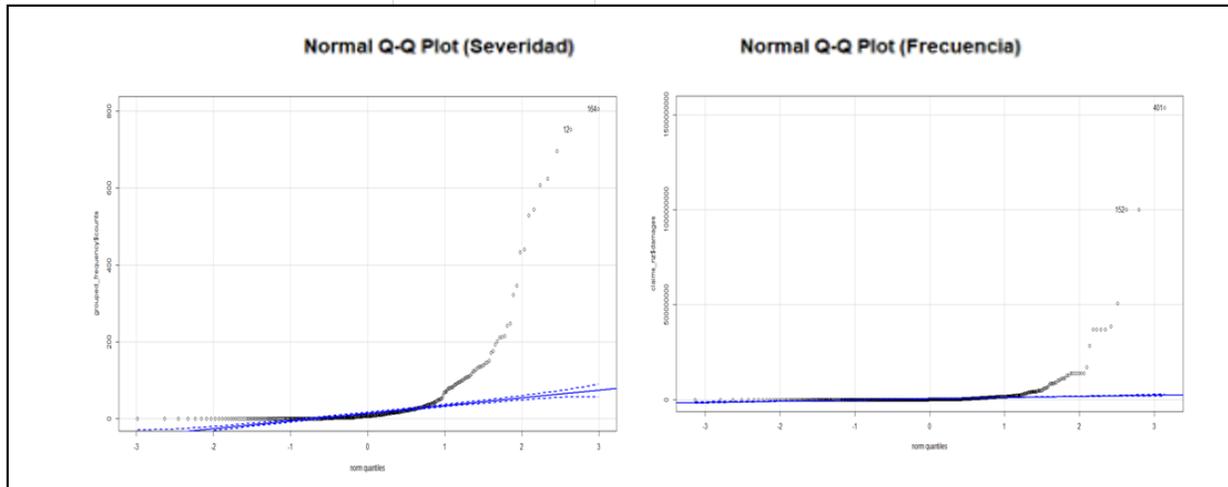


Fuente: Elaboración propia con datos Lex Machina

Como se mencionó anteriormente, el histograma para ambas variables presenta una asimetría positiva o hacia la derecha, es decir, que la cola de la distribución apunta hacia la derecha y por lo tanto el valor de asimetría es mayor que 0 (positivo).

En la gráfica 4.5, se utiliza la prueba Q-Q (cuantil-cuantil) para corroborar que los datos no provienen de una distribución normal.

Gráfica 4.5. Q-Q Plot normal de Severidad y Frecuencia



Fuente: Elaboración propia con datos de Lex Machina.

En el gráfico 4.5. del lado izquierdo se muestra el diagnóstico Q-Q Plot de la severidad y del lado derecho el de la frecuencia, en ambos casos se observa que la distribución no se aproxima a una distribución normal, debido a que la mayoría de las observaciones se encuentran dispersas a la recta, por lo tanto, se podría concluir que los valores se ajustan a otra distribución diferente a la normal.

4.2.2. Determinación de Hipótesis.

4.2.2.1. Determinación de Hipótesis para la frecuencia.

A lo largo del Capítulo 2 se abordaron las distribuciones más usadas para modelar el número de casos o eventos que ocurren en algún tipo de siniestro (en este caso, las reclamaciones derivadas de la Propiedad Intelectual), según Fontnouvelle *et al.* (2007 y Arbelaéz (2008) mencionan a las distribuciones Poisson, Binomial y Binomial Negativa para modelar frecuencia de algún siniestro. Derivado de la literatura revisada se

realizarán las pruebas correspondientes solamente para las distribuciones Binomial Negativa y Poisson ya que la frecuencia se considera como una variable de conteo, por lo cual se presentan las siguientes hipótesis:

- Grupo de Hipótesis 1

$H_0 =$ La frecuencia de siniestros sigue una distribución Binomial Negativa.

$H_1 =$ La frecuencia de siniestros no sigue una distribución Binomial Negativa.

- Grupo de Hipótesis 2

$H_0 =$ La frecuencia de siniestros sigue una distribución Poisson.

$H_1 =$ La frecuencia de siniestros no sigue una distribución Poisson.

4.2.2.2 Determinación de Hipótesis para la severidad.

Durante el capítulo dos se resaltó que las distribuciones más comunes para modelar las pérdidas monetarias en los seguros, en este caso de la Propiedad Intelectual son las distribuciones Gamma, Weibull, Pareto y Log-normal según Omari, *et al.* (2018) y Arbeláez (2008); por lo cual se define la siguiente hipótesis:

- Grupo de Hipótesis

$H_0 =$ La severidad de siniestros sigue una distribución F_i .

$H_1 =$ La severidad de siniestros no sigue una distribución F_i .

donde F_i puede ser una distribución Gamma, Weibull, Pareto o Log-normal.

4.2.3 Ajuste del modelo.

En este apartado se realiza la estimación de los parámetros correspondientes a cada una de las distribuciones que se mencionaron al final de la sección anterior, además, se realizan también las pruebas de bondad y ajuste. Para la estimación de parámetros de las distribuciones se emplea el conocido método de máxima verosimilitud debido a que es uno de los más empleados en la literatura.

La idea básica del método de máxima verosimilitud se fundamenta en lo siguiente: suponga que se tiene una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de n observaciones independientes e idénticamente distribuidas, extraídas de una población con función de distribución conocida $f(x; \theta)$, donde θ es un escalar o un vector de parámetros desconocidos. La función de verosimilitud, $L(\theta)$, es la función de densidad de los datos observados x , expresada en función del parámetro (o vector de parámetros) desconocido θ . Dado que X_1, X_2, \dots, X_n tiene una función de densidad conjunta $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ por cada muestra observada de valores independientes $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, la función de verosimilitud entonces está definida como:

$$L(\theta) = L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

El principio de máxima verosimilitud proporciona un medio para elegir un estimador, $\hat{\theta}$, asintóticamente eficiente para un parámetro (o conjunto de parámetros) como el valor para el parámetro desconocido que hace que los datos observados sean "más probables". Es así como la estimación de máxima verosimilitud, $\hat{\theta}$, de un parámetro θ es obtenido maximizando la función de verosimilitud $L(\theta)$.

$$\hat{\theta}(x) = \max (L(\theta)).$$

Dado que el logaritmo natural de la función de verosimilitud es una función monótona no decreciente de X , maximizar $L(\theta)$ es equivalente a maximizar $\ln(L(\theta))$. Por lo tanto, el log de la función de verosimilitud es denotado por $l(\theta)$ y definido de la siguiente manera:

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i | \theta).$$

Si la función de log verosimilitud es diferenciable (en θ_i), los candidatos posibles para estimadores de máxima verosimilitud son los valores (θ) que resuelven:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta \ln f(x_i | \theta)}{\delta \theta} = 0$$

Note que las soluciones a la ecuación anterior son solo los posibles candidatos para estimadores, nuestro objetivo es hallar que éstos sean los máximos.

4.2.3.1 Estimación de parámetros para la variable frecuencia.

La distribución Poisson tiene como función de probabilidad a:

$$f_x(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

donde x es la variable frecuencia, en el caso de esta investigación el número de reclamaciones obtenidos Lex Machina.

Para obtener la estimación del parámetro λ con el método de máxima verosimilitud se tiene que:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \dots x_n!}$$

es la función de verosimilitud.

Aplicando \log a la función anterior, se tiene:

$$l(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - n\lambda.$$

Derivando e igualando a cero se tiene:

$$\frac{\delta l(\lambda)}{\delta \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0.$$

Por lo cual se consideramos una muestra aleatoria de tamaño 347, el valor de la estimación por máxima verosimilitud es:

$$\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{1861.743}{347} = 5.365254$$

Por lo tanto, para este caso el valor del parámetro estimado de la distribución Poisson es $\hat{\lambda} = 5.365$.

Para la distribución binomial negativa se tiene que ésta tiene como función de probabilidad la siguiente expresión:

$$f(x; k, p) = \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

donde x es la variable que representa el número de siniestros obtenidos de Lex Machina.

Aplicando la función de verosimilitud:

$$L(p, k; x) = \prod_{i=1}^n \binom{k+x_i-1}{k-1} p^k (1-p)^{x_i} = \prod_{i=1}^n \binom{k+x_i-1}{k-1} p^{nk} (1-p)^{\sum x_i}$$

Aplicando logaritmo a la función de verosimilitud:

$$l(p, k; x) = \sum_{i=1}^n \ln \binom{k+x_i-1}{k-1} + nk \ln p + \sum_{i=1}^n x_i \ln(1-p)$$

Derivado respecto a p y k e igualando a 0:

$$\frac{\delta l}{\delta p} = \frac{nk}{p} - \frac{\sum x_i}{1-p} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta l}{\delta k} &= \sum_{i=0}^n x_i \frac{\delta l}{\delta k} \ln \left(\frac{(k+i-1)!}{(k-1)! i!} \right) - \sum_{i=0}^n x_i \ln(1+p) = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\delta l}{\delta k} \ln \prod_{s=0}^{i-1} (k+s) - n \ln(1+p) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i \left(\sum_{s=0}^{i-1} \frac{1}{k+s} \right) - n \ln(1+p) \end{aligned}$$

Por lo que los resultados por máxima verosimilitud para los parámetros estimados derivados de un tamaño de muestra igual a usado con la distribución de Poisson ($n= 22$) son:

$$\hat{p} = \frac{k}{k + \bar{x}}$$

$$\hat{p} = \frac{22}{22+ 5.365} = 0.984774$$

$$\hat{k} = \frac{\hat{p} \bar{x}}{1 - \hat{p}}$$

$$\hat{k} = \frac{0.05 * 5.3652}{1-0.05} = .282382$$

Es así como en la tabla 4.3. se muestran los parámetros estimados de las distribuciones candidatas para el ajuste de los datos de frecuencia.

Tabla 4.3. Estimación de parámetros para la variable frecuencia por el método de máxima verosimilitud.

<i>Distribución</i>	<i>Parámetros Estimados</i>
Binomial Negativa	$\hat{k} = 0.282$ $\hat{p} = 0.985$
Poisson	$\hat{\lambda} = 5.365$

Fuente: Elaboración propia

Estimación de parámetros para la variable severidad.

Como se mencionó en párrafos anteriores las distribuciones usadas para modelar los montos de severidad en seguros son del tipo continuo, entre éstas se encuentran la distribución gamma, la Lognormal o la weibull.

A continuación, se presenta, a manera de ejemplo, cómo se realiza la estimación de los parámetros por el método de máxima verosimilitud para las distribuciones Gamma y Lognormal, en las funciones de densidad de estas distribuciones las x_i representan los montos de daño o pérdidas obtenidos de Lex Machina.

Para iniciar con la estimación de máxima verosimilitud para la distribución gamma recordemos que esta distribución depende de la función Gamma, la cual está dada por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \text{para } x, \alpha > 0$$

De este modo, la función de distribución Gamma es:

$$f_x(x; \alpha, \theta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(\alpha) \theta^{\alpha}} \quad \text{para } x > 0$$

la cual viene dada por dos parámetros, donde $\alpha > 0$ es el parámetro de forma y $\theta > 0$ es el parámetro de escala.

Obteniendo la función de verosimilitud de la distribución Gamma tenemos:

$$L(\alpha, \theta; x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha-1} e^{-x_i/\theta}}{\Gamma(\alpha) \theta^{\alpha}}$$

Y si aplicamos logaritmo a la función de verosimilitud se llega a: x_i

$$l(\alpha, \theta; x) = n(\alpha \ln \theta - \ln \Gamma(\alpha)) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^n x_i.$$

Derivando con respecto a cada uno de los parámetros e igualando a 0 se tiene:

$$\frac{\delta l(\alpha, \theta; x)}{\delta \alpha} = n \left(\ln \hat{\theta} - \frac{d}{d\alpha} \ln \Gamma(\hat{\alpha}) \right) + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0.$$

$$\frac{\delta l(\alpha, \theta)}{\delta \theta} = n \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \text{o} \quad \bar{x} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}}.$$

Sustituyendo $\hat{\theta} = \hat{\alpha} / \bar{x}$

$$n \left(\ln \hat{\alpha} - \ln \bar{x} - \frac{d}{d\alpha} \ln \Gamma(\hat{\alpha}) \right) + \ln \bar{x} = 0.$$

El resultado es una ecuación no lineal en $\hat{\alpha}$ por tal motivo es necesario emplear métodos numéricos (es decir, métodos que van calculando las sucesivas aproximaciones con base en el resultado anterior, a partir de una o más aproximaciones iniciales), por ejemplo, el algoritmo de búsqueda de raíces.

Ejecutando los cálculos correspondientes para la distribución gamma con los parámetros mencionados anteriormente en este capítulo ($n= 347$ y $\bar{x}=27,123,623$) se obtienen los siguientes valores para los parámetros estimados: $\hat{\alpha} = 0.092$ y $\hat{\theta} = 0.00000248$.

Este mismo procedimiento se lleva a cabo para la distribución Lognormal, y como anteriormente se mencionó, x_i representa los valores de la variable aleatoria considerada como el monto de las pérdidas que tiene que pagar una entidad o compañía cuando se materializa el riesgo al que está expuesta.

Considerando la función de distribución de una Lognormal:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{x\sigma \sqrt{2\pi}}, \quad x, \sigma > 0.$$

La función de verosimilitud para una distribución Lognormal es:

$$L(\mu, \sigma; x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x_i)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Aplicando logaritmo a la función de verosimilitud tenemos:

$$\ln L(\mu, \sigma; \mathbf{x}) = -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \sum_{i=1}^n \left[\ln x_i + \frac{1}{2\sigma^2} (\ln x_i - \mu)^2 \right].$$

Derivado $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ e igualando a 0:

$$\frac{\delta \ln L(\mu, \sigma)}{\delta \mu} = 0.$$

$$\frac{\delta \ln L(\mu, \sigma)}{\delta \sigma} = 0.$$

Por lo que el resultado de los parámetros estimados basados en un tamaño de muestra de 347, una media de \$27,123,623 y la suma del logaritmo natural de las reclamaciones es el siguiente:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \frac{1}{347} (1861.743) = 9.7776$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2} = \sqrt{\frac{1}{347} (681.6769)} = 1.684931$$

Realizando análogamente los pasos para las distribuciones Weibull y Pareto, en la tabla 10. se muestran los parámetros estimados mediante el método de máxima verosimilitud de las distribuciones candidatas para el ajuste de los datos de severidad.

Tabla 10. Estimación de parámetros para severidad por el método de máxima verosimilitud.

Distribución	Parámetros Estimados
Gamma	$\hat{\alpha} = 0.092$ $\hat{\theta} = 0.00000248$
Weibull	$\hat{\alpha} = 0.71$ $\hat{\theta} = 294708.43$
Pareto	$\hat{\alpha} = 0.821$ $\hat{x}_m = 0.48023.76$
Lognormal	$\hat{\mu} = 9.778$ $\hat{\sigma} = 1.6849$

Fuente: Elaboración propia.

4.3. Resultados de las pruebas de bondad y ajuste.

Una vez que se cuenta con las estimaciones de los parámetros correspondientes de cada una de las distribuciones propuestas tanto para la variable frecuencia como para la variable severidad se procederá a elegir la distribución que se ajusta mejor a los datos, para esto se hace uso de las pruebas de bondad de ajuste mencionadas en el Capítulo 3. Para llevar a cabo la verificación del modelo se tomarán en cuenta las hipótesis establecidas en la sección 4.2.2.1 y 4.2.2.2 para el número de siniestros (frecuencia) como el monto de pérdida (severidad), respectivamente.

4.3.1. Prueba Chi-cuadrado.

Para poder contrastar el juego de hipótesis, se hace el cálculo de la prueba chi-cuadrado a través del programa estadístico R (v3.6.3).

En la Tabla 11. se muestran el valor del estadístico de la prueba chi-cuadrada, así como el *p-value* para cada una de las distribuciones. Adicionalmente se incluyen los indicadores AIC y BIC.

Tabla 11. Aplicación de la prueba Chi- Cuadrado para la muestra aleatoria de Frecuencia.

Distribución	Valor Chi-cuadrado	P-value	Grados de libertad	AIC	BIC
Poisson	485762.4	0.42	4	258.43	262.43
Binomial Neg	3.31	0.02	3	745.38	755.91

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con los valores p de la prueba Chi-cuadrado 0.42 y 0.02 para las distribuciones Poisson y Binomial Negativa, respectivamente, y tomando en cuenta el contraste 1 de las hipótesis declaradas anteriormente, se puede concluir que la hipótesis nula:

$$H_0 = \text{La frecuencia de siniestros sigue una distribución Poisson.}$$

No se rechaza debido a que el valor p -value (0.42) es mayor al nivel de significancia (0.05).

Por otro lado, para el contraste 2, la hipótesis nula:

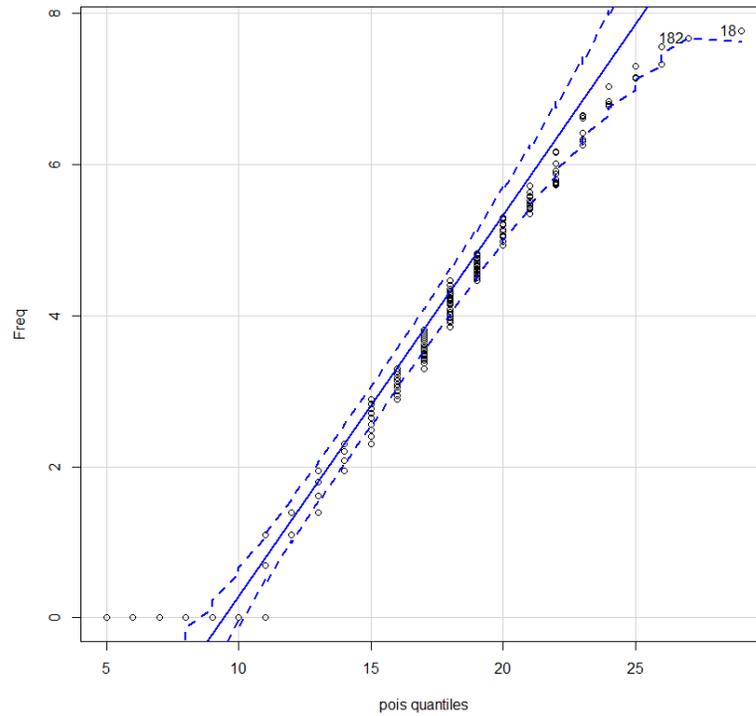
$$H_0 = \text{La frecuencia de siniestros sigue una distribución Binomial Negativa.}$$

Consistentemente se rechaza debido a que el valor p -value (0.02) es menor al nivel de significancia (0.05).

Así mismo, en la tabla 11 se muestra que los valores de los indicadores AIC y BIC para la distribución Poisson son menores que los valores correspondientes al ajuste de la distribución Binomial Negativa, por lo que se puede concluir que los datos de frecuencia se ajustan a una distribución Poisson con parámetro estimado $\hat{\lambda} = 5.365$.

Una forma más visual de corroborar lo anterior es mediante la ayuda de diferentes gráficos, es así como en el Gráfico 4.7 se puede notar que para el diagnóstico gráfico Q-Q *plot* del ajuste a la distribución Poisson, los puntos se aproximan al comportamiento lineal, por lo cual se puede concluir que la función empírica de la distribución acumulada es similar a la teórica.

Gráfica 4.7. Diagnóstico, Q-Q plot del ajuste de la distribución Poisson.



Fuente: Elaboración propia.

4.3.2. Pruebas K-S y A-D.

Para comprobar los criterios de hipótesis correspondientes a la variable severidad se hace el cálculo de las pruebas de bondad K-S y A-D, mediante el programa software estadístico R (versión 3.6.3).

En la tabla 12. se muestra el valor de p (p-value), de las pruebas de bondad de ajuste para cada una de las distribuciones que posiblemente se ajustarían a los datos. Adicionalmente se incluyen los indicadores AIC y BIC.

Tabla 12. Aplicación de las pruebas K-S y A-D de la variable Severidad.

Distribución	P-value (K-S)	P-value (A-D)	AIC	BIC
Gamma	0.29	66.26	5612.42	5620.13
Weibull	0.08	4.92	5190.05	5197.75
Pareto	0.41	94.41	5646.47	5312.47
LogNormal	0.04	0.23	5142.36	5150.06

Fuente: Elaboración propia.

Retomando las hipótesis de la sección 4.2.2.2, se tiene que:

$H_0 =$ Los datos de la muestra sigue una distribución F_i .

$H_1 =$ Los datos de la muestra no sigue una distribución F_i .

Para $F_0 =$ Gamma, Weibull, Pareto o Lognormal.

En la sección 3.2. se mencionó que la hipótesis nula se rechaza para valores grandes del *P-value* de Kolmogorov-Smirnov.

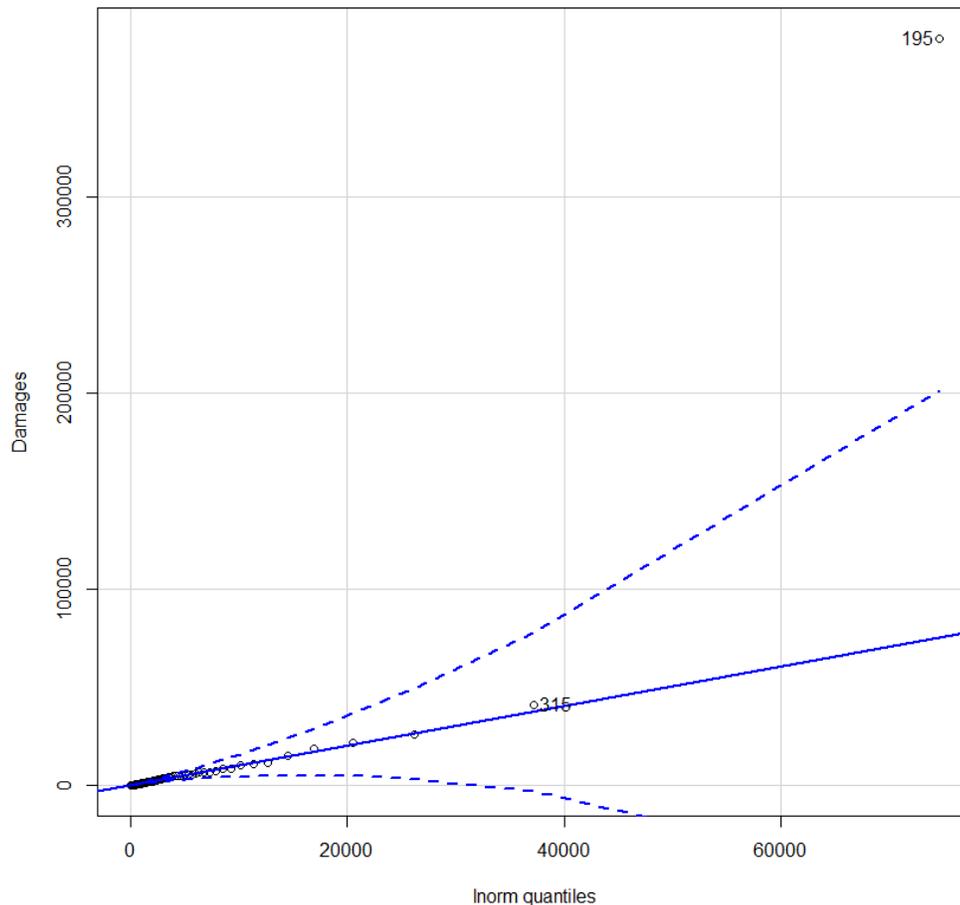
Comparando los valores de la tabla 12. para el campo de la prueba K-S podemos ver que la distribución Lognormal tiene un valor p de 0.04 y la de Weibull de 0.08, siendo estos los más bajos, pero únicamente la Lognormal no se rechaza ya que su valor es inferior a un valor de significancia de 0.05, cumpliendo la condición de que $0.04 \leq 0.05$, las distribuciones Gamma y Pareto se descartan por el momento por su *p-value* demasiado alto.

Adicionalmente, analizando el valor p de la prueba de A-D tenemos para la distribución Weibull un valor de 4.92, mientras que para la distribución Log-normal en valor es de 0.23 teniendo como resultado *que se rechaza la hipótesis nula* para ambas distribuciones. Derivado de la explicación anterior es posible concluir para esta prueba de bondad de ajuste que la distribución que mejor ajusta a los datos de severidad es la distribución Lognormal ya que posee un *p-value* menor al valor de significancia en la prueba de K-S, y es la de menor valor en la prueba A-D.

Para los indicadores AIC y BIC el ajuste de la distribución Lognormal tiene como valores 5142.36 y 5150.06 , respectivamente, siendo estos los valores de menor tamaño dentro de las cuatro distribuciones analizadas, por lo cual se refuerza la hipótesis de que la distribución de mejor ajuste a los datos es la Lognormal .

Con lo anterior se concluye, que la distribución que mejor se ajusta a los datos del monto de pérdida es la distribución Log-normal con parámetros $\hat{\mu} = 9.778$ y $\hat{\sigma} = 1.6849$.

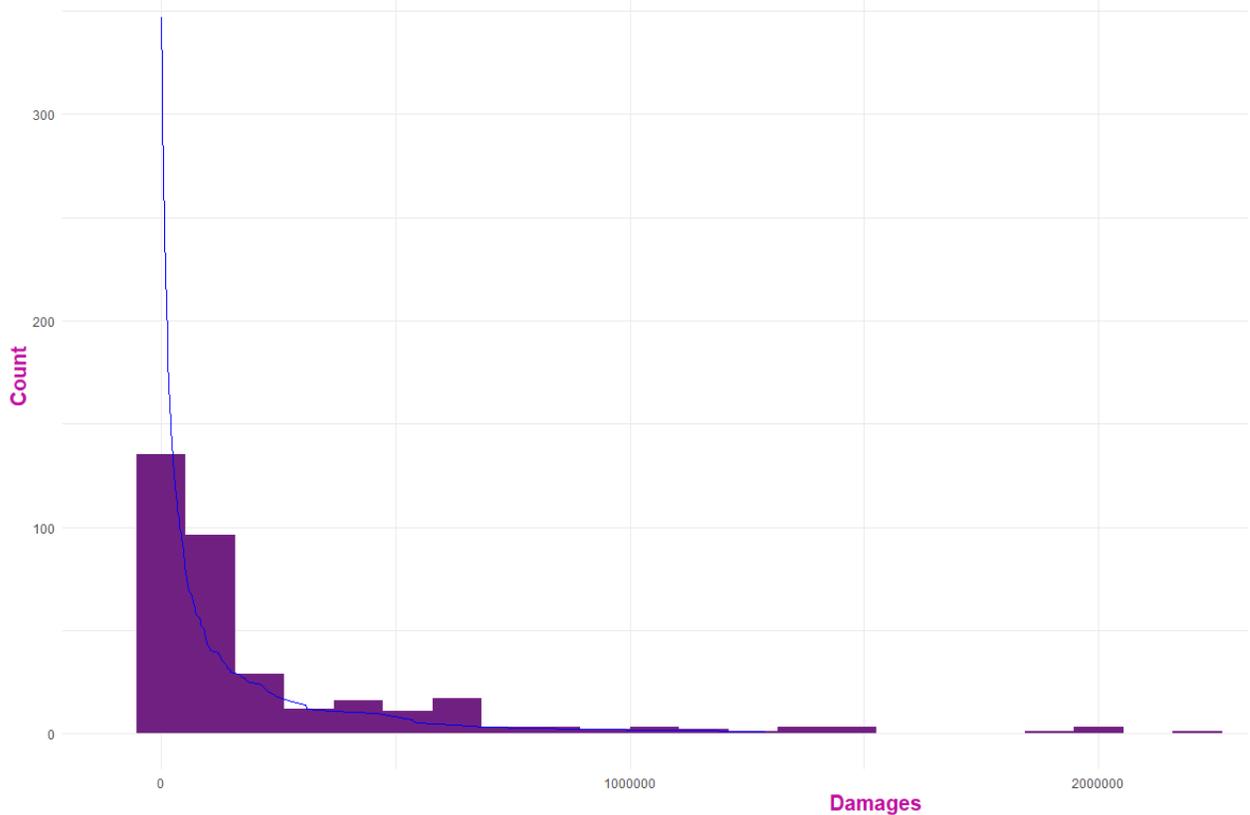
Gráfico 4.8. Diagnóstico, Q-Q plot del ajuste a la distribución Log-normal.



Fuente: Elaboración propia.

En el Gráfico 4.8. se puede notar que para los diagnósticos gráfico Q-Q plot del ajuste a la distribución Log-normal los puntos se aproximan al comportamiento lineal (además también se puede observar que la observación 195 puede considerarse un *outlier* dentro de la base de datos), por lo cual es posible considerar que la función empírica de la distribución acumulada es similar a la teórica.

Gráfico 4.9. Análisis de Severidad (Distribución Empírica vs Teórica)



Fuente: Elaboración propia.

En el Gráfico 4.9. se muestra el histograma de los datos con las 347 observaciones frente al resultado de la distribución teórica (Lognormal) con parámetros $\hat{\mu} = 9.778$ y $\hat{\sigma} = 1.6849$, en ésta es posible identificar un comportamiento similar entre ambas, el mayor crecimiento observa en la parte izquierda de la gráfica mientras que hacia la derecha la frecuencia es mucho menor, sin embargo por experiencia propia he identificado que las compañías presentan una mayor preocupación hacia los valores más altos de la distribución, que si bien son los menos frecuentes, son aquellos que pueden generar pérdidas significativas para cualquier empresa, llevándolas en ocasiones a la quiebra.

De acuerdo a la base de datos obtenida y al análisis que durante la presente investigación se ha trabajado resulta imperativo mantener en la mira el objetivo principal, que toda compañía que este enfocada o relacionada con innovaciones, desarrollo de productos, marcas, etc, se encuentra propensa a sufrir reclamaciones en el ámbito de la Propiedad Intelectual, por lo cual deben estar preparadas ante la posible materialización del riesgo a través de un análisis que les permita identificar la frecuencia y severidad de

reclamaciones a la que se encuentran expuestos según su industria, su localización geográfica y/o sus ingresos.

II Conclusiones.

El objetivo principal de la presente investigación era realizar un recorrido a través de los antecedentes de la Propiedad Intelectual, lo cual ayude a un mejor entendimiento de su importancia, además, con base en la información obtenida establecer las distribuciones de probabilidad y la estimación de sus parámetros que mejor se ajusten al comportamiento empírico de Frecuencia y Severidad usando las herramientas teóricas que permiten un análisis más profundo y confiable.

El análisis previo que se realizó con la información mostró que el promedio de reclamaciones para aquellas compañías que forman parte de la base de datos durante los diez años de estudio es de 41, con un valor máximo observado de 806 y un mínimo de 0, sin embargo, el valor más observado de reclamaciones es de 2. Por otro lado, el promedio de la severidad fue de 27 mil dólares, aunque algunas compañías registraron pérdidas superiores a los dos millones de dólares.

El proceso de poner a prueba una hipótesis se refiere a la toma de decisiones para rechazar H_0 , por ello en aquellos estudios de investigación donde se aplican las pruebas de hipótesis, el nivel de significancia (Error Tipo I) es la probabilidad que voluntariamente asume el investigador de errar al rechazar H_0 cuando en realidad es cierta, por lo cual al momento de analizar las distribuciones de probabilidad se utilizaron a una serie de métodos gráficos y procedimientos, como la prueba de bondad de ajuste Chi-cuadrado, que permitieron comparar, obtener la estimación de parámetros, y de ser necesario descartar las distribuciones que su ajuste no era el mejor, lo anterior con la finalidad de seguir la bibliografía teórica y encontrar aquella distribución que mejor se ajuste a los valores observados de Frecuencia y Severidad.

Para la frecuencia se analizaron las distribuciones de Poisson, Binomial y la Binomial Negativa como lo sugieren Arbeláez (2008) y Gilenko y Mironova (2017), siendo la distribución de Poisson la que obtuvo los mejores resultados al usar el método de máxima verosimilitud, confirmando el grupo de Hipótesis 2, la cual menciona que la frecuencia de

siniestros sigue una distribución Poisson, además, ahora conocemos el valor del parámetro $\lambda = 5.365$.

Para el estudio de la Severidad el análisis se realizó usando el método de máxima verosimilitud. Además, se emplearon las pruebas Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling para comparar las distribuciones Gamma, Weibull, Pareto y Lognormal como lo sugieren Gilenko y Mironova (2017) y Arbeláez (2008), haciendo referencia al grupo de Hipótesis de la sección 4.2.2.2, la cual menciona que la severidad sigue una distribución Lognormal con parámetros $\hat{\mu} = 9.778$ y $\hat{\sigma} = 1.6849$. Usando un gráfico Q-Q (ver gráfico 4.8) del ajuste a la distribución Log-normal se nota que los puntos se aproximan al comportamiento lineal por lo cual es posible considerar que la función empírica de la distribución acumulada es similar a la teórica.

En resumen, es posible concluir que el número de reclamaciones derivadas por litigios de Propiedad Intelectual en Estados Unidos de 2008 a 2018 sigue una distribución Poisson con los parámetros antes mencionados, y es posible modelar la severidad de los daños con una distribución Lognormal, ya que a lo largo de las pruebas fue la que mejor se ajustó a los datos. Lo anterior con la finalidad de servir como un modelo inicial para el análisis de la Frecuencia y Severidad de cualquier compañía, aunque considerando que el estudio se encuentra estructurado con información de Estados Unidos, al no existir un modelo similar o información disponible de otros países este estudio podría usarse como punto de partida para cualquier empresa que considere tener un riesgo implícito dentro de su actividad y desee cuantificar una pérdida potencial, de tal manera que cualquier entidad se encuentre preparada para asumir los riesgos derivados de reclamaciones por Propiedad Intelectual.

Anexo 1: Test de Kolmogorov-Smirnov.

Distribución normal con parámetros estimados

n	$\alpha=0.20$	$\alpha=0.15$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
4	0,3027	0,3216	0,3456	0,3754	0,4129
5	0,2893	0,3027	0,3188	0,3427	0,3959
6	0,2694	0,2816	0,2982	0,3245	0,3728
7	0,2521	0,2641	0,2802	0,3041	0,3504
8	0,2387	0,2502	0,2649	0,2875	0,3331
9	0,2273	0,2382	0,2522	0,2744	0,3162
10	0,2171	0,2273	0,241	0,2616	0,3037
11	0,208	0,2179	0,2306	0,2506	0,2905
12	0,2004	0,2101	0,2228	0,2426	0,2812
13	0,1932	0,2025	0,2147	0,2337	0,2714
14	0,1869	0,1959	0,2077	0,2257	0,2627
15	0,1811	0,1899	0,2016	0,2196	0,2545
16	0,1758	0,1843	0,1956	0,2128	0,2477
17	0,1711	0,1794	0,1902	0,2071	0,2408
18	0,1666	0,1747	0,1852	0,2018	0,2345
19	0,1624	0,17	0,1803	0,1965	0,2285
20	0,1589	0,1666	0,1764	0,192	0,2226
25	0,1429	0,1498	0,1589	0,1726	0,201
30	0,1315	0,1378	0,146	0,159	0,1848
31	0,1291	0,1353	0,1432	0,1559	0,182
32	0,1274	0,1336	0,1415	0,1542	0,1798
33	0,1254	0,1314	0,1392	0,1518	0,177
34	0,1236	0,1295	0,1373	0,1497	0,1747
35	0,122	0,1278	0,1356	0,1478	0,172
36	0,1203	0,126	0,1336	0,1454	0,1695
37	0,1188	0,1245	0,132	0,1436	0,1677
38	0,1174	0,123	0,1303	0,1421	0,1653
39	0,1159	0,1214	0,1288	0,1402	0,1634
40	0,1147	0,1204	0,1275	0,1386	0,1616
41	0,1131	0,1186	0,1258	0,1373	0,1599
42	0,1119	0,1172	0,1244	0,1353	0,1573
43	0,1106	0,1159	0,1228	0,1339	0,1556
44	0,1095	0,1148	0,1216	0,1322	0,1542
45	0,1083	0,1134	0,1204	0,1309	0,1525
46	0,1071	0,1123	0,1189	0,1293	0,1512
47	0,1062	0,1113	0,118	0,1282	0,1499
48	0,1047	0,1098	0,1165	0,1269	0,1476
49	0,104	0,1089	0,1153	0,1256	0,1463
50	0,103	0,1079	0,1142	0,1246	0,1457
n>50	0,724165/ \sqrt{n}	0,758905/ \sqrt{n}	0,8043545/ \sqrt{n}	0,875897/ \sqrt{n}	1,0210785/ \sqrt{n}

n: tamaño de la muestra
 α : nivel de significación

La tabla anterior fue extraída del libro *New Tables and numerical approximation for the kolmogorov-Smirnov/Lillerfors/Van Soest test of normality* creado por Molin & Abdi (1998).

Anexo 2: Tabla de Valores Críticos Prueba Anderson-Darling.

La siguiente Tabla fue extraída del Anexo E del libro Análisis de suficiencia para riesgos catastróficos y grandes riesgos. Caso especial: terremoto y erupción volcánica creado por Williams & García (2009).

Case	Adjusted test statistic	$1 - \alpha$			
		0.900	0.950	0.975	0.990
All parameters known	A_n^2 for $n \geq 5$	1.933	2.492	3.070	3.857
$N(\bar{X}(n), S^2(n))$	$\left(1 + \frac{4}{n} - \frac{25}{n^2}\right) A_n^2$	0.632	0.751	0.870	1.029
$\text{Expo}(\bar{X}(n))$	$\left(1 + \frac{0.6}{n}\right) A_n^2$	1.070	1.326	1.587	1.943
$\text{Weibull}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	$\left(1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}\right) A_n^2$	0.637	0.757	0.877	1.038
$\text{Log-logistic}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	$\left(1 + \frac{0.25}{\sqrt{n}}\right) A_n^2$	0.563	0.660	0.769	0.906

Bibliografía

- Arbeláez, L. C. (2008). Loss Distribution Approach (LDA): Metodología actuarial aplicada al riesgo operacional. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 7(13), págs. 143-156. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/279422789_Loss_Distribution_Approach_LDA_metodologia_actuarial_aplicada_al_riesgo_operacional
- ARL. (2017). *Association or Research Libraries*, 1. (ARL) Recuperado el 25 de February de 2020, de Copyright Timeline: A History of Copyright in the United States: [https://www.arl.org/copyright-timeline/#:~:text=The%20First%20Congress%20implemented%20the,Statute%20of%20Anne%20\(1710\)](https://www.arl.org/copyright-timeline/#:~:text=The%20First%20Congress%20implemented%20the,Statute%20of%20Anne%20(1710))
- Barragan, J. (2018). *Antecedentes de la Propiedad Intelectual*. Obtenido de Medium: <https://medium.com/@janethb.cuevas/antecedentes-de-la-propiedad-intelectual-c2f90162ee03>
- Carmona, M., & Carrión, H. (2015). *Potencia de la prueba estadística de normalidad jarque-bera frente a las pruebas Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-cuadrada, Chen-Shapiro y Shapiro-Wilk*. Tesis, Universidad Autónoma del Estado de México, Facultad de Economía, Toluca. Recuperado el 6 de Octubre de 2020, de <https://core.ac.uk/download/pdf/159384191.pdf>
- Fontnouvelle de, P., Rosengren, E., & Jordan, J. (2007). Implications of Alternative Operational Risk Modelling. En I. National Bureau of Economic Research (Ed.), *The Risks of Financial Institutions* (págs. 475-511). Chicago, United States: University of Chicago Press. Recuperado el 16 de 02 de 2021, de National Boreu of Economic Research: <https://www.nber.org/chapters/c9617>
- Gilenko, E. V., & Mironova, A. E. (2017). Modern claim frequency and claim severity models: An application to the Russian motor own damage insurance market. (U. d. Bernardo Spagnolo, Ed.) *Cogent economics & finance*, 5(1), págs. 1-12. Recuperado el 17 de Enero de 2020, de <https://www.cogentoa.com/article/10.1080/23322039.2017.1311097>
- Gómez, M., & Marí, M. (2020). *La distribución Binomial*. Universidad Politécnica de Valencia, Estadística, Investigación Operativa Aplicadas y Calidad. Valencia: UPV. Recuperado el 16 de Agosto de 2020, de <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/7936/Distribucion%20binomial.pdf>
- Grillo, L. R. (2011). LA PROPIEDAD INDUSTRIAL Y LA COMPETENCIA DESLEAL: Especial referencia a las patentes, modelos de utilidad, marcas y diseños industriales. *Revista de Estudios Jurídicos UNESP*, 14(19), págs. 20-30. doi:10.22171/rej.v14i19.220
- I. M.P.I. (2019). *La propiedad industrial en México*. Recuperado el 25 de Octubre de 2020, de Blog Secretaría de Economía: <https://www.gob.mx/se/articulos/la-propiedad-industrial-en-mexico-196503>
- INAPI. (2020a). *¿Qué son las patentes?* Obtenido de Instituto Nacional de Propiedad Industrial (INAPI): <https://www.inapi.cl/portal/institucional/600/w3-article-744.html>
- INAPI. (May de 2020b). *Instituto Nacional de Propiedad Industrial (INAPI)*. (INAPI) Recuperado el 19 de September de 2020, de ¿Qué es el PTC?: <https://www.inapi.cl/portal/institucional/600/w3-article-1108.html>
- INAPI. (2020c). *La Propiedad Intelectual y su importancia actual*. Obtenido de Instituto Nacional de Propiedad Industrial (INAPI): <https://www.inapi.cl/portal/institucional/600/w3-article-839.html>

- López, C., & Estrada, A. (2007). *Edición y Derecho de Autor en las publicaciones de la UNAM*. (Universidad Nacional Autónoma de México) doi:970-32-4299-5
- Mendenhall, W., Wakerly, D., & Scheaffer, R. (2008). *Estadística matemática con aplicaciones* (7ma ed.). (S. R. González, Ed.) Florida, Orlando, Estados Unidos: CENGAGE Learning. Recuperado el 2 de October de 2020, de https://www.academia.edu/32413149/Estadistica_Matematica_con_Aplicaciones_Mendenhall
- Molin, P., & Abdi, H. (1998). New Tables and numerical approximation for the Kolmogorov-Smirnov/Lilliefors/Van Soest test of normality. En P. Molin, & H. Abdi. Bourgogne: University of Bourgogne. Obtenido de http://caminos.udc.es/info/asignaturas/grado_tecic/201/pdf/Tablas/Lilliefors.pdf
- Omari, C. O., Nyambura, S. G., & Mwangi, J. M. (2018). Modeling the Frequency and Severity of Auto Insurance Claims using Sttistical Distributions. *Scientific Research Publishing, 8*, págs. 137-160. Recuperado el 27 de Noviembre de 2020, de https://www.scirp.org/pdf/JMF_2018022415512374.pdf
- OMPI. (2020a). *Organización Mundial de la Pripiedad Intelectual*. (OMPI) Recuperado el 10 de Junio de 2020, de Tratados administrados por la OMPI: https://www.wipo.int/treaties/es/ShowResults.jsp?treaty_id=2
- OMPI. (2020b). *Organización Mundial de la Propiedad Intelectual*. (OMPI, Editor) Recuperado el 12 de Julio de 2020, de Reseña del Convenio de París para la Protección de la Propiedad Industrial: https://www.wipo.int/treaties/es/ip/paris/summary_paris.html
- PAREDRO. (2015). *Paredro*. Recuperado el 18 de Julio de 2020, de Paredro.com: <https://www.paredro.com/conoce-la-diferencia-entre-copyright-trademark-y-patente/>
- Procure, I. (2020). History of patents. (A. Tankha, Ed.) sewell, New Jersey, Estados Unidos: IP Legal Services. Recuperado el 2 de September de 2020, de http://www.ipprocurement.com/intellectual_property/patents_history.html
- Quishpe, I. (2015). Factores de riesgo de siniestralidad y cálculo de primas de los vehiculos asegurados en el ecuador mediante modelos lineales generalizados. *1*, 119. (M. Guachamín, Ed.) Quito, Quito, Colombia. Recuperado el 16 de Julio de 2020, de <https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/9256/3/CD-6122.pdf>
- Reza, M., & García, E. (1996). Simulación y análisis de modelos estocásticos. En M. Reza, & E. García, *Pruebas de Bondad de Ajuste* (págs. 11-19). México, México, México: e-uaem. Recuperado el 03 de Octubre de 2020, de http://metabase.uaem.mx/bitstream/handle/123456789/556/3.-_Pruebas_de_bondad_de_ajuste.pdf?sequence=1
- Roffle, P. (1987). Evolución e Importancia del sistema de la Propiedad Intelectual. *Comercio Exterior, 37*(12), págs. 1039-1045. México, México: BANCOMEXT. Obtenido de <http://revistas.bancomext.gob.mx/rce/magazines/205/5/RCE5.pdf>
- U.S. Copyright Office. (2018). *Rulemaking Proceedings*. Recuperado el 20 de Julio de 2020, de Rulemaking Proceedings Under Section 1201 of Title 17: <https://www.govinfo.gov/content/pkg/FR-2018-10-26/pdf/2018-23241.pdf>

- USPTO. (2020). *United States Patent and Trademark Office*. (The United States Patent and Trademark Office) Recuperado el 08 de Octubre de 2020, de The United States Patent and Trademark Office (USPTO): <https://www.uspto.gov/about-us>
- Vargas-Chaves, I., Amparo Rodríguez, G., & Blumenkranc, H. (2020). Razón De Ser Del Reconocimiento De Los Conocimientos Tradicionales Agrícolas *Elementos Para Su Caracterización En El Ordenamiento Jurídico Colombiano*, por Iván Vargas-Chaves et al., 1st ed., Editorial Universidad Del Rosario, Bogotá D. C., 2020, pp. 27–36.
- Vergara Schmalabh, J., & Quesada Ibarquén, V. (2007). *Estadística Básica con aplicaciones en MS Excel* (Vol. 1). Cartagena, Cartagena, Colombia: Grupo Métodos Cuantitativos de Gestión. Recuperado el 15 de 02 de 2021, de <https://www.eumed.net/libros-gratis/2007a/239/indice.htm>
- Viguri, A. (2016). Antecedentes históricos. En A. Viguri, & A. Fayos (Ed.), *El derecho de la propiedad intelectual en los Estados Unidos* (1st ed., Vol. 1, págs. 411-431). Pittsburgh, Pensilvania, Estados Unidos: Dykinson. doi:9788490858981
- Williams, M., & García, K. (2009). Análisis de suficiencia para riesgos catastróficos y grandes riesgos. Caso especial: terremoto y erupción volcánica. En M. Williams, *Simulation Modeling and Analysis* (pág. 804). Cholula, Puebla, México. Recuperado el 19 de October de 2020, de http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lat/garcia_c_ki/
- WIPO. (2019). *OMPI Organización Mundial de la Propiedad Intelectual*. (WIPO, Editor) Recuperado el 26 de Octubre de 2020, de Reseña del Convenio que establece la Organización Mundial de la Propiedad Intelectual (Convenio de la OMPI) (1967): https://www.wipo.int/treaties/es/convention/summary_wipo_convention.html#:~:text=Los%20or%C3%ADgenes%20de%20la%20OMPI,de%20sendas%20%22Oficinas%20Internacionales%22.
- Zukerfeld, M. (2011). Las regulaciones del acceso a los conocimientos en el periodo preindustrial. Introducción a una sociología histórica de la propiedad intelectual. 17(32). (U. N. Quilmes, Ed.) Buenos Aires, Quilmes, Argentina: Redes. Recuperado el 5 de September de 2020, de <https://www.redalyc.org/pdf/907/90722371001.pdf>