UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS b-MÉTRICOS

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Jafet Marino Bernal Mancilla

ASESOR DE TESIS:
Dr. Enrique Castañeda Alvarado

El Cerrillo, Piedras Blancas, México
09 de julio de 2021

A mi familia, gracias
por tanto apoyo y cariño.

Agradecimientos.

Primero quiero agradecer a mi familia, por todo el apoyo y consejos que me estuvieron brindando a lo largo de toda la carrera. Por enseñarme a ser una persona responsable y de igual manera, la importancia de trabajar en equipo. Por demostrarme que la familia siempre estará para tí en los momentos mas felices de tu vida y en los momentos más complicados.

Agradezco a mi mamá, Belem, que a pesar de sus regaños, fue una de las personas que me apoyó a continuar con mis estudios y no darme por vencido.

A mi papá, Santos que me enseño a trabajar y ser tolerante para alcanzar mis metas.

A mis hermanos, gracias por darme un buen ejemplo a seguir y gracias por estar siempre conmigo en los buenos y malos momentos.

A mi tía y tío, Carmen y Carlos que desde pequeño me brindaron su cariño, gracias por enseñarme a trabajar y ser una persona de bien.

A Jeovana, que además de ser mi novía, es mi amiga, gracias por animarme a no renunciar a la carrera y por estar siempre en los buenos y malos momentos que pasamos.

Agradezco a mi asesor, Dr. Enrique Castañeda Alvarado, por darme un poco de su tiempo y paciencia para trabajar conmigo y enriquecer el trabajo día con día.

Agradezco a mis revisores, Dr. Alfredo Cano Rodríguez y al Dr. David Maya Escudero, por tomarse el tiempo para revisar el trabajo y por las observaciones que me hicierón para mejorarlo.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigas, Diana, Pao, Martha y Janeth, por estar siempre en los momentos más divertidos y complicados. Sus conocimientos me ayudaron a mejorar.

Resumen

Una función entre espacios topológicos tiene un punto fijo, si existe un punto el cual permanece invariente bajo la función. Decimos que un espacio topológico tiene la propiedad del punto fijo si cualquier función continua del espacio en sí mismo, tiene un punto fijo.

En esta tesis se estudia la propiedad del punto fijo en espacios b-métricos los cuales son una generalización de los espacios métricos, para ello nos apoyamos de las siguientes clases de funciones: las funciones (b)-comparación, las funciones $\alpha - \psi$-contractivas de tipo (b), las funciones orbitalmente continuas y las funciones $\alpha - \omega$-Geraghty contractivas generalizadas.

En particular, se estudia la propiedad del punto fijo en espacios b-métricos completos y al final se hace una aplicación, a las ecuaciones integrales, donde se ve la importancia de los resultados que se encuentran en esta tesis.

Introducción

Un punto fijo para una función con dominio y contradominio espacios métricos, (X_1, d_1) y (X_2, d_2) respectivamente, es aquel que permanece invariable bajo la función, es decir su imagen es él mismo. Dicho esto, decimos que un espacio métrico (X, d) tendrá la propiedad del punto fijo si cualquier función continua, definida de X en sí mismo, tiene un punto fijo.

La teoría del punto fijo ha sido ampliamente estudiada durante muchos años y tiene muchas aplicaciones en las matemáticas. Todo comenzó con Poincaré a finales del siglo XIX quien demostró que la solución de ciertos problemas analíticos se podían estudiar definiendo un conjunto M y una función $T : M \to M$, donde las soluciones del problema serían los puntos fijos de T. Con el paso del tiempo, la teoría del punto fijo se siguió estudiando y al igual que la topología, se convirtió en un tema muy importante.

La idea de espacio b-métrico comenzó a partir de los trabajos de Bourbaki y Bakhtin, luego en el año de 1993, Czerwik en [3] introdujo la definición de espacio b-métrico de la siguiente manera:

"Sea M un conjunto no vacío. Decimos que M es un espacio b-métrico si existe una función $d : M \times M \to [0, \infty)$ tal que para cualquier par de puntos x y y en M se satisface que,

(i) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) \leq 2[d(x, z) + d(z, y)]$ para todo $z \in M$.

Al par (M, d) lo llamaremos espacio b-métrico."

Sin embargo, en el año de 1998, Czerwik [4], generalizó la definición anterior reemplazando el número 2 por $s \geq 1$, esto con la finalidad de generalizar el Teorema de Contracción de Banach.

En esta tesis, el principal objetivo es analizar resultados que nos ayudarán a determinar que espacios b-métricos tienen la propiedad del punto fijo y también generalizar algunos resultados que están en el marco de espacios métricos tal y como lo hizo Czerwik, con el Teorema del Principio de Contracción de Banach. Para tal efecto, nos apoyaremos de [6]. Este trabajo consta de los siguientes cuatro capítulos:

En el primer capítulo recordamos algunas propiedades básicas para espacios métricos y algunos resultados muy conocidos que nos serán de mucha ayuda a lo largo del trabajo. También, incluimos tres teoremas muy importantes, en donde más adelante se dará un demostración distinta a la de este capítulo. Adicionalmente, generalizamos las propiedades dadas en secciones anteriores, pero en el sentido de espacios b-métricos, también incluimos la definición de funciones b-comparación y analizamos cuando estas funciones tienen un punto fijo.

En el Capítulo 2, definimos nuevas funciones a partir de las funciones b-comparación y de la misma manera que en el Capítulo 1 analizamos cuando estas tienen un punto fijo. También, estudiamos principalmente un tipo de estabilidad de Ulam, la cual es la estabilidad generalizada de Ulam-Hyers, pero en espacios b-métricos.

En el Capítulo 3, demostramos los famosos teoremas de punto fijo no único de Achari, Pachpatte y de Ćirić, los cuales serán consecuencia inmediata de algunos resultados vistos en el mismo capítulo. También vemos bajo que condiciones una función definida en un espacio b-métrico tiene más de un punto fijo.

En el Capítulo 4, estudiamos que espacios b-métricos tienen la propiedad del punto fijo para funciones $\alpha - \omega$-Geraghty contractivas generalizadas. También analizamos la propiedad del punto fijo en espacios b-métricos α-regulares. Así mismo estudiamos la propiedad del punto fijo en espacios b-métricos parcialmente ordenados, y aplicamos estos resultados acerca de la propiedad el punto fijo para resolver una ecuación integral y demostrar que tiene una única solución.

Índice general

Capítulo 1

Espacios métricos y b-métricos

En este capítulo se introducen algunos resultados que serán de utilidad a lo largo de todo este trabajo, primero comenzaremos con el concepto de espacio métrico y con algunos resultados básicos de convergencia, posteriormente se enuncian algunos conceptos y propiedades en espacios de Banach. Finalmente, incluimos el Teorema de Ciric, el cual garantiza la existencia de un punto fijo para ciertas funciones.

1.1. Espacios métricos y algunos resultados de convergencia

Antes de comenzar con la definición de espacio métrico, primero veamos los siguientes resultados que nos serán de utilidad más adelante.

Recordemos que, una función real de variable real es cóncava en un intervalo, si para cualesquiera a y b en ese intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$, queda por debajo de la gráfica de la función; mientras que una función convexa es lo opuesto a una función cóncava, es decir, una función real de variable real es convexa en un intervalo, si dados dos puntos c, d en el intervalo, el segmento rectilíneo que une $(c, f(c))$ con $(d, f(d))$, queda por encima de la gráfica de la función.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Dados números $x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo (a, b) y números no negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1,$$

se tiene que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Para una función cóncava se obtiene un resultado similar, cambiando el sentido de la desigualdad.

Proposición 1.1. *Si* $a_j \geq 0$ $(1 \leq j \leq n)$ *y* $p \geq 1$, *entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^p \leq n^{p-1} \sum_{j=1}^{n} a_j^p.$$

La desigualdades inversas se satisfacen si $0 < p \leq 1$.

Demostración:

Asumimos que $p \geq 1$. Supongamos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j = A$ y sea $x_j = \frac{a_j}{A}$. Así, $0 \leq x_j \leq 1$ y

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{A} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{A} = 1.$$

Dado que $0 \leq x_j \leq 1$, $x_j^p \leq x_j$. Así, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^p \leq \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$. De aquí, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j^p \leq A^p$. Es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^p.$$

Ahora, sabemos que la función $f(x) = x^p$ es convexa si $p > 1$ y tomando $\lambda_j = \frac{1}{n}$ para toda $j \in \{1, 2, \ldots\}$ se tiene que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$. Por el Teorema 1.1,

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} a_j \right) \leq \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^{n} f(a_j) \right],$$

es decir,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \right)^p \leq \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^{n} (a_j)^p \right].$$

Por lo tanto, $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^p \leq n^{p-1}\sum_{j=1}^{n} a_j^p.$

Si $0 < p \leq 1$ entonces haciendo un procedimiento similar al anterior y utilizando que la función $f(x) = x^p$ es cóncava (pues $0 < p \leq 1$) se puede demostrar que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^p \geq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^p \geq n^{p-1}\sum_{j=1}^{n} a_j^p.$$

■

Definición 1.1. *Sea M un conjunto, cuyos elementos serán llamados puntos. Decimos que M es un* ***espacio métrico*** *si existe una función $d : M \times M \to [0, \infty)$ tal que para cualquier par de puntos x y y en M se satisface que:*

(i) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para todo* $z \in M$.

Cualquier función d que satisface esas tres propiedades es llamada función distancia o métrica. Al par (M, d) lo llamaremos espacio métrico.

Definición 1.2. *Para cada entero positivo k, sea $\mathbb{R}^k$ el conjunto de todas las k-tuplas ordenadas*

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k),$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_k$ son números reales, llamados las coordenadas de x. Los elementos de $\mathbb{R}^k$ son llamados vectores, especialmente cuando $k > 1$.
Definimos el ***producto escalar*** *de x y y por*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i,$$

y la norma de x por

$$\| x \| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ejemplo 1.1. *Consideremos* $\mathbb{R}^k$ *donde* $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, *la distancia en* $\mathbb{R}^k$ *esta definida por*

$$d_u(x, y) = \parallel x - y \parallel = \sqrt{\sum_{n=1}^{k} (x_n - y_n)^2},$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^k$.
Así, $(\mathbb{R}^k, d_u)$ *es un espacio métrico.*

Sólo mostraremos la propiedad (iii) de la Definición 1.1, ya que por propiedades de norma, se satisface (i) y (ii). Y recordando la desigualdad de Cauchy-Schwarz la cual nos dice que:

$$x \cdot y \leq \parallel x \parallel \parallel y \parallel .$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^k$, se tiene que

$$\begin{aligned} \parallel x + y \parallel^2 &= (x + y)(x + y) \\ &= x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \\ &\leq \parallel x \parallel^2 + 2 \parallel x \parallel \parallel y \parallel + \parallel y \parallel^2 \\ &= \Big(\parallel x \parallel + \parallel y \parallel \Big)^2. \end{aligned}$$

Así, utilizando la desigualdad anterior,

$$\parallel x - z \parallel = \parallel (x - y) + (y - z) \parallel \leq \parallel x - y \parallel + \parallel y - z \parallel \quad \text{para cualesquiera } x, y, z \in \mathbb{R}^k.$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R}^k, d_u)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.2. *Sea* M *un conjunto no vacío y definimos la métrica* d *como sigue*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y, \\ 1 & si \quad x \neq y. \end{cases}$$

Entonces (M, d) *es un espacio métrico y lo llamaremos espacio métrico discreto.*

Ejemplo 1.3. *Sean* X *un espacio topológico y* $M = C(X)$ *es el conjunto de funciones continuas* $f : X \to \mathbb{R}$. *Consideremos la métrica* d *como sigue*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Entonces (M, d) *es un espacio métrico.*

Las propiedades (i) y (ii) de la Definición 1.1 son claras. La última propiedad es consecuencia inmediata de que $(\mathbb{R}, d_u)$ es un espacio métrico.

Los siguientes ejemplos no son espacios métricos, sin embargo nos serán de ayuda más adelante.

Ejemplo 1.4. *Sea $M = \{0, 1, 2\}$. Definimos $d : M \times M \to [0, \infty)$ de la siguiente manera:*

$$d(0,1) = 1, d(0,2) = \frac{1}{2} \text{ y } d(1,2) = 2,$$

con $d(x,x) = 0$ y $d(x,y) = d(y,x)$ para cualesquiera $x, y \in M$. Entonces (M, d) no es un espacio métrico.

En efecto, pues $d(1,2) > d(1,0) + d(0,2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, es decir, no cumple la propiedad (iii) de la Definición 1.1. Por lo tanto, (M, d) no es un espacio métrico.

Ejemplo 1.5. *Sea $M = \mathbb{R}$ y consideremos $d : M \times M \to [0, \infty)$ como sigue,*

$$d(x,y) = \left|x - y\right|^2.$$

Entonces (M, d) no es un espacio métrico.

Notemos que tomando $x = -2, y = 0$ y $z = 5$ se tiene que $|x - z|^2 = 49 > |x - y|^2 + |y - z|^2 = 4 + 25 = 29$. Por lo tanto, (M, d) no es un espacio métrico.

Definición 1.3. *Sean (X, d) un espacio métrico y $U \subset X$. Diremos que U es* ***abierto*** *si para cualquier $p \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subset U$.*
Un conjunto $F \subset X$ es ***cerrado*** *si y sólo si $X - F$ es abierto.*

Definición 1.4. *Sea (M, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M* ***converge*** *a un punto $x \in M$ si para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $d(x_n, x) < \epsilon$. O equivalentemente, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M* ***converge*** *a un punto $x \in M$ si el siguiente límite existe y es cero, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)$.*
En este caso, decimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y lo denotamos por $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 1.6. *Sea $M = \mathbb{R}$ y consideramos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M dada mediante $x_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Sea $\epsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \epsilon$. Esto implica que para todo $n \geq N$,

$$|x_n - x| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Por lo tanto, $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Definición 1.5. *Dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, consideramos una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos, tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Entonces la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es llamada* ***subsucesión*** *de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge, el límite es llamado límite subsecuencial de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Ejemplo 1.7. *Sea $M = \mathbb{R}$ y consideremos la sucesión del Ejemplo 1.6. Notemos que si $n_k = 2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ consta de enteros positivos, tales que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Así, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Afirmación. $x_{n_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$.
En efecto, sea $\epsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \epsilon$. Esto implica que para todo $k \geq N$,

$$|x_{n_k} - 0| = \left|\frac{1}{2k}\right| \leq \frac{1}{2N} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Por lo tanto, $x_{n_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$ y así, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con límite subsecuencial cero.

Observación 1.1. *Notemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x si y sólo si cualquier subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

Definición 1.6. *Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico M es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que para $n, m \geq N$ tenemos que $d(x_n, x_m) < \epsilon$. O equivalentemente, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una* ***sucesión de Cauchy*** *si el límite $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_m)$ existe y es cero.*

Proposición 1.2. *Toda sucesión convergente es de Cauchy*

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente. Esto implica que para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Así, si tomamos $n, m \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. ■

Observación 1.2. *Por la Proposición 1.2 se tiene que el Ejemplo 1.6 es una sucesión de Cauchy.*

Definición 1.7. *Un espacio métrico es* ***completo****, si cualquier sucesión de Cauchy converge.*

Ejemplo 1.8 (ver [9], p. 54)**.** *Si X es un espacio métrico completo y $E \subset X$ tal que E es un subconjunto cerrado, entonces E es completo.*

Proposición 1.3. *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración:

Basta con mostrar la necesidad, pues la suficiencia es consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de números reales. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p, q \geq m$ implica que $|x_p - x_q| < 1$, en particular, si $K = x_m$ y tomando $q = m$ tenemos que para $p \geq m$,

$$K - 1 < x_p < K + 1,$$

con esto, el conjunto $\{x_n : n \geq m\}$ es acotado. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual se encuentra en [9], pag. 51, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Consideremos

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen N_1 y $N_2 \in \mathbb{N}$ de modo que si $p, q \geq N_1$ y $n_k \geq n_{N_2}$ se tiene que

$$|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

respectivamente. Por lo tanto, para todo $n \geq \max\{N_1, n_{N_2}\}$ se tiene que

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_{N_2}}| + |x_{n_{N_2}} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Ejemplo 1.9. *En $\mathbb{R}$, cualquier sucesión de Cauchy converge.*

Se sigue de la Proposición 1.3.

Definición 1.8. *Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales es:*

(i) ***monótona creciente*** *si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) ***monótona decreciente*** *si $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.9. *Sean $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales y E el conjunto de números x tales que $s_{n_k} \to x$ para alguna subsucesión $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.*
Sean

$$s^* = \sup E,$$

$$s_* = \inf E.$$

Los números s^* y s_* son llamados ***límites superiores e inferiores*** *respectivamente de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$; usamos la siguiente notación*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = s^*, \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = s_*.$$

Observación 1.3. *Observemos que si $s^* = s_*$ entonces la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y $\lim_{n\to\infty} s_n = s^*$.*

Ejemplo 1.10. *Consideremos $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión dada mediante $s_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$. Entonces,*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = -1.$$

En efecto, la subsucesión $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a 1 cuando k tiende a infinito si $n_k = 2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ya que

$$s_{n_k} = s_{2k} = \frac{1}{1+\frac{1}{2k}}.$$

Sin embargo, si $n_k = 2k+1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces la subsucesión $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a -1 cuando k tiende a infinito, pues

$$s_{n_k} = s_{2k+1} = \frac{-1}{1+\frac{1}{2k+1}}.$$

Con esto, $E \subset \{-1, 1\}$.
Ahora, sea $x \in \{-1, 1\}$. Si $x = 1$ entonces $s_{n_k} \to 1$ cuando $k \to \infty$ tomando $n_k = 2k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Si $x = -1$ entonces cuando $n_k = 2k+1$ para toda $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $s_{n_k} \to -1$ cuando $k \to \infty$. Se sigue que $E = \{-1, 1\}$ y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = -1.$$

Ejemplo 1.11. *Sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que contiene a todos los racionales. Dado que los racionales son densos en los reales, cualquier número real es límite subsecuencial y*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty, \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty.$$

Definición 1.10. *Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ asociamos la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales, donde*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La expresión simbólica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.1}$$

*es llamada **serie infinita**. Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a s decimos que la serie infinita converge, y escribimos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge, decimos que la serie infinita diverge.

Los siguientes resultados son muy conocidos y serán de gran utilidad para demostrar algunos resultados de esta tesis, la demostración de cada uno de ellos se encuentra en [9], así como también algunos ejemplos de como se aplican estos resultados.

Teorema 1.2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proposición 1.4. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente, entonces converge.*

Teorema 1.3 (Criterio de comparación)**.** *Si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, donde* $b_k \geq 0$, *y* $0 \leq a_k \leq b_k$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *también converge. Si* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *diverge y* $0 \leq c_k \leq d_k$, *se sigue que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *también diverge.*

Proposición 1.5 (Prueba de la razón para series reales)**.** *Supóngase que*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existe y es menor que 1, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge absolutamente. Si el límite es mayor que 1 la serie diverge, y si el límite es 1 puede ocurrir cualquiera de las dos cosas.*

1.2. Teorema de Ćirić y algunos teoremas del punto fijo en espacios métricos

En esta sección mencionaremos algunos resultados existentes, los cuales más adelante serán consecuencia inmediata de algunos teoremas que analizaremos a lo largo de esta tesis. Uno de esos resultados, es el Teorema de Ćirić [2], cuya demostración mostraremos en seguida, pero antes, enunciamos las siguientes definiciones.

Definición 1.11. *Sean* (M, d) *un espacio métrico y* $T : M \to M$ *una función. Dado* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *definimos la* n-***ésima iteración*** *de* T *denotada por* T^n, *donde*

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n-veces}, \qquad si\ n \neq 0.$$

Y si $n = 0$ *entonces* T^n *es la función identidad.*

Definición 1.12. *Sean X un espacio topológico y $T : X \to X$ una función. Si $x \in X$ es tal que $T(x) = x$ entonces x es un punto fijo de T. Un espacio topológico X tiene la* ***propiedad del punto fijo*** *si cualquier función continua $T : X \to X$ tiene un punto fijo.*

Definición 1.13. *Sean X un espacio topológico y $T : X \to X$ una función. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$*

$$T^{n+1}(x) = T^n(x),$$

entonces x es un punto ***eventualmente fijo*** *de T.*

Definición 1.14. *Sean (M, d) un espacio métrico y $T : M \to M$ una función. Decimos que T es* ***orbitalmente continua*** *en un punto $z \in M$ si $\lim\limits_{i\to\infty} T^{n_i}(x) = z$ implica que $\lim\limits_{i\to\infty} T(T^{n_i}(x)) = T(z)$.*

Definición 1.15. *Sean (M, d) un espacio métrico y $T : M \to M$ una función. Decimos que (M, d) es $T-$**orbitalmente completo**, si cualquier sucesión de Cauchy de la forma $\{T^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, converge en M, para todo $x \in M$.*

En el Capítulo 3, se hace notar que toda función orbitalmente continua no necesariamente es continua. De igual manera, todo espacio orbitalmente completo no necesariamente es un espacio completo.

Teorema 1.4 (Punto fijo no único de Ćirić)**.** *Sean (M, d) un espacio métrico T-orbitalmente completo y $T : M \to M$ una función orbitalmente continua. Si T satisface la siguiente condición*

$$\begin{aligned} \min\{d(T(x), T(y)), d(x, T(x)), d(y, T(y))\} - \\ \min\{d(x, T(y), d(T(x), y)\} \quad \leq \quad kd(x, y), \end{aligned} \qquad (1.2)$$

para algún $0 < k < 1$ y para cualesquiera $x, y \in M$, entonces para cada $x_0 \in M$, la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Demostración:

Sea $x \in M$ un punto arbitrario. Consideremos en M la sucesión dada mediante

$$x = x_0 \text{ y } x_n = T(x_{n-1}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Inductivamente tenemos que

$$x_n = T^n(x).$$

Si para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_{n-1} = x_n$ entonces $T(x_{n-1}) = x_n = x_{n-1}$, por lo que x es un punto eventualmente fijo.
Supongamos que $x_{n-1} \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (1.2), tenemos que

$$\begin{aligned} &\min\{d(T(x_{n-1}), T(x_n)), d(x_{n-1}, T(x_{n-1})), d(x_n, T(x_n))\} - \\ &\qquad\qquad \min\{d(x_{n-1}, T(x_n)), d(T(x_{n-1}), x_n)\} \leq kd(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \min\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} - \\ \min\{d(x_{n-1}, x_{n+1}), d(x_n, x_n)\} &= \min\{d(x_n, x_{n+1}), \\ &\quad d(x_{n-1}, x_n)\} \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Del hecho que $0 < k < 1$, no sucede que $d(x_{n-1}, x_n) < kd(x_{n-1}, x_n)$, esto implica que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n).$$

Con esto,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k(kd(x_{n-2}, x_{n-1})) \\ &= k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^n d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

es decir,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n d(x, T(x)).$$

Por lo tanto, para $p \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{j=n}^{n+p-1} d(x_j, x_{j+1}) \\ &\leq \left(\sum_{j=n}^{n+p-1} k^j \right) d(x, T(x)) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)). \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$, se sigue que $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. De que M es un espacio T-orbitalmente completo, existe $u \in M$ tal que $u = \lim_{n\to\infty} T^n(x)$. Por hipótesis, T es una función orbitalmente continua, así,

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = u,$$

es decir, u es un punto fijo de T. ■

Los teoremas 1.5 y 1.6 son variantes del Teorema de Ćirić debido a que la desigualdad (1.2) es diferente; se pueden encontrar en [1] y [8] respectivamente.

Teorema 1.5 (Punto fijo no único de Achari.)**.** *Sean* (M, d) *es un espacio métrico* T*-orbitalmente completo y* $T : M \to M$ *una función orbitalmente continua. Si existe* $k \in [0, 1)$ *tal que*

$$\frac{P(x,y) - Q(x,y)}{R(x,y)} \leq kd(x,y), \qquad \textit{para cualesquiera } x, y \in M,$$

donde

$$P(x,y) = \min\{d(T(x),T(y))d(x,y), d(x,T(x))d(y,T(y))\},$$

$$Q(x,y) = \min\{d(x,T(x))d(x,T(y)), d(y,T(y))d(T(x),y)\},$$

$$R(x,y) = \min\{d(x,T(x)), d(y,T(y))\},$$

con $R(x,y) \neq 0$*, entonces para cada* $x \in M$ *la sucesión* $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a un punto fijo de* T.

Teorema 1.6 (Punto fijo no único de Pachpatte.)**.** *Sean* (M, d) *es un espacio métrico* $T-$*orbitalmente completo y* $T : M \to M$ *una función orbitalmente continua. Si existe* $k \in [0, 1)$ *tal que*

$$m(x,y) - n(x,y) \leq kd(x,T(x))d(y,T(y)), \qquad \textit{para cualesquiera } x, y \in M,$$

donde

$$m(x,y) = \min\{[d(T(x),T(y))]^2, d(x,y)d(T(x),T(y)), [d(y,T(y))]^2\},$$

$$n(x,y) = \min\{d(x,T(x))d(y,T(y)), d(x,T(y))d(y,T(x))\},$$

entonces para cada $x \in M$ *la sucesión* $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a un punto fijo de* T.

1.3. Espacios de Banach

En esta sección introducimos algunos conceptos que nos serán de mucha utilidad en capítulos próximos de esta tesis. Primero, comenzamos definiendo los espacios normados, luego los espacios de Banach y por último, los cono espacios métricos.

Definición 1.16. *Un espacio lineal L se dice que es un* ***espacio normado*** *si en él, podemos inducir una función* $\| \cdot \| : L \to \mathbb{R}$ *tal que*

(i) $\| x \| \geq 0$ *para cualquier* $x \in L$, *donde* $\| x \| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

(ii) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$ *para todo* $x \in L$ *y para todo número* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) *Desigualdad triangular.* $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *para cualesquiera* $x, y \in L$.

Ejemplo 1.12. *Para cualquier elemento* $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *podemos definir las siguientes normas:*

(a)

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

(b)

$$\| x \| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

(c)

$$\| x \| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Ejemplo 1.13. *En el conjunto* $C\big([a,b]\big)$, *de todas las funciones continuas* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *definimos la siguiente norma,*

$$\| f \| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Ejemplo 1.14. *Consideremos* m_s *el conjunto de todas las sucesiones reales acotadas* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *al cual le definimos la siguiente norma*

$$\| \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \| = \sup_k |x_k|.$$

Definición 1.17. *Sea L un espacio lineal normado. Decimos que L es un* ***espacio de Banach*** *si toda sucesión de Cauchy converge con respecto a la métrica $d : L \times L \to [0, \infty)$ inducida por la norma mediante*

$$d(x, y) = \parallel x - y \parallel .$$

Los espacios de los ejemplos 1.12, 1.13 y 1.14 son espacios de Banach.

Definición 1.18. *Un subconjunto P de un espacio de Banach E es llamado un* ***cono*** *si satisface las siguientes condiciones:*

(i) *P es cerrado como subconjunto del espacio métrico E, no vacío y $P \neq \{0_E\}$, donde 0_E denota el elemento cero de E,*

(ii) *Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a, b \geq 0$, entonces $ax + by \in P$ para cualesquiera $x, y \in P$,*

(iii) *Si $x \in P$ y $-x \in P$, entonces $x = 0_E$.*

Definición 1.19. *Sea $P \subset E$ un cono. Definimos un orden parcial con respecto a P de la siguiente manera:*

(i) *$x \preceq y$ si y sólo si $y - x \in P$,*

(ii) *$x \prec y$ si $x \preceq y$ y $x \neq y$,*

(iii) *$x \ll y$ si $y - x \in \mathrm{Int}\, P$, donde $\mathrm{Int}\, P$ denota el interior de P.*

El cono P es llamado ***normal*** *si existe un número $K > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in E$*

$$0_E \preceq x \preceq y \textit{ implica } \parallel x \parallel \leq K \parallel y \parallel .$$

Al número K se le llama constante de normalidad.

Ejemplo 1.15. *Sean $E = \mathbb{R}^3$ con la norma del Ejemplo 1.12 inciso* (a) *y $P = \{(x, y, z) \in E : x, y, z \geq 0\}$. Entonces, P es un cono normal, con constante de normalidad $K \geq 1$.*

Primero, se probará que P es un cono.
Observemos que P es un subconjunto de E que es cerrado, no vacío y $P \neq$

$\{0_E\}$. Ahora, sean $a, b \in \mathbb{R}$ de tal manera que $a, b \geq 0$ y tomemos $x, y \in P$. Supongamos que $x = (x_1, x_2, x_3)$ y que $y = (y_1, y_2, y_3)$, así,

$$ax = (ax_1, ax_2, ax_3) \text{ donde cada } ax_i \geq 0,$$

también

$$by = (by_1, by_2, by_3) \text{ donde cada } by_i \geq 0.$$

Esto implica que $ax + by \in P$.
Por último, sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in P$ tal que $-x \in P$. Como $x \in P$, tenemos que $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ y dado que $-x \in P$, se cumple que $-x_1, -x_2, -x_3 \geq 0$. Esto pasa si y sólo si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. De aquí, $x = 0$. Por lo tanto P es un cono.

Ahora, sean $x, y \in E$ tales que $0_E \preceq x \preceq y$, donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$. Entonces $y - x \in P$. Esto implica que $y_i - x_i \geq 0$, es decir, $y_i \geq x_i \geq 0$ para cada $i = 1, 2, 3$.

De aquí, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, con esto concluimos que para $K \geq 1$,

$$\| x \| \leq K \| y \| .$$

Definición 1.20. *Sean X un conjunto no vacío, E un espacio de Banach y $P \subset E$ un cono. Supongamos que la función $d : X \times X \to P$ satisface:*

(i) $0_E \prec d(x, y)$ *para cualesquiera* $x, y \in X$ *y* $d(x, y) = 0_E$ *si y sólo si* $x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, *para cualesquiera* $x, y \in X$,

(iii) $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in X$.

Entonces, d es llamada ***métrica de cono*** *en X y (X, d) es llamado un cono espacio métrico.*

Ejemplo 1.16. *Sean $E = \mathbb{R}^3$ con la norma del Ejemplo 1.12 inciso* (a), *$P = \{(x, y, z) \in E : x, y, z \geq 0\}$ y $X = \mathbb{R}$. Definimos $d : X \times X \to P$ dada mediante*

$$d(x, \tilde{x}) = (\alpha|x - \tilde{x}|, \beta|x - \tilde{x}|, \gamma|x - \tilde{x}|),$$

donde α, β y γ son constantes positivas. Entonces (X, d) es un espacio cono métrico.

Las propiedades (i) y (ii) de la Definición 1.20 se siguen de las propiedades de valor absoluto.
Para la última propiedad, sean α, β y γ constantes positivas. Entonces,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= (\alpha|x-y|, \beta|x-y|, \gamma|x-y|) \\ &\preceq (\alpha(|x-z|+|z-y|), \beta(|x-z|+|z-y|), \gamma(|x-z|+|z-y|)) \\ &= (\alpha|x-z|+\alpha|z-y|, \beta|x-z|+\beta|z-y|, \gamma|x-z|+\gamma|z-y|) \\ &= (\alpha|x-z|, \beta|x-z|, \gamma|x-z|) + (\alpha|z-y|, \beta|z-y|, \gamma|z-y|) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Con esto, d es una métrica de cono en X y por lo tanto (X, d) es un espacio cono métrico.

En las siguientes secciones de este capítulo, generalizamos algunas propiedades y definiciones de espacios métricos a espacios b-métricos, las cuales se analizaron en las secciones anteriores, para después introducir las funciones (b)-comparación y luego, tres lemas que nos serán de mucha ayuda a lo largo de este trabajo.

1.4. Propiedades de espacios b-métricos

Iniciamos con la generalización de la definición de espacio métrico, luego definiremos cuando una sucesión es convergente en un espacio b-métrico y ahí mismo mencionaremos cuando es un espacio completo. Por último, se dará la definición de continuidad de funciones en espacios b-métricos.

Definición 1.21. *Sea M un conjunto y $s \geq 1$ un número real. Una función $d : M \times M \longrightarrow [0, \infty)$ se dice que es una **b-métrica** sobre M si satisface las siguientes condiciones:*

(i) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, z) \leq s\big[d(x, y) + d(y, z)\big]$

para cualesquiera $x, y, z \in M$. Además, el par ordenado (M, d) es llamado espacio b-métrico.

Ejemplo 1.17. *Sea $p \in (0,1)$ y sea $M = L^p[0,1]$ la colección de todas las funciones reales $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$. Para la función $d : M \times M \longrightarrow [0,\infty)$ definida por:*

$$d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} \text{ para cada } x, y \in L^p[0,1].$$

El par ordenado (M,d) forma un espacio b-métrico con $s = 2^{1/p}$.

Veamos la propiedad (i) de la Definición 1.21.
Sean $x, y \in M$. Si $d(x,y) = 0$, entonces,

$$\left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} = 0,$$

esto implica que

$$\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt = 0,$$

de donde $|x(t) - y(t)|^p = 0$, de aquí que $x(t) - y(t) = 0$. Por lo tanto, $x = y$.
Reciprocamente, si $x = y$ entonces, $x(t) - y(t) = 0$. Así,

$$\left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} = 0,$$

es decir, $d(x,y) = 0$.
La propiedad (ii) de la Definición 1.21 se sigue de aplicar propiedades básicas del valor absoluto.
Por último, tomamos $x, y, z \in M$ y utilizando la Proposición 1.1 en la de-

sigualdad 1.3 con $n = 2$, vemos que

$$\begin{aligned}
d(x,z) &= \left(\int_0^1 |x(t) - z(t)|^p dt\right)^{1/p} \\
&\leq 2\left(\int_0^1 |x(t) - z(t)|^p dt\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{2^{1/p}}{2^{1/p}2^{-1}}\left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt + \int_0^1 |y(t) - z(t)|^p dt\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{2^{1/p}}{2^{\frac{1}{p}-1}}\left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt + \int_0^1 |y(t) - z(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad (1.3) \\
&\leq 2^{1/p}\left[\left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |y(t) - z(t)|^p dt\right)^{1/p}\right] \\
&= 2^{1/p}[d(x,y) + d(y,z)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto (M, d) es un espacio b-métrico.

Ejemplo 1.18. *Sea X un conjunto tal que $card(X) \geq 3$. Supongamos que $X = X_1 \cup X_2$ es una partición de X con $card(X_1) \geq 2$. Tomemos $s > 1$ arbitrario. Entonces, la función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ definida por:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \qquad x = y, \\ 2s & si \qquad x, y \in X_1 \ y \ x \neq y, \\ 1 & otro\ caso, \end{cases}$$

es una b-métrica en X, con $s > 1$.

Por como se definió la función d, vemos que se satisfacen las propiedades (i) y (ii) de la Definición 1.21. Para la propiedad (iii), veamos lo siguientes casos:
Si $x, y, z \in X_1$, entonces $d(x,z) = 2s \leq 4s = d(x,y) + d(y,z)$.
Cuando $x \in X_1$ y $y, z \in X_2$, se tiene que $d(x,z) = 1 \leq 2 = d(x,y) + d(y,z)$.
Por último, tomando $x, z \in X_1$ y $y \in X_2$, concluimos que $d(x,z) = 2s = s[1 + 1] = s[d(x,y) + d(y,z)]$.
Por lo tanto, (X, d) es un espacio b-métrico con $s > 1$.

Ejemplo 1.19. *Tomemos $p \in (0, 1)$ y*

$$M = l_p(\mathbb{R}) = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

Definimos $d : M \times M \longrightarrow [0, \infty)$ *por:*

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p},$$

donde $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Entonces,* (M, d) *es una espacio b-métrico con* $s = 2^{1/p}$.

Veamos que (M, d) en efecto es un espacio b-métrico, para lo cual verifiquemos que se cumplen las propiedades de la Definición 1.21.

Para la propiedad (i). Sean $x, y \in M$. Si $d(x, y) = 0$, entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p} = 0,$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p = 0,$$

se sigue que $|x_n - y_n| = 0$. Por lo tanto $x = y$. Inversamente, si $x = y$ entonces $|x_n - y_n| = 0$, de aquí que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p} = 0,$$

es decir, $d(x, y) = 0$.
La propiedad (ii) se sigue de aplicar propiedades adecuadas del valor absoluto y finalmente, la propiedad (iii) se demuestra similarmente a la del Ejemplo 1.17.

Ejemplo 1.20. *La función* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ *definida por:*

$$d(x,y) = |x - y|^2$$

es una b-métrica sobre $\mathbb{R}$ *con* $s = 2$.

Basta con demostrar la propiedad (iii) de la Definición 1.21, pues las propiedades (i) y (ii) se siguen de las propiedades del valor absoluto.
Así, sean x, y y $z \in \mathbb{R}$ y sabiendo que

$$2|x - y||y - z| \leq |x - y|^2 + |y - z|^2,$$

vemos que

$$\begin{aligned} |x-z|^2 &= |x-y+y-z|^2 \\ &= |x-y|^2+2|x-y||y-z|+|y-z|^2 \\ &\leq 2[|x-y|^2+|y-z|^2|]. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.21. *Sea $M=\{0,1,2\}$. Definimos $d: M\times M\to[0,\infty)$ de la siguiente manera*

$$d(0,1)=1, d(0,2)=\frac{1}{2} \text{ y } d(1,2)=2,$$

con $d(x,x)=0$ y $d(x,y)=d(y,x)$ para todo $x,y\in M$. Entonces (M,d) es un espacio b-métrico con $s\geq\frac{4}{3}$.

De acuerdo al enunciado, solo basta con verificar la propiedad (iii) de la Definición 1.21.
Primero, como $d(0,1)=1$ y $1\leq\frac{4}{3}[\frac{1}{2}+2]=\frac{10}{3}$ tenemos que $d(0,1)\leq\frac{4}{3}[d(0,2)+d(2,1)]$.
Luego, $d(0,2)=\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}\leq\frac{4}{3}[1+2]=4$ de aquí que $d(0,2)\leq\frac{4}{3}[d(0,1)+d(1,2)]$.
Por último, $d(1,2)=2$ y $2\leq\frac{4}{3}[1+\frac{1}{2}]=2$ esto es $d(1,2)\leq\frac{4}{3}[d(1,0)+d(0,2)]$.
Por lo tanto, (M,d) es un espacio b-métrico con $s\geq\frac{4}{3}$.

Ejemplo 1.22. *Sea E un espacio de Banach y 0_E el vector cero de E. Sea P un cono normal de E con constante de normalidad K tal que* Int $P\neq\emptyset$ *y sea $\preceq$ un orden parcial con respecto a P. Sea X un conjunto no vacío. Supongamos que la función $d: X\times X\to P$ es una métrica de cono en X. Consideremos $D: X\times X\to[0,\infty)$ definida mediante $D(x,y)=\| d(x,y)\|$. Entonces, (X,D) es una b-métrica con $s=K\geq 1$.*

Las propiedades (i) y (ii) de la Definición 1.21 son consecuencia inmediata de que la función d es una métrica de cono en X.
Sean $x,y,z\in X$, del hecho que K es una constante de normalidad de P y como

$$d(x,y)\preceq d(x,z)+d(z,y)$$

entonces $\| d(x,y)\|\leq K\| d(x,z)+d(z,y)\|$. Así, para la propiedad (iii) de la Definición 1.21 se tiene que:

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \| d(x,y)\| \\ &\leq K\| d(x,z)+d(z,y)\| \\ &\leq K(\| d(x,z)\|+\| d(z,y)\|) \\ &= K(D(x,z)+D(z,y)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Con esto, queda demostrado que (X, D) es un espacio b-métrico.

Proposición 1.6. *Todo espacio métrico es un espacio b-métrico.*

Demostración:
Sea (X, d) un espacio métrico. Se cumplen todas las propiedades de la Definición 1.21 para $s = 1$. ■

Observación 1.4. *Notemos que el regreso de la Proposición 1.6 no es cierta, los espacios de los ejemplos 1.20 y 1.21, son espacios b-métricos, pero probamos en los ejemplos 1.4 y 1.5 respectivamente que las funciones d no son métricas.*

Ahora, definimos algunas propiedades básicas topológicas en el marco de los espacios b-métricos, las cuales ya se han definido para espacios métricos. Una de ellas es la siguiente:

Definición 1.22. *Sean (M, d) un espacio b-métrico y $S \subset M$. Decimos que S es un subconjunto **abierto** de M si para todo $x \in M$ existe $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq S$. También, $F \subseteq M$ es un subconjunto **cerrado** de M si $M - F$ es un subconjunto abierto de M.*

Con esto podemos decir que si (M, d) es un espacio b-métrico donde $M \neq \emptyset$, entonces M tiene una topología τ_d, la cual es generada por la familia de bolas abiertas

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}.$$

También, tenemos las siguientes definiciones generalizadas a espacios b-métricos.

Definición 1.23. *Sea (M, d) un espacio b-métrico donde $M \neq \emptyset$. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M **converge** a un punto $x \in M$ si el siguiente límite existe y además*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Definición 1.24. *Sea (M, d) un espacio b-métrico donde $M \neq \emptyset$. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M se dice que es de **Cauchy**, si el siguiente límite existe y*

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Observese que el límite anterior es equivalente al siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0 \quad \text{con } p \in \mathbb{N}.$$

En efecto, primero supongamos que

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Sin perdida de generalidad supongamos que $m > n$. Fijando n y variando m podemos suponer que $m = n + p$ con $p \in \mathbb{N}$. Así para toda $n \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.
Ahora supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0 \quad \text{con } p \in \mathbb{N}.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$ para toda $p \in \mathbb{N}$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, sin perdida de generalidad supongamos que $m > n > N$, entonces existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p_0$. Así, $d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+p_0}) < \epsilon$

Recordemos que un espacio métrico se dice completo si cualquier sucesión de Cauchy converge. Con esto, diremos que un espacio b-métrico es completo si cualquier sucesión de Cauchy converge.

Ahora, definimos la continuidad de una función en un espacio b-métrico de la siguiente manera:

Definición 1.25. *Sean (M, d_1), (K, d_2) espacios b-métricos y tomemos $T : M \to K$ una función. Decimos que T es **continua en x** si*

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0 = \lim_{n,m\to\infty} d_1(x_n, x_m),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} d_2(T(x_n), T(x)) = 0 = \lim_{n,m\to\infty} d_2(T(x_n), T(x_m)).$$

1.5. Funciones (b)-comparación

Ahora, vamos a definir algunos tipos de funciones, donde veremos en cuales podemos encontrar un punto fijo. Los siguientes lemas, toman un papel muy importante en esta tesis.

Definición 1.26. *Una función $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es llamada función **comparación** si*

1. *Es creciente.*

2. *$\varphi^n(t) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada $t \in [0,\infty)$.*

Vamos a denotar por Φ la clase de funciones comparación $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$.

Proposición 1.7. *Si $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función comparación, entonces φ es suprayectiva.*

Demostración:
Supongamos que φ no es suprayectiva, esto implica que existe $y \in [0,\infty)$ tal que para toda $x \in [0,\infty)$, $\varphi(x) \neq y$.
Si $\varphi(x) > y$, entonces del hecho que φ es creciente, se sigue que $\varphi^{n+1}(x) > \varphi^n(y)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De aquí,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1}(x) > \lim_{n\to\infty} \varphi^n(y) = 0,$$

es decir, $0 > 0$ lo cual es una contradicción.
Ahora, si $\varphi(x) < y$, entonces $\varphi^{n+1}(x) < \varphi^n(y)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ ya que φ es creciente. Se sigue que,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1}(x) < \lim_{n\to\infty} \varphi^n(y) = 0,$$

es decir, $0 < 0$, esto es una contradicción.
Por lo tanto, φ es suprayectiva. ■

Lema 1.1. *Si $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función comparación, entonces*

1. *Cada iteración φ^k de φ, $k \geq 1$, es también una función comparación.*

2. *φ es continua en 0.*

3. *$\varphi(t) < t$ para cada $t > 0$.*

Demostración:

1. Primero probaremos que φ^k es una función comparación para todo $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 1$ entonces por hipótesis φ es una función comparación. Supongamos que se cumple para $k = n$ y se probará para $k = n + 1$. Observemos que φ^k es una función creciente.
   Ahora,
   $$\varphi^{k+1}(t) = \varphi^k(\varphi(t)),$$
   Por hipótesis $\varphi^k(\varphi(t)) \to 0$ cuando $n \to \infty$, esto implica que $\varphi^{k+1}(t) \to 0$ cuando $n \to \infty$.
   Por lo tanto, φ^k es una función comparación para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Primero observemos que $\varphi(0) = 0$, pues si $\varphi(0) > 0$, de que φ es una función creciente, se sigue que
   $$\varphi^n(0) > \cdots > \varphi^2(0) > \varphi(0) > 0$$
   para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\varphi^n(0) \not\to 0$ cuando $n \to \infty$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\varphi(0) = 0$.
   Ahora, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0, \infty)$ tal que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
   Sea $p > 0$. De la Proposición 1.7, existe $q > 0$ tal que $\varphi(q) = p$. Del hecho que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y de que $q > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_n < q$ para toda $n \geq k$. Como φ es creciente se tiene que $0 = \varphi(0) < \varphi(x_n) < \varphi(q) = p$.
   Por lo tanto, $\varphi(x_n) \to \varphi(0)$ cuando $n \to \infty$, es decir, φ es continua en 0.

3. Supongamos que existe $t > 0$ tal que $\varphi(t) \geq t$. De que φ es una función creciente, se tiene que
   $$\varphi^2(t) \geq \varphi(t) \geq t > 0,$$
   haciendo este proceso inductivamente obtenemos que
   $$\varphi^n(t) \geq \varphi^{n-1}(t) \geq \cdots \geq \varphi^2(t) \geq \varphi(t) \geq t > 0.$$
   Esto significa que $\varphi^n(t) \not\to 0$ cuando $n \to \infty$ lo cual es una contradicción, pues φ es una función comparación. Por lo tanto, $\varphi(t) < t$ para cada $t > 0$.

■

Definición 1.27. *Una función* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *se dice que es una función* ***(c)-comparación*** *si:*

1. φ *es creciente.*

2. *Existe* $k_0 \in \mathbb{N}, a \in (0,1)$ *y una serie convergente de términos no negativos* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *tal que* $\varphi^{k+1}(t) \leq a\varphi^k(t) + v_k$ *para* $k \geq k_0$ *y cualquier* $t \in [0,\infty)$.

La noción de función (c)-comparación fue mejorada como una función (b)-comparación, con el fin de extender algunos resultados de punto fijo a las clases de espacios b-métricos.

Definición 1.28. *Tomemos* $s \geq 1$ *un número real. Una función* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es llamada una función* ***(b)-comparación*** *si satisface las siguientes condiciones:*

1. φ *es monótona creciente.*

2. *Existe* $k_0 \in \mathbb{N}, a \in (0,1)$ *y una serie convergente de términos no negativos* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *tal que* $s^{k+1}\varphi^{k+1}(t) \leq as^k\varphi^k(t) + v_k$ *para* $k \geq k_0$ *y cualquier* $t \in [0,\infty)$.

Vamos a denotar por Ψ_b la clase de funciones (b)-comparación $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Evidentemente la definición de función (b)-comparación se reduce a la definición de función (c)-comparación cuando s=1.

Ejemplo 1.23. *Sea* $(\mathbb{R}, d_u)$ *un espacio b-métrico con* $s = 1$ *y sea* $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *una función dada mediante* $\psi(t) = kt$ *donde* $k \in [0,1)$. *Entonces,* ψ *es una función (b)-comparación.*

Observemos que ψ es monótona creciente, ya que si tomamos $x, y \in [0,\infty)$ tales que $x \leq y$, entonces como $k \geq 0$ se sigue que $kx \leq ky$, es decir, ψ es una función monótona creciente.

Ahora, si $k \neq 0$ consideramos $a = k$ y la serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, donde $v_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} s^{m+1}\psi^{m+1}(t) &= k^{m+1}t \\ &= k \cdot k^m t \\ &= as^m\psi^m(t) + v_m. \end{aligned}$$

Si $k = 0$, entonces $\psi^n(t) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, para cualquier $a \in (0,1)$ y cualquier serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ tenemos que

$$\begin{aligned} s^{m+1}\psi^{m+1}(t) &= 0 \\ &\leq as^m\psi^m(t) + v_m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ es una función (b)-comparación, es decir, $\psi \in \Psi_b$.

Lema 1.2. *Si $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función (b)-comparación, entonces se cumple lo siguiente:*

(1) *La serie $\sum_{k=0}^{\infty} s^k\varphi^k(t)$ converge para cualquier $t \in [0,\infty)$, y*

(2) *La función $b_s : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por $b_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k\varphi^k(t)$, es creciente y continua en 0.*

Demostración:
(1) Sea $t \in [0,\infty)$ arbitrario. Dado que φ es una función (b)-comparación, existen $k_0 \in \mathbb{N}$ y $a \in (0,1)$ tales que

$$s^{k+1}\varphi^{k+1}(t) \leq as^k\varphi^k(t) + v_k \quad \text{para toda } k \geq k_0.$$

Notemos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} s^m\varphi^m(t) = \sum_{m=0}^{k_0-1} s^m\varphi^m(t) + \sum_{m=k_0}^{\infty} s^m\varphi^m(t).$$

De que φ es una función (b)-comparación se tiene que

$$s^{k_0+1}\varphi^{k_0+1}(t) \leq as^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + v_{k_0}.$$

Utilizando nuevamente que φ es una función (b)-comparación y la desigualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} s^{k_0+2}\varphi^{k_0+2}(t) &\leq as^{k_0+1}\varphi^{k_0+1}(t) + v_{k_0+1} \\ &\leq a(as^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + v_{k_0}) + v_{k_0+1} \\ &\leq a^2 s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + av_{k_0} + v_{k_0+1}. \end{aligned}$$

E inductivamente se tiene lo siguiente:

$$s^{k_0+n}\varphi^{k_0+n}(t) \leq a^n s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + a^{n-1}v_{k_0} + a^{n-2}v_{k_0+1} + \cdots + v_{k_0+n-1},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.
Con esto,

$$\begin{aligned} \sum_{m=k_0}^{\infty} s^m\varphi^m(t) &= s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + s^{k_0+1}\varphi^{k_0+1}(t) + s^{k_0+2}\varphi^{k_0+2}(t) + \cdots \\ &\quad + s^{k_0+n}\varphi^{k_0+n}(t) + \cdots \\ &\leq s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + as^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + v_{k_0} + a^2 s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + av_{k_0} + v_{k_0+1} \\ &\quad + \cdots + a^n s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + a^{n-1}v_{k_0} + a^{n-2}v_{k_0+1} + \cdots \\ &\quad + v_{k_0+n-1} + \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a^m s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a^i v_{k_0+j} \\ &= s^{k_0}\varphi^{k_0}(t)\sum_{m=0}^{\infty} a^m + \sum_{j=0}^{\infty} v_{k_0+j}\sum_{i=0}^{\infty} a^i \\ &= \frac{1}{1-a}s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + \frac{1}{1-a}\sum_{j=0}^{\infty} v_{k_0+j}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Observese que en (1.5) se uso el hecho de que $\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$, (ver [9], p. 65).

Así, $\sum_{m=k_0}^{\infty} s^m\varphi^m(t) \leq \frac{1}{1-a}s^{k_0}\varphi^{k_0}(t) + \frac{1}{1-a}\sum_{j=0}^{\infty} v_{k_0+j}$.

Dado que $\sum_{j=0}^{\infty} v_k$ es una serie convergente, por el Criterio de Comparación, $\sum_{m=k_0}^{\infty} s^m \varphi^m(t)$ converge. Así, $\sum_{m=0}^{\infty} s^m \varphi^m(t)$ converge para toda $t \in [0, \infty)$.
(2) Sean $x, y \in [0, \infty)$ tales que $x \leq y$. Ahora,

$$\begin{aligned} b_s(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \varphi^k(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} s^k \varphi^k(y) \qquad (1.6) \\ &= b_s(y) \end{aligned}$$

Dado de φ es creciente también lo es φ^k para todo $k \in \mathbb{N}$ por lo que (1) es cierto.
Ahora mostraremos que b_s es continua en 0.
Por el inciso anterior, $\sum_{k=0}^{\infty} s^k \varphi^k(t)$ converge para cualquier $t \in [0, \infty)$. Así, $s^k \varphi^k(t) \to 0$ cuando $k \to \infty$, es decir, $\varphi^k(t) \to 0$ cuando $k \to \infty$ pues $s^k \geq 1$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Así, φ es una función comparación y por el Lema 1.1, es continua en 0. De aquí, $s^k \varphi^k(t)$ es continua en 0 para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, b_s es continua en 0. ■

Observación 1.5. *Dado que* $\sum_{k=0}^{\infty} s^k \varphi^k(t)$ *converge, se tiene que* $\lim_{k \to \infty} s^k \varphi^k(t) = 0$. *Ahora, sabemos que* $s^k \neq 0$ *para cualquier* $k \in \mathbb{N}$ *pues* $s \geq 1$, *esto implica que* $\varphi^k(t) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$. *Así, cualquier función (b)-comparación es una función comparación y por el Lema 1.1 cualquier función (b)-comparación,* φ *satisface que* $\varphi(t) < t$ *para cualquier* $t > 0$.

Lema 1.3. *Sea* (M, d) *un espacio b-métrico con* $s \geq 1$. *Si* $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *es una función (b)-comparación y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión en* (M, d) *tal que*

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1))$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy en* (M, d).

Demostración:

Sea $p \geq 1$. Del hecho que M es un espacio b-métrico y dado que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1))$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq s[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+p})] \\
&\leq s\big(d(x_n, x_{n+1}) + s[d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+p})]\big) \\
&= sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 d(x_{n+2}, x_{n+p}) \\
&\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \\
&\quad s^2\big(s[d(x_{n+2}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_{n+p})]\big) \\
&= sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \\
&\quad s^3 d(x_{n+3}, x_{n+p}) \\
&\vdots \\
&\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots \\
&\quad + s^p d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) + s^p d(x_{n+p}, x_{n+p}) \\
&\leq s\psi^n(d(x_0, x_1)) + s^2\psi^{n+1}(d(x_0, x_1)) + \cdots + s^p \psi^{n+p-1}(d(x_0, x_1)) \\
&\leq \frac{1}{s^{n-1}}[s^n \psi^n(d(x_0, x_1)) + s^{n+1}\psi^{n+1}(d(x_0, x_1)) + \cdots \\
&\quad + s^{n+p-1}\psi^{n+p-1}(d(x_0, x_1))]. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Para $n \geq 1$, hacemos $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} s^k \psi^k(d(x_0, x_1))$ y utilizando (1.7) obtenemos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{s^{n-1}}\left[S_{n+p-1} - S_{n-1}\right]; \quad n \geq 1, \quad p \geq 1. \qquad (1.8)$$

Por el Lema 1.2, para $n \geq 1$, obtenemos que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s^k \psi^k(d(x_0, x_1))$ converge, ya que ψ es una función (b)-comparación. Con esto la sucesión, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, esto es $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ existe.

Para $n \geq 1$ y $p \geq 1$, dado que $s \geq 1$ y por la desigualdad (1.8), se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s^{n-1}}[S_{n+p-1} - S_{n-1}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s^{n-1}} \lim_{n\to\infty}[S_{n+p-1} - S_{n-1}] \\
&= 0 \cdot \lim_{n\to\infty}[S_{n+p-1} - S_{n-1}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la Definición 1.24 se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en (M, d). ■

Notación. Denotamos con Ψ la familia de funciones no decrecientes $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ para cada $t > 0$.

Observemos que $\Psi \subset \Phi$ y para cada $\psi \in \Psi$ tenemos que $\psi(t) < t$ para cada $t > 0$.

Capítulo 2

Funciones $\alpha - \psi$-contractivas de tipo (b)

2.1. Algunos tipos de funciones

Definición 2.1. *Sea (M,d) un espacio métrico y $T : M \to M$ una función. Decimos que T es una función $\alpha - \psi-$**contractiva** si existen dos funciones $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ y $\psi \in \Psi$ tal que*

$$\alpha(x,y)d(T(x),T(y)) \leq \psi(d(x,y))$$

para todo $x, y \in M$.

En el siguiente ejemplo se muestra que cualquier función contractiva es una función $\alpha - \psi$-contractiva.

Ejemplo 2.1. *Sea $T : M \to M$ una función que satisface el principio de la contracción de Banach. Entonces existe una constante $k \in (0,1)$ tal que $d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y)$ para todo $x, y \in M$.*
Consideremos $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, dada por $\psi(t) = kt$, la cual es no decreciente y como,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\psi^{n+1}(t)}{\psi^n(t)}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{k^{n+1}t}{k^n t} \\
&= \lim_{n\to\infty} k \\
&= k \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Por la prueba de la razón para series reales tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t)$ *converge absolutamente, esto implica que dicha serie converge. Dado que* $\psi \in \Psi$, T *es una función* $\alpha - \psi -$ *contractiva, donde* $\alpha(x,y) = 1$ *para todo* $x, y \in M$.
Por lo que,

$$\alpha(x,y)d(T(x),T(y)) \leq \psi(d(x,y)) = kd(x,y).$$

Definición 2.2. *Sean* $T : M \to M$ *y* $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ *funciones. Decimos que* T *es* $\alpha-$***admisible****, si*

$$x, y \in M,\ \alpha(x,y) \geq 1 \text{ implica que } \alpha(T(x),T(y)) \geq 1.$$

Ejemplo 2.2. *Aquí mostramos dos ejemplos para el espacio* $M = (0,\infty)$*, en cada caso definimos las funciones* $T : M \to M$ *y* $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ *como se muestra a continuación:*

(1) $T(x) = \log(x)$ *para todo* $x \in M$ *y*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 2 & si \quad x \geq y, \\ 0 & si \quad x < y. \end{cases}$$

Entonces, T *es* $\alpha-$*admisible.*

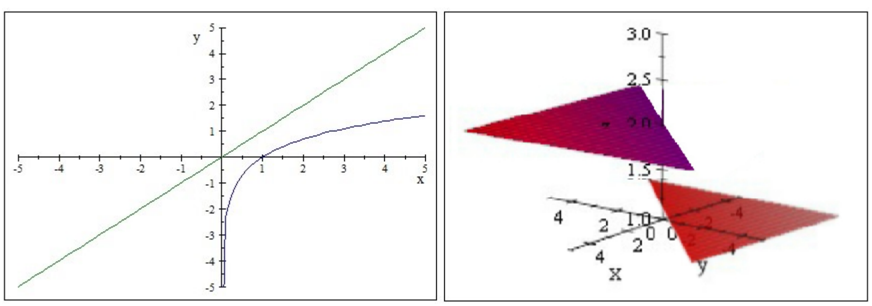

Figura 1. Gráfica de las funciones T y α del Ejemplo 2.2 (1).

En la Figura 1, se muestra la gráfica de la función T *y el comportamiento de la función* α.
Sean $x, y \in M$ *tales que* $\alpha(x,y) \geq 1$. *Entonces* $x \geq y$. *Así, como la función logaritmo es creciente se tiene que* $\log(x) \geq \log(y)$. *De aquí* $\alpha(T(x),T(y)) = 2 > 1$. *Por lo tanto,* T *es* $\alpha-$*admisible.*

(2) $T(x)=\sqrt{x}$ *para todo* $x \in M$ *y*

$$\alpha(x,y)=\begin{cases} e^{x-y} & si \quad x \geq y, \\ 0 & si \quad x < y. \end{cases}$$

Entonces, T *es* $\alpha-$*admisible.*

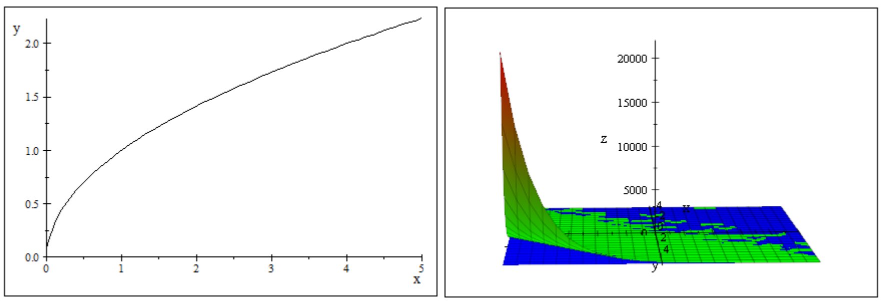

Figura 2. Gráficas de las funciones T y α del Ejemplo 2.2 (2).

En la Figura 2, se muestra el comportamiento de las funciones T *y* α *respectivamente.*
Sean $x,y \in M$ *tales que* $\alpha(x,y) \geq 1$. *Entonces* $e^{x-y} \geq 1$, *de esto obtenemos que* $x \geq y$. *Como la función raíz cuadrada es creciente se tiene que* $\sqrt{x}-\sqrt{y} \geq 0$, *de donde* $e^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \geq 1$, *es decir,* $\alpha(T(x),T(y)) \geq 1$. *Por lo tanto,* T *es* $\alpha-$*admisible.*

Ejemplo 2.3. *Sea* $(M,\preceq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* d *una métrica en* M *tal que* (M,d) *es completo. Sea* $T: M \to M$ *una función no decreciente con respecto a* $\preceq$, *esto es, para cada* $x,y \in M$, *si* $x \preceq y$, *entonces* $T(x) \preceq T(y)$.
Supongamos que existe $x_0 \in M$ *tal que* $x_0 \preceq T(x_0)$. *Definimos la función* $\alpha: M \times M \to [0,\infty)$ *por*

$$\alpha(x,y)=\begin{cases} 1 & si & x \preceq y \text{ ó } x \succeq y \\ 0 & otro\ caso & \end{cases}$$

Entonces T *es* $\alpha-$*admisible.*

Sean $x,y \in M$ tales que $\alpha(x,y) \geq 1$. Entonces $x \succeq y$ o $x \preceq y$. Como T es creciente se sigue que $T(x) \succeq T(y)$ o $T(x) \preceq T(y)$. Por lo tanto $\alpha(T(x),T(y)) \geq 1$ y concluimos que T es $\alpha-$admisible.

Definición 2.3. *Una función $T : M \to M$ es llamada* ***triangular*** α***-admisible*** *si*

(1) *T es α-admisible.*

(2) *Si $\alpha(x,z) \geq 1$, $\alpha(z,y) \geq 1$, entonces $\alpha(x,y) \geq 1$.*

Ejemplo 2.4. *Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y sea $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por $\alpha(x,y) = e^{x-y}$. Entonces T es triangular $\alpha-$admisibe.*

En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha(x,y) \geq 1$. Entonces $e^{x-y} \geq 1$. Así $x - y \geq 0$, es decir, $x \geq y$. Con esto y dado que T es estrictamente creciente tenemos que $T(x) \geq T(y)$. Esto implica que $e^{T(x)-T(y)} \geq 1$, de donde $\alpha(T(x), T(y)) \geq 1$. Por tanto T es $\alpha-$admisible.
Ahora, sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha(x,z) \geq 1$, $\alpha(z,y) \geq 1$. Entonces $x - z \geq 0$ y $z - y \geq 0$. De donde $x - z + z - y \geq 0$, es decir, $x - y \geq 0$. Esto implica que $\alpha(x,y) \geq 1$.
Con todo esto tenemos que T es triangular $\alpha-$admisible.

Ejemplo 2.5. *Sean $T : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $T(x) = x^2$ y $\alpha : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida mediante*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad x, y \in [0,1], \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, T es triangular $\alpha-$admisible.

En efecto, sean $x, y \in [0,\infty)$ tales que $\alpha(x,y) \geq 1$. Entonces $x, y \in [0,1]$. De aquí $x^2, y^2 \in [0,1]$ y por lo tanto tenemos que $\alpha(T(x), T(y)) \geq 1$. Con esto T es $\alpha-$admisible.
Sean $x, y, z \in [0,\infty)$ tales que $\alpha(x,z) \geq 1$, $\alpha(z,y) \geq 1$. Entonces $x, z, y \in [0,1]$, esto implica que $\alpha(x,y) \geq 1$. Por lo tanto T es triangular $\alpha-$admisible.

Definición 2.4. *Sean $T : M \to M$ y $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ funciones. Se dice que T es $\alpha-$**orbital admisible** siempre que para cada $x \in M$, se cumple que*

$$\textit{si } \alpha(x, T(x)) \geq 1, \textit{ entonces } \alpha(T(x), T^2(x)) \geq 1.$$

Ejemplo 2.6. *Sean* $M = \{0, 1, 2, 3\}$ *y*

$$X = \{(0,1), (0,2), (1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (1,3), (2,3)\}.$$

Definimos $d : M \times M \to [0, \infty)$ *dada por* $d(x, y) = |x - y|$ *y sean* $T : M \to M$ *tal que* $T(0) = 0, T(1) = 2, T(2) = 1, T(3) = 3$ *y* $\alpha : M \times M \to \mathbb{R}$ *definida por,*

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad (x, y) \in X, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, T *es* $\alpha-$*orbital admisible.*

En efecto, consideremos los siguientes cuatro casos:

1. Si $x = 1$ entonces $\alpha(x, T(x)) = \alpha(1, T(1)) = 1$
   Así, dado que $(2, 1) \in X$ obtenemos que
   $$\begin{aligned} \alpha(T(x), T^2(x)) &= \alpha(T(1), T^2(1)) \\ &= \alpha(2, 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$
2. Si $x = 2$ entonces $\alpha(x, T(x)) = \alpha(2, T(2)) = \alpha(2, 1) = 1$
   Así, dado que $(1, 2) \in X$ se tiene que
   $$\begin{aligned} \alpha(T(x), T^2(x)) &= \alpha(T(2), T^2(2)) \\ &= \alpha(1, 2) \\ &= 1. \end{aligned}$$
3. Si $x = 0$ entonces $\alpha(0, T(0)) = \alpha(0, 0) = 0$, pues $(0, 0) \notin X$.
4. Si $x = 3$ entonces $\alpha(3, T(3)) = \alpha(3, 3) = 0$, ya que $(3, 3) \notin X$.

Por lo tanto, T es $\alpha-$orbital admisible.

Definición 2.5. *Sean* $T : M \to M$ *y* $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ *funciones. Se dice que* T *es* ***triangular*** $\alpha-$***orbital admisible*** *si* T *es* $\alpha-$*orbital admisible y si*

$$\alpha(x, y) \geq 1 \ \textit{y} \ \alpha(y, T(y)) \geq 1, \ \textit{entonces} \ \alpha(x, T(y)) \geq 1.$$

Proposición 2.1. *Cada función* $\alpha-$*admisible es una función* $\alpha-$*orbital admisible y cada función triangular* $\alpha-$*admisible es una función triangular* $\alpha-$*orbital admisible.*

Demostración:

Sean $T : M \to M$ y $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ funciones.
Primero vamos a suponer que T es $\alpha-$admisible y se probará que es $\alpha-$orbital admisible.
Supongamos $\alpha(x, T(x)) \geq 1$. Así que $\alpha(T(x), T^2(x)) \geq 1$. Se sigue que T es $\alpha-$orbital admisible.
Ahora, supongamos que T es triangular $\alpha-$admisible, obtenemos que T es $\alpha-$admisible y por lo anterior, es $\alpha-$orbital admisible.
Más aún, si $\alpha(x, y) \geq 1$ y $\alpha(y, T(y)) \geq 1$, entonces $\alpha(x, T(y)) \geq 1$. Concluimos que T es triangular $\alpha-$orbital admisible. ■

Notemos que el Ejemplo 2.6 es una función triangular $\alpha-$orbital admisible. Así mismo, las funciones de los ejemplos 2.4 y 2.5 son $\alpha-$orbital admisible, esto se debe a la Proposición 2.1.

Observemos que el regreso de la Proposición 2.1 es falso, pues la función del Ejemplo 2.6 es una función triangular $\alpha-$orbital admisible pero no es una función triangular $\alpha-$admisible, pues $\alpha(0, 1) = 1$ y $\alpha(1, 3) = 1$ pero $\alpha(0, 3) = 0$.

Lema 2.1. *Sea $T : M \to M$ una función triangular $\alpha-$orbital admisible. Asumimos que existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$. Definimos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M por $T(x_n) = x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$.*

Demostración:

Como existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$ entonces $\alpha(T(x_0), T^2(x_0)) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$. Con esto, $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ e inductivamente, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación. $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$.
Procedemos por inducción sobre m. Si $m = 1$ entonces por hipótesis $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$ y $T(x_0) = x_1$, por lo que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.
Supongamos que $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ con $n < m$ y se probará que $\alpha(x_n, x_{m+1}) \geq 1$ con $n < m + 1$.
Ahora, se cumple que $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ con $n < m$ y $\alpha(x_m, x_{m+1}) \geq 1$. Dado que T es triangular $\alpha-$admisible, se tiene que $\alpha(x_n, x_{m+1}) \geq 1$ con $n < m < m + 1$.
Por lo tanto, $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$. ■

2.2. Punto fijo de funciones $\alpha-\psi$-contractivas de tipo (b)

Ahora vamos a generalizar la Definición 2.1 para espacios b-métricos.

Definición 2.6. *Sean (M,d) un espacio b-métrico y $T : M \to M$ una función. Decimos que T es una función $\alpha-\psi-$**contractiva de tipo (b)** si existen dos funciones $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ y $\psi \in \Psi_b$ tales que*

$$\alpha(x,y)d(T(x),T(y)) \leq \psi(d(x,y)) \text{ para todo } x,y \in M.$$

Ejemplo 2.7. *Por el Ejemplo 1.20 sabemos que $(\mathbb{R},d)$ es un espacio b-métrico donde $s=2$ y $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ esta dada por $d(x,y) = |x-y|^2$. Consideremos $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada mediante $T(x) = x$ y $\alpha : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ dada por*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x = y, \\ 0 & si \quad x \neq y. \end{cases}$$

Tomemos $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por $\psi(t) = \frac{1}{4}t$. Afirmamos que T es $\alpha-\psi-$contractiva de tipo (b).

Primero veamos que, ψ es una función (b)-comparación.

(i) Notemos que la función ψ es creciente.

(ii) Considerando $a = \frac{1}{2}$ y la serie de términos no negativos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_k$, donde $v_k = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 2^{k+1}\psi^{k+1}(t) &= 2^{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} t \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} t \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} t + v_k \\ &= a\left(\frac{1}{2}\right)^{k} t + v_k \\ &= a2^k\left(\frac{1}{4}\right)^{k} t + v_k \\ &= a2^k\psi^k(t) + v_k. \end{aligned}$$

Con (i) y (ii), concluimos que ψ es una función (b)-comparación, es decir $\psi \in \Psi_b$.

Ahora, para ver que T es $\alpha-\psi-$contractiva, veamos los siguientes dos casos:

1. Si $x = y$ entonces
$$\begin{aligned} \alpha(x,y)d(T(x),T(y)) &= 1 \cdot 0 \\ &= 0 \\ &\leq \psi(d(x,y)) \end{aligned}$$

2. Si $x \neq y$ entonces
$$\begin{aligned} \alpha(x,y)d(T(x),T(y)) &= 0 \cdot d(x,y) \\ &= 0 \\ &\leq \psi(d(x,y)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es $\alpha-\psi-$contractiva de tipo (b).

Teorema 2.1. *Sea (M,d) un espacio b-métrico completo con $s \geq 1$ una constante y $T : M \to M$ una función $\alpha-\psi-$contractiva de tipo (b) que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *T es $\alpha-$admisible.*

(ii) *Existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$.*

(iii) *T es continua.*

Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración:

Definimos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M dada por
$$x_{n+1} = T(x_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
Si existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x_n = x_{n+1}$ entonces $T(x_n) = x_{n+1} = x_n$. Por lo tanto, T tiene un punto fijo y la prueba términa.
Vamos a suponer que
$$x_n \neq x_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Del hecho que T es $\alpha-$admisible, por la Proposición 2.1, la función T es $\alpha-$orbital admisible y por la condición (ii) existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$, con esto $\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$, esto implica que $\alpha(T(x_0), T^2(x_0)) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$ e inductivamente tenemos que

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ahora, por hipótesis T es una función $\alpha - \psi-$contractiva de tipo (b) y por la Definición 2.6 tomando $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$ y del hecho que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n) d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Afirmación. $d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1))$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Procedemos por inducción. Si $n = 1$ entonces por (2.1)

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(x_1, x_2) \\ &\leq \alpha(x_0, x_1) d(T(x_0), T(x_1)) \\ &\leq \psi(d(x_0, x_1)). \end{aligned}$$

Supongamos cierto para $n = k$, es decir $d(x_k, x_{k+1}) \leq \psi^k(d(x_0, x_1))$ y se probará para $n = k + 1$.
Entonces, por la desigualdad (2.1) y por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_{k+2}) &\leq \psi(d(x_k, x_{k+1})) \\ &\leq \psi(\psi^k(d(x_0, x_1))) \\ &= \psi^{k+1}(d(x_0, x_1)). \end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la Afirmación.
Por el Lema 1.3 tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en (M, d).
Ahora, como (M, d) es un espacio b-métrico completo podemos concluir que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, es decir, existe

$$x \in M \text{ tal que } x_n \to x \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.2}$$

Ahora, por hipótesis T es continua y de acuerdo a la Definición 1.25 obtenemos

$$x_{n+1} = T(x_n) \to T(x) \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.3}$$

Con (2.2), (2.3) y utilizando la unicidad de los límites para las sucesiones convergentes concluimos que $T(x) = x$ es decir, T tiene un punto fijo. ■

En el siguiente Teorema se omitió la continuidad de la función T y agregamos una nueva condición.

Teorema 2.2. *Sean (M, d) un espacio b-métrico completo con $s \geq 1$ una constante y $T : M \to M$ una función $\alpha - \psi -$contractiva de tipo (b) que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *T es $\alpha-$admisible.*

(ii) *Existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$.*

(iii) *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en M tal que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$ donde $x \in M$ cuando $n \to \infty$ entonces $\alpha(x_n, x) \geq 1$ para toda n.*

Entonces T tiene un punto fijo.

Demostración:

Definimos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M dada por

$$x_{n+1} = T(x_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por la demostración del Teorema anterior, se sabe que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en M tal que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1))$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Asi, por el Lema 1.3 tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio b-métrico completo. Así, existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

Ahora, usando la hipótesis (iii) y lo antes mencionado, tenemos que $\alpha(x_n, x) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como T es una función $\alpha - \psi-$contractiva de tipo (b) y $\alpha(x_n, x) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos usar la Definición 2.6 y de que M es un espacio b-métrico para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(T(x), x) &\leq s[d(T(x), T(x_n)) + d(x_{n+1}, x)] \\ &\leq s[\alpha(x_n, x)d(T(x), T(x_n)) + d(x_{n+1}, x)] \\ &\leq s[\psi(d((x_n, x))) + d(x_{n+1}, x)]. \end{aligned}$$

Como $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, por la Definición 1.23

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Además, de acuerdo a la Definición 2.6 se tiene que ψ es una función b-comparación y por la Proposición 2.1 obtenemos que también es una función comparación. Más aún, por el Lema 1.1 ψ es continua en 0. Esto implica que $d(T(x), x) \leq 0$. Por lo tanto, $T(x) = x$. ■

Los teoremas 2.1 y 2.2, nos aseguran que existe al menos un punto fijo, esto quiere decir que puede existir más de uno. El siguiente teorema nos garantiza la existencia de un único punto fijo. Para esto establecemos la siguiente hipótesis:

(H): Para todo x, $y \in M$ existe $z \in M$ tal que $\alpha(x, z) \geq 1$ y $\alpha(y, z) \geq 1$.

Teorema 2.3. *Añadiendo la condición (H) a las hipótesis del Teorema 2.1 (respectivamente, a las del Teorema 2.2), obtenemos la unicidad del punto fijo de la función T.*

Demostración:

Supongamos que existen dos puntos x, $y \in M$ tales que son puntos fijos de T.
Por la condición (H), para x y y, existe $z \in M$ tal que

$$\alpha(x, z) \geq 1 \text{ y } \alpha(y, z) \geq 1.$$

Observemos que T es $\alpha-$admisible por hipótesis, y de acuerdo a la Proposición 2.1 obtenemos que T es $\alpha-$orbital admisible, con esto y utilizando las desigualdades anteriores vemos que

$$\alpha(x, T(z)) \geq 1 \text{ y } \alpha(y, T(z)) \geq 1.$$

Siguiendo de manera inductiva y dado que x y y son puntos fijos de T se tiene que

$$\alpha(x, T^n(z)) \geq 1 \text{ y } \alpha(y, T^n(z)) \geq 1 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Ahora, se sabe que T es $\alpha - \psi -$contractiva de tipo (b), entonces de acuerdo a la Definición 2.6 y utilizando (2.4) se tiene que

$$\begin{aligned} d(x, T^n(z)) &= d(T(x), T(T^{n-1}(z))) \\ &\leq \alpha(x, T^{n-1}(z)) d(T(x), T(T^{n-1}(z))) \\ &\leq \psi(d(x, T^{n-1}(z))). \end{aligned}$$

Afirmación. $d(x, T^n(z)) \leq \psi^n(d(x, z))$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Procedemos por inducción. Si $n = 1$ por lo anterior se tiene que

$$d(x, T^n(z)) = d(x, T(z)) \leq \psi(d(x, z)).$$

Supongamos que es cierto para $n = k$ y se probará para $n = k+1$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(x, T^{k+1}(z)) &= d(x, T^k(T(z))) \\ &\leq \psi^k(d(x, T(z))) \\ &\leq \psi^k(\psi(d(x, z))) \\ &= \psi^{k+1}(d(x, z)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrada la Afirmación.
Dado que, ψ es una función (b)-comparación, se sigue que, ψ, es una función comparación y así $\psi^n(t) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Con esto y utilizando la afirmación anterior se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} d(x, T^n(z)) \leq \lim_{n \to \infty} \psi^n(d(x, z)) = 0.$$

Con esto y de acuerdo a la Definición 1.23 tenemos que

$$T^n(z) \to x \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.5}$$

Haciendo un procedimiento similiar al anterior concluimos que

$$T^n(z) \to y \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.6}$$

Comparando (2.5) y (2.6) y por la unicidad de los límites de sucesiones convergentes, concluimos que $x = y$. ■

Teorema 2.4. *Sea (M,d) un espacio métrico completo y $T : M \to M$ una función $\alpha - \psi-$contractiva que satisface las siguientes condiciones:*

i) *T es $\alpha-$admisible.*

ii) *Existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$.*

iii) *T es continua.*

Entonces T tiene un punto fijo.

Teorema 2.5. *Sea (M,d) un espacio métrico completo y $T : M \to M$ una función $\alpha - \psi-$contractiva que satisface las siguientes condiciones:*

i) *T es $\alpha-$admisible.*

ii) *Existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$.*

iii) *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en M tal que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$ donde $x \in M$ cuando $n \to \infty$ entonces $\alpha(x_n, x) \geq 1$ para toda n.*

Entonces T tiene un punto fijo.

La demostración de los Teoremas 2.4 y 2.5 son consecuencia de los Teoremas 2.1 y 2.2 respectivamente, tomando $s = 1$.

El siguiente ejemplo es una aplicación de los teoremas 2.2 y 2.3. Lo puedes encontrar en [7], pag. 7.

Ejemplo 2.8. *Sea $M = [0,1]$ dotado por la métrica estandar $d(x,y) = |x-y|$ para cualesquiera $x, y \in M$. Definimos las funciones $T : M \to M$ por*

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & si \quad x \in [0,1), \\ 0 & si \quad\quad x = 1. \end{cases}$$

y $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ por

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & si \qquad (x,y) \in ([0,\frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4},1]) \\ & \qquad\qquad \cup([\frac{1}{4},1]) \times [0,\frac{1}{4}]), \\ 0 & otro\ caso. \end{cases}$$

Primero probaremos que T es una función $\alpha - \psi$-contractiva de tipo (b) donde $\psi(t) = t$ para toda $t \geq 0$.
Si $x \in [0, \frac{1}{4}]$ y $y = 1$ entonces tenemos

$$\alpha(x,y)d(T(x),T(y)) = d(T(x),T(y)) = \left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4} < d(x,y).$$

El caso $x = 1$ y $y \in [0, \frac{1}{4}]$ es similar al caso anterior. Por último, cuando $x \in [0, \frac{1}{4}]$ y $y \in [\frac{1}{4}, 1)$, de acuerdo a como se definió T, se tiene que $d(T(x),T(y)) = 0$. Por lo tanto, T es una función $\alpha - \psi$-contractiva de tipo (b).
Ahora, veamos que T es α-admisible. Sean $x, y \in M$ tales que $\alpha(x,y) \geq 1$, de acuerdo a como se definió α se tienen dos casos:

1. Si $(x,y) \in [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, 1]$ entonces por como se definió T tenemos que $(T(x),T(y)) \in [\frac{1}{4}, 1]) \times [0, \frac{1}{4}]$ lo cual implica que $\alpha(T(x),T(y)) = 1$.

2. Por último, si $(x,y) \in [\frac{1}{4}, 1]) \times [0, \frac{1}{4}]$, entonces $(T(x),T(y)) \in [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, 1]$. Por como se definió α, se sigue que $\alpha(T(x),T(y)) = 1$.

Por lo tanto, T es α-admisible.

Notemos que si tomamos $x_0 = 0$ entonces $\alpha(x_0, T(x_0)) = \alpha(0, \frac{1}{4}) = 1$.

Ahora, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en M tal que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ para algún $x \in M$. De la definición de α tenemos que

$$(x_n, x_{n+1}) \in \left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[\frac{1}{4}, 1\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{4}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{4}\right]\right).$$

Como $([0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, 1]) \cup ([\frac{1}{4}, 1]) \times [0, \frac{1}{4}])$ es un cerrado con respecto a la métrica Euclidiana tenemos que

$$(x,x) \in \left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[\frac{1}{4}, 1\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{4}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{4}\right]\right).$$

Esto implica que $x = \dfrac{1}{4}$, así, $\alpha(x_n, x) \geq 1$ para toda n.

Por último, veamos que se satisface la condición (H).

Sean $x, y \in M$. Si consideramos $z = \dfrac{1}{4}$, entonces

$$\alpha(x,z) = \alpha(y,z) = 1.$$

Por lo tanto, se satisface (H) y por el Teorema 2.3 tenemos que T tiene un único punto fijo $x \in M$, el cual es $x = \dfrac{1}{4}$.

2.3. Estabilidad generalizada de Ulam-Hyers

Se sabe que hay varios tipos de estabilidad de Ulam, entre ellas esta la estabilidad de Ulam-Hyers, la estabilidad generalizada de Ulam-Hyers, la estabilidad de Ulam-Hyers-Rassias y la estabilidad generalizada Ulam-Hyers-Rassias, sin embargo, en este capítulo solo estudiaremos la estabilidad de Ulam-Hyers y la estabilidad generalizada de Ulam-Hyers en el marco de espacios b-métricos.

Iniciamos esta sección definiendo algunos conceptos que nos serán de ayuda para definir la ecuación de estabilidad de Ulam-Hyers y luego, la estabilidad generalizada de Ulam-Hyers. Además, agregamos la definición de operador de Picard, ya que se ocupará para un resultado muy importante el cual se establece en el Teorema 2.7.

Definición 2.7. *Sean (M,d) un espacio métrico y $T : M \to M$ un operador. Definimos* ***la ecuación de puntos fijos de*** *T como*

$$x = T(x). \tag{2.7}$$

Definición 2.8. *Sean (M,d) un espacio métrico, $T : M \to M$ un operador y $\epsilon > 0$. Un punto $w \in M$ es una $\epsilon-$**solución** de la ecuación (2.7) si satisface la desigualdad*

$$d(w, T(w)) \leq \epsilon.$$

Definición 2.9. *Sean (M,d) un espacio métrico y $T : M \to M$ un operador. La ecuación (2.7) es llamada* ***Ulam-Hyers generalizada estable*** *si y sólo si existe $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ la cual es creciente, continua en 0 y $\psi(0) = 0$, tal que para cada $\epsilon > 0$ y para toda $w \in M$ una $\epsilon-$solución de la ecuación (2.7) existe una solución $x \in M$ de la ecuación (2.7) tal que*

$$d(w,x) \leq \psi(\epsilon).$$

Definición 2.10. *En la definición anterior si existe $c > 0$ tal que $\psi(t) = c \cdot t$ para cada $t \in [0, \infty)$, entonces la ecuación (2.7) es* ***Ulam-Hyers estable****.*

Para entender mejor la Definición 2.9, veamos el siguiente ejemplo, el cual se obtuvo de [5], pag. 315.

Ejemplo 2.9. *Sean (M, d) un espacio métrico y $T : M \to M$ una función $\alpha - \varphi-$contractiva de tipo (b) tal que el conjunto de puntos fijos de T es no vacío y $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ está dada por*

$$\alpha(x, y) = 1 \text{ para todo } x,\ y \in M.$$

Entonces, la ecuación (2.7) es Ulam-Hyers generalizada estable.

En efecto, sea $\epsilon > 0$ y sea $w \in M$ una $\epsilon-$solución de la ecuación(2.7), es decir, w satisface la siguiente desigualdad

$$d(w, T(w)) \leq \epsilon.$$

Tomemos $x \in M$ un punto fijo de T y consideraremos la función $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, dada por

$$\psi(c) = \sup(A_c),$$

donde $A_c = \{t \in [0, \infty) : t - \varphi(t) \leq c\}$.
Observemos lo siguiente:

1. ψ es creciente.
   Tomemos x, $y \in [0, \infty)$ tales que $x \leq y$.
   Dado que $x \leq y$ obtenemos que $A_x \subset A_y$ ya que si $t \in A_x$ entonces $t - \varphi(t) \leq x \leq y$, es decir, $t \in A_y$. De aquí se tiene que $\sup(A_x) \leq \sup(A_y)$, es decir $\psi(x) \leq \psi(y)$. Por lo tanto ψ es creciente.

2. $\psi(0) = 0$.
   Por ser T una función $\alpha - \varphi-$contractiva de tipo (b) se tiene que φ es una función (b)-comparación, por la Observación 1.5 también es una función comparación. Esto implica que $\varphi(0) \geq 0$, así $0 \in A_0$. Ahora, sea $q > 0$, por el Lema 1.1, se tiene que $\varphi(q) < q$, de aquí $q - \varphi(q) > 0$ y por tanto $q \notin A_0$. Con esto concluimos que $A_0 = \{0\}$. Por lo tanto, $\psi(0) = 0$.

3. ψ es continua en 0.
   Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0, \infty)$ tal que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, sin perdida de generalidad supongamos que la sucesión es estrictamente decreciente en $[0, \infty)$, es decir, $0 < \cdots < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_2 < x_1$.
   Sea $p > 0$. Dado que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_n < p$ para toda $n \geq k$, como ψ es una función creciente se sigue que $0 < \psi(x_n) < \psi(p) < p$ para todo $n \geq k$. Por lo tanto, $\psi(x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.
   Así, ψ es continua en 0.

Dado que T es $\alpha - \varphi-$contractiva de tipo (b) obtenemos que

$$\begin{aligned} d(x, w) &\leq d(T(x), T(w)) + d(T(w), w) \\ &\leq \varphi(d(x, w)) + d(T(w), w). \end{aligned}$$

De aquí que

$$d(x, w) - \varphi(d(x, w)) \leq d(T(w), w).$$

Es decir, $d(x, w) \in A_{d(T(w),w)}$ y por lo tanto, $d(x, w) \leq \psi(d(T(w), w))$. Del hecho que $d(w, T(w)) \leq \epsilon$ concluimos que $d(x, w) \leq \psi(\varepsilon)$, es decir, la ecuación (2.7) es Ulam-Hyers generalizada estable.

Proposición 2.2. *Sea $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función (b)-comparación con $s \geq 1$. Si $\beta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ esta dada por $\beta(r) = r - s\psi(r)$, entonces β es estrictamente creciente.*

Demostración:

Notemos que $\beta(r) \geq 0$, esto implica que $r - s\psi(r) \geq 0$, es decir, $-s\psi(r) \geq -r$.
Sean x, $y \in [0, \infty)$ tales que $0 < x < y$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\beta(y) - \beta(x)}{y - x} &= \frac{\beta(x)}{x - y} + \frac{\beta(y)}{y - x} \\ &= \frac{x - s\psi(x)}{x - y} + \frac{y - s\psi(y)}{y - x} \\ &\geq \frac{x - x}{x - y} + \frac{y - y}{y - x} = 0. \end{aligned}$$

Es decir, $\beta(y) - \beta(x) \geq 0$. Por lo tanto, β es una función creciente. ■

Dado que $\beta(r) = r - s\psi(r)$ y del hecho que ψ es una función (b)-comparación, entonces es continua en 0, así la función β es continua en 0. Como β es creciente y continua en 0, se sigue que β^{-1} es continua en 0.
Con lo anterior, tenemos la siguiente observación.

Observación 2.1. *Si en la Proposición 2.2 se agrega la hipótesis de que β sea suprayectiva y dado que β es creciente se tiene que β^{-1} es creciente, continua en 0 y $\beta^{-1}(0) = 0$.*

Definición 2.11. *Sea (M, d) un espacio métrico. Un operador $T : M \to M$ es un **operador de Picard** si cumple lo siguiente:*

(i) *Existe $x \in M$ tal que $Fix(T) = \{x\}$.*

(ii) *La sucesión $\{T^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, para todo $z \in M$.*

Recordemos que en el Teorema 2.3 para demostrar la unicidad del punto fijo se utilizarón las siguientes hipótesis:

(I) T es una función $\alpha-\psi-$contractiva de tipo (b), también es una función $\alpha-$admisible y en el caso del Teorema 2.1 se tenía que era una función continua.

(II) (H): Para todo x, $y \in M$ existe $z \in M$ tal que $\alpha(x, z) \geq 1$ y $\alpha(y, z) \geq 1$.

(III) Existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$.

(IV) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en M tal que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$ donde $x \in M$ cuando $n \to \infty$ entonces $\alpha(x_n, x) \geq 1$ para toda n.

Retomando estas hipótesis obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 2.6. *Suponiendo las hipótesis* (I), (II), (III) *y* (IV) *se tiene que T es un operador de Picard.*

Demostración:
Por el Teorema 2.3 se tiene que existe $x \in M$ tal que $T(x) = x$, más aún es único, es decir $Fix(T) = \{x\}$. Haciendo un procedimiento similar a la demostración del Teorema 2.3 se tiene que para toda $z \in M$, la sucesión $\{T^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto fijo x. Por lo tanto, T es un operador de Picard.
$\blacksquare$

Teorema 2.7. *Sea* (M,d) *un espacio b-métrico completo y sea* β *la función de la Proposición 2.2 con* $s \geq 1$ *una constante y* β *suprayectiva. Supongamos que se cumplen todas las hipótesis del Teorema 2.3. Entonces,*

(i) *La ecuación (2.7) es Ulam-Hyers generalizada estable.*

(ii) *Si* $x_n \in M$*,* $n \in \mathbb{N}$ *son tales que* $d(x_n, T(x_n)) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*, entonces* $x_n \to x^*$ *cuando* $n \to \infty$*, donde* $\{x^*\} = Fix(T)$.

(iii) *Si* $g : M \to M$ *es una función tal que existe* $\eta \in [0, \infty)$ *con*

$$d(T(x), g(x)) \leq \eta, \text{ para todo } x \in M,$$

entonces,

$$y \in Fix(g) \text{ implica } d(x^*, y) \leq \beta^{-1}(s \cdot \eta).$$

Demostración:

(i) Como T es un operador de Picard, entonces $Fix(T) = \{x^*\}$. Sean $\epsilon > 0$ y $w \in M$ tales que

$$d(w, T(w)) \leq \epsilon.$$

Consideremos $\beta^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Por la Observación 2.1, se tiene que β^{-1} es creciente, continua en 0 y $\beta^{-1}(0) = 0$.
Como T es $\alpha - \psi-$contractiva de tipo (b) y $x^* \in Fix(T)$, por (H) podemos suponer que $w \in M$ es tal que $\alpha(x^*, w) \geq 1$, con esto

$$\begin{aligned} d(x^*, w) &= d(T(x^*), w) \\ &\leq s[d(T(x^*), T(w)) + d(T(w), w)] \\ &\leq s[\alpha(x^*, w) d(T(x^*), T(w)) + \epsilon] \\ &\leq s[\psi(d(x^*, w)) + \epsilon]. \end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\begin{aligned} \beta(d(x^*, w)) &= d(x^*, w) - s\psi(d(x^*, w)) \\ &\leq s[\psi(d(x^*, w)) + \epsilon] - s\psi(d(x^*, w)) \\ &= s \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

Así, $d(x^*, w) \leq \beta^{-1}(s \cdot \epsilon)$. Por lo tanto, la ecuación (2.7) es Ulam-Hyers generalizada estable.

(ii) Como T es $\alpha-\psi-$contractiva de tipo (b) y dado que $x^*\in Fix(T)$ por (H) podemos suponer que para cada $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in M$ es tal que $\alpha(x^*,x_n)\geq 1$, con esto

$$\begin{aligned} d(x_n,x^*) &\leq s[d(x_n,T(x_n))+d(T(x_n),x^*)] \\ &= s[d(x_n,T(x_n))+d(T(x_n),T(x^*))] \\ &\leq s[d(x_n,T(x_n))+\alpha(x^*,x_n)d(T(x_n),T(x^*))] \\ &\leq s[d(x_n,T(x_n))+\psi(d(x_n,x^*))]. \end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\beta(d(x_n,x^*))=d(x_n,x^*)-s\psi(d(x_n,x^*))\leq sd(x_n,T(x_n)).$$

Dado que $d(x_n,T(x_n))\to 0$ cuando $n\to\infty$, $d(x_n,x^*)\to 0$ cuando $n\to\infty$ y de acuerdo a la Definición 1.23 concluimos que $x_n\to x^*$ cuando $n\to\infty$.

(iii) Dado que T es $\alpha-\psi-$contractiva de tipo (b) y $x^*\in Fix(T)$, por (H) podemos suponer que $w\in M$ es tal que $\alpha(x^*,w)\geq 1$, con esto

$$\begin{aligned} d(w,x^*) &\leq s[d(w,T(w))+d(T(w),x^*)] \\ &= s[d(w,T(w))+d(T(w),T(x^*))] \\ &\leq s[d(w,T(w))+\alpha(x^*,w)d(T(w),T(x^*))] \\ &\leq s[d(w,T(w))+\psi(d(x^*,w))]. \end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\beta(d(w,x^*))=d(w,x^*)-s\psi(d(w,x^*))\leq sd(w,T(w)),$$

es decir,

$$d(w,x^*)\leq\beta^{-1}(sd(w,T(w))).$$

Tomando $y\in Fix(g)$ y reescribiendo la desigualdad anterior con $w=y$, tenemos que

$$d(x^*,y)\leq\beta^{-1}(sd(y,T(y)))=\beta^{-1}(sd(g(y),T(y))).$$

Por lo tanto,

$$d(x^*,y)\leq\beta^{-1}(sd(g(y),T(y)))\leq\beta^{-1}(s\cdot\eta).$$

■

Capítulo 3

Puntos fijos no únicos en espacios b-métricos

En este capítulo, probaremos algunos teoremas de punto fijo no únicos para espacios b-métricos y también, los teoremas de Ćirić, Achari y Pachpatte, los cuales fueron introducidos en el Capítulo 1. El objetivo de este capítulo es observar que los puntos fijos no son únicos en los espacios b-métricos.

3.1. Funciones orbitalmente continuas

Antes de comenzar a probar los teoremas, iniciamos esta sección introduciendo la definición de función orbitalmente continua y la de espacio orbitalmente completo, pues serán de vital importancia en la siguiente sección.

Definición 3.1. *Sean (M, d) un espacio b-métrico y $T : M \to M$ una función. Decimos que T* ***es orbitalmente continua*** *en un punto $z \in M$ si $\lim_{i\to\infty} T^{n_i}(x) = z$ implica que $\lim_{i\to\infty} T(T^{n_i}(x)) = T(z)$. Donde $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente.*

Ejemplo 3.1. *Sean $(\mathbb{R}, d)$ un espacio b-métrico, donde d es la función del Ejemplo 1.20 y $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada mediante $T(x) = \dfrac{x}{2}$. Entonces T es orbitalmente continua en 0.*

Notemos que $T^n(x) = \dfrac{x}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, más aún $T^n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, esto implica que $T^{n+1}(x) \to 0 = T(0)$. Por lo tanto T es orbitalmente continua en 0.

Si observamos, la función de este ejemplo es continua, entonces utilizando la continuidad de la función facilmente se puede demostrar que T es orbitalmente continua. Con esto tenemos la siguiente observación.

Observación 3.1. *Si T es una función continua entonces T es una función orbitalmente continua.*

El regreso de la observación anterior no necesariamente es verdadera. En el siguiente ejemplo escribimos una función que es orbitalmente continua, pero que no es continua.

Ejemplo 3.2 (ver [2], p. 53)**.** *Sean $(\mathbb{R}, d)$ un espacio métrico, con la métrica usual y $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$T(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & si \quad x \in \mathbb{Q}, \\ x & si \quad x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Entonces T es orbitalmente continua.

Si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $T^n(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^n x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, $T^n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, $T^{n+1}(x) \to 0 = T(0)$.
Ahora, si $x \in \mathbb{I}$ entonces $T^n(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con esto $T^n(x) \to x$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De aquí, $T^{n+1}(x) \to x = T(x)$ pues $x \in \mathbb{I}$. En cualquier caso T es orbitalmente continua.

Observación 3.2. *Notemos que la función del ejemplo anterior tiene una infinidad de puntos fijos.*

En el siguiente ejemplo escribimos una función, la cual no es orbitalmente continua.

Ejemplo 3.3 (ver [2], p. 53)**.** *Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ dada mediante*

$$T(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Entonces T no es orbitalmente continua.

Si $x \neq 0$ entonces $T^n(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, más aún $T^n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, del hecho que $T(0) = 1$ entonces $T^{n+1}(x) \not\to T(0)$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto T no es orbitalmente continua.

Definición 3.2. *Sean (M, d) un espacio b-métrico y $T : M \to M$ una función. Decimos que (M, d) es $T-$**orbitalmente completo**, si cualquier sucesión de Cauchy de la forma $\{T^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ converge en M, para todo $x \in M$.*

Ejemplo 3.4. *Sea $(\mathbb{R}, d)$un espacio b-métrico donde d es la métrica del Ejemplo 1.20 y consideremos T como en el Ejemplo 3.1. Entonces, $\mathbb{R}$ es $T-$orbitalmente completo.*

Sabemos que $T^n(x) = \dfrac{x}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que $T^n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Veamos que $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.
Sean $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} d(T^n(x), T^m(x)) &= \lim_{n,m\to\infty} |T^n(x) - T^m(x)|^2 \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \left|\frac{x}{2^n}\right|^2 - 2\left|\frac{x}{2^n}\right|\left|\frac{x}{2^m}\right| + \left|\frac{x}{2^m}\right|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y así $(\mathbb{R}, d)$ es $T-$orbitalmente completo.

Observación 3.3. *Si (M, d) es un espacio b-métrico completo y $T : M \to M$ es una función, entonces (M, d) es un espacio b-métrico $T-$orbitalmente completo.*

El regreso de la observación anterior no necesariamente es cierto, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5. *Sean $(\mathbb{R} - \{0\}, d)$ un espacio métrico, con la métrica usual y $T : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ dada mediante $T(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces $\mathbb{R} - \{0\}$ es $T-$ orbitalmente completo pero $\mathbb{R} - \{0\}$ no es completo.*

Como $T^n(x) = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $T^n(x) \to \frac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$, más aún la sucesión $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} d(T^n(x), T^m(x)) &= \lim_{n,m\to\infty} |T^n(x) - T^m(x)| \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y con esto, $\mathbb{R}-\{0\}$ es $T-$orbitalmente completo.

Ahora, consideremos la sucesión en $\mathbb{R}-\{0\}$ dada mediante $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) &= \lim_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| \\ &= \lim_{n,m\to\infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y dado que $0 \notin \mathbb{R}-\{0\}$ entonces la sucesión no converge en $\mathbb{R}-\{0\}$. Con esto, $(\mathbb{R}-\{0\}, d)$ no es completo.

Proposición 3.1. *La continuidad orbital de T implica la continuidad orbital de T^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:
Procedemos por inducción. Si $n = 1$ por hipótesis T es una función orbitalmente continua.
Ahora, supondremos que T^m es una función orbitalmente continua y se probará que T^{m+1} es orbitalmente continua.
Sea $z \in M$. Si $\lim_{i\to\infty}(T^{m+1})^{n_i}(x) = z$, entonces $\lim_{i\to\infty} T^m((T^{m+1})^{n_i}(x)) = T^m(z)$, ya que por hipótesis de inducción, T^m es una función orbitalmente continua.
Dado que T también es orbitalmente continua, $\lim_{i\to\infty} T^{m+1}((T^{m+1})^{n_i}(x)) = T^{m+1}(z)$, con esto concluimos que T^{m+1} es orbitalmente continua.
Por lo tanto, T^m es orbitalmente continua para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

3.2. Punto fijo de funciones orbitalmente continuas

En esta sección, probaremos algunas resultados importantes, los cuales nos serán de mucha ayuda para demostrar los teoremas de Ćirić, Achari y Papachtte.

Teorema 3.1. *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M, d) es un espacio b-métrico (con $s \geq 1$) $T-$orbitalmente completo. Si existe $\psi \in \Psi_b$ tal que*

$$\begin{aligned}&\min\{d(T(x), T(y)), d(x, T(x)), d(y, T(y))\}- \\ &\min\{d(x, T(y)), d(T(x), y)\} \leq \psi(d(x, y)),\end{aligned} \tag{3.1}$$

para todo x, $y \in M$, entonces para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Demostración:
Sea $x \in M$ arbitrario. Consideremos en M la sucesión dada por

$$x_0 = x \text{ y } x_n = T(x_{n-1}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Inductivamente tenemos que

$$x_n = T^n(x_0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_n = x_{n-1}$ entonces $T(x_{n-1}) = x_n = x_{n-1}$.
Por lo que x_0 es un punto eventualmente fijo.
Así, la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo.

Supongamos que

$$x_n \neq x_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}&\min\{d(T(x_{n-1}), T(x_n)), d(x_{n-1}, T(x_{n-1})), d(x_n, T(x_n))\} \\ &\qquad -\min\{d(x_{n-1}, T(x_n)), d(T(x_{n-1}), x_n)\} \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)).\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\min\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n-1})\} \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)),$$

ya que

$$\min\{d(x_{n-1}, T(x_n)), d(T(x_{n-1}), x_n)\} = 0 \text{ y } d(x_n, T(x_n)) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)).$$

Dado que $\psi \in \Psi_b$, se tiene que ψ es una función comparación, por el Lema 1.1, tenemos que $\psi(t) < t$ para cada $t > 0$. Por lo que $d(x_n, x_{n-1}) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n))$ no sucede. Así,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \\
&\leq \psi(\psi(d(x_{n-2}, x_{n-1}))) \\
&= \psi^2(d(x_{n-2}, x_{n-1})) \\
&\leq \psi^2(\psi(d(x_{n-3}, x_{n-2}))) \\
&= \psi^3(d(x_{n-3}, x_{n-2})) \\
&\vdots \\
&\leq \psi^{n-1}(d(x_1, x_2)) \\
&\leq \psi^{n-1}(\psi(d(x_0, x_1))) \\
&= \psi^n(d(x_0, x_1)).
\end{aligned}$$

Es decir, $d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1))$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Del hecho que ψ es una función comparación, $\psi^n(t) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cualquier $t \in [0, \infty)$. De donde

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \lim_{n\to\infty} \psi^n(d(x_0, x_1)).$$

Por el Lema 1.3 se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en (M, d).
Dado que $x_n = T^n(x_0)$ y (M, d) es $T-$orbitalmente completo, existe $z \in M$ tal que $T^n(x_0) \to z$ cuando $n \to \infty$ y del hecho que T es orbitalmente continua, obtenemos que $T^{n+1}(x_0) \to T(z)$ cuando $n \to \infty$.
Por lo tanto, $T(z) = z$ y la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T para cualquier $x_0 \in M$. ■

Corolario 3.1. *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M, d) es un espacio b-métrico $T-$orbitalmente completo. Si existe $k \in [0, 1)$ tal que*

$$\begin{aligned}
\min\{d(T(x), T(y)), d(x, T(x)), d(y, T(y))\} - \\
\min\{d(x, T(y), d(T(x), y)\} &\leq kd(x, y),
\end{aligned}$$

para todo x, $y \in M$, entonces para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Demostración:
Sea $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $\psi(t) = kt$. En el Ejemplo 1.23 se demostró que $\psi \in \Psi_b$.
Ahora,

$$\begin{aligned} \text{mín}\{d(T(x),T(y)), d(x,T(x)), d(y,T(y))\} - \\ \text{mín}\{d(x,T(y), d(T(x),y)\} &\leq kd(x,y) \\ &= \psi(d(x,y)), \end{aligned}$$

para todo x, $y \in M$. Por el Teorema 3.1 tenemos que la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T para todo $x_0 \in M$. ■

Corolario 3.2 (Teorema de punto fijo no único de Ćirić.)**.** *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M,d) es un espacio métrico $T-$orbitalmente completo. Si existe $k \in [0,1)$ tal que*

$$\begin{aligned} \text{mín}\{d(T(x),T(y)), d(x,T(x)), d(y,T(y))\} - \\ \text{mín}\{d(x,T(y), d(T(x),y)\} &\leq kd(x,y), \end{aligned}$$

para todo x, $y \in M$, entonces para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Demostración:
Dado que todo espacio métrico es un espacio b-métrico (con $s = 1$) y se cumplen todas las hipótesis del Corolario 3.1 concluimos que para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T. ■

Dado que todo espacio cono métrico es un espacio b-métrico, por el Corolario 3.1 podemos reescribir el Corolario 3.2 a un espacio cono métrico con cono normal de la siguiente manera.

Corolario 3.3. *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M,d) es un cono espacio métrico con cono normal, $T-$orbitalmente completo. Si existe $k \in [0,1)$ tal que*

$$\begin{aligned} \text{mín}\{d(T(x),T(y)), d(x,T(x)), d(y,T(y))\} - \\ \text{mín}\{d(x,T(y), d(T(x),y)\} &\preceq kd(x,y), \end{aligned}$$

para todo x, $y \in M$, entonces para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Teorema 3.2. *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M, d) es un espacio b-métrico $T-$orbitalmente completo. Supongamos que existen números reales $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ tales que*

$$a_1 + a_2 \neq 0,\ a_1 + a_2 + a_3 > 0,\ 0 \leq a_3 - a_5 \ y \ 0 \leq \frac{a_4 - a_2}{a_1 + a_2} < 1$$

y

$$\begin{aligned} a_1 d(T(x), T(y)) + a_2[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] & \\ +a_3[d(y, T(x)) + d(x, T(y))] & \leq a_4 d(x, y) + \\ & \quad a_5 d(x, T^2(x)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

para todo $x,\ y \in M$. Entonces, T tiene al menos un punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in M$ arbitrario. Construimos una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ como sigue

$$x_{n+1} = T(x_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad (3.2) obtenemos

$$\begin{gathered} a_1 d(T(x_n), T(x_{n+1})) + a_2[d(x_n, T(x_n)) + d(x_{n+1}, T(x_{n+1}))] + \\ a_3[d(x_{n+1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n+1}))] \\ \leq a_4 d(x_n, x_{n+1}) + a_5 d(x_n, T^2(x_n)) \end{gathered}$$

o bien

$$\begin{gathered} a_1 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + a_2[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})] + a_3[d(x_{n+1}, x_{n+1}) + \\ d(x_n, x_{n+2})] \\ \leq a_4 d(x_n, x_{n+1}) + a_5 d(x_n, x_{n+2}). \end{gathered}$$

Esto implica que

$$(a_1 + a_2) d(x_{n+1}, x_{n+2}) + (a_3 - a_5) d(x_n, x_{n+2}) \leq (a_4 - a_2) d(x_n, x_{n+1})$$

del hecho que $0 \leq a_3 - a_5$ se tiene que

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) d(x_{n+1}, x_{n+2}) & \leq (a_1 + a_2) d(x_{n+1}, x_{n+2}) + (a_3 - a_5) d(x_n, x_{n+2}) \\ & \leq (a_4 - a_2) d(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Así, $(a_1 + a_2)d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq (a_4 - a_2)d(x_n, x_{n+1})$. Haciendo $k = \dfrac{a_4 - a_2}{a_1 + a_2}$ obtenemos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq kd(x_n, x_{n+1}) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } 0 \leq k < 1.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k(kd(x_{n-2}, x_{n-1})) \\ &= k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^{n-1} d(x_1, x_2) \\ &\leq k^{n-1}(kd(x_0, x_1)) \\ &= k^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Consideramos $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada mediante $\psi(t) = kt$. Por el Ejemplo 1.23, $\psi \in \Psi_b$ y por la desigualdad anterior tenemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1) = \psi^n(d(x_0, x_1))$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.
Por el Lema 1.3 tenemos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en M.

Ahora, dado que M es $T-$orbitalmente completo, existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$ cuando $n \to \infty$ y recordando como se construyó la sucesión llegamos a que $x_n = T^n(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Debido a que T es orbitalmente continua se tiene que $T(x_n) = x_{n+1} \to T(z)$. Por lo tanto, $T(z) = z$ y como $x_n = T^n(x_0)$ tenemos que la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T. ■

Corolario 3.4. *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M, d) es un espacio métrico $T-$orbitalmente completo. Supongamos que existen número reales a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 tales que*

$$0 \leq \frac{a_4 - a_2}{a_1 + a_2} < 1, \; a_1 + a_2 \neq 0, \; a_1 + a_2 + a_3 > 0 \text{ y } 0 \leq a_3 - a_5$$

y

$$\begin{aligned} a_1 d(T(x), T(y)) + a_2[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] & \\ +a_3[d(y, T(x)) + d(x, T(y))] &\leq a_4 d(x, y) + \\ & \quad a_5 d(x, T^2(x)), \end{aligned}$$

para todo $x,\ y \in M$. Entonces, T tiene al menos un punto fijo.

Demostración:

Dado que todo espacio métrico es un espacio b-métrico (con $s = 1$), entonces aplicando el teorema anterior, T tiene al menos un punto fijo. ■

Teorema 3.3. *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M, d) es un espacio b-métrico $T-$orbitalmente completo. Supongamos que existe $\psi \in \Psi_b$ tal que*

$$P(x, y) - Q(x, y) \leq \psi(d(x, y))R(x, y), \tag{3.3}$$

para todo $x,\ y \in M$, donde

$$P(x, y) = \text{mín}\{d(T(x), T(y))d(x, y), d(x, T(x))d(y, T(y))\},$$

$$Q(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x))d(x, T(y)), d(y, T(y))d(T(x), y)\},$$

$$R(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x)), d(y, T(y))\}.$$

Entonces, para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Demostración:

Sea $x \in M$ arbitrario. Consideremos la sucesión en M dada por

$$x_0 = x \text{ y } x_n = T(x_{n-1}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Inductivamente tenemos que

$$x_n = T^n(x_0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_n = x_{n-1}$, entonces $T(x_{n-1}) = x_n = x_{n-1}$. Por lo que x_0 es un punto eventualmente fijo. Así, la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Ahora, vamos a suponer que

$$x_n \neq x_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad (3.3), obtenemos que

$$P(x_{n-1}, x_n) - Q(x_{n-1}, x_n) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n))R(x_{n-1}, x_n),$$

donde

$$P(x_{n-1}, x_n) = \text{mín}\{d(x_n, x_{n+1})d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})\},$$

$$Q(x_{n-1}, x_n) = \text{mín}\{d(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1})d(x_n, x_n)\},$$

$$R(x_{n-1}, x_n) = \text{mín}\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}.$$

Notemos que $P(x_{n-1}, x_n) - Q(x_{n-1}, x_n) = d(x_n, x_{n+1})d(x_{n-1}, x_n)$ ya que $Q(x_{n-1}, x_n) = 0$ pues $d(x_n, x_n) = 0$. Así,

$$d(x_n, x_{n+1})d(x_{n-1}, x_n) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n))\text{mín}\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}.$$

Si $R(x_{n-1}, x_n) = d(x_n, x_{n+1})$, entonces por la desigualdad anterior tenemos que

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)) < d(x_{n-1}, x_n),$$

ya que $\psi(t) < t$ para cada $t > 0$, pero esto es una contradicción. Por lo que $R(x_{n-1}, x_n) = d(x_{n-1}, x_n)$. De aquí,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)).$$

Ahora,

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_{n+1}) & \leq & \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \\ & \leq & \psi(\psi(d(x_{n-2}, x_{n-1}))) \\ & = & \psi^2(d(x_{n-2}, x_{n-1})) \\ & \vdots & \\ & \leq & \psi^{n-1}(d(x_1, x_2)) \\ & \leq & \psi^{n-1}(\psi(d(x_0, x_1))) \\ & = & \psi^n(d(x_0, x_1)). \end{array}$$

Es decir,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1)) \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema 1.3, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en M y dado que este espacio es $T-$orbitalmente completo existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$ cuando $n \to \infty$. Como T es orbitalmente continua, $T(x_n) = x_{n+1} \to T(z)$. Por lo tanto, $T(z) = z$ y la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T. ■

Corolario 3.5. *Sea* $T : M \to M$ *una función orbitalmente continua, donde* (M, d) *es un espacio b-métrico* $T-$*orbitalmente completo. Supongamos que existe* $k \in [0, 1)$ *tal que*

$$P(x, y) - Q(x, y) \leq kd(x, y)R(x, y),$$

para todo x, $y \in M$, *donde*

$$P(x, y) = \text{mín}\{d(T(x), T(y))d(x, y), d(x, T(x))d(y, T(y))\},$$

$$Q(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x))d(x, T(y)), d(y, T(y))d(T(x), y)\},$$

$$R(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x)), d(y, T(y))\}.$$

Entonces, para cada $x_0 \in M$ *la sucesión* $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a un punto fijo de* T.

Demostración:

Consideremos $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada mediante $\psi(t) = kt$. En el Ejemplo 1.23 se demostró que $\psi \in \Psi_b$, pues $k \in [0, 1)$ y dado que

$$P(x, y) - Q(x, y) \leq kd(x, y)R(x, y) = \psi(d(x, y))R(x, y),$$

para todo x, $y \in M$, por el teorema anterior, para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T. ■

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del corolario anterior, ya que todo espacio métrico es un espacio b-métrico.

Corolario 3.6 (Punto fijo no único de Achari.)**.** *Sea* $T : M \to M$ *una función orbitalmente continua, en donde* (M, d) *es un espacio métrico* T-*orbitalmente completo. Supongamos que existe* $k \in [0, 1)$ *tal que*

$$P(x, y) - Q(x, y) \leq kd(x, y)R(x, y),$$

para todo x, $y \in M$, *donde*

$$P(x, y) = \text{mín}\{d(T(x), T(y))d(x, y), d(x, T(x))d(y, T(y))\},$$

$$Q(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x))d(x, T(y)), d(y, T(y))d(T(x), y)\},$$

$$R(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x)), d(y, T(y))\}.$$

Entonces, para cada $x_0 \in M$ *la sucesión* $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a un punto fijo de* T.

Teorema 3.4. *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M, d) es un espacio b-métrico $T-$orbitalmente completo. Supongamos que existe $k \in [0, 1)$ tal que*

$$m(x, y) - n(x, y) \leq kd(x, T(x))d(y, T(y)), \tag{3.4}$$

para todo x, $y \in M$, donde

$$m(x, y) = \text{mín}\{[d(T(x), T(y))]^2, d(x, y)d(T(x), T(y)), [d(y, T(y))]^2\},$$

$$n(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x))d(y, T(y)), d(x, T(y))d(y, T(x))\}.$$

Entonces, para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Demostración:

Sea $x \in M$ arbitrario. Como en las demostraciones anteriores, consideremos la sucesión en M dada mediante

$$x_0 = x \text{ y } x_n = T(x_{n-1}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Recordando la demostración del Teorema 3.1 tenemos que si para algún $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_{n-1}$, entonces $T(x_{n-1}) = x_n = x_{n-1}$ y por lo tanto, x_0 es un punto eventualmente fijo y de esta manera la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Ahora, consideremos el caso

$$x_n \neq x_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad (3.4) obtenemos que,

$$m(x_{n-1}, x_n) - n(x_{n-1}, x_n) \leq kd(x_{n-1}, T(x_{n-1}))d(x_n, T(x_n)),$$

donde,

$$\begin{aligned} m(x_{n-1}, x_n) &= \text{mín}\big\{[d(T(x_{n-1}), T(x_n))]^2, \\ &\quad d(x_{n-1}, x_n)d(T(x_{n-1}), T(x_n)), [d(x_n, T(x_n))]^2\big\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} n(x_{n-1}, x_n) &= \text{mín}\big\{d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))d(x_n, T(x_n)), \\ &\quad d(x_{n-1}, T(x_n))d(x_n, T(x_{n-1}))\big\}. \end{aligned}$$

Ahora, $d(x_n, T(x_{n-1})) = d(x_n, x_n) = 0$ así, $n(x_{n-1}, x_n) = 0$, por lo que

$$m(x_{n-1}, x_n) \leq kd(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}),$$

donde,

$$m(x_{n-1}, x_n) = \text{mín}\{[d(x_n, x_{n+1})]^2, d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})\}.$$

Si $m(x_{n-1}, x_n) = d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})$, entonces

$$d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})$$

lo cual es una contradicción, pues $k < 1$. Por lo que

$$m(x_{n-1}, x_n) = [d(x_n, x_{n+1})]^2,$$

así,

$$[d(x_n, x_{n+1})]^2 \leq kd(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})$$

lo cual es equivalente a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando la desigualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq k(kd(x_{n-2}, x_{n-1})) \\
&= k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\vdots \\
&\leq k^{n-1} d(x_1, x_2) \\
&\leq k^{n-1}(kd(x_0, x_1)) \\
&= k^n d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si tomamos $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada mediante $\psi(t) = kt$ entonces por el Ejemplo 1.23 se sigue que $\psi \in \Psi_b$. Por lo anterior,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1) = \psi^n(d(x_0, x_1))$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.
Por el Lema 1.3, tenemos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en M. Como M es $T-$orbitalmente completo, existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$ cuando $n \to \infty$ y recordando como se construyó la sucesión, se tiene que $x_n = T^n(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Debido a que T es orbitalmente continua se tiene que $T(x_n) = x_{n+1} \to T(z)$. Por lo tanto, $T(z) = z$ y como $x_n = T^n(x_0)$, tenemos que la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T. ■

Corolario 3.7 (Punto fijo no único de Pachpatte.)**.** *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, en donde (M, d) es un espacio métrico $T-$orbitalmente completo. Supongamos que existe $k \in [0, 1)$ tal que*

$$m(x, y) - n(x, y) \leq kd(x, T(x))d(y, T(y)),$$

para todo x, $y \in M$, donde

$$m(x, y) = \text{mín}\{[d(T(x), T(y))]^2, d(x, y)d(T(x), T(y)), [d(y, T(y))]^2\},$$
$$n(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x))d(y, T(y)), d(x, T(y))d(y, T(x))\}.$$

Entonces, para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Demostración:
Dado que todo espacio métrico es un espacio b-métrico (con $s = 1$), aplicando el teorema anterior, para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T. ■

El Teorema 3.4 está en el contexto de espacios b-métricos y dado que todo espacio cono métrico con cono normal es un espacio b-métrico, entonces podemos reescribir el Teorema 3.4 de la siguiente manera.

Corolario 3.8. *Sea $T : M \to M$ una función orbitalmente continua, donde (M, d) es un espacio cono métrico, con cono normal $T-$orbitalmente completo. Supongamos que existe $k \in [0, 1)$ tal que*

$$m(x, y) - n(x, y) \leq kd(x, T(x))d(y, T(y)),$$

para todo x, $y \in M$, donde

$$m(x, y) = \text{mín}\{[d(T(x), T(y))]^2, d(x, y)d(T(x), T(y)), [d(y, T(y))]^2\},$$
$$n(x, y) = \text{mín}\{d(x, T(x))d(y, T(y)), d(x, T(y))d(y, T(x))\}.$$

Entonces, para cada $x_0 \in M$ la sucesión $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto fijo de T.

Capítulo 4

Más sobre puntos fijos en espacios b-métricos

4.1. Funciones $\alpha-\omega$-Geraghty contractivas generalizadas

Sea Ω el conjunto de funciones crecientes y continuas $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ con $\omega^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. También sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones, $\beta : (0,\infty) \to [0,\frac{1}{s})$, que satisfacen la condición

$$\lim_{n\to\infty} \beta(t_n) = \frac{1}{s} \text{ implica } \lim_{n\to\infty} t_n = 0,$$

para algún $s \geq 1$.

Ejemplo 4.1. *Sea* $\beta : (0,\infty) \to [0,1)$ *dada mediante* $\beta(t) = \dfrac{1}{1+t}$, *entonces* $\beta \in \mathcal{F}$.

En efecto, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+t_n} = 1,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0.$$

Por lo tanto, $\beta \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 4.2. *Sea* $\beta : (0,\infty) \to [0,\frac{1}{2})$ *dada mediante* $\beta(t) = \dfrac{(\log(1+\sqrt{t}))^2}{2t}$. *Entonces,* $\beta \in \mathcal{F}$.

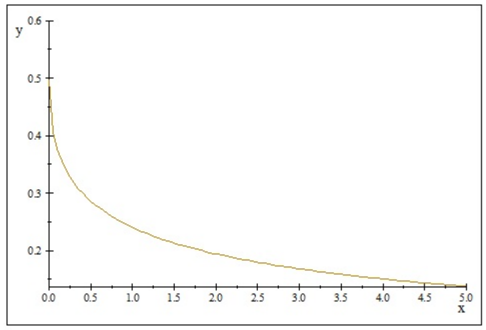

Figura 3. Gráfica de la función β.

Observemos que β es una función decreciente. Supongamos que $\beta(t_n) \to \dfrac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$, sin perdida generalidad supongamos que t_n es una sucesión estrictamente decreciente, esto es $t_{n+1} < t_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Sea $p > 0$. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < t_n < p$ para toda $n \geq k$ entonces $t_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Supongamos que para para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 < p < t_n$, del hecho que β es decreciente se sigue que $\beta(t_n) < \beta(p)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\beta(t_n) \to \beta(p)$ cuando $n \to \infty$, así $\beta(p) = \dfrac{1}{2}$.
Ahora, $\beta(p) = \dfrac{1}{2}$ si y sólo si

$$\frac{(\log(1+\sqrt{p}))^2}{2p} = \frac{1}{2},$$

esto implica que $(\log(1+\sqrt{p}))^2 = p$, es decir, $\log(1+\sqrt{p}) = \pm\sqrt{p}$ o bien $1+\sqrt{p}-\exp(\pm\sqrt{p}) = 0$. Con lo anterior, $p = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $t_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Definición 4.1. *Sean* (M,d) *un espacio b-métrico con* $s \geq 1$ *y* $T : M \to M$ *una función. Decimos que* T *es una función* $\alpha - \omega$***-Geraghty contractiva generalizada*** *si existen* $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$, $\beta \in \mathcal{F}$, ω, $\phi \in \Omega$ *y algún* $L \geq 0$ *tales que para*

$$E(x,y) = \text{máx}\left\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y)), \frac{d(x,T(y))+d(y,T(x))}{2s}\right\}$$

y

$$N(x,y) = \text{mín}\{d(x,T(x)), d(y,T(x))\},$$

tenemos

$$\alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) \leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) + L\phi(N(x,y)), \quad (4.1)$$

para todo x, $y \in M$.

Ejemplo 4.3. *Sean* $s = \frac{4}{3}$, $M = \{0,1,2\}$ *y* $d : M \times M \to [0,\infty)$ *dada mediante*

$$d(0,1) = 1, \; d(0,2) = \frac{1}{2} \text{ y } d(1,2) = 2$$

con $d(x,y) = d(y,x)$ *y* $d(x,x) = 0$ *para* x, $y \in M$. *Entonces* (M,d) *es un espacio b-métrico para* $s = \frac{4}{3}$. *Consideremos* $T : M \to M$ *definida por* $T(x) = 0$ *para todo* $x \in M$.
También sean $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ *dada por* $\alpha(x,y) = 1$ *para todo* $x, \; y \in M$, $\beta \in \mathcal{F}$, $\omega, \phi \in \Omega$ *donde* $\omega(t) = t$ *y* $L \geq 0$. *Entonces,* T *es una función* $\alpha-\omega$*-Geraghty contractiva generalizada.*

Sean $x, \; y \in M$ tales que $x \neq y$.
Si $x = 0$ y $y = 1$ entonces tenemos que

$$E(0,1) = \text{máx}\left\{1, 0, 1, \frac{1}{2(\frac{4}{3})}\right\} = 1,$$

y

$$N(0,1) = \text{mín}\{0,1\} = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) &= \omega(s^3 d(T(0),T(1))) \\
&= \omega(s^3 0) \\
&= 0 \\
&\leq \beta(1)\cdot 1 \\
&= \beta(\omega(1))\omega(1) + L\phi(0) \\
&= \beta(\omega(E(0,1)))\omega(E(0,1)) \\
&\quad +L\phi(N(0,1)).
\end{aligned}$$

Si tomamos $x = 0$ y $y = 2$ tenemos lo siguiente

$$E(0,2) = \text{máx}\left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}}{2(\frac{4}{3})}\right\} = \frac{1}{2},$$

y

$$N(0,2) = \text{mín}\{0, \frac{1}{2}\} = 0.$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
\alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) &= \omega(s^3 d(T(0),T(2))) \\
&= \omega(s^3 0) \\
&= 0 \\
&\leq \beta\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} \\
&= \beta\left(\omega\left(\frac{1}{2}\right)\right)\omega\left(\frac{1}{2}\right) + L\phi(0) \\
&= \beta(\omega(E(0,2)))\omega(E(0,2)) \\
&\quad +L\phi(N(0,2)).
\end{aligned}$$

Por último, si $x = 1$ y $y = 2$ obtenemos

$$E(1,2) = \text{máx}\left\{2, 1, \frac{1}{2}, \frac{\frac{3}{2}}{2(\frac{4}{3})}\right\} = 2,$$

y

$$N(1,2) = \text{mín}\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) &= \omega(s^3 d(T(1),T(2))) \\
&= \omega(s^3 0) \\
&= 0 \\
&\leq \beta(2)\cdot 2 \\
&= \beta(\omega(2))\omega(2) + L\phi\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \beta(\omega(E(1,2)))\omega(E(1,2)) + L\phi(N(1,2)).
\end{aligned}$$

Notemos que cuando $x = y$ similarmente se prueba la desigualdad (4.1). Por lo tanto, T es una función $\alpha - \omega$-Geraghty contractiva generalizada.

Ejemplo 4.4. *Sean $M = [0,\infty)$, $s = 2$ y d la b-métrica del Ejemplo 1.20. Entonces (M,d) es un espacio b-métrico. Consideremos $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ dada por*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x,\ y \in [0,1], \\ 0 & otro\ caso. \end{cases}$$

y $T : M \to M$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & si \quad x \in [0,1], \\ \frac{x^2}{x+1} & otro\ caso. \end{cases}$$

Tomemos $\beta \in \mathcal{F}$ tal que $\beta(t) = \frac{1}{4}$ para todo t; también sean $\omega, \phi \in \Omega$ donde $\omega(t) = t^2$, $\phi(t) = 0$ para todo t, y $L \geq 0$. Entonces T es una función $\alpha - \omega$-Geraghty contractiva generalizada.

Sean $x,\ y \in [0,1]$. Así,

$$\begin{aligned} \alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) &= \omega\left(8 \cdot \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right|^2\right) \\ &= \left[8 \cdot \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right|^2\right]^2 \\ &= \left[\frac{|x-y|^2}{2}\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}|x-y|^4 \\ &= \beta(\omega(d(x,y)))\omega(d(x,y)) + L\phi(N(x,y)) \\ &\leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) + L\phi(N(x,y)). \end{aligned}$$

Cuando $x \in [0,1]$ y $y \in (1,\infty)$ entonces $\alpha(x,y) = 0$. De aquí,

$$\begin{aligned} \alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) &= 0 \cdot \omega(s^3 d(T(x),T(y))) \\ &= 0 \\ &\leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) + L\phi(N(x,y)). \end{aligned}$$

Por último, si $x,\ y \in (1,\infty)$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) &= 0 \cdot \omega(s^3 d(T(x),T(y))) \\ &= 0 \\ &\leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) + L\phi(N(x,y)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una función $\alpha - \omega$-Geraghty contractiva generalizada.

Observación 4.1. *Si* $\beta \in \mathcal{F}$ *entonces* $\beta(x) < \frac{1}{s}$ *para todo* $x \in [0, \infty)$. *Así,*

$$\beta(\omega(E(x,y))) < \frac{1}{s} \text{ para cualesquiera } x,\ y \in M.$$

Teorema 4.1. *Sean* (M, d) *un espacio b-métrico con* $s \geq 1$ *y* $T : M \to M$ *una función* $\alpha - \omega$*-Geraghty contractiva generalizada tales que*

(i) T *es triangular* α*-orbital admisible;*

(ii) *Existe* $x_0 \in M$ *tal que* $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$;

(iii) T *es continua.*

Entonces, T *tiene un punto fijo.*

Demostración:
Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en M dada por

$$x_{n+1} = T(x_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_{n+1}$ entonces $T(x_n) = x_{n+1} = x_n$, es decir T tiene un punto fijo y la prueba termina.

Ahora, supongamos que

$$x_n \neq x_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por hipótesis, T es triangular α-orbital admisible y existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$, más aún, por como se definió la sucesión en M, por el Lema 2.1 tenemos que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad (4.1), utilizando la desigualdad anterior y de que ω es una función creciente, obtenemos que

$$\begin{aligned} \omega(d(x_n, x_{n+1})) &= \omega(d(T(x_{n-1}), T(x_n)))) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n)\omega(s^3 d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq \beta(\omega(E(x_{n-1}, x_n)))\omega(E(x_{n-1}, x_n)) \\ &\quad + L\phi(N(x_{n-1}, x_n)), \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned} E(x_{n-1},x_n) &= \text{máx}\Big\{d(x_{n-1},x_n), d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1}), \\ &\quad \frac{d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_n)}{2s}\Big\} \\ &= \text{máx}\left\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1},x_{n+1})}{2s}\right\} \end{aligned}$$

y

$$N(x_{n-1},x_n) = \text{mín}\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_n)\} = 0.$$

Dado que

$$d(x_{n-1},x_n) \le \text{máx}\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}$$

y

$$d(x_n,x_{n+1}) \le \text{máx}\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}$$

llegamos a que

$$d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1}) \le 2\text{máx}\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\},$$

es decir

$$\frac{d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})}{2} \le \text{máx}\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}.$$

Con esto y dado que M es un espacio b-métrico tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d(x_{n-1},x_{n+1})}{2s} &\le \frac{s[d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})]}{2s} \\ &\le \text{máx}\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Así,

$$E(x_{n-1},x_n) \le \text{máx}\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}.$$

Tomando la desigualdad anterior, la desigualdad (4.2) y que $N(x_{n-1},x_n) = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \omega(d(x_n,x_{n+1})) &\le \omega(s^3 d(x_n,x_{n+1})) \\ &\le \alpha(x_{n-1},x_n)\omega(s^3 d(x_n,x_{n+1})) \\ &\le \beta(\omega(E(x_{n-1},x_n)))\omega(\text{máx}\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}). \end{aligned}$$

Si

$$\max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\} = d(x_n,x_{n+1})$$

entonces por las desigualdades anteriores y por la Observación 4.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\omega(d(x_n,x_{n+1})) &\leq \beta(\omega(E(x_{n-1},x_n)))\omega(\max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}) \\
&= \beta(\omega(E(x_{n-1},x_n)))\omega(d(x_n,x_{n+1})) \\
&< \frac{1}{s}\omega(d(x_n,x_{n+1})) \\
&\leq \omega(d(x_n,x_{n+1}))
\end{aligned}$$

esto es una contradicción. Por lo que

$$\max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\} = d(x_{n-1},x_n).$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\omega(d(x_n,x_{n+1})) &\leq \beta(\omega(E(x_{n-1},x_n)))\omega(\max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}) \\
&= \beta(\omega(E(x_{n-1},x_n)))\omega(d(x_{n-1},x_n)) \\
&< \frac{1}{s}\omega(d(x_{n-1},x_n)) \\
&\leq \omega(d(x_{n-1},x_n))
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{\omega(d(x_n,x_{n+1}))\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no negativa, decreciente. Ya que ω es creciente, la sucesión $\{d(x_n,x_{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ es no creciente. Como $\{d(x_n,x_{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente y del hecho que $d(x_n,x_{n+1}) \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se sigue que existe $\delta \geq 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = \delta.$$

Afirmación. $\delta = 0$.
Dado que $s \geq 1$,

$$\frac{1}{s}\omega(d(x_n,x_{n+1})) \leq \omega(d(x_n,x_{n+1})) \leq \beta(\omega(E(x_{n-1},x_n)))\omega(d(x_{n-1},x_n)).$$

Por la desigualdad anterior, dado que $x_n \neq x_{n+1}$ y la Observación 4.1 tenemos

$$\frac{1}{s}\frac{\omega(d(x_n,x_{n+1}))}{\omega(d(x_{n-1},x_n))} \leq \beta(\omega(E(x_{n-1},x_n))) < \frac{1}{s}.$$

Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \beta(\omega(E(x_{n-1}, x_n))) = \frac{1}{s}$. Ya que $\beta \in \mathcal{F}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \omega(E(x_{n-1}, x_n)) = 0$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \omega(d(x_n, x_{n+1})) \leq \lim_{n\to\infty} \omega(E(x_{n-1}, x_n)) = 0.$$

Del hecho que $d(x_n, x_{n+1}) \to \delta$ cuando $n \to \infty$ y de la continuidad de ω, concluimos que $\omega(\delta) = 0$. Como $\omega \in \Omega$ se tiene que $\omega^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, obtenemos que $\delta = 0$. Con esto concluimos la afirmación.
Por la afirmación anterior tenemos,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{4.3}$$

Ahora, se mostrará que

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Supongamos lo contrario, es decir, existe $\epsilon > 0$ y subsucesiones $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{x_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $n_i > m_i \geq i$ tales que

$$d(x_{m_i}, x_{n_i}) \geq \epsilon. \tag{4.4}$$

Además, con respecto a m_i, elegimos n_i el entero más pequeño que satisfaga la desigualdad (4.4) y $n_i > m_i \geq i$. Por lo tanto,

$$d(x_{m_i}, x_{n_i-1}) < \epsilon. \tag{4.5}$$

De la desigualdad (4.4) y de que M es un espacio b-métrico, se tiene

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq d(x_{n_i}, x_{m_i}) \\
&\leq sd(x_{n_i}, x_{n_i+1}) + sd(x_{n_i+1}, x_{m_i}) \\
&\leq sd(x_{n_i}, x_{n_i+1}) + s^2 d(x_{n_i+1}, x_{m_i+1}) + s^2 d(x_{m_i+1}, x_{m_i}).
\end{aligned}$$

Con esto, tomando $i \to \infty$ y recordando (4.3) produce que

$$\frac{\epsilon}{s^2} \leq \limsup_{i\to\infty} d(x_{n_i+1}, x_{m_i+1}). \tag{4.6}$$

Recordemos que por el Lema 2.1 se tiene que

$$\alpha(x_{m_i}, x_{n_i}) \geq 1.$$

Esto y la desigualdad (4.1) implican que

$$\begin{aligned}\omega(d(x_{n_i+1},x_{m_i+1})) &= \omega(d(T(x_{n_i}),T(x_{m_i})))\\ &\leq \omega(s^3 d(T(x_{n_i}),T(x_{m_i})))\\ &\leq \alpha(x_{m_i},x_{n_i})\omega(s^3 d(T(x_{n_i}),T(x_{m_i})))\\ &\leq \beta(\omega(E(x_{n_i},x_{m_i})))\omega(E(x_{n_i},x_{m_i}))+L\phi(N(x_{n_i},x_{m_i})),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}E(x_{n_i},x_{m_i}) &= \text{máx}\Big\{d(x_{n_i},x_{m_i}),d(x_{n_i},x_{n_i+1}),d(x_{m_i},x_{m_i+1}),\\ &\qquad \frac{d(x_{n_i},x_{m_i+1})+d(x_{m_i},x_{n_i+1})}{2s}\Big\},\end{aligned}$$

y

$$N(x_{n_i},x_{m_i})=\text{mín}\left\{d(x_{n_i},x_{n_i+1}),d(x_{m_i},x_{n_i+1})\right\}.$$

Notemos que, por el hecho de que M es un espacio b-métrico,

$$\begin{aligned}\frac{d(x_{n_i},x_{m_i+1})+d(x_{m_i},x_{n_i+1})}{2s} &\leq \frac{s[d(x_{n_i},x_{m_i})+d(x_{m_i},x_{m_i+1})]}{2s}\\ &\quad +\frac{s[d(x_{m_i},x_{n_i})+d(x_{n_i},x_{n_i+1})]}{2s}\end{aligned}\qquad (4.7)$$

y usando (4.5)

$$d(x_{n_i},x_{m_i})\leq s[d(x_{n_i},x_{n_i-1})+d(x_{n_i-1},x_{m_i})]<sd(x_{n_i},x_{n_i-1})+s\epsilon.\qquad (4.8)$$

Por (4.3), (4.5), (4.7) y (4.8) tenemos que

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to\infty} E(x_{n_i},x_{m_i}) &= \limsup_{i\to\infty}\Big[\text{máx}\Big\{d(x_{n_i},x_{m_i}),\\ &\qquad \frac{d(x_{n_i},x_{m_i+1})+d(x_{m_i},x_{n_i+1})}{2s}\Big\}\Big]\\ &= \limsup_{i\to\infty} d(x_{n_i},x_{m_i})\\ &\leq \limsup_{i\to\infty} sd(x_{n_i},x_{n_i-1})+s\epsilon\\ &= s\epsilon.\end{aligned}$$

y

$$\lim_{i\to\infty} N(x_{n_i},x_{m_i})=\lim_{i\to\infty}[\text{mín}\left\{d(x_{n_i},x_{n_i+1}),d(x_{m_i},x_{n_i+1})\right\}]=0.$$

Con esto, utilizando (4.6), la continuidad de la función ω, (4.1) y la Observación 4.1, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\omega(s\epsilon) &\leq \omega(s\epsilon)\\
&= \omega\left(\frac{s^3\epsilon}{s^2}\right)\\
&\leq \omega(s^3 \limsup_{i\to\infty} d(x_{n_i+1}, x_{m_i+1}))\\
&= \limsup_{i\to\infty} \omega(s^3 d(x_{n_i+1}, x_{m_i+1}))\\
&\leq \limsup_{i\to\infty} \alpha(x_{m_i}, x_{n_i})\omega(s^3 d(x_{n_i+1}, x_{m_i+1}))\\
&= \limsup_{i\to\infty} \alpha(x_{m_i}, x_{n_i})\omega(s^3 d(T(x_{n_i}), T(x_{m_i}))\\
&\leq \limsup_{i\to\infty} \beta(\omega(E(x_{n_i}, x_{m_i})))\omega(E(x_{n_i}, x_{m_i})) + L\phi(N(x_{n_i}, x_{m_i}))\\
&\leq \omega(s\epsilon) \limsup_{i\to\infty} \beta(\omega(E(x_{n_i}, x_{m_i})))\\
&< \frac{1}{s}\omega(s\epsilon),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{s}\omega(s\epsilon) \leq \omega(s\epsilon) \limsup_{i\to\infty} \beta(\omega(E(x_{n_i}, x_{m_i}))) < \frac{1}{s}\omega(s\epsilon).$$

De aquí,

$$\limsup_{i\to\infty} \beta(\omega(E(x_{n_i}, x_{m_i}))) = \frac{1}{s}$$

y del hecho que $\beta \in \mathcal{F}$ tenemos que

$$\limsup_{i\to\infty} \omega(E(x_{n_i}, x_{m_i})) = 0.$$

Así,

$$\limsup_{i\to\infty} \omega(d(x_{n_i}, x_{m_i})) = 0.$$

De la continuidad de ω y del hecho que $\omega^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, entonces

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{n_i}, x_{m_i}) = 0,$$

esto contradice (4.4).

Por lo tanto, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en (M, d). Ya que este espacio b-métrico es completo, existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$ cuando $n \to \infty$. De la continuidad de T, tenemos que $T(z) = z$, es decir T tiene un punto fijo. ■

Definición 4.2. *Sean (M, d) un espacio b-métrico y $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ una función. Decimos que M es **α-regular**, si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M tal que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, donde $x \in M$, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\alpha(x_{n_k}, x) \geq 1$ para todo k.*

Ejemplo 4.5. *Consideremos $M = [0, \infty)$ y $\alpha : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ como en el Ejemplo 4.4. Entonces, M es α-regular.*

Recordemos que α esta dada mediante,

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & si \quad x,\ y \in [0, 1], \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, \infty)$ de tal manera que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, para algún $x \in [0, \infty)$. Como $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Primero supongamos que $x \in [0, 1]$. En este caso, la subsucesión que nos sirve es la misma sucesión y así, $\alpha(x_n, x) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora notemos que el caso $x \notin [0, 1]$ no sucede, pues de lo contrario existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \notin [0, 1]$ esto sucede pues $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, lo cual contradice el hecho de que $x_n \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto, $M = [0, \infty)$ es α-regular.

Ejemplo 4.6. *Sean $M = \{1, 2, 3\}$ con la métrica discreta y $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ dada por $\alpha(x, y) = xy$. Entonces, M es α-regular.*

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en M tal que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, para algún $x \in M$. Dado que, $x_n \geq 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y del hecho que $x \in M$ llegamos a que $x_n x \geq 1$, es decir $\alpha(x_n, x) \geq 1$. Por lo tanto, M es α-regular.

En el inciso (iii) del Teorema 4.1 se pide que la función T sea continua, a continuación damos un teorema donde se reemplaza esta propiedad por la α-regularidad del espacio M.

Teorema 4.2. *Sean (M, d) un espacio b-métrico completo y $T : M \to M$ una función $\alpha - \omega$- Geraghty contractiva generalizada tales que*

(i) *T es triangular α-orbital admisible.*

(ii) *Existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$.*

(iii) *M es α-regular.*

Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración:

Definimos una sucesión en M similarmente a la del teorema anterior, es decir

$$x_{n+1} = T(x_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_n = x_{n+1}$ entonces T tiene un punto fijo.

Ahora, supongamos que

$$x_n \neq x_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Haciendo un procedimiento similar a la demostración del Teorema 4.1, se puede demostrar que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en M y que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Dado que M es completo, existe $z \in M$ tal que $x_n \to z$ cuando $n \to \infty$. Por hipótesis, tenemos que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$ e inductivamente tenemos que

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dado que M es α-regular y de que $x_n \to z$ cuando $n \to \infty$, existe una subsucesión
$\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $\alpha(x_{n_k}, z) \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Usando que M es un espacio b-métrico, se tiene que

$$d(z, T(z)) \leq sd(z, x_{n_k+1}) + sd(x_{n_k+1}, T(z)) = sd(z, x_{n_k+1}) + sd(T(x_{n_k}), T(z)).$$

Así, tomando a k cuando tiende a infinito

$$d(z, T(z)) \leq \liminf_{k\to\infty} sd(T(x_{n_k}), T(z)).$$

Ya que $\omega \in \Omega$ y por lo anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \omega(s^2 d(z,T(z))) &\leq \omega(s^2 \lim_{k\to\infty} sd(T(x_{n_k}),T(z))) \\ &= \lim_{k\to\infty} \omega(s^3 d(T(x_{n_k}),T(z))) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \alpha(x_{n_k+1},z)\omega(s^3 d(T(x_{n_k}),T(z))) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} [\beta(\omega(E(x_{n_k},z)))\omega(E(x_{n_k},z)) + L\phi(N(x_{n_k},z))], \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde

$$E(x_{n_k},z) = \text{máx}\left\{d(x_{n_k},z), d(x_{n_k},x_{n_k+1}), d(z,T(z)), \frac{d(x_{n_k},T(z)) + d(z,x_{n_k+1})}{2s}\right\}$$

y

$$N(x_{n_k},z) = \text{mín}\{d(x_{n_k},x_{n_k+1}), d(z,x_{n_k+1})\}.$$

Notemos que, como M es un espacio b-métrico, se tiene

$$\frac{d(x_{n_k},T(z)) + d(z,x_{n_k+1})}{2s} \leq \frac{sd(x_{n_k},z) + sd(z,T(z)) + d(z,x_{n_k+1})}{2s}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{d(x_{n_k},T(z)) + d(z,x_{n_k+1})}{2s} &\leq \lim_{k\to\infty} \left[\frac{sd(x_{n_k},z) + sd(z,T(z))}{2s} \frac{d(z,x_{n_k+1})}{2s}\right] \\ &= \frac{d(z,T(z))}{2}. \end{aligned}$$

Utilizando esto, cuando k tiende a infinito vemos que

$$\lim_{k\to\infty} E(x_{n_k},z) = d(z,T(z))$$

y

$$\lim_{k\to\infty} N(x_{n_k},z) = 0.$$

Dado que $\beta(\omega(E(x_{n_k},z))) < \frac{1}{s}$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por (4.9)

$$\begin{aligned}
\omega(s^2 d(z,T(z))) &\leq \lim_{k\to\infty}[\beta(\omega(E(x_{n_k},z)))\omega(E(x_{n_k},z)) + L\phi(N(x_{n_k},z))] \\
&< \frac{1}{s}\omega(d(z,T(z))) \\
&\leq \omega(d(z,T(z))).
\end{aligned}$$

Como $s \geq 1$, $d(z,T(z)) \leq s^2 d(z,T(z))$. Y como $\omega \in \Omega$, la desigualdad anterior se cumple si y sólo si $d(z,T(z)) = 0$, es decir z es un punto fijo de T. ■

Ahora, es interesante preguntarse si los puntos fijos de los teoremas anteriores son únicos, para poder saber cuando tenemos puntos fijos únicos consideraremos la siguiente hipótesis, donde $Fix(T)$ representa el conjunto de puntos fijos de T.

(H$_1$): Para cualesquiera $x,\ y \in Fix(T)$ se tiene que $\alpha(x,y) \geq 1$ o $\alpha(y,x) \geq 1$.

Teorema 4.3. *Añadiendo la condición (H$_1$) a las hipótesis del Teorema 4.1 (respectivamente, al Teorema 4.2) obtenemos la unicidad del punto fijo de T.*

Demostración:

Sean $x,\ y \in Fix(T)$ tales que $x \neq y$. Con esto, $E(x,y) = d(x,y)$ y $N(x,y) = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\omega(d(x,y)) &\leq \omega(s^3 d(T(x),T(y))) \\
&\leq \alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) \\
&\leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) + L\phi(N(x,y)) \\
&< \frac{1}{s}\omega(d(x,y)) \\
&\leq \omega(d(x,y)).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\omega(d(x,y)) < \frac{1}{s}\omega(d(x,y)) \leq \omega(d(x,y)),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x = y$. ■

Definición 4.3. *Sean (M,d) un espacio b-métrico con $s \geq 1$ y $T : M \to M$ una función. Decimos que T es una función $\alpha - \omega$-**Geraghty contractiva***

generalizada de tipo (B) *si existen* $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$*,* $\beta \in \mathcal{F}$ *y* $\omega \in \Omega$ *tales que para*

$$E(x,y) = \text{máx}\left\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y)), \frac{d(x,T(y)) + d(y,T(x))}{2s}\right\},$$

tenemos

$$\alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) \leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) \tag{4.10}$$

para cualesquiera x*,* $y \in M$*.*

Si tomamos $L \geq 0$ y ϕ una función en Ω entonces

$$\beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) \leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) + L\phi(N(x,y)).$$

Con esto tenemos la siguiente observación.

Observación 4.2. *Si* (M,d) *un espacio b-métrico con* $s \geq 1$ *y* $T : M \to M$ *es una función* $\alpha - \omega$*-Geraghty contractiva generalizada de tipo (B) entonces* T *es una función* $\alpha - \omega$*-Geraghty contractiva generalizada.*

Por la Observación 4.2 podemos deducir los siguientes teoremas.

Teorema 4.4. *Sean* (M,d) *un espacio b-métrico completo y* $T : M \to M$ *una función* $\alpha - \omega$*- Geraghty contractiva generalizada de tipo (B) tales que*

(i) T *es triangular* α*-orbital admisible.*

(ii) *Existe* $x_0 \in M$ *tal que* $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$*.*

(iii) T *es continua, ó* M *es* α*-regular.*

Entonces, T *tiene un punto fijo.*

Teorema 4.5. *Añadiendo la condición* (H_1) *a las hipótesis del Teorema 4.4 obtenemos la unicidad del punto fijo de* T*.*

En algunos casos, fácilmente se puede demostrar cuando una función tiene un punto fijo, el siguiente ejemplo es sobre una función la cual se define de una manera compleja. El objetivo de este ejemplo, es observar la importancia de los teoremas que se demostraron anteriormente. Pero antes, veamos la siguiente definición y mostraremos un lema, que será de utilidad para el ejemplo.

Definición 4.4. *Sean $0 < p < \infty$ y (X, μ) un espacio medible. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces definimos*

$$\| f \|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad y \quad \| f \|_{L^\infty(X,\mu)} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Lema 4.1. *Sea (X, μ) un espacio medible tal que $\mu(X) = 1$. Tomemos $f \in L^1(X, \mu)$ que satisface la condición $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Entonces, $\log(f) \in L^1(X, \mu)$ y*

$$\int_X \log(f) d\mu \leq \log \left(\int_X f d\mu \right).$$

Demostración:

Sean $g(t) = t - 1 - \log(t)$ y $h(t) = 1 - \frac{1}{t} - \log(t)$ para $t > 0$. Entonces $g'(t) = 1 - \frac{1}{t}$ y $h'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}$. También, $g''(t) = \frac{1}{t^2}$ y $h''(t) = -\frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^2}$. Notemos que $g'(1) = 0$ y $h'(1) = 0$, de aquí $g''(1) = 1 > 0$ y $h''(1) = -1 < 0$. Por lo tanto, 1 es un mínimo local de g y es un máximo local de h, es decir,

$$g(t) \geq g(1) = 0 \text{ y } h(t) \leq h(1) = 0 \text{ para todo } t > 0.$$

Las gráficas de las funciones g y h se muestran en la siguiente figura.

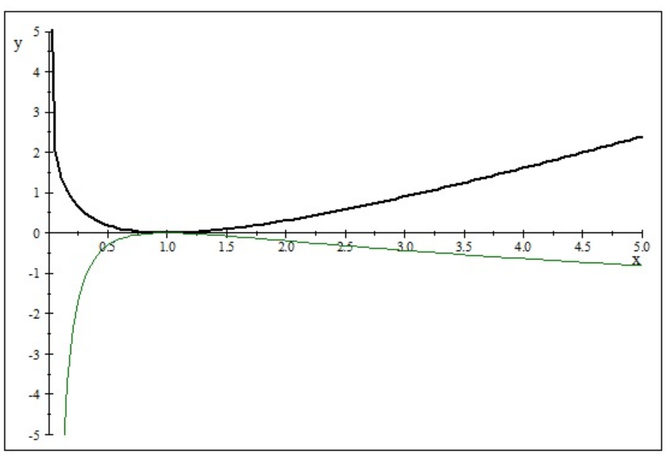

Figura 4. Gráfica de las funciones g y h.

Dado que $g(t) \geq 0$ y $h(t) \leq 0$, se tiene que $t - 1 \geq \log(t)$ y $1 - \frac{1}{t} \leq \log(t)$, es decir,

$$t - 1 \geq \log(t) \geq 1 - \frac{1}{t} \text{ para todo } t > 0.$$

En la siguiente figura, se puede observar el comportamiento de las funciones $t-1$ y $1-\frac{1}{t}$, donde en efecto la función logaritmo (la cual esta de color verde), se encuentra entre las funciones de color negro y amarillo (las cuales son las funciones $t-1$ y $1-\frac{1}{t}$ respectivamente).

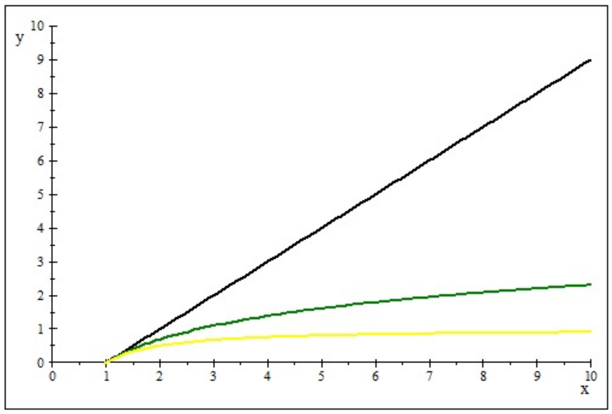

Figura 5. Comportamiento de las funciones $t-1, \log(t)$ y $1-\frac{1}{t}$.

Ya que f es medible y la función log es continua, entonces $\log(f)$ es una función medible y así $\log(f) \in L^1(X,\mu)$. Ahora, para cualquier $x \in X$ tomemos $t = \frac{f(x)}{\|f\|_{L^1(X,\mu)}}$. Así,

$$\frac{f(x)}{\| f \|_{L^1(X,\mu)}} - 1 \geq \log\left(\frac{f(x)}{\| f \|_{L^1(X,\mu)}}\right) \geq 1 - \frac{1}{\frac{f(x)}{\|f\|_{L^1(X,\mu)}}},$$

o bien,

$$1 - \frac{\| f \|_{L^1(X,\mu)}}{f(x)} \leq \log(f(x)) - \log(\| f \|_{L^1(X,\mu)}) \leq \frac{f(x)}{\| f \|_{L^1(X,\mu)}} - 1.$$

Del hecho de que $1 - \frac{\|f\|_{L^1(X,\mu)}}{f(x)}$ y $\frac{f(x)}{\|f\|_{L^1(X,\mu)}} - 1$ son integrables en X se tiene que

$$\log(f(x)) - \log(\| f \|_{L^1(X,\mu)})$$

es integrable en X. Con todo esto,

$$\int_X \log(f(x)) - \log(\| f \|_{L^1(X,\mu)}) d\mu \leq \int_X \frac{f(x)}{\| f \|_{L^1(X,\mu)}} - 1 d\mu = 0.$$

Por lo tanto,
$$\int_X \log(f(x))d\mu \leq \log\left(\int_X f(x)d\mu\right).$$

■

Ejemplo 4.7. *Sea M el conjunto de las funciones reales x con medida de Lebesgue en $[0,1]$ tales que*
$$\int_0^1 |x(t)|dt \leq 1.$$
Definimos $d : M \times M \to [0,\infty)$ por
$$d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|dt\right)^2.$$
Entonces, d es una b-métrica con $s = 2$.

También sea $T : M \to M$ el operador dado mediante
$$T(x)(t) = \frac{1}{4}\log(1 + |x(t)|).$$
Y consideramos las funciones $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$, $\beta : [0,\infty) \to [0,\frac{1}{2})$ y $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definidas por
$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x(t) \geq y(t), \forall t \in [0,1], \\ 0 & otro\ caso. \end{cases}$$
$$\omega(t) = t \ \ y \ \ \beta(t) = \frac{(\log(1+\sqrt{t}))^2}{2t}.$$

Observemos que $\omega \in \Omega$. Por el Ejemplo 4.2 tenemos que $\beta \in \mathcal{F}$.

Afirmación. T es triangular α-orbital admisible y $\alpha(1, T(1)) \geq 1$. Primero, si $\alpha(x, T(x)) \geq 1$ entonces $x(t) \geq T(x)(t)$. Por como se definió T, se tiene que es creciente. Así, $T(x)(t) \geq T^2(x)(t)$, es decir, $\alpha(T(x), T^2(x)) \geq 1$. Ahora, si $\alpha(x,y) \geq 1$ y $\alpha(y, T(y)) \geq 1$ entonces $x(t) \geq y(t)$ y $y(t) \geq T(y)(t)$, de donde $x(t) \geq T(y)(t)$, es decir, $\alpha(x, T(y)) \geq 1$.
Además,
$$T(1) = \frac{1}{4}\log(2) < 1.$$
Por lo tanto T es triangular α-orbital admisible y $\alpha(1, T(1)) \geq 1$.

A continuación probaremos que T es una función $\alpha-\omega$-Geraghty contractiva generalizada de tipo (B).
Notemos que para toda $t \in [0,1]$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x)(t),T(y)(t)))} &\leq \sqrt{2^3\left(\int_0^1 |T(x(t))-T(y(t))|dt\right)^2}\\
&\leq 2\sqrt{2}\int_0^1 \left|\frac{1}{4}\log(1+|x(t)|)\right.\\
&\qquad\qquad \left.-\frac{1}{4}\log(1+|y(t)|)\right| dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left|\log\left(\frac{1+|x(t)|}{1+|y(t)|}\right)\right| dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left|\log\left(1+\frac{|x(t)|-|y(t)|}{1+|y(t)|}\right)\right| dt\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 |\log(1+|x(t)|-|y(t)|)|dt
\end{aligned}
$$

Por el Lema 4.1, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |\log(1+|x(t)|-|y(t)|)|dt &\leq \log\left(\int_0^1 (1+|x(t)-y(t)|)dt\right)\\
&= \log\left(1+\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x)(t),T(y)(t)))} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 |\log(1+|x(t)|-|y(t)|)|dt\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{d(x,y)}\right).
\end{aligned}
$$

Con todo esto, obtenemos que

$$\begin{aligned}\alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x)(t),T(y)(t))) &\leq \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\sqrt{d(x,y)}\right)\right)^2\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\sqrt{E(x,y)}\right)\right)^2\\ &= \frac{\left(\log\left(1+\sqrt{E(x,y)}\right)\right)^2}{2E(x,y)}E(x,y)\\ &= \beta\left(\omega(E(x,y))\right)\omega\left(E(x,y)\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una función $\alpha-\omega$-Geraghty contractiva generalizada de tipo (B).
Por el Teorema 4.4 obtenemos que T tiene un punto fijo.

4.2. Puntos fijos en espacios b-métricos

En esta sección se encuentran resultados existentes, que serán consecuencia inmediata del Teorema 4.3.

Corolario 4.1. *Sean (M,d) un espacio b-métrico completo con $s \geq 1$ y $T: M \to M$ una función. Si existen $\beta \in \mathcal{F}$, ω, $\phi \in \Omega$ y $L \geq 0$ tales que para cualesquiera x, $y \in M$,*

$$\omega(s^3 d(T(x),T(y))) \leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)) + L\phi(N(x,y)),$$

donde

$$E(x,y) = \text{máx}\left\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y)), \frac{d(x,T(y))+d(y,T(x))}{2s}\right\},$$

$$N(x,y) = \text{mín}\{d(x,T(x)), d(y,T(x))\},$$

entonces, T tiene un único punto fijo.

Demostración:
Si tomamos $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ dada mediante $\alpha(x,y) = 1$ para todo x, $y \in M$, entonces T es una función $\alpha-\omega$-Geraghty contractiva generalizada, esto se sigue de las hipótesis. Ahora, fijemos $x_0 \in M$, así $\alpha(x_0, T(x_0)) = 1$, además T es triangular α-orbital admisible.

Notemos que M es α-regular, en efecto, si tomamos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en M tal que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para algún $x \in M$ tenemos que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Para cualquier subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que $\alpha(x_{n_k}, x) \geq 1$. Con esto, M es α-regular.
También, si tomamos $x,\ y \in Fix(T)$ entonces $\alpha(x, y) = 1$. Así, se satisface también (H_1). Por el Teorema 4.3, T tiene un único punto fijo. ■

Corolario 4.2. *Sean (M, d) un espacio b-métrico completo con $s \geq 1$ y $T : M \to M$ una función. Si existen $\beta \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega$ tales que para cualesquiera $x,\ y \in M$,*

$$\omega(s^3 d(T(x), T(y))) \leq \beta(\omega(E(x, y)))\omega(E(x, y)),$$

donde

$$E(x, y) = \text{máx}\left\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), \frac{d(x, T(y)) + d(y, T(x))}{2s}\right\},$$

entonces, T tiene un único punto fijo.

Demostración:
Sea $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ dada por $\alpha(x, y) = 1$ para todo $x,\ y \in M$. Así, T es una función $\alpha - \omega$-Geraghty contractiva generalizada de tipo (B). Similarmente a la demostración del Corolario 4.1, T es triangular α-orbital admisible, existe $x_0 \in M$ tal que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$, M es α-regular y se satisface la hipótesis (H_1). Por lo tanto, por el Teorema 4.5, T tiene un único punto fijo. ■

Corolario 4.3. *Sean (M, d) un espacio b-métrico completo con $s \geq 1$ y $T : M \to M$ una función. Si existe $\beta \in \mathcal{F}$ tal que para cualesquiera $x,\ y \in M$,*

$$s^3 d(T(x), T(y)) \leq \beta(E(x, y))E(x, y),$$

donde

$$E(x, y) = \text{máx}\left\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), \frac{d(x, T(y)) + d(y, T(x))}{2s}\right\},$$

entonces, T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Sean $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ dada por $\alpha(x, y) = 1$ para todo $x,\ y \in M$ y $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada mediante $\omega(t) = t$ para todo $t \in [0, \infty)$. Así, T es una función $\alpha - \omega$-Geraghty contractiva generalizada de tipo (B), ya que

$$\begin{aligned} \alpha(x,y)\omega(s^3 d(T(x),T(y))) &= s^3 d(T(x),T(y)) \\ &\leq \beta(E(x,y))E(x,y) \\ &= \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)). \end{aligned}$$

Similarmente a la demostración del Corolario 4.1, se pueden demostrar todas las hipótesis del Teorema 4.3. Por lo tanto, T tiene un único punto fijo. ■

Corolario 4.4. *Sean (M, d) un espacio b-métrico completo con $s \geq 1$ y $T : M \to M$ una función tal que para cualesquiera $x,\ y \in M$,*

$$d(T(x), T(y)) \leq \frac{E(x, y)}{1 + E(x, y)},$$

donde $E(x, y)$ esta definida como en el Corolario 4.3. Entonces, T tiene un único punto fijo.

Demostración:

Si tomamos $s = 1$ y $\beta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada mediante $\beta(t) = \dfrac{1}{1 + t}$ para todo $t \geq 0$ entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} s^3 d(T(x),T(y)) &= d(T(x),T(y)) \\ &\leq \frac{E(x,y)}{1+E(x,y)} \\ &= \beta(E(x,y))E(x,y). \end{aligned}$$

Más aún, por el Ejemplo 4.1 se tiene que $\beta \in \mathcal{F}$. Así, por el Corolario 4.3 tenemos que T tiene un único punto fijo. ■

4.3. Puntos fijos en espacios b-métricos parcialmente ordenados

En la última decada, se han desarrollado varios resultados sobre la existencia de un punto fijo en espacios b-métricos que estan parcialmente ordenados.

En esta sección se mencionarán algunos resultados que serán consecuencia inmediata de los teoremas 4.3 y 4.5. Antes de enunciar dichos resultados, primero recordemos algunos conceptos básicos.

Definición 4.5. *Una relación R sobre un conjunto M, es un* ***orden parcial*** *si es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir*

1. *(Reflexiva) Si aRa para toda $a \in M$,*
2. *(Antisimétrica) Si aRb y bRa entonces $a = b$ para cualesquiera $a, b \in M$,*
3. *(Transitiva) Si aRb y bRc entonces aRc para cualesquiera $a, b, c \in R$*

Definición 4.6. *Sean $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $T : M \to M$ una función. Decimos que T es una función* ***no decreciente*** *con respecto al orden $\preceq$, si*

$$x,\ y \in M,\ x \preceq y \ \textit{implica}\ T(x) \preceq T(y).$$

Ejemplo 4.8. *Sean $(\mathbb{R}, \leq)$ con el orden usual y $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada mediante $T(x) = x^3 + x$. Entonces, T es una función no decreciente con respecto al orden $\leq$.*

En efecto, si tomamos $x, y \in \mathbb{R}$ de tal manera que $x \leq y$ entonces $x^3 \leq y^3$ y dado que $x \leq y$, $x^3 + x \leq y^3 + y$, es decir $T(x) \leq T(y)$.

Ejemplo 4.9. *Sean X un conjunto no vacío, $(P(X), \subseteq)$ el conjunto potencia, con el orden de la contención de conjuntos y $T : P(X) \to P(X)$ dada mediante $T(A) = A$. Entonces, T es no decreciente con respecto al orden $\subseteq$.*

Sean $A, B \in P(X)$ tal que $A \subseteq B$ entonces por como se definió T, se tiene que $T(A) \subseteq T(B)$. Por lo tanto, T es una función no decreciente con respecto al orden $\subseteq$.

Definición 4.7. *Sea $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M es* ***no decreciente*** *con respecto al orden $\preceq$, si $x_n \preceq x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 4.10. *Sean $(\mathbb{R}, \leq)$ con el orden usual y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $x_n = -\frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente.*

Sabemos que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto implica que $-\dfrac{1}{n+1} > -\dfrac{1}{n}$, es decir $x_n \leq x_{n+1}$.

Definición 4.8. *Sean $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y d una b-métrica en M. Decimos que la terna $(M, \preceq, d)$ es* ***regular*** *si para cualquier sucesión no decreciente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M tal que para algún $x \in M$ tenemos que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \preceq x$ para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 4.11. *Sea $(\mathbb{R}^2, \leq, d_u)$ donde d_u es la métrica usual y $\leq$ es el orden definido mediante*

$$(x, y) \leq (w, z) \text{ si y sólo si } x \leq w \text{ y } y \leq z,$$

se afirma que la terna $(\mathbb{R}^2, \leq, d_u)$ es regular.

En efecto, tomemos $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión no decreciente en $\mathbb{R}^2$ tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ cuando $n \to \infty$, como $(x_n, y_n) \to (x, y)$ cuando $n \to \infty$ entonces $(x_n, y_n) \leq (x, y)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, la subsucesión que nos sirve es la misma sucesión. Por lo tanto, la terna $(\mathbb{R}^2, \leq, d_u)$ es regular.

Ahora, veamos el siguiente resultado.

Corolario 4.5. *Sean $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y d una b-métrica con $s \geq 1$ en M tal que (M, d) es completo. Sea $T : M \to M$ una función no decreciente con respecto a $\preceq$. Supongamos que existen funciones $\beta \in \mathcal{F}$, $\omega \in \Omega$ tales que*

$$\omega(s^3 d(T(x), T(y))) \leq \beta(\omega(E(x, y)))\omega(E(x, y))$$

y

$$E(x, y) = \text{máx}\left\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), \frac{d(x, T(y)) + d(y, T(x))}{2s}\right\}$$

para todo x, $y \in M$ con $x \succeq y$. Supongamos también que se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) *existe $x_0 \in M$ tal que $x_0 \preceq T(x_0)$;*

(ii) *T es continua o $(M, \preceq, d)$ es regular.*

Entonces T tiene un punto fijo. Además, si para cualesquiera $x, y \in Fix(T)$ ya sea $x \preceq y$ o $x \succeq y$, tenemos la unicidad del punto fijo.

Demostración:
Sea $\alpha : M \times M \to [0, \infty)$ dada mediante

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \preceq y \text{ o } x \succeq y, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que, T es una función $\alpha - \omega$-Geraghty contractiva generalizada de tipo (B), esto es

$$\alpha(x, y)\omega(s^3 d(T(x), T(y))) \leq \beta(\omega(E(x, y)))\omega(E(x, y)),$$

para cada $x, y \in M$. Por la condición (i), existe $x_0 \in M$ tal que $x_0 \preceq T(x_0)$ y por como se definió α, se tiene que $\alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$.
Ahora, se probará que T es triangular α-orbital admisible y en efecto, pues si $\alpha(x, T(x)) \geq 1$ entonces $x \preceq T(x)$ o $x \succeq T(x)$ y dado que T es no decreciente, entonces $T(x) \preceq T^2(x)$ o $T(x) \succeq T^2(x)$, por lo que $\alpha(T(x), T^2(x)) \geq 1$. También, si $\alpha(x, y) \geq 1$ y $\alpha(y, T(y)) \geq 1$ entonces, $\alpha(x, T(y)) \geq 1$. Con esto queda demostrado que T es triangular α-orbital admisible.

En el caso que T es continua, por el Teorema 4.4, T tiene un punto fijo. A continuación, se probará que (M, d) es α-regular. Tomemos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en M tal que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para alguna $x \in M$ tenemos que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Por hipótesis, se sabe que $(M, \preceq, d)$ es regular, esto implica que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \preceq x$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por la definción de α, tenemos que $\alpha(x_{n_k}, x) \geq 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, (M, d) es α-regular, más aún por el Teorema 4.4 concluimos que T tiene un punto fijo.

Para probar la unicidad, sean $x, y \in Fix(T)$. Dado que $x \preceq y$ o $x \succeq y$, se tiene que $\alpha(x, y) \geq 1$ y $\alpha(y, x) \geq 1$. Por lo que se cumple la hipótesis (H_1) y de aquí, por el Teorema 4.5 se sigue la unicidad del punto fijo. ■

Corolario 4.6. *Sean $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y d una b-métrica con $s \geq 1$ en M tales que (M, d) es completo. Sea $T : M \to M$ una función no decreciente con respecto a $\preceq$. Supongamos que existen funciones $\beta \in \mathcal{F},\ \omega \in \Omega$ tales que*

$$\omega(s^3 d(T(x), T(y))) \leq \beta(\omega(d(x, y)))\omega(d(x, y))$$

para cualesquiera $x,\ y \in M$ con $x \succeq y$. Supongamos también que se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) *existe* $x_0 \in M$ *tal que* $x_0 \preceq T(x_0)$;

(ii) T *es continua o* $(M, \preceq, d)$ *es regular.*

Entonces T *tiene un punto fijo. Además, si para cualesquiera* $x, y \in Fix(T)$ *ya sea* $x \preceq y$ *o* $x \succeq y$*, tenemos la unicidad del punto fijo.*

Demostración:
Basta con demostar que

$$\omega(s^3 d(T(x), T(y))) \leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)).$$

Esto se sigue del hecho de que $d(x,y) \leq E(x,y)$. Con esto,

$$\omega(s^3 d(T(x), T(y))) \leq \beta(\omega(d(x,y)))\omega(d(x,y)) \leq \beta(\omega(E(x,y)))\omega(E(x,y)).$$

Por el Corolario 4.5, se sigue el resultado. ■

4.4. Una aplicación a las ecuaciones integrales

Para finalizar este trabajo, haremos una aplicación del Corolario 4.3, consideremos la siguiente ecuación integral,

$$x(t) = h(t) + \int_0^1 k(t,\xi)T(\xi, x(\xi))d\xi, \quad \forall t \in [0,1]. \tag{4.11}$$

Consideremos Υ la clase de funciones no decrecientes, $\upsilon : [0,\infty) \to [0,\infty)$ que satisfacen

$$(\upsilon(t))^r \leq t^r \upsilon(t^r) \text{ para cualesquiera } r \geq 1 \text{ y } t \geq 0.$$

Ahora, supongamos que

(i) $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua,

(ii) $T : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface que $T(t,x) \geq 0$ y que existe $\upsilon \in \Upsilon$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|T(t,x) - T(t,y)| \leq \upsilon(|x-y|)$$

con $\upsilon(t_n) \to \frac{1}{2^{r-1}}$ cuando $n \to \infty$ implica que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$,

(iii) $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua en $t \in [0,1]$ para toda $\xi \in [0,1]$, es medible en $\xi \in [0,1]$ para toda $t \in [0,1]$ tal que $k(t,x) \geq 0$ y

$$\int_0^1 k(t,\xi)d\xi \leq \frac{1}{2^{3-\frac{3}{r}}}.$$

Sea $M = C([0,1])$ el espacio de funciones continuas con la métrica estandar dada mediante

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|, \text{ para cualesquiera } x, y \in C([0,1]).$$

Ahora, para $r \geq 1$ definimos

$$d(x,y) = (\rho(x,y))^r = \left(\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|\right)^r = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|^r,$$

para cualesquiera $x, y \in C([0,1])$.

Proposición 4.1. *(M,d) es un espacio b-métrico completo con $s = 2^{r-1}$.*

Demostración:

Primero probaremos que (M,d) es un espacio b-métrico. En efecto, las propiedades (i) y (ii) de la Defínción 1.21 se cumplen. Para la propiedad (iii), sean f, g y $h \in M$. Entonces,

$$\begin{aligned}
2^{r-1}\big[d(f,g) + d(g,h)\big] &= 2^{r-1} \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|^r + 2^{r-1} \sup_{t\in[0,1]} |g(t) - h(t)|^r \\
&= \sup_{t\in[0,1]} 2^{r-1}\big[|f(t) - g(t)|^r\big] + 2^{r-1}\big[|g(t) - h(t)|^r\big] \\
&\geq \sup_{t\in[0,1]} \big(|f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|\big)^r \\
&\geq \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t) + g(t) - h(t)|^r \\
&= d(f,h).
\end{aligned}$$

Ya que si $r \geq 1$ entonces $a^r + b^r \leq (a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r)$. Por lo tanto, (M,d) es un espacio b-métrico.

Ahora, mostraremos que (M,d) es un espacio completo. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en M. Entonces, para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m > N$ se tiene que $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)-f_m(t)| < \epsilon$. Notemos que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon, \text{ para toda } x \in [0,1].$$

Dado que $(\mathbb{R}, d_u)$ es completo, existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$. Ahora probemos que f pertenece a M, es decir, que f es continua. En efecto, para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para cualesquiera $n, m > N$. Esto implica que, para toda $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\
&\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Con esto, $f_n \to f$ uniformemente y dado que cada f_n es continua, entonces f es continua y por lo tanto, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en M, es decir, (M, d) es completo. ■

Teorema 4.6. *Bajo las hipótesis* (i), (ii) *y* (iii) *la ecuación (4.11) tiene un única solución en* $C([0,1])$.

Demostración:

Consideramos el operador $F : M \to M$ definido por

$$F(x)(t) = h(t) + \int_0^1 k(t,\xi) T(\xi, x(\xi)) d\xi, \quad t \in [0,1].$$

De acuerdo a las hipótesis (i), (ii) y (iii), F esta bien definida, ya que si $x \in M$ entonces $F(x) \in M$. También, para cualesquiera $x, y \in M$ tenemos

$$\begin{aligned}
\big|F(x)(t)) - F(y)(t)\big| &= \Big|h(t) + \int_0^1 k(t,\xi)T(\xi, x(\xi))d\xi - h(t) - \\
&\quad \int_0^1 k(t,\xi)T(\xi, y(\xi))d\xi\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 k(t,\xi)T(\xi, x(\xi)) - k(t,\xi)T(\xi, y(\xi))d\xi\Big| \\
&\leq \int_0^1 k(t,\xi)\big|T(\xi, x(\xi)) - T(\xi, y(\xi))\big|d\xi \\
&\leq \int_0^1 k(t,\xi)\upsilon\big(|x(\xi) - y(\xi)|\big)d\xi
\end{aligned}$$

Ya que la función υ es no decreciente, entonces

$$\upsilon\Big(\big|x(\xi) - y(\xi)\big|\Big) \leq \upsilon\left(\sup_{t\in[0,1]} \big|x(t) - y(t)\big|\right) = \upsilon(\rho(x,y)).$$

Por lo tanto, utilizando (iii) se tiene que

$$\begin{aligned}
\big|F(x)(t) - F(y)(t)\big| &\leq \int_0^1 k(t,\xi)\upsilon\Big(\big|x(\xi) - y(\xi)\big|\Big)d\xi \\
&\leq \int_0^1 k(t,\xi)\upsilon(\rho(x,y))d\xi \\
&\leq \frac{1}{2^{3-\frac{3}{r}}}\upsilon(\rho(x,y)).
\end{aligned}$$

Con todo esto,

$$\begin{aligned}
d\big(F(x), F(y)\big) &= \sup_{t\in[0,1]} \big|F(x)(t) - F(y)(t)\big|^r \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{3-\frac{3}{r}}}\upsilon(\rho(x,y))\right)^r \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{3-\frac{3}{r}}}\right)^r \rho(x,y)^r \upsilon(\rho(x,y)^r) \\
&= \frac{1}{2^{3r-3}} d(x,y)\upsilon(d(x,y)) \\
&\leq \frac{1}{2^{3r-3}} E(x,y)\upsilon(E(x,y)),
\end{aligned}$$

esto es,

$$s^3 d\big(F(x), F(y)\big) \leq \beta(E(x,y))E(x,y),$$

donde $s = 2^{r-1}$ y $\beta(t) = \upsilon(t)$ para toda t. Notemos que por la hipótesis (ii), $\upsilon \in \mathcal{F}$ esto implica que $\beta \in \mathcal{F}$. Por el Corolario 4.3 se sigue que la ecuación (4.11) tiene una única solución en $C([0,1])$. ∎

Bibliografía

[1] J. Achari, *On Ćirić's non-unique fixed points*, Mat. Vesnik, **13** (28) 3 (1976), 255-257.

[2] L. B. Ćirić, *On some maps with a nonunique fixed point*, Publ. Inst. Math.,**17** (31) (1974), 52-58.

[3] S. Czerwik, *Contraction mappings in b-metric spaces*, Acta Math. Univ. Ostrav., **1** (1) (1993), 5-11.

[4] S. Czerwik, *Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena, **1** (46) (1998), 263-276.

[5] I. A. Rus, *Remarks on Ulam stability of the operatorial equations*, Fixed Point Theory, **10** (2) (2009), 305-320.

[6] E. Karapinar, *A short survey on the recent fixed point results on b-metric spaces*, Constructive Mathematical Analysis, 1 (2018), 15-44.

[7] E. Karapinar y B. Samet, *Generalized $\alpha - \psi$ contractive type mappings and related fixed point theorems with applications*, Abstract and Applied Analysis, 2012 (2012), 7-9.

[8] B. G. Pachpatte, *On Ćirić type maps with a nonunique fixed point*, Indian J. Pure Appl. Math., **10** (8) (1979), 1039-1043.

[9] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw Hill: United States of America, (1980).