Un libro como el que tiene en sus manos es una necesidad en nuestro ámbito académico. La razón de ello son los frecuentes reportes de diversas instituciones nacionales e internacionales sobre el fracaso de la educación, particularmente en ciencias y matemáticas.

La necesidad de una reflexión acerca de esta problemática y un cuidadoso examen científico sobre las posibles causas se impone. Aunque esta problemática es internacional también lo es que se agrava en los países de América Latina y en desarrollo.

El día de hoy, como afirman los líderes de países económicamente desarrollados, lo más importante en una sociedad es el conocimiento, no la generación de materias primas, de ahí que los países llamados emergentes, como Corea, India, Singapur y demás, establecieran una cuidadosa política educativa que estudiara y planteara soluciones a este complejo problema.

Este es el segundo libro de una serie publicada por Pearson en donde se aborda la problemática educativa desde una perspectiva internacional. La ciencia y el arte no tienen nacionalidad ni fronteras, por ello todas las aportaciones y estudios siempre serán bienvenidas. Encontrarán en el interior de este libro aportes de investigadores altamente reconocidos de Canadá, España, Estados Unidos de Norteamérica, Francia, Chile y, por supuesto, de México. ¿Es importante la didáctica? ¿Promueven las tecnologías digitales mayor aprovechamiento? O ¿son un impedimento? ¿Es compleja la modelación matemática? ¿Es el formalismo un obstáculo para aprender ciencia y matemáticas? Estas y más interrogantes se plantean y resuelven en este libro.

www.pearsonenespañol.com

ISBN 978-607-32-4865-5

Pearson

Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes

Cuevas • Cruz • Martínez

Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes

Carlos Armando Cuevas
Magally Martínez
René Guadalupe Cruz
EDITORES ACADÉMICOS

Pearson

Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes

Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes

Carlos Armando Cuevas Vallejo
Magally Martínez Reyes
René Guadalupe Cruz Flores
EDITORES ACADÉMICOS

Pearson

Datos de catalogación

CUEVAS VALLEJO, CARLOS ARMANDO; MARTÍNEZ REYES, MAGALLY; CRUZ FLORES, RENÉ GUADALUPE; (EDITORES ACADÉMICOS)

Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes

Primera edición

Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2018

ISBN: 978-607-32-4865-5

Área: Custom

Formato: 15 × 23 cm Páginas: 192

Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes

Este libro es un proyecto revisado por un equipo de profesionales quienes cuidaron que cumpliera con los lineamientos y estándares establecidos por Pearson Educación.

Este libro de investigación se sometió a un proceso de arbitraje "a doble ciego" por especialistas en la materia, por lo que los capítulos contenidos en el mismo cuentan con el aval de un comité de arbitraje.

La publicación de este libro se financió gracias al apoyo de la Secretaría de Educación Pública a través del Programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa (PFCE) 2018 asignado a la Universidad Autónoma del Estado de México.

Pearson Educación en su misión de divulgar el conocimiento científico y tecnológico en México con obras como este ejemplar, informa a la comunidad científica que cuenta con su Prerregistro al RENIECYT No. CVU 892558.

Dirección general: Sergio Fonseca ■ **Dirección de innovación y servicios educativos:** Alan David Palau ■ **Gerencia de contenidos y servicios editoriales:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Coordinadora de desarrollo de contenidos:** Lilia Moreno ■ **Especialista en contenidos de aprendizaje:** María Elena Zahar ■ **Editor especialista en desarrollo de contenidos:** Bernardino Gutiérrez ■ **Corrección de estilo:** Araceli Calderón ■ **Coordinadora de arte y diseño:** Mónica Galván ■ **Gestor de arte y diseño:** José Hernández ■ **Lectura de pruebas:** Demetrio Alemán ■ **Diseño de portada:** Edgar Maldonado ■ **Composición y diagramación:** Pyma Editorial.

Contacto: soporte@pearson.com

Primera de edición, 2018

ISBN LIBRO IMPRESO: <PENDIENTE>
ISBN E-BOOK: <PENDIENTE>

D.R. © 2018 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Avenida Antonio Dovalí Jaime núm.70
Torre B, Piso 6, Colonia Zedec, Ed. Plaza Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón, México, Ciudad de México, C. P. 01210

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Reg. Núm. 1031
www.pearsonenespañol.com

Impreso en México. *Printed in Mexico*.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 21 20 19 18

Pearson

Pearson Hispanoamérica

Argentina ■ Belice ■ Bolivia ■ Chile ■ Colombia ■ Costa Rica ■ Cuba ■ República Dominicana
Ecuador ■ El Salvador ■ Guatemala ■ Honduras ■ México ■ Nicaragua ■ Panamá ■ Paraguay ■ Perú
Uruguay ■ Venezuela

Contenido

Introducción

Este es un libro dirigido a profesores, formadores, investigadores, estudiantes, y en general para todas las personas interesadas en la enseñanza de la matemática y de las ciencias naturales. El objetivo es lograr una publicación que reúna diversas propuestas del ámbito internacional y que al mismo tiempo permitan hacen una síntesis de múltiples reflexiones para conseguir una orientación didáctica y proponer nuevas líneas de estudio e investigación. Por ejemplo, el capítulo 1 incluye una propuesta sobre la importancia de la visualización en la enseñanza, dentro de la línea Espacios de Trabajo Matemático (ETM), la cual es desarrollada por investigadores de varios países que año con año se reúnen. Este capítulo 1 fue escrito por prominentes miembros de ese grupo, como A. Kuzniak y L. Vivier, de Francia, acompañados de E. Montoya, de Chile. En sus propias palabras: "Un ETM es un espacio abstracto organizado para asegurar el trabajo matemático en un contexto educativo, y está basado en la articulación de dos niveles fundamentales: un nivel epistemológico ligado a la organización matemática y uno cognitivo, que está ligado a la actividad y la ejecución de tareas de los individuos". El capítulo 2 establece una propuesta interesante acerca de modelización, desarrollada por el eminente profesor N. Balacheff, donde, como él mismo dice: los modelos pueden servir como mediadores entre teorías de las cuales se requiere una comprensión articulada y precisa, y de experimentos que enmarcan el diseño e impulsan la recolección de datos. En el capítulo 3 se presenta una contribución del profesor A. Flores, de Estados Unidos, donde propone diversas formas de visualizar y demostrar el importante teorema de Pitágoras utilizando la tecnología. El capítulo 4, escrito por C. Cuevas, M. Delgado y F. Pluvinage, de México, España y Francia, respectivamente, muestra una alternativa para dilucidar un problema antiguo y persistente, que se refiere a la definición de recta tangente a una función sin mediar la condición de diferenciabilidad. En sus propias palabras: "Aunque elemental, desde el punto de vista geométrico, ante la aparición de nuevas curvas, fue redefinido varias veces en la historia, y finalmente formalizado con la aparición del cálculo diferencial. Sin embargo, esta formulación acarrea dos problemas: en primer lugar, cuando este concepto se presenta en precálculo, su definición no debería depender de la derivada; y en segundo lugar: existen gráficas de funciones continuas con recta tangente en algunos puntos que esta definición no cubre”. El capítulo 5 es una contribución de los profesores R. Gabriel y E. Benítez, de México, quienes a través de un estudio realizado en su lugar de trabajo, proponen una definición de número real. También se incluye un capítulo (el 6) realizado por C. Cuevas, M. Martínez y L. Trouche, acerca de la problemática y resultados que conlleva instrumentar propuestas de inclusión de la tecnología en cursos de cálculo en la universidad. Como ellos mencionan, incluir la tecnología en el aula no siempre puede conducir a buenos resultados de enseñanza. Por su parte, los profesores J. Hernández y E. Briceño, en el capítulo 7, analizan el rol de la tecnología en la enseñanza del cálculo y lo confrontan con sus características pedagógicas. Esta obra finaliza con una interesante propuesta del profesor A. González-Martín, de Canadá, quien en el capítulo 8 analiza la aplicación de los conceptos del cálculo en cursos de ingeniería: “La investigación en educación matemática y en ingeniería ha identificado dos momentos importantes en la trayectoria de los estudiantes en que estas dificultades se manifiestan. En primer lugar, la transición entre los estudios preuniversitarios y los universitarios presenta grandes dificultades; en particular en lo referente a las matemáticas y, en el caso de ingeniería, los estudiantes no están suficientemente preparados para sus cursos”.

Estas importantes reflexiones alrededor de la enseñanza de la matemática, de cierta forma muestran un estado del arte en esta área, dado que tienen carácter internacional con importantes actores en el ámbito de la educación matemática y las ciencia naturales; además, son y deben ser punto de partida para diversas investigaciones que los lectores podrán realizar. Esperemos que este libro tenga la misma acogida que el anterior.

Armando Cuevas
Coeditor

CAPÍTULO 1

La visualización en el análisis[1]

Alain Kuzniak,[2] *Elizabeth Montoya Delgadillo*[3] y *Laurent Vivier*[4]

Resumen

Este capítulo trata del problema de la visualización en el análisis. Se muestra el rol esencial de los conocimientos y, sobre todo, los vinculados a la tríada *discreto-denso-continuo* de los conjuntos de números. Asimismo, se presentan ejemplos y resultados de estudios analizados con la teoría de los espacios de trabajo matemático para entender el rol crucial de la visualización en el análisis. Se concluye con el planteamiento sobre la necesidad de considerar el proceso de visualización en la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: visualización, análisis matemático, espacios de trabajo matemático.

---

[1] Este texto incluye gran parte de la conferencia "Controlar la visualización en análisis: la necesidad de los conocimientos", dictada por uno de los autores en el 1er Simposio de Matemáticas para la formación de Ingenieros de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 23-24 de febrero de 2016.

[2] Universidad Paris Diderot, Francia, e-mail: alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr
[3] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, e-mail: elizabeth.montoya@pucv.cl
[4] Universidad Paris Diderot, Francia, e-mail: laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Abstract

This chapter deals with the problem of visualization in the analysis. We will show the essential role of knowledge and especially those linked to the discrete-dense-continuous triad of sets of numbers. We will show examples and results of studies analyzed with the theory of Mathematical Workspaces to understand the crucial role of visualization in the analysis. We conclude on the need to consider the process of visualization in the teaching of mathematics.

Keywords: visualization, mathematical analysis, mathematical workspaces.

Introducción

Cuando un sujeto realiza un trabajo matemático se basa, por supuesto, en sus conocimientos acerca del dominio, pero también en sus sentidos, de manera especial en la vista, aunque no exclusivamente en ésta, sino también en todos aquellos detalles que le permiten identificar los signos (escritos, gestuales, orales, táctiles, etc.) e interpretarlos para darles sentido y poder actuar. La visualización es el proceso cognitivo que permite identificar e interpretar los signos matemáticos de forma más o menos eficaz y coherente con relación a sus conocimientos. Además, la visualización es intrínsecamente semiótica, es decir, no es mental ni física, y es una extensión de la percepción visual (Duval, 2005). Los autores distinguen entre la visualización icónica, relacionada con la percepción inmediata y la visualización no icónica, que identifica los objetos sobre la percepción inmediata para hacerlos operatorios.

La visualización influye en el trabajo matemático,[5] por ejemplo, durante la tarea de búsqueda de una longitud para que se lleve a cabo una condición en un rectángulo, con una “x” 84% de los 126 estudiantes usa una ecuación, mientras que sin una “x” sólo la usa 63% de los 269 estudiantes (estudiantes-profesores de primaria de Francia y Grecia; los resultados son similares en ambas poblaciones) (Nikolantonakis y Vivier, 2014). Esto es un resultado clásico: la identificación de la “x” se interpreta como una incógnita o una variable y la visualización conduce a un trabajo algebraico (Montoya, Mena Lorca, Mena Lorca, 2016).

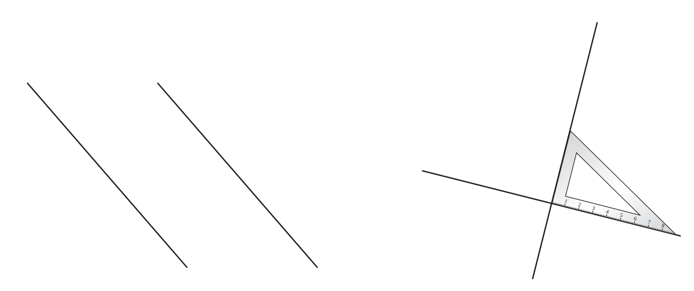
[5] Se proporcionan algunos ejemplos fuera del análisis para explicar el contexto matemático, antes de presentar la especificidad del análisis.

Consideremos otro punto de vista en geometría: el dominio matemático, donde la visualización es importante. Cualquier persona que tenga conocimientos elementales de geometría podrá visualizar dos rectas paralelas en la figura 1-1.

Las dos "líneas", de espesor y limitadas se interpretan como rectas, infinitas y sin espesor (sin referirse a la rectitud). También se visualiza una propiedad entre estas dos líneas. Por supuesto, se puede cometer un error de juicio y cuestionar el paralelismo. Este problema de aproximación en la visualización es muy frecuente y en ese caso se prefiere formular conjeturas. Lo mismo se aplica al uso de instrumentos, por ejemplo, cuando se coloca una escuadra para *ver* si las dos rectas de la figura 1-1b son perpendiculares. Pero al final es posible que exista un problema de aproximación, ya sea porque las rectas de la figura 1-1a son o no paralelas, o porque las rectas de la figura 1-1b son o no perpendiculares; no obstante, las situaciones son muy similares porque los objetos son de la misma naturaleza.

¿Ocurre lo mismo en el análisis? A continuación se presenta una anécdota de la vida cotidiana: al comprar un objeto que cuesta 50 francos suizos, en Suiza, un matemático francés paga 50 euros. El comerciante propone la conversión (honesta en ese momento) de 1 euro por 1.20 francos suizos. Luego toma su calculadora y calcula 50-50/1.2, para tener el cambio y darlo en euros, luego multiplica por 1.2 para saber cuánto dar en francos suizos. La calculadora muestra 9.9999999. El comerciante devuelve un billete de 10 francos suizos y todos quedan contentos. ¿Este es sólo un problema de aproximación o hay una igualdad entre lo que muestra la calculadora y 10? ¿Quizá se necesitaría un montón de nueves? Y si es así, ¿cuántos?

Figura 1-1 **a)** Dos rectas paralelas; **b)** dos rectas perpendiculares.



a) b)

Con una herramienta más potente, como una hoja de cálculo, el resultado final es 10 si se solicitan menos de 14 decimales, 9.99999999999999999 si se solicitan 15 decimales y 9.9999999999999990 si se solicitan 16 o más decimales (se añaden ceros por cada decimal adicional). Entonces, ¿cómo visualizar los signos obtenidos con estas herramientas?

Este problema representa nuestro primer encuentro con el problema de la visualización en el análisis. En los estudiantes se identifica un fracaso recurrente al considerar la visualización de la calculadora como un valor exacto, así como el caso bien conocido en didáctica de las matemáticas de la comparación entre 0.999 y 1 (Tall & Schwarzenberger, 1978; Sierpinska, 1985).

Antes de tratar este ejemplo, y otros para cubrir varios casos importantes en la enseñanza del análisis, se estableció un marco teórico desarrollado para estudiar el trabajo matemático. Esta teoría toma en cuenta la visualización de los signos, en especial los producidos por instrumentos bajo el control de un sujeto, así como el papel esencial del conocimiento en la visualización.

Marco teórico de los espacios de trabajo matemático

El marco de los espacios de trabajo matemático (ETM) permite identificar y analizar el trabajo matemático en un contexto escolar. Según Kuzniak & Richard (2014), un ETM es un espacio abstracto organizado para asegurar el trabajo matemático en un contexto educativo, y está basado en la articulación de dos niveles fundamentales: un nivel epistemológico ligado a la organización matemática, y un nivel cognitivo relacionado con la actividad y la ejecución de tareas de los individuos.

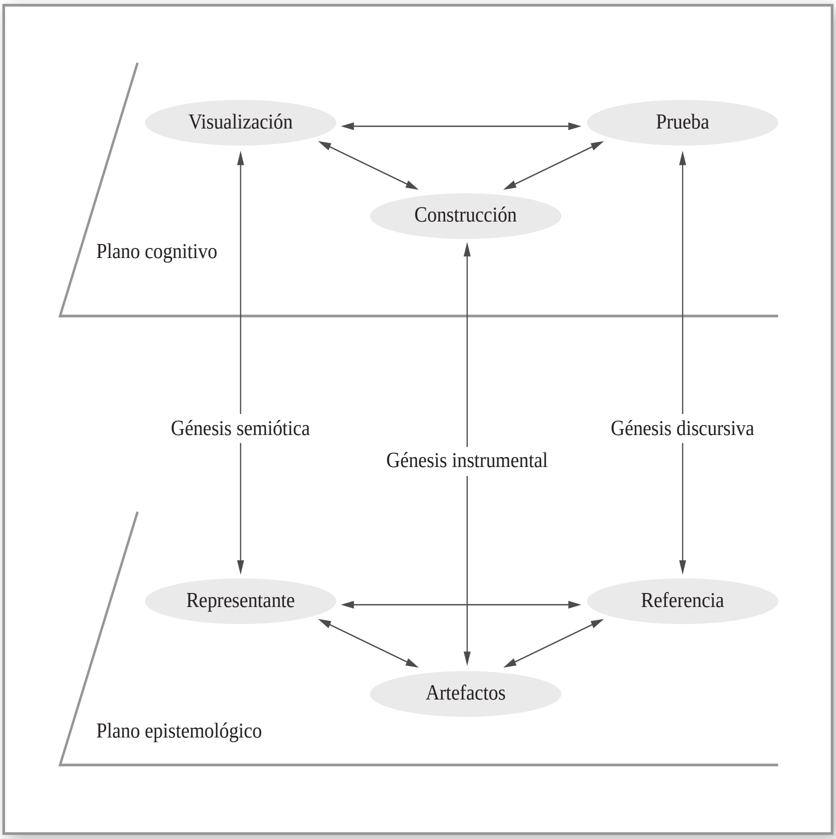
Presentación del marco

El nivel epistemológico se refiere a un *representamen*, es decir, la representación del objeto sobre el cual se trabaja, los artefactos pertinentes para este trabajo y un marco teórico de referencia. Mientras que el nivel cognitivo comprende tres procesos: la visualización que se apoya sobre los diferentes *representamen* utilizados y juega un rol esencial en el proceso semiótico, que identifica y da sentido a los signos matemáticos; la construcción a través de instrumentos (artefactos interiorizados para un sujeto, no todos materiales), y un proceso discursivo de prueba que consiste en razonar y probar. Los planos epistemológico y cognitivo están vinculados con tres génesis: 1) la génesis semiótica que da a los *representamen* su estatus matemático de representación para la visualización, 2) la génesis instrumental que transforma los artefactos e instrumentos para el proceso de construcción y 3) la génesis discursiva que le da sentido al marco de referencia movilizándolo para el proceso discursivo. En la figura 1-2 se presenta un diagrama que identifica las componentes del ETM y las génesis.

Estas diferentes articulaciones y génesis no deben ser entendidas como la unión individual entre los componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino como una relación activa que conjunta dos o incluso tres génesis. Es en este sentido que los planos *verticales* [Sem-Ins], [Sem-Dis] e [Ins-Dis] fueron introducidos para significar el trabajo que activa dos génesis.

Así, aunque el enfoque esté en la visualización, no se debe perder de vista el sistema en el cual está integrado este proceso. En particular, el papel de la visualización es esencial en la activación de la génesis instrumental y discursiva, y viceversa.

Figura 1-2 Espacio de trabajo matemático y sus génesis (Kuzniak, 2011).



Dominios y paradigmas

Este constructo considera un ETM que depende de dominios matemáticos específicos (Kuzniak, 2011; Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016; Gómez-Chacón, Kuzniak & Vivier, 2016), tal como el análisis, la geometría, el álgebra, las probabilidades, etc. y los correspondientes *paradigma*s son su caracterización en esos dominios; así, se habla de los paradigmas del análisis, paradigmas geométricos, etc. En este capítulo se utilizarán los paradigmas del análisis (Montoya & Vivier, 2016):

- **Análisis-geométrico/aritmético (AG):** permite hacer interpretaciones con implícitos, nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real.
- **Análisis-calculatorio (AC):** donde las reglas de cálculo son definidas de forma más o menos explícita, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.
- **Análisis-real (AR):** se caracteriza por un trabajo de aproximación y proximidad: cotas, una entrada a trabajos de proximidad (o una entrada más topológica): “cerca de ε”, “lo despreciable”, definiciones con ε.

La necesidad de conocimientos en análisis para la visualización

En esta sección, por medio de ejemplos, se mostrará la importancia del conocimiento en el análisis para una visualización adecuada, en especial las propiedades topológicas de los conjuntos de números relativos a la tríada discreta-densa-continuo. Los tres ejemplos (tareas de las figuras 1-3, 1-4 y 1-5) provienen de un cuestionario que se aplicó a 34 estudiantes de primer año de matemáticas en la Universidad de Montpellier (Durand-Guerrier & Vivier, 2016).

Límites de sucesiones

Se tomará una sucesión clásica de aproximación de la raíz cuadrada de 5 por el método de Heron: $u_0 = 1$ y $u_{n+1} = (u_n + 5/u_n)/2$. Al calcular los primeros términos con una hoja de cálculo, con 12 decimales, se observa que todos los términos a partir de $n = 6$ son iguales a 2.236067977500 (figura 1-3). Por supuesto, hay que decir: “todos los valores mostrados en la línea 6 son iguales a 2.236067977500”. Pero esta reformulación sólo es posible si se tienen conocimientos matemáticos acerca de las sucesiones (tal sucesión no puede ser constante), de los números (el número de decimales es ilimitado), y conocimientos sobre la herramienta utilizada (muestra valores aproximados cuyos errores están mal controlados). Así, es posible observar la discrepancia que puede existir entre una visualización rudimentaria, con poco conocimiento específico, lo cual lleva a la conclusión de que la sucesión es constante e igual a 2.236067977500 a partir del rango 6 y a las siguientes conjeturas: la sucesión es (estrictamente) decreciente y converge a un número real, en el cual 2.236067977500 es un valor aproximado a 10-12 (*a priori* no es seguro, pero por supuesto es posible justificar estas conjeturas).

Una preocupación de los autores es que los estudiantes aprendan matemáticas adquiriendo una visualización lo más cercana a esta segunda manera de hacer las cosas, pues incorpora conocimientos matemáticos que van más allá de la simple percepción. En el estudio de Durand-Guerrier & Vivier (2016) se propone la tarea que se muestra en la figura 1-3.

En resumen, las respuestas fueron: 12 estudiantes tienen éxito, 7 estudiantes no responden, 6 estudiantes afirman que los límites son iguales y

Figura 1-3 Tarea propuesta en el estudio de Durand-Guerrier & Vivier (2016).

Para estudiar dos sucesiones (u_n) y (v_n), ingresamos en una hoja de cálculo los números 3 en la celda A2 y 2 en la celda B2 y las fórmulas A3: $\boxed{= 0.5*(A2 + 5/A2)}$ y B3: $\boxed{= 2 + 1/(2 + B2)}$. Las fórmulas introducidas en A3 y B3 se han copiado hasta la línea 21. Así, se obtiene una tabla de valores como se indica en el extracto de la hoja de cálculo adjunta. ¿Podemos deducir de estos datos que las sucesiones (u_n) y (v_n) convergen hacia el mismo límite? Justifique su respuesta con precisión.

	A	B
1	u_n	v_n
2	3.000000000000	2.000000000000
3	2.333333333333	2.250000000000
4	2.238095238095	2.235294117647
5	2.236068895643	2.236111111111
6	2.236067977500	2.236065573770
7	2.236067977500	2.236068111455
8	2.236067977500	2.236067970035
9	2.236067977500	2.236067977916
10	2.236067977500	2.236067977477
11	2.236067977500	2.236067977501
12	2.236067977500	2.236067977500
…	…	…
21	2.236067977500	2.236067977500

9 estudiantes dicen que las sucesiones son constantes. Así, más de la mitad de los estudiantes hacen una visualización más cercana a la primera que se describió anteriormente, que a la esperada en matemáticas. Esta diferencia puede ser interpretada por el hecho de que, en este caso, la visualización correcta requiere conocimientos específicos que deben estar disponibles para que los estudiantes no se queden con una visualización rudimentaria o *icónica* en el sentido de Duval (2005).

En este ejemplo se usa un artefacto (hoja de cálculo) para calcular los primeros términos de dos sucesiones: 1) una producción de signos-plano [Sem-Ins]; 2) una visualización que los términos son iguales en el paradigma AG, y 3) sigue un trabajo en el plano [Sem-Dis]. En esta última etapa, 15 estudiantes no cambian de paradigma y concluyen que los límites son iguales, a pesar de que 12 estudiantes parecen cambiar de paradigmas (AC o AR) para hacer una conjetura. Asimismo, se aprecia una circulación en el ETM y el rol de los paradigmas.

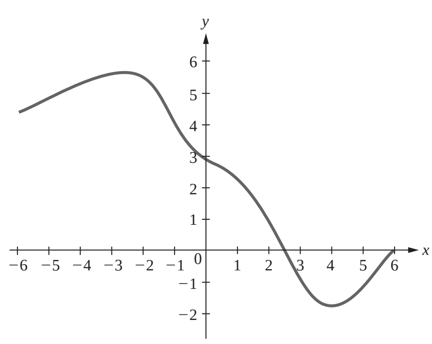
Función y ecuación

La tarea que se muestra en la figura 1-4, sobre las funciones, fue también planteada en el cuestionario de Durand-Guerrier & Vivier (2016).

Figura 1-4 Tarea sobre las funciones planteada en el cuestionario de Durand-Guerrier & Vivier (2016).

A continuación se muestra la representación gráfica de una función f definida y continua en $[-6, 6]$. Justifique de manera cuidadosa sus respuestas.

- La ecuación $f(x) = 2$ tiene una solución en el conjunto **N** de los números naturales.
- La ecuación $f(x) = 2$ tiene una solución en el conjunto **D** de los números decimales.
- La ecuación $f(x) = 2$ tiene una solución en el conjunto **R** de los números reales.



Para cada afirmación se pidió a los estudiantes que marcaran una casilla:

☐ Verdadero
☐ Falso
☐ No se puede saber (NSPS).

En resumen, las respuestas fueron las siguientes: 26 estudiantes tienen éxito (11 mencionan el TVI), seis afirman que la solución está en **D**, y dos estudiantes dicen que la solución (1.2 o 1.3) está en $\mathbf{D}_1 = \{n/10^{12};\, n \in \mathbf{N}\}$.

Se puede concluir que los estudiantes tienen dificultades en entender la densidad de **D** y una confusión con la completitud de **R** en el TVI. Los 11 estudiantes que mencionan el TVI parecen trabajar en el paradigma AC (o AR, pero esto es poco probable), lo cual evita el problema de la densidad, dado que el teorema les asegura la existencia de la solución porque las hipótesis se pueden verificar. Por otro lado, los ocho estudiantes que no respondieron de forma correcta trabajan en el paradigma AG con un problema para distinguir entre densidad y continuidad.

Función y continuidad

La tarea de la figura 1-5 en la página siguiente también se refiere al tema de las funciones, y cubre las preguntas anteriores en un contexto de punto fijo.

En resumen, la pregunta a) no tiene mucho éxito (ocho estudiantes de 34) y es probable que haya problemas para interpretar los datos de la hoja de cálculo como en la sección "Límites de sucesiones". En efecto, se puede observar que 12 estudiantes en la pregunta a) y seis en la pregunta b) afirman que sólo hay un punto fijo, y es probable que esta respuesta provenga del renglón 0.25. La pregunta b) tuvo más éxito (15 estudiantes, menos de la mitad del número de éstos), quizá porque la situación es más tradicional, pero también porque seis estudiantes respondieron "varios puntos fijos" de manera idéntica a las preguntas a) y b). Tales estudiantes visualizan una curva continua a partir de los signos dados (discretos) como si la continuidad fuera natural para ellos. De nuevo, al menos la mitad de los estudiantes no utiliza conocimientos adecuados para visualizar.

La tríada clave: discreto-denso-continuo

En primer lugar es necesario estas tres propiedades para conjuntos (de números) totalmente ordenados con la topología de orden.[6] Un conjunto es discreto si cada elemento puede ser aislado de los otros por una vecindad abierta, como

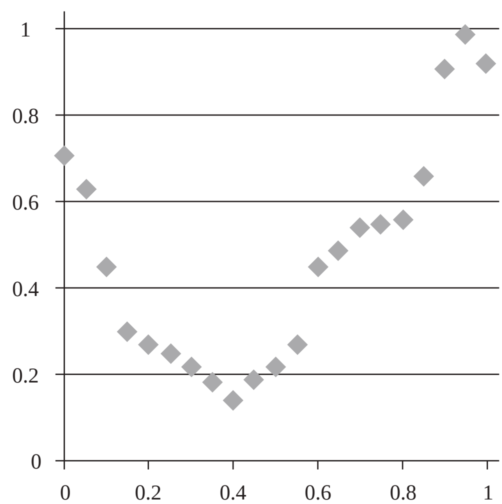
[6] Esta restricción no es necesaria pero simplifica la presentación.

Figura 1-5 Funciones en un contexto de punto fijo.

x	$f(x)$
0.00	0.71
0.05	0.63
0.10	0.45
0.15	0.30
0.20	0.27
0.25	0.25
0.30	0.22
0.35	0.18
0.40	0.14
0.45	0.19
0.50	0.22
0.55	0.27
0.60	0.45
0.65	0.49
0.70	0.54
0.75	0.55
0.80	0.56
0.85	0.66
0.90	0.91
0.95	0.99
1.00	0.92

Se ha introducido una función f en una hoja de cálculo que está definida en [0, 1] con valores en [0, 1]. Se obtiene la tabla de valores adjunta con un incremento de 0.05. Los datos se han introducido de forma automática por la hoja de cálculo en el gráfico que se muestra más abajo.

Recordamos que un punto fijo de una función f es una solución de la ecuación $f(x) = x$.



a) Sabiendo que f es estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$, estrictamente creciente en $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{19}{20}\right]$ y estrictamente decreciente en $\left[\frac{19}{20}, 1\right]$ marque una casilla para cada una de las siguientes tres afirmaciones:

f no admite puntos fijos:	☐ Verdadero	☐ Falso	☐ NSPS
f admite un único punto fijo:	☐ Verdadero	☐ Falso	☐ NSPS
f admite varios puntos fijos:	☐ Verdadero	☐ Falso	☐ NSPS

b) Sabiendo que f está continua en [0; 1], marque una casilla para cada una de las siguientes tres afirmaciones.*

* Los tres reactivos son los mismos que para la pregunta a).

N; tal conjunto tiene "huecos de medida no nula". Un conjunto es denso, es decir, denso en sí mismo, si para alguna vecindad abierta contiene infinitos elementos, como **D** o **Q**; tales conjuntos pueden tener *lagunas*, "huecos de medida nula". Un conjunto es continuo si, además de ser denso, es completo, como **R**, tal conjunto no tiene "huecos".

Asimismo, es preciso distinguir la noción de "densidad en sí mismo" de un conjunto, de la densidad de un conjunto en otro que lo contiene. Por ejemplo, **D** es denso en **Q**, mientras que **D** y **Q** son densos en **R**, pero ni **N** ni **Z** son densos en **D**. Debe tenerse en cuenta que la noción de completud puede interpretarse de la siguiente manera: un conjunto denso E en sí mismo, pero con lagunas no es completo; la completud de éste es el conjunto completo F, de manera que E es denso en F. Tal es el caso de **D** y **Q**, cuya completud (con la topología usual) es **R**.

En el primer ejemplo se observa una oposición entre lo discreto y lo denso. En efecto, la visualización "ingenua" o icónica no toma en cuenta los decimales más allá de lo que se muestra, como si se estuviera trabajando en el conjunto $\mathbf{D}_{12} = \{n/10^{12}\ n \in \mathbf{N}\}$, que es un conjunto discreto, ni el hecho de que no se pueda decir nada con respecto a una sucesión desde sus primeros términos. Mientras que la visualización "esperada" puede apoyarse en el conjunto **Q** (la conjetura se puede formalizar con **Q** como conjunto de referencia, aunque el límite no sea racional).

El segundo ejemplo hace la distinción entre lo denso y lo continuo, una cuestión que muchos estudiantes no perciben a pesar de que la tarea es rutinaria. Esto coincide con el punto de vista de Bolzano (1817) para probar el teorema de los valores intermedios (TVI); también cabe destacar que en las pruebas del análisis no se deben utilizar evidencias geométricas (visualización con uso de gráficas).

Este requisito fue considerado en la segunda mitad del siglo XIX por Dedekind, Méray y Cantor, quienes elaboraron una construcción teórica para (**R**) como un conjunto continuo mediante la propiedad de completud.

El tercer ejemplo retoma estas distinciones mostrando de manera, en apariencia natural, que los estudiantes no perciben la densidad. La diferencia entre la densidad y la continuidad es poco visible para los estudiantes porque no es un objeto explícito de enseñanza; la visualización de esta propiedad es problemática, las representaciones gráficas no discretas hacen referencia de forma directa a nuestra intuición del continuo, esto es, vinculando la traza de una línea sobre una hoja sin levantar el lápiz (Longo, 1999).

Estos puntos de vista concuerdan con la hipótesis de Durand-Guerrier (2016), quien afirma que la dicotomía clásica entre discreto y continuo esconde la propiedad de densidad. Esta hipótesis se considerará con los paradigmas del análisis: el paradigma AC esconde la distinción entre lo denso y lo continuo (ya que no interesa la naturaleza de los objetos en juego), el conocimiento necesario para visualizar esta distinción proviene del paradigma AR y, por lo tanto, requiere activar el plano [Sem-Dis].

Sin embargo, la distinción denso/continuo es crucial, así como la importancia de la completud de **R** como se puede ver en estos ejemplos:

1. Consideramos la función $f: \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ definida por $f(x) = 3x$. Se sabe que $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ y f es continua, *pero* $f(x) = 1$ no tiene solución.
2. Consideramos la función $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Se sabe que $f(0) = 1$, $f(2) = 5$ y f es continua *pero* $f(x) = 3$ no tiene solución.
3. Consideramos la función $f: \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ definida por $f(x) = x^3$, donde **G** es el conjunto de los números constructibles.[7] Se sabe que $f(1) = 1$, $f(2) = 8$ y f es continua, *pero* $f(x) = 2$ no tiene solución.
4. Consideramos la función $f: \mathbf{R}' \to \mathbf{R}'$ definida por $f(x) = x + 0.4999\ldots$ donde $\mathbf{R}'$ es el conjunto de los números que tienen una escritura decimal ilimitada, sin identificar[8] 0.999… y 1. Se sabe que $f(0) = 0.4999\ldots < 0.5$ y $f(1) = 1.4999\ldots > 1.5$, *pero* $f(x) = 1$ no tiene solución.
5. Si represento de manera gráfica la función que vale 1 para los números racionales y 2 para los irracionales, se ven dos rectas ($y = 1$ y $y = 2$) *pero* no es un problema de aproximación. Lo que se ve es muy diferente de lo que es, pues son de distinta naturaleza.

Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales constituyen un caso de gran riqueza en el cual confluyen distintas nociones y objetos matemáticos para su enseñanza, como continuidad, límites, densidad, convergencia (Derouet *et al*., 2016). Además, al ser enseñadas ponen en evidencia el fenómeno discreto-denso-continuo.

Funciones exponenciales en la enseñanza

Para introducir las funciones exponenciales se emplean distintas aproximaciones de enseñanza: se usan en problemas de modelización matemática con problemas de crecimiento o decrecimiento poblacional, interés compuesto, entre otros. Mediante una sucesión geométrica o por el método de Euler, y en ambas

[7] Este es el cuerpo más pequeño que contiene **Q** y es estable por raíz cuadrada.

[8] Es esta propiedad la que la distingue de **R** y la que hace un conjunto incompleto, con “lagunas” como dijo Dedekind.

aproximaciones existe un apoyo acerca de lo discreto para construir un objeto continuo, lo cual también es frecuente para otros objetos matemáticos.

Las funciones exponenciales son introducidas como una extensión de las sucesiones geométricas, es una extensión con *accidente* ligado a la transición discreto $\longrightarrow$ continuo, y los estudiantes no tienen los conocimientos (suficientes) sobre los números reales para entender lo que está en juego. Además, no siempre se repara en el pasaje de lo discreto a lo continuo al expresar funciones con distintos dominios, esto es: a^n, a^q, a^x (n en $\boldsymbol{N}$, q en $\boldsymbol{D}$, x en $\boldsymbol{R}$), es un pasaje artificial. Los estudiantes no logran comprender la densidad (ni la diferencia con lo continuo), por lo que no es aprovechada en términos del aprendizaje, más aún, cuando la visualización de esta propiedad es compleja.

Por otro lado, los libros de texto y el profesor deben hacer que este accidente emerja, y así, al usar las representaciones y los artefactos se activa un proceso de visualización bastante complejo con las propiedades involucradas, como lo es la densidad. En términos teóricos del ETM, el trabajo es esencialmente en el plano [Sem-Ins], pero el accidente puede ser entendido sólo con los conocimientos teóricos, es decir, activando el plano [Sem-Dis] o [Ins-Dis].

Tal parece que en el caso de las funciones exponenciales se pone en evidencia el *espacio matemático* que se observa, esto es, tabular puntos (discreto) y luego obtener una curva representativa (continuo) que muchas veces es apoyado por un *software* (artefacto). Para su construcción es necesario el conocimiento de otras nociones (límites, continuidad, etc.), de modo de comprender las propiedades de las funciones exponenciales es una cuestión que se aborda al final del liceo (en algunos países) o en los primeros años de la universidad (en otros).

Una situación didáctica para construir las funciones exponenciales

Se realizó una propuesta de enseñanza, y se enfrentó a estudiantes de matemáticas[9] a tres momentos cruciales del trabajo en el análisis relacionado con la identificación de la existencia y las propiedades de una función. En el caso de las funciones exponenciales a partir de la ecuación funcional que ella posee, se ponen en evidencia estos tres momentos de un trabajo específico en análisis: estudio de las regularidades de la función buscada, construcción de aproximaciones de la función y prueba de la existencia de esta función.

[9] Experimento realizado con 35 estudiantes de Chile y 30 de Francia entre los años 2016 y 2017.

En la figura 1-6 se muestran las dos primeras preguntas que aborda el problema de la continuidad y las relaciones con la representación gráfica (para una presentación más completa consulte IREM, *Analyse*, 2017). Se busca determinar las soluciones de $f(x + y) = f(x)f(y)$ (*) en **R**.

En las distintas producciones de los estudiantes, ellos reconocían el comportamiento exponencial de la función f (desconocida), lo cual les ponía en duda tal afirmación. La finalidad de esto era estudiar posteriormente su continuidad y existencia con la función exponencial. Sin embargo, la cuestión central para esta pregunta fue dada por la discusión de si la "curva" en estudio era continua o discreta. En la figura 1-7(a-c) se observan las respuestas representativas de ambas poblaciones de estudiantes.

Las producciones muestran los valores calculados. De hecho, es difícil extrapolar más allá de estos pocos valores porque no se tiene, en este momento, una hipótesis de continuidad sobre f. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes traza una línea continua como en la producción (c). Ya sea, porque reconocen, de forma errónea una función exponencial o porque están acostumbrados a ésta, lo cual es consistente con la conclusión de la sección "Función y continuidad", sobre la *continuidad natural*. La producción (b) es interesante porque el grupo integró la fórmula $f(x) = f(x/n)^n$ en el *software* Geogebra, lo cual permite percibir la densidad en una vecindad del cero (y el *software* no traza una línea continua).

Es primordial saber si una función es continua para el efecto que causa la visualización de los puntos que se obtienen con la función f solución de (*). En términos del ETM, el trabajo es esencialmente en el plano [Sem-Ins], pero comprender el fenómeno discreto-denso-continuo puede ser entendido sólo mediante los conocimientos teóricos, es decir, activando el plano [Sem-Dis] o [Ins-Dis] en el paradigma AR. Es claro que los conocimientos que se necesitan para enseñar las funciones exponenciales difieren tanto en el liceo como en la

Figura 1-6 Preguntas que aborda el problema de la continuidad.

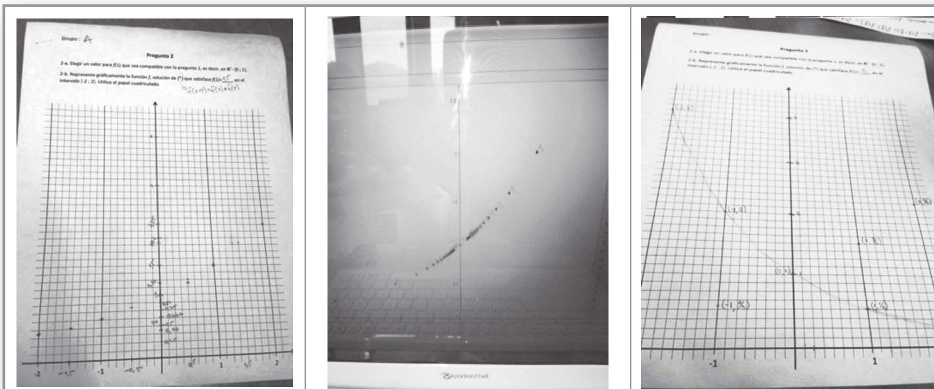
1a. Encuentre todas las soluciones constantes en **R**.
Ahora se buscan las funciones f, soluciones (*) que no son constantes.

1b. Muestre que para todo x real, justifique que $f(0) = 1$ y $f(x) > 0$.
Muestre que para todo x real y para todo n entero natural no nulo, se cumple:

$$f(x) = f(x/n)^n.$$

2. Elija un valor de $f(1) > 0$ diferente de 1 y represente de manera gráfica su función f, solución de (*) en el intervalo [–2, 2]. Utilice el papel cuadriculado.

Figuras 1-7 Producciones a) y c) de estudiantes chilenos y b) de estudiantes franceses.



a) Gráfico discreto | b) Gráfico denso en 0 en Geogebra | c) Gráfico continuo

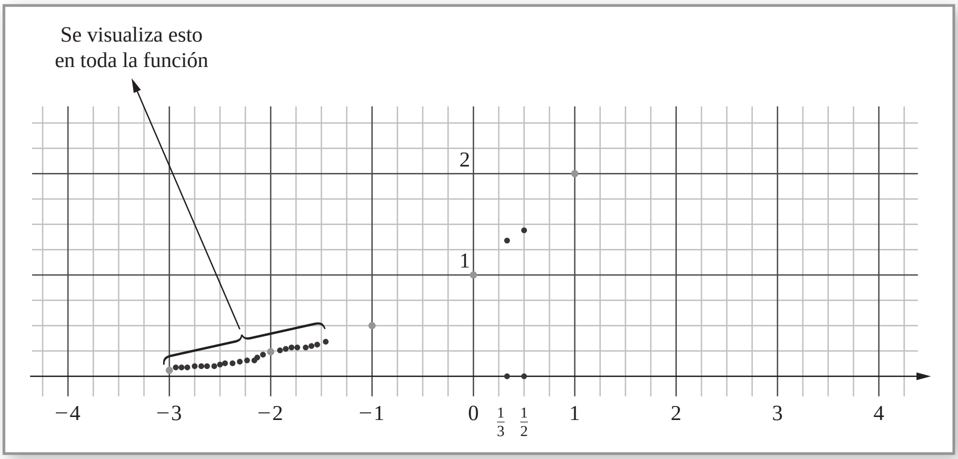
universidad debido a las nociones en juego (función, series, series de polinomios, continuidad, límites, derivación…). Sin embargo, trabajar las nociones discreto-denso-continuo representa una oportunidad de enseñanza que no se puede despreciar.

Una situación didáctica para identificar la discrepancia entre denso y continuo

Las preguntas son similares a las 1-a, 1-b y 2 de la figura 1-6, con $f(1) = 2$. La diferencia es que varios gráficos fueron pedidos: un gráfico con dominio en **N** y se pregunta el valor de $f(3)$; un gráfico con el dominio en **Z** y se pregunta el valor de $f(-3)$; un gráfico con el dominio en **Q** y se pregunta por los valores de $f(1/3)$ y $f(0.3)$; un gráfico con dominio en **R** y se pregunta el valor de $f(\sqrt{3})$. Estas preguntas fueron propuestas a tres binomios de estudiantes de matemáticas en Valparaíso en el año 2017. En general, en las respuestas no hubo problemas para los conjuntos discretos, **N** y **Z**. Sin embargo, para **Q** dibujaron una línea continua como se muestra en la figura 1-8, y fue una ocasión de debate. Por último, un binomio (1er año) intentó dibujar una curva densa pero no continua.

El caso de **R** fue difícil porque los estudiantes (un binomio de 3º y 4º año) intentaron demostrar que $f(\sqrt{3}) = 2^{\sqrt{3}}$ como en los otros casos. Sin embargo, tal igualdad no es posible sin una hipótesis suplementaria (como la continuidad

Figura 1-8



de f). De hecho, se puede atribuir que $f(\sqrt{3})$ no tiene ningún valor real positivo. Por ejemplo, si elegimos a $f(\sqrt{3})$ igual a 0.5, pues $f(x) = 2^x$ por todos los x en **Q** y $f(x) = 0.5^x$ por todos los x en $\sqrt{3} \times \mathbf{Q}$. El gráfico sobre las dos **Q-**rectas vectorial se parecen, respectivamente, a las exponenciales 2^x y 0.5^x. Además, si extendemos el campo $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, entonces el gráfico de f se parece a todo el semiplano $y > 0$ (es un conjunto denso en el semiplano). Pero f sólo es definida sobre un pequeño subconjunto de **R** y se pueden elegir los valores de $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{5})$, $f(\mathrm{e})$, $f(\ln(3))$, $f(\cos(23))$, $f(\pi)$, con la única condición de que estos sean estrictamente positivos.

Conclusión

En este capítulo se ha mostrado la especificidad de la visualización en el análisis con el conocimiento necesario, que a menudo está relacionado con la distinción discreto-denso-continuo. Este punto merece una atención especial, pues permitirá entender que el trabajo en análisis que no se limita a una aplicación de técnicas en el paradigma AC. Al parecer, hay un trabajo específico qué hacer sobre la visualización en el análisis y también se observa la dificultad que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a estas preguntas.

Por otro lado, la deconstrucción en perspectivas puntuales, locales, globales (Montoya Delgadillo, Páez Murillo, Vandebrouck & Vivier, 2018) es otro punto importante en la visualización y en el aprendizaje del análisis. Los estudiantes tienen dificultades para cambiar de perspectivas y, sobre todo, con la perspectiva local. Desde el punto de vista del modelo ETM, la activación de las tres perspectivas (local-puntual-global) depende obviamente de los dominios, paradigmas y génesis (o planos activados). Se asume que AG permite las tres perspectivas, así como AR, pero esta última está ausente en el currículo de secundaria, y que AC sólo permite perspectivas puntuales y globales, con procedimientos y reglas de cálculo,[10] lo cual encapsula la perspectiva local que está escondida.

Es entendible todo el interés de este trabajo específico, ya que los planes de estudios de secundaria y los primeros años de la universidad, por lo general sólo ofrecen un análisis en el paradigma AC. Por lo tanto, se considera que es importante promover un trabajo profundo activando diferentes génesis tanto en el paradigma AG como en el AR, aunque este último sea un trabajo elemental, siempre con el objetivo de distinguir lo denso/continuo y, también, la perspectiva local.

Referencias

Derouet, C., Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R.E., Rousse, S., Vandebrouck, F., Verdugo, P., Vivier, L. (2016). Espace de Travail Mathématique, En Y. Matheron, G. Gueudet *et al*. (ed.). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*. *Actes de la XIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Brest, août 2015*, 421-440, La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 338-361.

Durand-Guerrier, V. & Vivier, L. (2016). Densité de D, Complétude de R et analyse réelle Première approche. En Carl Winslow et Thomas Hausberger (eds.). *Actes de la Première Conférence INDRUM 2016, International Network for Didactic, Research in University Mathematics*, 31 de marzo-02 abril de 2016, Université de Montpellier, Francia, 143-152.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-54.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *Boletim de Educação Matemática-BOLEMA*, 30(54), 1-22.

Groupe IREM Analyse (2017). *L'introduction de la fonction exponentielle*, Brochure IREM, núm. 99, IREM de París. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS17006.pdf

[10] Como en los cálculos de derivadas o límites.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *RELIME*, 17(4-I), 17-28.

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in Schooling: an Introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.

Longo, G. (1999). The Mathematical Continuum: From Intuition to Logic. En J. Petitot *et al*. (eds.). *Naturalizing Phenomenology* (pp. 401-425). Stanford: Stanford University Press.

Montoya-Delgadillo, E, Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2016). Estabilidad epistemológica del profesor debutante y espacio de trabajo matemático. *Boletim de Educação Matemática, BOLEMA*, 30(54), 188-203.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R.E., Vandebrouck, F. & Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 139-160.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 73-101.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2014). Espaces de travail géométrique personnels mis en œuvre par des étudiants-professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve. *RELIME*, 17(4-I), 103-120.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

Tall, D.O. & Schwarzenberger, R.L.E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 149-185.

CAPÍTULO 2

cK¢, un modelo para comprender el entendimiento del estudiante

Ejemplo con el caso de las funciones

Nicolas Balacheff [1] (Traducción: *Carlos Armando Cuevas Vallejo*)

Resumen

En este artículo se desarrolla la conferencia presentada en el "Encuentro internacional sobre la enseñanza del cálculo", realizada en la Ciudad de México en septiembre de 2015. En este capítulo se aborda el problema de comprender y modelar las concepciones de los estudiantes, estableciendo como tema el caso de las funciones. Para establecer la problemática, la introducción reporta el estudio de Arsac sobre el desarrollo de la concepción de convergencia uniforme de Cauchy. Luego se discute el tema de la comprensión de los estudiantes y se propone un marco: el modelo cK¢. Después se describen las concepciones de la función, a lo largo de la historia y desde una perspectiva de aprendizaje, con las herramientas proporcionadas por el modelo y con énfasis especial en los controles que ilustran el papel clave que desempeñan.

[1] Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Francia, e-mail: Nicolas.balacheff@imag.fr

Palabras clave: cálculo, funciones numéricas, cK¢, concepción, concepto erróneo, conocimiento, milieu, situaciones didácticas, campos conceptuales, modelo de aprendizaje, experimento de diseño, aprendizaje mejorado de tecnología.

Abstract

This text develops the invited talk I presented to the “International Meeting on Learning and Teaching Calculus” to be held in Mexico in September 2015. It addresses the problem of understanding and modelling students’ conceptions taking as a theme the case of function. To set the *problématique*, the introduction reports the Arsac study of the development of the Cauchy’s conception of uniform convergence. Then the issue of understanding students’ understanding is discussed, and a framework is proposed: the model cK¢. Then conceptions of function across history and from a learning perspective are described with the tools provided by the model with a special emphasis on controls illustrating the key role they play.

Keywords: calculus, numerical functions, cK¢, conception, misconception, knowing, milieu, didactical situations, conceptual fields, learner modeling, design experiment, technology enhanced learning.

Una breve historia como introducción

La convergencia uniforme es un concepto difícil que requiere un buen dominio de algunos conceptos como: función, límite, continuidad y variable. Arsac (2013) analiza esta complejidad al cuestionar la dificultad histórica de razonar sobre los límites, a partir de un análisis del libro *Cours d’analyse*,[2] de Cauchy, publicado en 1821 (Bradley & Sandifer, 2009). En este libro, el matemático estableció una primera versión del teorema sobre la convergencia de series de funciones continuas (Cauchy, 1821: 131-132):

$$\text{Sea (I) } u_0, u_1, u_2, \dots u_n, u_{n+1}, \dots \text{ una serie}$$

Entonces el teorema 2 asegura que: “Cuando los diferentes términos de la serie (I) son funciones de una misma variable *x*, continua con respecto a esta variable en la vecindad de un valor particular para el que la serie es convergente,

[2] http://users.uoa.gr/~spapast/TomeasDidaktikhs/Caychy/CauchyCoursdAnalyseAnAnnotatedTranslationSourcesandStudiesintheHistoryofMathematicsandPhysicalSciences.pdf

la suma de la serie también es función continua de x, en una vecindad de este valor particular".

Ahora se sabe que esta afirmación no es correcta. La cuestión es entender, ¿por qué un matemático tan sobresaliente no se dio cuenta del error que estaba cometiendo, y por qué era tan difícil superarlo cuando se proporcionaron contraejemplos? El estudio de Arsac de este episodio de la historia de las matemáticas es esclarecedor y está lleno de lecciones para los educadores de matemáticas.

Lo primero que Arsac invita al lector a notar es que la variable x no es explícita en la expresión (I) de la serie de funciones, aunque la notación moderna $f(x)$ se usó en diferentes partes del *Cours d'analyse*. Esto puede provenir del hecho de que usó la representación habitual de series de números, pero también tiene sus raíces en las relaciones entre función y variable, así como en la relación entre variables y cantidades:

> Cuando las cantidades variables se relacionan entre sí de manera tal que, si el valor de una de las variables está dado uno puede encontrar los valores de todas las otras variables, normalmente consideramos que estas diversas cantidades se expresan por medio de una entre ellas, que por lo tanto toma el nombre de variable independiente. Las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente se llaman funciones de esa variable (Bradley & Sandifer, 2009: 17).

En esta cita, la variable aparece como un adjetivo y un sustantivo, con lo que es testigo de una relación estrecha entre variable y cantidad. Esta relación viene con una imagen del concepto cinemático de límite, cuyo origen, como recuerda Arsac (2013: 17), se remonta a Neper y Newton. Esta imagen conceptual se refuerza por su relación con la representación gráfica de funciones como la ilustrada por el argumento matemático de Cauchy en apoyo del teorema del valor intermedio en la edición de 1821 de su *Cours d'analyse* (pero se propone una prueba analítica en una nota).[3] La imagen del concepto cinemático está presente en la definición de continuidad en la que un pequeño incremento de la variable produce un pequeño incremento de la función (variable dependiente): "En otras palabras, la función $f(x)$ es continua con respecto a x entre los límites dados, si entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño en la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño en la función misma" (Bradley & Sandifer, 2009: 26).

Como sucede con la definición de límite, la evolución de la variable en la definición de función se concibe como un movimiento monótono, y también lo es la concepción de la evolución de la función (la variable dependiente).

[3] Cauchy, 1821, nota III, pp. 460-520.

Arsac sugiere que este punto de vista es representativo de la comprensión dominante de la naturaleza de la función y la variable en ese momento. Entonces, en la expresión de la serie (I), u_n y x son dos variables, donde x es la variable independiente de la que depende la función u_n, pero la primera queda implícita, estableciendo de facto —en la escritura— un paralelo entre series de números y series de funciones (es decir, la cantidad independiente y la cantidad dependiente).

La validez del teorema sobre la convergencia de series de funciones continuas estaba respaldada por una narrativa que expresaba un razonamiento cualitativo de la misma naturaleza que el del texto de la definición de continuidad.

> Denotando por s la suma de la serie convergente (I). $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots,$ y la suma de los primeros n términos [de la serie convergente (I)] por s_n, tenemos
>
> $$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$$
>
> $$s = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots = s_n + u_n + u_{n+1}, \ldots$$
>
> y, como consecuencia,
>
> $$s - s_n = u_n + u_{n+1}, \ldots$$
>
> De esta última ecuación, se deduce que las cantidades
>
> $$u + u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$$
>
> forman una nueva serie convergente, cuya suma es igual a $s - s_n$. Si representamos esta suma por r_n, tenemos que:
>
> $$s = s_n + r_n$$
>
> y r_n se llama el residuo de la serie (I) a partir del enésimo término.
>
> Supongamos que los términos de la serie (I) involucran alguna variable x. Si la serie es convergente y sus diversos términos son funciones continuas de x en una vecindad de algún valor particular de esta variable, entonces
>
> $$s_n, r_n \quad \text{y} \quad s$$
>
> también son tres funciones de la variable x, la primera de las cuales es obviamente continua con respecto a x en una vecindad del valor particular en cuestión. Dado esto, consideremos los incrementos en estas tres funciones cuando aumentamos x en una cantidad infinitamente pequeña α. Para todos los valores posibles de n, el incremento en s_n es una cantidad infinitamente pequeña. El incremento de r_n, así como también r_n, se vuelve infinitamente pequeño para valores muy grandes de n. En consecuencia, el incremento en la función s debe ser infinitamente pequeño (Trans. Bradley & Sandifer, 2009: 89-90).

Arsac (2013: 58) advierte que Cauchy no introdujo este texto como una prueba matemática, como lo había hecho para otros teoremas en su *Cours d'analyse*, sino a modo de "observación". Las primeras líneas establecen el significado de los símbolos s_n, r_n y s como se habría hecho para una serie de números, pero la serie de funciones se introduce después de la notación con la oración "supongamos los términos de la serie (I) implica alguna variable x". Como cuestión de hecho, lo que aparece primero, digamos en la primera parte del texto, son los números (es decir, las variables que representan cantidades) y su dependencia. Esto no significa que sea lo que Cauchy quiso decir, pero aquí hay un límite de su expresión. También hay un enfoque de un movimiento monótono de x y el efecto que causa en las funciones en cada paso del razonamiento. El incremento de x se llama explícitamente α, pero este nombre no se explota como Cauchy podría haberlo hecho. Las cosas suceden porque "deben" suceder. Cauchy reconoció que hay excepciones al teorema tal como lo formuló en la publicación de 1821 del *Cours d'analyse*, a lo que Abel y Seidel respondieron con los contraejemplos de la serie de Fourier (Arsac, 2013: capítulos IV y V). Más tarde modificó la declaración del teorema y lo publicó en *Comptes rendus à l'Académie des Sciences* en 1853, donde introdujo la condición: $s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$ se vuelve infinitamente pequeño para un valor infinitamente grande de los números n y $n' > n$.

Sin embargo, en esta revisada versión del teorema, la variable x permanece implícita en la expresión de las funciones u_n. Como señala Arsac (2013: 61 y sig.), Cauchy se refiere a una serie numérica que implica "alguna variable x" (planteamiento que eligió en la primera formulación del teorema). Si se tiene en cuenta la caracterización de la convergencia de series de números, es muy probable que no imaginara expresar una definición de convergencia específica para las funciones; en cambio, manipuló términos numéricos, algunos de los cuales son "cantidades variables". Su demostración (prueba matemática), como la llama ahora, está dominada por el uso del lenguaje natural.

Este uso está asociado a lo implícito de la variable x en la expresión de las funciones u_n, y tiene importantes consecuencias: el papel del incremento α no se aborda en la demostración, la definición de "infinitamente pequeño"[4] favorece una imagen conceptual dinámica y monótona de la convergencia, el orden de la aparición de los términos $\{n, x, \varepsilon\}$ impulsados por la retórica de la argumentación no es congruente con el orden lógico. Una consecuencia de esto último es que la dependencia de n en ε y no en x, como puede ser evidenciada

[4] "*We say that a variable quantity becomes infinitely small when its numerical value decreases indefinitely in such a way as to converge towards the limit zero*", "Decimos que una cantidad variable viene a ser infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de tal forma que se converge al límite cero" (Bradley & Sandifer, 2009: 21).

estructuralmente por la expresión algebraica moderna,[5] está, por así decirlo, oculta.

El estilo de la versión revisada de Cauchy está todavía más cerca de un argumento matemático (una observación) que de una prueba matemática según los estándares modernos. No hay duda de que el rigor está presente de forma deliberada,[6] pero encuentra obstáculos: la definición de variable y función, la ausencia del signo “<” y, por lo tanto, de la resolución de las desigualdades; la ausencia de una notación matemática de valor absoluto (presentado por Weierstrass en 1841) y de los cuantificadores (introducidos a finales del siglo XX). Con el tiempo, el lenguaje natural como herramienta para expresar el razonamiento sobre las funciones se infunde mediante una imagen conceptual del concepto de convergencia y la “lexcontinitatis” de Leibniz (ley de la continuidad).[7]

El análisis de Arsac sobre la comprensión de la función y la convergencia de Cauchy se basa en un análisis crítico y preciso de los textos originales que tiene en cuenta la situación del cálculo en la primera mitad del siglo XIX. Evita con cuidado el anacronismo que podría introducirse si se reescribiera el texto con el lenguaje y la formalización de las matemáticas contemporáneas. Tal reescritura en términos modernos ocultaría las dificultades conceptuales y técnicas que los matemáticos encontraron para superarlas, y conduciría a interpretaciones cuestionables como en el caso de Lakatos,[8] cuya reescritura de los textos matemáticos de Cauchy sugiere errores análogos a los que los estudiantes podrían cometer. Pero, lo que es más importante, oculta las dificultades que surgen de la conceptualización de las nociones de función y variable.

Este análisis de las dificultades encontradas por los matemáticos del siglo XIX frente a los contraejemplos de la primera formulación del teorema de convergencia uniforme de Cauchy evidencia la estrecha relación entre la representación, el lenguaje y las herramientas de razonamiento, por un lado, y los límites debidos a las características de la imagen del concepto cinemático subyacente de continuidad y límite, por el otro.

Esta breve historia ilustra el desafío de evitar el anacronismo y la sobreinterpretación, así como de tener en cuenta las características contextuales y situacionales del contenido matemático analizado. Lo que hizo Arsac para este caso histórico también debería hacerse para las matemáticas del aula, las matemáticas de la vida cotidiana o las etnomatemáticas.

---

[5] $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \mathrm{N}\, \forall\, n > \mathrm{N}\, \forall\, n' \,[n' > n \rightarrow \forall\, x |s_n - s'_n| < \varepsilon]$

[6] Pero, ¿no es cierto que el rigor siempre está dispuesto?

[7] Ver Crockett, 1999.

[8] Ver Arsac ibid. p. 62 sqq and 136-137.

Las características clave del enfoque de Arsac se pueden sintetizar en tres líneas de análisis. Primero, la caracterización y descripción de los medios semióticos disponibles (lenguaje, símbolos, diagramas); segundo, la obtención de las reglas de razonamiento a medida que son actualizadas por el discurso y los medios para la representación. A esto se debe agregar, —si bien de manera más hipotética, porque en general se las deja implícitas en el discurso—, las estructuras de control que respaldan la confianza y la validez de los juicios y las decisiones tomadas a lo largo del proceso de resolución de problemas.

Representación, *operación* y *control* son palabras clave del modelo que diseñé a mediados de la década de 1990 para el modelado de estudiantes en el marco de la teoría de las situaciones didácticas (TSD,[9] Brousseau, 1986/1997),[10] mismo modelo que moldea la forma en que informó sobre el trabajo de Arsac en este capítulo. En las siguientes secciones de este artículo, manteniendo el caso del cálculo, se presenta este modelo, cuyo objetivo original es mejorar nuestros medios para dar cuenta de la comprensión y las competencias matemáticas.

Comprender la comprensión

La iniciativa común estándar central de Estados Unidos establece claramente que un problema de investigación debe basarse en el siguiente planteamiento: *Pedirle a un alumno que entienda algo significa pedirle a un maestro que evalúe si el alumno lo ha entendido. Pero ¿qué significa tener la comprensión matemática?* Esta pregunta puede tener múltiples respuestas según sus marcos y los antecedentes del encuestado. Aquí se presenta uno construido en el contexto de la TSD y la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1980/2009).[11]

Estos marcos proporcionan dos postulados para fundamentar una respuesta:

- **Desde una perspectiva didáctica:** “Modelar una situación de enseñanza consiste en producir un juego específico para un conocimiento seleccionado como objetivo, entre diferentes subsistemas: el sistema educativo, el sistema de estudiantes, el milieu,[12] etcétera” (Brousseau, 1997: 47).

9 Siglas del texto *Teoría de las Situaciones Didácticas*. N. del T.

10 La primera fecha indica la fecha original de la primera publicación de las ideas aquí referidas.

11 [http://www.corestandards.org/math] recuperado el 11/10/2013

12 El *milieu* es un medio o entorno autónomo donde el alumno debe proceder a partir de situaciones planeadas y propuestas por el profesor. Se dice antagónico porque debe haber cierto equilibrio entre las actividades que deben ser dosificadas, lo suficientemente difíciles para que lo pueda resolver, pero no tan sencillas que desmotive la acción del estudiante. El conocimiento debe emerger a partir de la interacción basada en desequilibrios, asimilaciones y acomodaciones en la resolución de las actividades. N. del T.

- **Desde una perspectiva de desarrollo:** "Un concepto es todo: un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operacionales y un conjunto de representaciones lingüísticas y simbólicas" (Vergnaud, 2009: 94), lo que se denomina sintéticamente por la notación $C = (S, I, \Gamma)$.

Dentro del marco teórico de la TSD, el profesor que cuestiona la comprensión del alumno es "un jugador enfrentado a un sistema, autoconstruido a partir de un par de sistemas: el estudiante y, digamos por el momento, un 'milieu' que carece de intenciones didácticas con respecto al estudiante" (Brousseau, 1997: 40). Mientras que la TSD es explícita sobre los modelos de situaciones didácticas y ha progresado en la comprensión de sus propiedades, lo es menos acerca del sistema estudiante<>milieu. A fin de avanzar en esta dirección, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud proporciona los primeros y fundamentales elementos para una posible solución. Su caracterización posee un concepto que tiene conexiones directas con la descripción TSD de la relación entre un alumno y un milieu, a partir de diferentes formas de conocimiento (Brousseau, 1997: 61):

- [1] Los modelos de acción que dirigen las decisiones.
- [2] La formulación de las descripciones y modelos.
- [3] Las formas de conocimiento que permiten el "control" explícito de las interacciones del sujeto en relación con la validez de sus proposiciones.

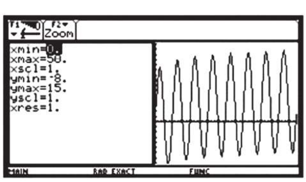
Además del conjunto de situaciones S que comparten de forma implícita ambos marcos, los otros dos componentes de la definición de Vergnaud, I y Γ, se pueden mapear en las primeras formas de conocimiento [1] y [2]. La diferencia entre ambos enfoques radica en la tercera forma de conocimiento [3], que lleva al conocimiento precedente como un medio de "control". Esta función de conocimiento no estuvo ausente del modelo de Vergnaud, pero no tiene un involucramiento explícito en su caracterización. Un teorema matemático es una herramienta y una declaración: "Si A entonces B" es una herramienta para obtener B si A es válida, pero también es una declaración que tiene un valor de verdad. Esta dualidad de "la forma operacional y la forma predicativa del conocimiento", como lo expresa Vergnaud (2009: 89 y sig.), facilitó mantener implícita la dimensión de control en la caracterización que él propuso. Sin embargo, después de Polya, una larga tradición de investigación sobre metacognición (por ejemplo, Schoenfeld, 1985: 97-143) ha demostrado el papel crucial del control en la resolución de problemas. De ahí la sugerencia de introducir "controles" explícitos, aparte de los tres componentes del modelo de Vergnaud.

Antes de presentar una nueva versión de un modelo de comprensión de los estudiantes derivado de la TSD y la teoría de los campos conceptuales, es necesario aclarar un tema de vocabulario. Utilizaré el término "concepción" en vez del término "conocimiento", ya que es clásico en la educación matemática.

La mayoría de las investigaciones se basa, de manera más o menos explícita, en la hipótesis de que los alumnos actúan como sujetos racionales. Pero, a menudo, uno se enfrenta al pensamiento racional que coexiste con el conocimiento que parece carecer de coherencia (desde el punto de vista del observador). Tomemos un ejemplo del trabajo de Trouche sobre el aprendizaje del cálculo con calculadoras gráficas. A los estudiantes se les hace la pregunta que aparece en la figura 2-1.

Tal fenómeno ha sido objeto de amplios estudios, en particular contrastando la práctica matemática dentro y fuera de la escuela; lo que Lave (1988: 63) reconoce como *discontinuidad de las interpretaciones o ejecuciones de las matemáticas entre contextos o ambientes*. Bourdieu propuso una solución a esta paradoja: "El calendario crea de la nada (*ex nihilo*) una gran cantidad de relaciones [...] entre puntos de referencia en diferentes niveles, que nunca se encuentran cara a cara en la práctica, son prácticamente compatibles, incluso si son lógicamente contradictorios" (Bourdiue, 1990: 83). Los elementos clave son, por un lado, el tiempo y, por otro, la diversidad de situaciones. El tiempo organiza las decisiones de los sujetos en secuencias, de tal manera que incluso si resultan contradictorias, son igualmente operacionales porque aparecen en diferentes periodos de su historia: las decisiones contradictorias pueden ignorarse mutuamente. La diversidad de las situaciones introduce un elemento de un tipo diferente. Es una posible explicación en la medida en que uno reconoce que cada decisión no es de naturaleza general, sino que se relaciona con una esfera específica de práctica (algunos pueden preferir decir que está situada) dentro de la cual se reconoce su eficacia. Dentro de una esfera de práctica, los estudiantes son coherentes y exitosos; no son contradictorios, pero la esfera podría ser estrecha.

Figura 2-1



"f se define por $f(x) = \ln x + 10 \text{ sen } x$
¿Es el límite $+\infty$ en $+\infty$?".
Se observó un 25% de errores para los estudiantes* que utilizaron una calculadora gráfica, mientras que sin una calculadora gráfica no hubo errores (Trouche, 1996, p. 50).

* 73 estudiantes de 12º grado, pista científica (Terminale S).

Las contradicciones (y fallas) aparecen cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones ajenas a su esfera de práctica, en las cuales tienen que producir una respuesta a una pregunta o una solución a un problema (por ejemplo, a un requerimiento del maestro). En estas situaciones, movilizan lo que tienen disponible que funcionó en otro lugar, pero la mayoría de las veces esto termina en errores sistemáticos. La posición clásica en los años ochenta era considerar estos errores como síntomas de conceptos erróneos. Este término solía venir con expresiones como "teoría ingenua", "conceptos privados", "creencias" o incluso "matemáticas del niño". Tales puntos de vista pasaron por alto el hecho de que "un niño puede no estar ‹viendo› el mismo conjunto de eventos que un maestro, investigador o experto. [...] muchas veces la respuesta de un niño se etiqueta de manera erronea [...] demasiado rápido y si uno se imaginara cómo el niño entendía la situación, entonces uno encontraría que los errores son razonables y compatibles" (Confrey, 1990: 29). De acuerdo con esta tesis, aquí se renunció al uso del término "concepto erróneo" (*misconception*). Sin embargo, se reconoce que los estudiantes pueden tener modelos de acción diferentes y hasta contradictorios para movilizarse a la (que se considera) misma pieza de conocimiento. La cuestión planteada por la observación de posibles contradicciones en los comportamientos de los alumnos hace necesaria una palabra diferente a "conocimiento". Un candidato es la "concepción", con amplio uso en la educación científica para referirse a la teoría en acción. La mayoría de las veces la palabra *concepción* funcionaba como una herramienta en los discursos, no se tomaba como un objeto de estudio como tal (Artigue, 1991: 266), aunque había una necesidad reconocida de una mejor base (p. ej., Vinner, 1983, 1987) y definición de concepciones y herramientas que permitan analizar sus diferencias y semejanzas.

En las dos secciones siguientes, se propone una definición de "concepción", y luego se describe un modelo derivado de la teoría de Vergnaud, conectable en la TSD.

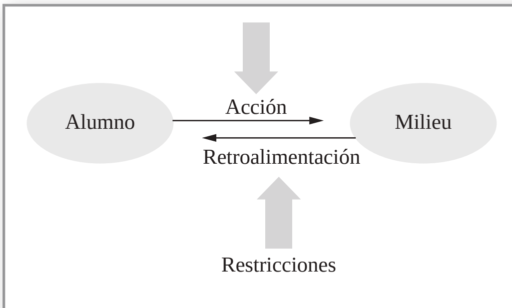
Comportamiento, concepción y conocimiento

Los únicos indicadores disponibles para obtener una idea de la comprensión de los alumnos son sus comportamientos y sus productos, que son consecuencia del tipo de comprensión que puedan haber tenido. Tales evaluaciones son posibles y sus resultados son significativos sólo en el caso en que pueda establecerse una relación válida entre las conductas observadas y la comprensión invocada. La lucha contra el conductismo mantuvo esta relación más o menos "escondida" como tal durante mucho tiempo, pero siempre ha estado presente en la investigación educativa, al menos en el nivel metodológico. De hecho, la cuestión clave es que el significado de una pieza de conocimiento no puede reducirse a comportamientos, mientras que el significado no se puede caracterizar, diagnosticar o enseñar sin vincularlo a las conductas.

Al ser una manifestación tangible de las relaciones entre una persona y su entorno, un "comportamiento" depende de las características de esta persona, así como de las características de su entorno. Un ejemplo, ahora bien documentado, es el de un instrumento que facilita la acción si el usuario posee la competencia requerida pero la limita debido a sus propias limitaciones (Rabardel, 1995; Resnick & Collins, 1994: 7). Las palabras "persona" y "entorno", utilizadas aquí, se refieren a realidades complejas cuyos aspectos no son todos relevantes para las investigaciones que se tratan aquí; éste puede ser el caso de la preferencia musical de la persona o la temperatura en la habitación en la que se encuentra, aunque siempre debemos estar preparados para considerar seriamente las funciones inicialmente minimizadas. Lo que interesa es la persona desde el punto de vista de su relación con una pieza de conocimiento. Por esta razón, de ahora en adelante se hace referencia al alumno como una reducción, si es posible atreverse a decirlo, de la persona a su dimensión epistémica. De la misma manera, no se considera el entorno en toda su complejidad, sino sólo aquellas características relevantes con respecto a un determinado conocimiento. En realidad, esto corresponde al concepto de milieu de la TSD, que es una especie de proyección del entorno sobre su dimensión epistémica: "el milieu es el sistema antagonista del alumno en el proceso de aprendizaje" (Brousseau, 1997: 57).

Esta perspectiva situada sobre el alumno y el milieu sugiere no considerar la comprensión como una propiedad que puede atribuirse sólo al alumno, sino como una propiedad del sistema interactivo formado por el alumno y su milieu antagónico, al que se hará referencia como el sistema alumno<>milieu (figura 2-2). Lo que se solicita para que esta propiedad sea válida es que el sistema

Figura 2-2 Sistema alumno<>milieu.



Presentamos una definición de concepción:

Una concepción es el estado del equilibrio dinámico de un ciclo de acción/retroalimentación entre un alumno y un milieu bajo restricciones prescriptivas de la viabilidad.

cumpla con las condiciones requeridas de viabilidad, lo cual significa que el sistema tiene la capacidad de recuperar el equilibrio después de una perturbación que, de lo contrario, causaría su colapso, o que puede transformarse o reorganizarse en sí mismo. Ésta es otra formulación del postulado de Vergnaud de que los problemas (sistema perturbado) son las fuentes y los criterios de conocimiento (Vergnaud, 1981: 220). Es importante darse cuenta de que no se dice nada sobre el proceso que lleva a la recuperación del equilibrio bajo dichas restricciones. Éstas son prescriptivas (Stewart, 1994: 25-26), lo que significa que expresan las condiciones necesarias para garantizar la viabilidad del sistema, pero no son preceptivas, lo que significa que no dicen de qué manera se debe recuperar el equilibrio.

El estudio y caracterización de una concepción se basará en comportamientos observables del sistema (acción, retroalimentación) y en los resultados de su funcionamiento. Requiere evidencia de la evaluación del equilibrio, la cual depende de la posibilidad de que el alumno obtenga el control sobre la interacción y la reificación-milieu de fallas y éxitos para una adecuada retroalimentación.

La geometría proporciona muchos buenos ejemplos: construir un diagrama en una hoja de papel con un lápiz es permisivo con los ajustes empíricos, mientras que el software de geometría dinámica permite desordenar un diagrama por los puntos de arrastre, que pueden reificar la falla debido a que no se ajustan a las propiedades geométricas (Healy *et al.*, 1994), aunque "los estudiantes pueden modificar la figura" para que se vea bien "en lugar de depurar la construcción proceso" (Jones, 1999: 254).

De hecho, esta definición situada significa que un observador puede asociar diferentes concepciones a un sistema alumno<>milieu[13] involucrado en una situación cuyas características él o ella considera conceptualmente lo mismo o con problemas que él o ella afirman son isomorfos. Esto está ampliamente documentado en la literatura, por ejemplo, por investigación en transferencia, o por investigación etnomatemática. De todos modos, en el sistema referencial del observador, estas diferentes concepciones asociadas observadas en el sistema alumno<>milieu se deberían recoger en un clúster común. Por esta razón, el conocimiento del alumno[14] se define como el conjunto de concepciones que puede ser desencadenado por diferentes situaciones, y que el observador considera (matemáticamente) lo mismo.

---

[13] A menudo se denomina erróneamente "concepción del estudiante", en aras de la simplificación del discurso.

[14] Sé que usar "saber" como sustantivo no es común, pero ayuda a mantener la distancia con la palabra "conocimiento" que tiene en la educación una fuerte connotación autoritaria.

"Concepción", "saber" y "concepto" —este último se redefine más adelante en el desarrollo del modelo— son términos abstractos cuyo significado está determinado por sus funciones en el modelo y por las relaciones que tienen con otros términos abstractos en los marcos teóricos relacionados. De hecho, debe discutirse qué tan lejos la formalización propuesta tiene sentido cuando se confronta con otro uso y contexto, o con la "realidad" (percibida), y si son herramientas adecuadas para la investigación que están destinadas a instrumentar. Aquí el modelo se asocia al nombre *cK¢*, siglas de "concepción", "saber", "concepto". La siguiente sección describe sus principales componentes.

Características principales del modelo cK¢

El objetivo de un modelo es proporcionar una herramienta para establecer vínculos entre los marcos teóricos que lo respaldan y el campo experimental donde se establecerán experimentos y se llevarán a cabo observaciones. Debe ser una herramienta precisa y efectiva para permitir identificar qué observar, evaluar la calidad de los datos y realizar un análisis.

El modelo cK¢ de comprensión de los estudiantes basado en la TSD y la teoría de los campos conceptuales, oculta la terna de Vergnaud pero con un vocabulario diferente para evitar la confusión con una conceptualización psicológica y una modelación. En realidad, su objetivo no es proporcionar un modelo cognitivo como tal, ni los modelos mentales de los estudiantes como se los menciona en algunos proyectos de investigación, sino caracterizar y representar los estados del sistema de los estudiantes. Dos diferencias principales con el modelo de Vergnaud son: el uso del término "problema" en lugar de "situación", y la introducción explícita de "estructuras de control". El significado de "problema" es más estrecho que el de "situación", y se refiere a las consecuencias de una perturbación del sistema de los estudiantes y no al contexto educativo, institucional o material en el que se produce.

Entonces, bajo el modelo cK¢, la caracterización formal de una concepción consiste en una cuádrupla (P, R, L, Σ) en la que:

- P es un conjunto de problemas.
- R es un conjunto de operadores.
- L es un sistema de representación.
- Σ es una estructura de control.

P demostró ser más complejo para obtener con precisión lo esperado. Se han propuesto dos soluciones opuestas: (i) incluir todos los problemas para los cuales la concepción proporciona herramientas eficientes (Vergnaud, 1991: 145), pero esta opción es demasiado general para ser efectiva cuando se trata de conceptos básicos; (ii) considerar un conjunto finito de problemas del que se derivarán otros problemas (Brousseau, 1997: 30), pero esta opción abre la cuestión de establecer que existe un conjunto de problemas que generan cualquier concepción. Una solución frecuente para la mayoría de los investigadores consiste en derivar P de la observación de los estudiantes en situaciones y del análisis de las prácticas históricas y actuales de las matemáticas. En realidad, lo que se hace cuando se trabaja con concepciones específicas es abrir una ventana a P haciendo explícitos algunos buenos representantes de sus elementos potenciales. Estos representantes funcionan como una especie de problemas prototípicos; lo cual es una implementación pragmática de la propuesta de Brousseau.

R corresponde a acciones reificadas por comportamientos que se pueden observar durante el funcionamiento del sistema de aprendizaje<>milieu. No son esquemas, en términos psicológicos, sino quizá datos de los cuales se pueden inferir esquemas.

L se refiere a cualquier herramienta semiótica que permita representar problemas, apoyar interacciones y reificar operadores. En realidad, no hay diferencia con el “conjunto de representaciones lingüísticas y simbólicas” que Vergnaud incluye en su definición.

Σ, la estructura de control, incluye comportamientos como: tomar decisiones, elegir operadores, evaluar retroalimentaciones, tomar decisiones, juzgar la evolución de un proceso de resolución de problemas. Estos comportamientos metacognitivos son a menudo silenciosos e invisibles, por lo tanto, rara vez resultan accesibles para la observación. Hay formas de superar esta dificultad mediante ajustes experimentales específicos, por ejemplo, invitar a los estudiantes a trabajar en parejas, con la expectativa de que esto sea suficiente para provocar estos comportamientos como parte de sus interacciones verbales; es el objetivo de las situaciones de formulaciones TSD (Brousseau, 1997: 10 y sig.). Vale la pena observar que la cuádrupla no está más relacionada con el alumno que con el medio con el que interactúa: el sistema de representación permite la formulación y el uso de los operadores por el emisor activo (el alumno), así como la reificación de los actores y la retroalimentación del receptor reactivo (el medio); la estructura de control permite expresar los medios del alumno para evaluar una acción, así como los criterios del milieu para seleccionar un comentario. Es en este sentido que la cuádrupla que caracteriza una concepción es congruente con la definición conceptual anterior de una concepción como una propiedad del sistema aprendizaje<>milieu.

Esquemas de las concepciones de "función" a lo largo de su historia

La palabra "función" puede estar asociada a una cantidad de interpretaciones diferentes. Éste es el caso a lo largo de la historia de las matemáticas (Edwards, 1979; Kleiner, 1989; Kline, 1972; Smith, 1958), así como a lo largo de la vida matemática de los estudiantes (DeMarois & Tall, 1996; Dubinsky & Harel, 1992; Breidenbach *et al*., 1992; Thompson, 1994; Sierpinska, 1989; Vinner & Dreyfus, 1989).

Un primer enfoque eficiente para distinguir estas diferentes concepciones de "función" en el curso de la historia de las matemáticas consiste en analizarlas desde el punto de vista del sistema de representación que implementaron (Balacheff & Gaudin, 2010).

Una de las huellas más antiguas de la existencia de la función son las tablas y sus usos. Por ejemplo, Ptolomeo (en el *Almagesto*) sabía que las posiciones de los planetas cambian con el tiempo, y compilaba tablas numéricas astronómicas (Youschkevitch, 1976: 40-42). Los astrónomos árabes en los siglos X y XI también utilizaron tablas precisas. Sin embargo, estas tablas sí asociaron una cantidad dada a otra, por lo que la idea de variable aún no estaba presente.

La asociación de curvas con tablas aprovechó el desarrollo del concepto de función, lo que permitió avanzar en la formulación y resolución del problema de la determinación de las trayectorias de los planetas. De acuerdo con Kline (1972), Kepler mejoró el cálculo de la posición de los planetas ante todo mediante un ajuste en las curvas geométricas y los datos astronómicos, pero sin referencia teórica para explicar por qué consideraba que las trayectorias eran elípticas. La validez de las trayectorias conjeturadas dependía entonces de la precisión de la medición de las posiciones de los planetas y de la elección de un objeto geométrico familiar: la elipse. Esto permitió describir el universo con leyes matemáticas simples. Kline también notó que la mayoría de las funciones introducidas en el siglo XVII se estudiaron primero como curvas (Kline, 1972: 338), las trayectorias geométricas de los puntos en movimiento (Kleiner, 1989); de ahí el importante papel de la geometría en esta historia.

La invención del simbolismo del álgebra (Viete) y su desarrollo (Descartes, Newton y Leibniz) fue decisiva: "La evolución del concepto de función puede verse como un tira y afloja entre dos elementos, dos imágenes mentales: el geométrico (expresado en forma de una curva) y el algebraico (expresado como una fórmula)" (Kleiner, 1989). La separación del estudio de funciones de la geometría se acredita a Euler, quien publicó en 1748 un tratado completamente algebraico titulado *Introductio in Analysin Infinitorum*, sin una sola imagen o dibujo (Kleiner, 1989: 284). La "función" se presentó como el objeto central del Cálculo. La caracterización analítica de las funciones recibió una fuerte formulación de Euler, quien afirmó que una función es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de una cantidad variable y de constantes. En 1755, Euler formuló una definición general de función que expresa la noción de dependencia entre cantidades variables y la noción de causalidad (Dhombres, 1988: 45).

El concepto de función continuó su desarrollo marcado por la definición de Dirichlet, quien la consideraba una correspondencia arbitraria: "*y es una función de una variable x*, definida en el intervalo $a < x < b$ si a cada valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establece esta correspondencia" (citado por Kleiner, 1989: 10).

Esta definición inició un nuevo "tira y afloja", esta vez entre la concepción algebraica y la lógica. Las dificultades que trajo estimularon muchas discusiones hasta el siglo XX (Monna, 1972).

No se profundizará en la historia del concepto de función, sino que el enfoque se limitará a tres concepciones identificadas por el sistema de representación del que dependen en mayor medida: "tabla", "curva" y "analítica"; se hará referencia a ellos como C_T, C_C y C_A, respectivamente. Cada una de estas tres concepciones se puede caracterizar por una cuádrupla, como sigue.

La concepción Tabular C_T (P_T, R_T, Tabla, ΣT) tiene fundamentos esencialmente empíricos: la validez de una tabla depende de la precisión de las mediciones y los cálculos relacionados según los requisitos de un contexto experimental dado. En el caso de Kepler, por ejemplo, la validez debe evaluarse en función de la calidad de las interpolaciones y predicciones permitidas por la elipse, así como de la calidad de los instrumentos disponibles en ese momento. Por lo tanto, la estructura de control correspondiente ΣT era, en lo fundamental, de naturaleza empírica, por lo cual proporcionaba los medios que permitían verificar la precisión de las tablas con referencia a las observaciones y las mediciones que se habían llevado a cabo. Sin embargo, la tabla de entrada/salida fue el primer medio de representación utilizado, y produjo un buen número de funciones. Kline (1972: 338), nos recuerda que la tabla de la función seno se conocía con gran precisión mucho antes de que la curva asociada se convirtiera en un objeto matemático. Entonces, la validez de la solución de un problema de la esfera de práctica correspondiente (PT) sí dependía de manera esencial de la calidad de producciones bastante concretas y de las acciones necesarias para recopilar y tratar datos.

- Concepción tabular C_T (P_T, R_T, Tabla, ΣT),

  P_T = Problemas de física y astronomía.
  R_T = Cálculo de razón y números enteros, geometría.

L_T/Tabla = Tablas numéricas, representación geométrica de curvas, números, lenguaje natural.
ΣT = Confrontación entre el cálculo y los datos reales.

La concepción como Curva C_C (P_C, R_C, Curva, ΣC) se desarrolló a principios del siglo XVIII en respuesta al importante problema de la navegación a larga distancia, donde las costas estaban fuera de la vista. Por lo tanto, P_C se originó en preguntas prácticas, y R_C incluyó técnicas de medición, computación y dibujo. Pero el estudio matemático de curvas, como objetos geométricos posiblemente asociados a una expresión algebraica, se desarrolló por sí mismo incluyendo problemas que combinan problemas geométricos (por ejemplo, encontrar una tangente) con problemas cinemáticos (por ejemplo, velocidades de puntos moviéndose a lo largo de una curva). Las curvas como entidades geométricas fueron el referente ontológico de esta concepción; si la palabra "función" estaba en uso, era para referirse a las curvas.

- Concepción como Curva C_C (P_C, R_C, Curva, ΣC),

P_T = Estudio de curvas como trayectorias de puntos.
R_C = Cálculo de razón y números enteros, geometría.
L_T/Tabla = Tablas numéricas, representación geométrica de curvas, números, lenguaje natural.
ΣT = Confrontación entre el cálculo y los datos reales.

La concepción Analítica (P_A, R_A, Fórmula, ΣA) sigue una ruptura en la epistemología de las funciones: la función definida por una expresión analítica no necesita referirse a un campo experimental (ya sean fenómenos naturales o dibujos mecánicos), sino que se puede estudiar por sí misma. Esto no significa que el modelado ya no juegue ningún papel; más bien, significa que ya no es central y ya no caracteriza a la concepción. Un propósito del análisis del siglo XVIII (y de los siglos XIX y XX) fue la solución de las ecuaciones funcionales, que eran de gran importancia en física (Dhombres, 1988), y los desarrollos en series infinitas desempeñaban un papel central como operadores (R_A) en esas soluciones. La estructura de control correspondiente ΣA depende de las características específicas del álgebra como sistema de representación y de los operadores que permite implementar. El cálculo de expresiones simbólicas y las pruebas matemáticas son las herramientas clave para decidir si un enunciado es válido o no. De hecho, las representaciones simbólicas no son las únicas disponibles para ser utilizadas. Después de CA, una función puede asociarse a un gráfico, es decir, un conjunto de pares (x ; y) en el plano cartesiano (donde y es el valor de la función para una x determinada). Las representaciones gráficas tienen un valor heurístico potencial al mostrar fenómenos que las expresiones algebraicas no evidencian fácilmente (por ejemplo, la intersección de dos líneas).

- Concepción analítica (P_A, R_A, Fórmula, ΣA),

P_A = Estudio de funciones (como objetos).
R_A = Herramientas algebraicas.
Fórmula = Álgebra, gráficos.
ΣA = Prueba matemática.

Esta clasificación no debe ocultar la complejidad de la evolución de las concepciones, su hibridación o cohabitación. Por el contrario, la tensión en el registro gráfico entre gráficos y curvas fue el origen de problemas que estimularon la evolución. Por ejemplo, la solución general de ecuaciones diferenciales parciales que expresan las vibraciones de una cuerda finita sujeta a las condiciones iniciales, indujo a Euler a considerar funciones arbitrarias que no necesariamente tenían representaciones analíticas. Los nuevos desarrollos de la comprensión de la función tomaron dos siglos. El debate sobre qué puede contar como función desarrollado a lo largo del siglo XIX dio lugar a la aparición de la concepción de la función como relación de Dirichlet.

Delineando las concepciones de "función", el caso de los estudiantes

Hay una gran cantidad de investigaciones sobre la comprensión del concepto de función entre los estudiantes de secundaria y postsecundaria. Se hará referencia a algunas obras fundamentales, en particular las investigaciones de Vinner, Dreyfus, Tall y Sierpinska, para ilustrar la forma en que el modelo contribuye a aclarar las diferentes interpretaciones.

El estudio de Vinner (1992) sobre la imagen del concepto de función entre los estudiantes es clásico. Vinner (1992: 200) identificó ocho características de las formas en que los estudiantes entienden la función:

- "La correspondencia que constituye la función debe ser sistemática, debe establecerse mediante una regla y la regla misma debe tener sus propias regularidades".
- "Una función debe ser un término algebraico".
- "Una función se identifica con una de sus representaciones gráficas o simbólicas".
- "Una función debe estar dada por una regla".

- "La función puede tener diferentes reglas de correspondencia para dominios disjuntos, siempre que estos dominios sean dominios regulares (como segmentos de líneas o intervalos)".
- "Una regla de correspondencia que no es una regla algebraica es una función sólo si la comunidad matemática lo anunció de manera oficial como una función".
- "El gráfico de una función debe ser regular y sistemático".
- "Una función es una correspondencia uno a uno".

Estas características han recibido una amplia confirmación; al punto de que las referencias a ellas en la literatura contemporánea permiten considerarlas consensuales.

A diferencia de la historia, los estudiantes tienen cierta familiaridad con el álgebra cuando se introduce el concepto de función. Además, la mayoría de los planes de estudio les proporciona algún conocimiento sobre la ecuación de una línea recta y sobre la relación entre las propiedades gráficas (intersección de líneas) y las propiedades algebraicas (solución de una ecuación). Por lo tanto, los registros algebraicos y gráficos, así como sus interacciones, juegan un papel central; hacen de la representación un punto de entrada privilegiado para la búsqueda de una caracterización de las diferentes concepciones. La naturaleza de la relación entre la representación algebraica y gráfica depende de lo que Sierpinska (1989) llama puntos de vista sintéticos y puntos de vista analíticos:

- **Curva, vista de forma analítica:** "una función es una curva 'abstracta' en un sistema de coordenadas; esto significa que está concebida en puntos (x, y), donde x e y están relacionados entre sí de alguna manera" (Sierpinska, 1989: 18).
- **Curva, vista de forma sintética:** "[...] la función se identifica con su representación en el plano; es una curva vista de una manera concreta y sintética" (Sierpinska, 1989: 17).

Sierpinska agregó este clarificador comentario: "[la] relación (entre x e y, vista analíticamente) puede ser dada por una ecuación. Pero la curva no representa la relación. Más bien, está representada por la ecuación" (Sierpinska, 1989: 17). De ello se sigue la sugerencia de considerar dos tipos de concepciones estudiantiles, la concepción de Curva-Álgebra (C_{CA}) y la concepción de Álgebra-Gráfico (C_{AG}). Ambas concepciones comparten los mismos sistemas de representación, algebraicos y gráficos, pero con una interacción diferente entre ambos. En el caso de C_{CA}, el criterio es que la curva debe ser representada por una ecuación; tal requisito es parte de la estructura de control correspondiente Σ_{CA}. En el caso de C_{AG}, el criterio es que la representación algebraica debe asociarse con un gráfico que debe poderse trazar, un requisito que parte de la estructura de control respectiva Σ_{AG}. La distinción empírica entre C_{CA} y C_{AG} no es fácil porque sus sistemas de representación están muy cerca el uno del otro, al manipular fórmulas y dibujar diagramas. Es al observar las estructuras de control Σ_{CA} y Σ_{AG}, en relación con los operadores y la forma en que se implementan, que la distinción se puede configurar.

Ana Sfard (1991) las calificaría como concepciones operacionales de la función debido a su orientación hacia una descripción de procesos y acciones. Ella enfatiza "la profunda brecha ontológica entre las concepciones operativas y estructurales" (Sfard, 1991: 4), caracterizando a estas últimas por la habilidad de "reconocer la idea 'de un vistazo' y manipularla en su conjunto, sin entrar en detalles" (Sfard, 1991: 4). Como cuestión de hecho, el reconocimiento de esta capacidad no impide que el investigador pueda caracterizarla de manera empírica; lo que significa la capacidad de identificarla haciendo referencia a evidencias empíricas. Para abordar este tema y dar cabida a las concepciones estructurales, Gaudin (2005: 97-98) introduce una concepción de función como objeto como la unión de las concepciones operacionales que abre la posibilidad de desencadenar el sistema de representación de los operadores más adaptados, o estructura de control según el problema identificado. La concepción de función como objeto incluye controles que manejan la distinción entre las representaciones y el llamado objeto como un todo, ya que está definido por propiedades independientes de procesos y operaciones específicas. En particular, estos controles permiten validar la correcta resolución de un problema de manera distinta a la verificación de si es correcto el procesamiento de las representaciones (Gaudin, 2005: 98).

La siguiente sección ilustra el papel de los controles y su diferencia en la naturaleza tomando el caso de la concepción Curva-Álgebra, la concepción Gráfico-Álgebra y la concepción de la función como objeto. Asimismo, se introduce la distinción entre "controles de referencia" y "controles de instrumentación" (Gaudin, 2005: 161).

El papel clave de los controles

La identificación de los controles ejecutados durante un proceso de resolución de problemas es difícil en lo metodológico. Mientras que los operadores son accesibles para un observador gracias a su reificación por el comportamiento de los estudiantes, su interacción con el medio y sus producciones reales, los controles (por ejemplo, razones para una decisión, criterios para una elección) a menudo quedan implícitos. Esto es, al diseñar una situación de formulación que combine las interacciones con un milieu y las interacciones sociales, existe la posibilidad de obtenerlas. Tales situaciones, son definidas por TSD (Brousseau, 1997: 10 y sig.) como una situación de formulación, un conjunto de restricciones e instrucciones que hacen que la verbalización no sólo sea obligatoria sino también necesaria para el éxito de la tarea. Una situación elemental de formulación consiste en exigir a un grupo de estudiantes que resuelva un problema de forma colaborativa y garantizar un acuerdo sobre la solución.

Es más probable que los problemas que desencadenan una *concepción de función como objeto* (Sfard, 1992) otorguen un papel clave a los controles, facilitando así la observación de su función y su funcionamiento. Entre ellos, los problemas de aproximación son de especial interés debido a la incertidumbre sobre los criterios para la mejor aproximación que requiere un acuerdo entre los estudiantes sobre las características de la función y un análisis de los datos del problema. Los problemas de "continuidad suave",[15] en particular, requieren la consideración de múltiples aspectos para tomar decisiones que movilizan un razonamiento tanto cualitativo como cuantitativo que resuena con las características del sistema de representación, ya sea algebraico o gráfico. El siguiente caso, estudiado por Nathalie Gaudin (2005), ha sido diseñado según estos principios. Explota las funcionalidades del software Mapple para proporcionar un milieu en el que los estudiantes puedan fundamentar una estrategia experimental que podría desencadenar concepciones de Curva-Álgebra o concepciones de Álgebra-Gráfico, pero los sistemas gráficos de representación de estas concepciones proporcionan un soporte cualitativo insuficiente, y las representaciones algebraicas carecen de las herramientas para evaluar la distancia entre funciones y su regularidad y su forma, lo que favorece la aparición de una concepción de función como objeto.

Enseguida se presenta la tarea que Gaudin (2005, en especial en el capítulo 5) propuso a pares de estudiantes[16] para lograr el uso colaborativo de Mapple:

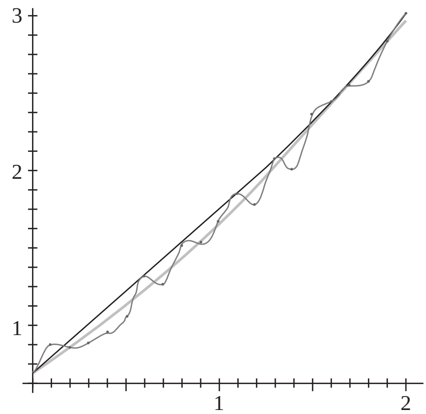
> Los siguientes valores y_i proporcionan valores con posibles errores de (±10%). Estos valores provienen de un polinomio de tercer grado cuyos coeficientes son desconocidos, evaluados en una serie de puntos x_i.
>
> Se proponen cinco aproximaciones ($f_1 \dots f_5$)
>
> Tiene que elegir uno de ellos, que tenga la mejor aproximación al polinomio:
>
> en el intervalo [0; 20]
>
> en [0; +∞]

[15] Smoothing.

[16] Tres pares de profesores estudiantes de 2º año y seis pares de estudiantes de 2º año de una escuela de ingeniería.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	1.22	1.41	1.38	1.42	1.48	1.58	1.84	1.79	2.03	2.04	2.17	2.36
x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
y_i	2.30	2.57	2.52	2.85	2.93	3.03	3.07	3.31	3.48			

Explique por qué elige o no cada una de estas aproximaciones.



$f_1(x) = 1.2310 + 0.0752x + 1.789 \times 10^{-3}x^2$

$f_2(x) = 1.2429 + 0.06706x + 2.833 \times 10^{-3}x^2 - 3.48 \times 10^{-5}x^3$

$f_3(x) = 1.2712 + 0.0308x + 0.0115x^2 - 7.1626 \times 10^{-4}x^3 + 1.704 \times 10^{-5}x^4$

$f_5(x) = 8.817 \times 10^{-5}x^3 - 0.00160x^2 + 0.10977x + 1.2200$ con $f_5(0) = 1.22$; $f_5(6) = 1.84$; $f_5(13) = 2.57$ sea $f_5(20) = 3.48$

f_4 es definido por: (1) si pasa a través de cada punto (x_i, y_i); (2) en cada intervalo $[x_i; y_i]$, y es un polinomio de grado igual o menor que 3; (3) es dos veces diferenciable y su segunda derivada es continua; (4) su representación algebraica es la que está en cada intervalo $[x_i; y_i]$: [polinomios de tercer grado]

Los datos recopilados durante el experimento provienen de la observación de las interacciones entre los estudiantes y el milieu y de las interacciones verbales entre los estudiantes. El primer paso en el análisis consiste en identificar "átomos" (agregación elemental de los datos brutos) que permitan distinguir entre acciones realizadas, declaraciones sobre acciones y declaraciones sobre hechos.

El problema metodológico planteado por el uso del modelo cK¢, como es el caso de cualquier investigación sobre protocolos verbales, es la segmentación de datos brutos para extraer elementos relevantes desde la perspectiva del análisis que se llevará a cabo y en línea con el marco elegido. Aquí hay un ejemplo tomado del caso de Rémi y Olivier (Gaudin, 2005: 233 y sig.):

Rémi: Entonces, el polinomio está en algún lugar allí [A26].

Olivier: Sí. La mejor aproximación podría ser fuera [A27 a]. Así que no hemos progresado tanto [A27b].

Rémi: Depende de cómo definamos lo mejor. Depende de si consideras que un punto fuera de allí es algo malo o si lo consideras en promedio [...] si es el conjunto de puntos lo que está bien [...] [A28]. ¿Ves lo que quiero decir? Intentamos dibujar todo el polinomio, ¿ves? Dibujamos todo, Olivier: ¿todos los datos en bruto? [A29].

Rémi: No estoy seguro de que sea fácil ver algo, pero podemos probar y usar los colores.

Olivier: ¿Recordarás que el amarillo es el primero? ¿Puedes escribirlo? Luego verde [...], azul, tenemos que elegir los colores [...] rojo. Puede ser que evitemos el amarillo. Prueba con "indigo", es el mejor color que existe [A30].

Los átomos se pueden hacer de varias expresiones (por ejemplo, A30) y una expresión se puede dividir en varios átomos (por ejemplo, A28, A29). Una vez que se ha logrado este tratamiento de los datos brutos, los átomos se clasifican según sus roles como se ve en la figura 2.3 de la siguiente página.

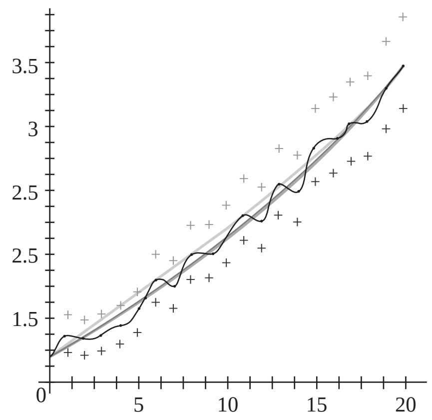
Se observa que algunos controles se utilizan para obtener el significado de "aproximación" o cuestionarlo (por ejemplo, C). Son importantes para estabilizar la estrategia de resolución de problemas y el terreno para las decisiones, así como permiten anticipar posibles acciones y verificar su adecuación. Son los "controles de referencia" (Gaudin, 2005: 161). Una vez que los controles de referencia han orientado la estrategia, los estudiantes deben seleccionar las acciones a realizar; éste es el rol de los "controles de instrumentación" (Gaudin, 2005: 161). Junto con la acción, forman un operador cuya estructura es [si control, entonces acción].

Este análisis confirmó el papel de las concepciones Curva-Álgebra y Gráfica-Álgebra como estados iniciales del proceso de resolución de problemas, así como la evolución hacia una concepción de función-como-objeto cuyo sistema de representación incluye registros algebraicos y gráficos de una manera completamente integrada, y cuya estructura de control incluye controles sobre la función como tal.

La tabla 2-1 en la siguiente página resume estas tres concepciones que no se diferencian por las acciones observadas, sino por los controles, referentes o instrumentales, que las sustentan. Considerando el caso de las funciones (ver tabla 2-1).

Dos tipos de controles controlan la resolución del problema, los controles de referencia y los controles de instrumentación. Los primeros implementan propiedades expresadas por la definición de aproximación y permiten anticipar la estrategia y los criterios para una solución aceptable (Gaudin, 2005: 153). Por ejemplo: [si f es una aproximación de P, entonces f debe seguir la variación

Figura 2-3 Caso de Olivier y Rémi.



Rémi: Entonces el polinomio está en algún lugar. Olivier: Sí. La mejor aproximación podría ser afuera.	A - evaluación de un hecho
Olivier: Entonces no hemos progresado mucho.	B - Juicio
Rémi: Depende de cómo definamos lo mejor. Depende de si consideras que un punto fuera de allí es algo malo o si lo consideras en promedio [...] si es el conjunto de puntos que, bueno [...].	C - Evaluación de un juicio
Rémi: ¿Ves lo que quiero decir? Intentamos dibujar todo el polinomio, ¿ves? Dibujamos todo. Olivier: ¿Todo en bruto?	D - Decisión sobre una acción
Rémi: No estoy seguro de que sea fácil ver algo, pero podemos probar y usar los colores. Olivier: ¿Recordarás que el amarillo es el primero? ¿Puedes escribirlo? Luego verde [...], azul, tenemos que elegir los colores [...] rojo. Puede ser que evitemos el amarillo. Pruebe con “índigo”, es el mejor color que existe.	E - Evaluación de una acción

Tabla 2-1

	Concepción Curva-Álgebra	Concepción Gráfico-Álgebra	Concepción función-como-objeto
Controles de referencia	Forma global de la aproximación de la curva Cercanía visual de la aproximación de la curva al punto (x_i, y_i)	La proximidad de $f_j(x_i)$ y el y_i, o de los puntos $(x_i, f_j(x_i))$ y (x_i, y_i)	Forma global de la aproximación a la curva y la cercanía de $f_j(x_i)$ y y_i o los puntos $(xi, f_j(x_i))$ y (x_i, y_i)
Controles de instrumentación	Relativo al uso de Mapple para graficar las funciones	Seleccionando la fórmula $[f_j(x_i) - y_i]^2$ Relativo al uso de Mapple para los cálculos	Integración de los registros algebraicos y gráficos. Uso completo de Mapple como herramienta para cálculo
Sistemas de representación	Dibujos de Mapple y funcionalidades asociadas Fórmulas algebraicas	Analítico y gráfico	Analítico y gráfico

de P] o [la cercanía de $f_i(x_j)$ y y_j, y la posición de la curva con respecto a (x_i, y_i)]. Estos últimos aseguran la coherencia entre los controles de referencia y las acciones a realizar; son los que manejan la selección de los operadores.

Un rol de los controles es asegurar que una concepción se desencadene dentro de su dominio de validez. Delinear este dominio es necesario si se afirma que la concepción de los estudiantes no depende de las circunstancias y, por lo tanto, tiene todas las características del conocimiento genuino. Sin embargo, ésta es una tarea desafiante, algunos de cuyos aspectos se abordan en la próxima sección.

Concepción y esfera de práctica

Caracterizar la esfera de práctica de una concepción es un problema difícil, ya que la experiencia matemática de los estudiantes no está restringida al aula matemática: queda claro que sus ámbitos de práctica están determinados por las actividades fuera de la escuela, así como por lo que se hace dentro de la escuela en otras disciplinas además de las matemáticas.

En el caso de la función, el plan de estudios tiene un fuerte impacto incluso en el nivel elemental (Ayalon *et al*., 2017). Al avanzar en el curso de su plan de estudios, los estudiantes desarrollan una comprensión de las funciones que está cada vez más determinada por el contenido formal que se enseña y la práctica real de la escuela diaria. Las elecciones hechas por los libros de texto para implementar planes de estudios son indicadores de los contextos de aprendizaje; su diversidad es un primer indicador de la posible diversidad de las concepciones de los estudiantes. Vilma Mesa (2009) ha llevado a cabo un estudio comparativo extensivo[17] en busca de concepciones que podrían estar inducidas por los libros de texto de matemáticas, las cuales proporcionan una imagen de esta diversidad y su posible impacto en el aprendizaje. Para este estudio, se ha utilizado el modelo cK¢ para la metodología, pero no para el formalismo, lo que se considera un uso adecuado.

El análisis del corpus de libros de texto realizado por Vilma Mesa se guía por cuatro preguntas que paralelizan las cuatro dimensiones del modelo cK¢ que caracterizan la concepción. Dada una tarea (ejercicio o problema):

- ¿Qué uso se le da a la función en la tarea?
- ¿Qué necesita el alumno para realizar la tarea?
- ¿Qué representaciones movilizan la tarea?
- ¿Cómo podría el alumno saber que tiene una respuesta correcta?

Las 2 304 tareas provenientes de 35 libros de texto (de séptimo y octavo grados) se clasificaron según la taxonomía de Biehler del "uso prototípico de funciones"[18] (Biehler, 2005). Se construyó y evaluó un análisis detallado y fino, basado en un enfoque de múltiples juicios de aproximación, esto es, está compuesto por cuatro líneas de análisis de: 10 diferentes tipos de problemas (por ejemplo, relaciones de causa / efecto, relación definida por la gráfica, relación definida por parejas ordenadas), 39 operadores (por ejemplo, encontrar porcentaje o número, encontrar pendiente, nombrar puntos en el eje), nueve sistemas de representación (por ejemplo, diagramas de flecha, gráficas en dos ejes, simbólico, tabular), nueve controles (por ejemplo, prueba de línea vertical, continuidad asumida, verificación de uso puntos). Cinco tipos de concepciones son favorecidas de modo predominante (Mesa, 2009: 86):

[17] El corpus reunió 35 libros de texto para séptimo grado o superior en diferentes idiomas (inglés, francés, alemán, portugués y español) que tenían secciones específicas dedicadas a las funciones.

[18] Leyes naturales, relación causal, relaciones construidas, relaciones descriptivas y reducción de datos (Mesa, 2009, p. 11).

- **Reglas simbólicas (20%):** tareas elementales que cumplen un propósito de familiarización, que pueden inducir a lo que antes se hizo referencia como concepciones álgebra-gráfica.
- **Pares ordenados (14%):** tareas que requieren decidir si un par ordenado dado, en el contexto de una situación matemática o no matemática, es o no una función. Las representaciones son tablas, conjuntos de pares, diagramas o verbales.
- **Datos sociales (7%):** tarea que requiere apreciar una relación en un contexto de la vida real que proporciona un significado y controles basados en el contenido. No se usan representaciones algebraicas de una función.
- **Fenómenos físicos (4%):** tareas basadas en el modelado de un tiempo o una relación de causa y efecto. Los controles se basan en el contenido y el contexto (matemática o física). No se usan representaciones algebraicas de una función.
- **Control de imagen (3%):** tareas en un contexto proporcionado por un diagrama geométrico, un gráfico, un patrón numérico o un patrón de figura. Las pocas representaciones simbólicas corresponden a casos donde los símbolos "actúan como etiqueta" (como en la fórmula para el área de un rectángulo).

El tipo de tareas de reglas simbólicas está presente en el 71% de los libros de texto, pero representan sólo el 20% del corpus, lo que significa que mucha de la práctica de los estudiantes se dedica a tareas en las que la función aparece como una relación de dependencia entre dos cantidades. Predominan tablas, conjuntos de pares, diagramas o representaciones verbales, y aparte del tipo de tareas de pares ordenados, los controles se basan en el contexto o incluso en el contrato didáctico (por ejemplo, Mesa, 2009: 65). El peso del contexto en los controles favorecidos por las tareas, en lugar de los controles matemáticos orientados al proceso, abre la posibilidad para el desarrollo de diferentes tipos de concepciones de la función que de hecho fragmentan la potencial comprensión de los estudiantes.

El equilibrio entre los diferentes tipos de tareas discrimina cuatro grupos: libros de texto orientados a reglas (50% de las tareas son de tipo de aplicar regla simbólica), libros de texto orientados a formalización (78% de las tareas son de tipo simbólico u ordenado), orientados al resumen con aplicación (incluye al menos uno de los tipos contextuales de tareas), y orientados a la aplicación (sin reglas simbólicas ni tareas ordenadas). Es notable que el clúster orientado a los resúmenes contenga sólo la mitad de los libros de texto; la otra mitad incluye el clúster orientado a las aplicaciones y un grupo orientado a las reglas/resúmenes. Además, Vilma Mesa advierte que “los reactivos TIMSS, como conjunto, no comparten las mismas características que los que presentan los libros de texto” (Mesa, 2009: 99).

cK¢ funcionó como un eficiente marco para evidenciar la diversidad de las propuestas y comprensiones de función potencialmente promovidas por los currículos. Sin embargo, en tal estudio su rol es heurístico puesto que los libros de texto son sólo indicadores de cómo podría implementarse en los planes de estudio. La vida real en el aula, enmarcada por la propia comprensión del maestro acerca de la función, puede dar lugar a una realidad diferente a la que muestra el análisis. Pero ésta es una base sólida desde la cual avanzar.

Las concepciones promovidas por los diferentes tipos de tareas son legítimas en el contexto de las prácticas, tal como los libros de texto sugieren que podrían ser. Sin embargo, Vilma Mesa nos recuerda (2009: 114-115) que las concepciones que ha identificado han sido reportadas por la investigación sobre la comprensión de la función de los docentes, lo que refuerza su legitimidad. En otras palabras, cualquiera de estas concepciones es correcta en la medida en que permiten realizar tareas y resolver problemas en el contexto del aula, y satisfacen tanto al plan de estudios como a las expectativas y requerimientos de los docentes. Incluso si algunos de ellos pueden convertirse en obstáculos para superar y progresar en la comprensión de la función, todos contribuyen a su significado. Así pues, pueden considerarse como facetas diferentes del concepto, cada una de ellas desde una perspectiva epistémica y pragmática.

Concepción, conocimiento y concepto

El número de concepciones de la función desde una perspectiva histórica, didáctica y epistémica plantea la cuestión de sus relaciones desde una perspectiva pragmática (por ejemplo, eficiencia, alcance de uso) y desde una perspectiva matemática (por ejemplo, precisión, generalidad). Entre estas preguntas, una es de especial importancia: la comprensión de las concepciones de los alumnos requiere su interpretación desde la perspectiva de la concepción del observador (por ejemplo, profesor, investigador o evaluador). En particular, es importante tener en cuenta el hecho de que la generalidad o la falsedad de una concepción no es una propiedad intrínseca, sino un tipo de relación que mantiene con otra concepción. El caso de Cauchy del que se informó al principio de este artículo ilustra cómo esta relación es susceptible a la traducción de un sistema de representación a otro. Esto a menudo se oculta por el hecho de que los profesores o investigadores tienden a evaluar las producciones y actividades de los alumnos desde la perspectiva de su propia comprensión.

La comparación de las concepciones asume la mayoría de las veces la hipótesis oculta de que se trata del mismo contenido matemático, a lo que se hará referencia como el objeto de la concepción. La noción de objeto matemático es difícil debido a la inmaterialidad del contenido matemático; el problema ontológico. Esta dificultad se puede superar dentro del modelo tomando el postulado de Vergnaud como un principio básico: los problemas son fuentes y criterios de conocimiento (1981: 220). Entonces, que C y C′ sean dos concepciones y CR la concepción asociada al observador, de modo que exista un mapeo de representación f: L → LR y f': L′ → LR. Entonces:

[C y C′ tienen el mismo objeto con respecto a CR si para todo p de P existe p′ de P′ tal que f (p) = f' (p′), y recíprocamente].

En algún punto, las concepciones tienen el mismo objeto si sus esferas de práctica se pueden combinar desde el punto de vista de otra concepción que, en este caso, es la concepción del investigador. El hecho de que dos concepciones tengan el mismo objeto no significa que tengan otro tipo de relación (por ejemplo, una es falsa con respecto a la otra, o más general, o parcial). Puede darse el caso de que algunos problemas de P′ (resp. P) no puedan expresarse con L (resp. L′); y si lo son, los problemas traducidos pueden no ser parte de la esfera de práctica de la otra concepción. La relación “Tener el mismo objeto con respecto a una concepción determinada CR” es una relación de equivalencia entre las concepciones con respecto a CR.

Admitamos ahora la existencia de una concepción Cμ más general que cualquier otra concepción con la que se pueda comparar. Esto parece ser un reclamo puramente teórico y abstracto. En realidad, corresponde más o menos a una concepción de las matemáticas tal como surge de la práctica de los matemáticos profesionales. En nuestro trabajo diario como investigadores o profesores, aunque en general se deja implícito, Cμ toma la forma de una concepción de referencia que creemos que comparten los educadores de matemáticas de la comunidad investigadora. De ahí las siguientes proposiciones:

- Un “concepto” es el conjunto de todas las concepciones que tienen el mismo objeto con respecto a Cμ. Es decir, una concepción es la actualización de un concepto por una pareja (sujeto/situación).

Esta definición está alineada con la idea de que un concepto matemático no se reduce al texto de su definición formal, sino que es el producto de su historia y de todas las prácticas en diferentes comunidades. De hecho, no hay ningún agente que tenga el concepto ni forma de garantizar que podamos enumerar una lista completa de estas concepciones. Entonces, una última definición permitirá reducir la distancia entre esta definición abstracta y las necesidades que tenemos para tener un modelo práctico:

- Un “conocimiento” es cualquier subconjunto de un concepto que puede asociarse a un substractus cognitivo o a una comunidad. Es decir, una concepción es la actualización de un conocimiento por una situación; caracteriza el sistema (sujeto/milieu en una situación).

Dado un concepto, por ejemplo, el concepto de función discutido en este documento, varias concepciones diferentes se podrían formar del conocimiento de este concepto asociado a un individuo, cada una de las cuales se obtuvo de acuerdo con las diversas características contextuales o características del problema. De la misma manera, puede hacerse referencia al conocimiento de una clase de matemáticas que se refiere a las diferentes concepciones que probablemente se obtengan en esta clase. Eventualmente, puede hacerse referencia al conocimiento de la función del siglo XVIII. Estas definiciones de conocimiento y concepto proporcionan un marco que preserva la integridad epistémica de los estudiantes a pesar de las contradicciones y la variabilidad en todas las situaciones.

El nombre cK¢ proviene de los nombres de los tres pilares del modelo: concepción, conocimiento, concepto. La palabra “conocimiento” se guarda para nombrar una concepción que es identificada y formalizada por una institución (que en este caso es un cuerpo de un sistema educativo).

Conclusión y comentarios adicionales

El modelo cK¢ propone un marco para “modelar alumnos”. Ha sido diseñado para asumir el desafío histórico de proporcionar un modelo que tenga una relevancia epistémica para unir la investigación en educación matemática y la investigación en tecnología educativa. Por un lado, tenía el objetivo de ofrecer un marco común para expresar la base de conocimientos sobre la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los alumnos; por otro, pretendía responder a la necesidad de representaciones tanto comprensibles para los investigadores en educación matemática como asequibles en términos computacionales. El formalismo que se confronta debería mejorar la forma en que se informa el diseño de entornos de aprendizaje mejorados mediante la tecnología, complementando descripciones casi siempre disponibles en lenguaje natural sin una estructura narrativa estandarizada.

La investigación en educación matemática desarrolla de manera conjunta teorías y experimentaciones; en este contexto, los modelos pueden servir como mediadores entre teorías de las cuales requieren una comprensión articulada y precisa, y experimentos de los cuales enmarcan el diseño e impulsan la recolección de datos. Sin embargo, tanto las teorías como los experimentos plantean problemas difíciles. Por el lado de las teorías, se tiene que lidiar con un discurso complejo que rara vez hace explícitos todos los detalles y, por lo tanto, da lugar a interpretaciones no unívocas. Por el lado de los experimentos, la implementación práctica es siempre más rica y compleja de lo que el diseño de modelos anticipa. Además, en el caso de las concepciones, se enfrentan problemas que Toulmin notó al proponer un modelo para la argumentación: distinguir operadores de los controles no es absoluto (por ejemplo, los teoremas pueden activarse como herramientas o predicados), y los controles son con más frecuencia no implícitos. Tales dificultades requieren más investigaciones teóricas y metodológicas.

Contra lo que la historia nos enseña sobre la evolución de este concepto, el caso de la función evidencia la complejidad de dar sentido a la comprensión de los estudiantes. Y, de hecho, seríamos muy cautelosos con la idea de que el "estudio histórico de la noción de función junto con su análisis epistemológico nos ayudó a analizar el comportamiento matemático del estudiante" (Sierpinska, 1989: 2). Está claro que el análisis epistemológico es una herramienta esencial, pero el análisis histórico puede inducir una visión de la noción de función que oculta el papel desempeñado por el contexto escolar moderno. El análisis histórico podría delinear la noción desde el punto de vista matemático, pero desde el punto de vista epistémico debemos estar preparados para ver las cosas de una manera bastante diferente. En realidad, Sierpinska reconoció que "las concepciones de los estudiantes no son imágenes fieles de la concepción histórica correspondiente" (Sierpinska, 1989: 19). Por ejemplo, una de las preguntas que se deben considerar es la de saber cuál podría ser la diferencia esencial entre las concepciones algebraicas de los estudiantes y las concepciones históricas "correspondientes". También es sorprendente que las tablas desempeñen un papel muy limitado, si es que tienen alguno, en las situaciones que involucran funciones: si están presentes, es en relación con situaciones concretas en las que el objetivo es menos analizar una función que analizar datos (la función es vista como una herramienta para el análisis de datos). Al inicio basado en la Teoría de la Situación Didáctica y la Teoría del Campo Conceptual, el marco de modelización cK¢ no está restringido a ellas. Para el propósito de su desarrollo y con el fin de mejorar su eficiencia, es necesario integrar otras teorías para fortalecer sus componentes (por ejemplo, representación, sistema de control). Pero cK¢ tiene otras promesas: facilita la construcción de un puente entre el conocimiento y la prueba, la construcción de un vínculo entre el control y la prueba, lo que a su vez facilita la comprensión de la relación entre la argumentación y la prueba.

Referencias

Arsac, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme*. Paris: Hermann.

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 10(2/3), 241-285.

Ayalon, M., Watson, A., Lerman, S. (2017). Students' Conceptualizations of Function Revealed through Definitions and Examples. *Research in Mathematics Education* 19(1), 1-19.

Balacheff, N., Gaudin, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. *Research in Collegiate Mathematics Education* 16, 183-211.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example. In: Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O., Valero, P. (eds.). *Meaning in Mathematics Education*, 61-81. Mathematics Education Library, vol. 37. Springer, Boston, MA.

Bourdieu, P. (1990). *The Logic of Practice*. Stanford, CA: Stanford University Press.

Bradley, R. E. & Sandifer, C. E. (2009). *Cauchy's Cours d'Analyse. An Annotated Translation*. New York: Springer.

Breidenbach, D., Dubinsky, H. J., Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics* 23, 247-285.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Confrey, J. (1990). A Review of the Research on Students' Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. In: Courtney, C. (ed.). *Review of research in education*. American Educational Research Association 16, 3-56.

Crockett, T. (1999). Continuity in Leibniz's Mature Metaphysics. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition* Vol. 94, No. 1/2, Selected Papers Presented at the American Philosophical Association Pacific Division Meeting 1998 (May, 1999), 119-138.

DeMarois, P., Tall, D. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. In: *Proceedings of PME* 20, Valencia, vol. 2, 297-304.

Dhombres, J. (1988). Un Texte d'Euler sur les Fonctions Continues et les Fonctions Discontinues, Véritable Programme d'Organisation de l'Analyse au 18ième Siècle. *Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*. Paris: Université Pierre et Marie Curie.

Dubinsky, E., Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In: Dubinsky, E., Harel, G. (eds.). *The concept of Function*. (*MAA Notes*, vol. 25, 195-213). Mathematical Association of America.

Edwards, C. H. Jr. (1979). *The Historical Development of Calculus*. Berlin: Springer-Verlag.

Gaudin, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de function*. PhD thesis. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Harel, G., Dubinsky, E. (eds.) (1992). The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy. (*MAA notes* volume 25). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C., Noss, R. (1994). *Messing up. Micromath* 10(1), 14-16.

Jones, K. (1999). Students Interpretations of a Dynamic Geometry Environment. In: Schwank, I. (ed.). *European Research in Mathematics Education*. Osnabruck, Germany: Forschungsinstitut fur Mathematikdidaktik. 245-258.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: a Brief Survey. *The College Mathematics Journal* 20(4), 282-300.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Mesa, V. (2009). *Conceptions of Function in Textbooks from Eighteen Countries*. Saarbrucken: VDM Verlag Dr Muller. cK¢, a model to understand learner's understanding - Discussing the case of functions 23.

Monna, A. F. (1972). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences* 9(1), 57-84.

Rabardel, P. (1995). Qu'est-ce qu'un instrument? *Les dossiers de l'Ingénierie* éducative 19, 61-65.

Resnick, L., Collins, A. (1994). *Cognition and Learning*. Learning Research and Development Center. University of Pittsburgh. (Pre-print).

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification. The Case of Function. In: Harel G., Dubinsky Ed. (eds.). *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy.* (*MAA notes* volume 25, 59-84). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Sierpinska, A. (1989). *On 15-17 Years Old Students' Conceptions of Functions, Iteration of Functions and Attractive Fixed Points*. Institut de Mathématiques, preprint 454. Varsovie: Académie des Sciences de Pologne.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. In: Harel G., Dubinsky, E. (eds.). *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy*. (*MAA notes* volume 25, 25-58). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics*. Vol. II, esp. chap X. New York: Dover Publications Inc.

Stewart, J. (1994). Un système cognitif sans neurones: les capacités d'adaptation, d'apprentissage et de mémoire du système immunitaire. *Intellectika* 18, 15-43.

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education, 1* (*Issues in Mathematics Education,* Vol. 4, 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Trouche, L. (1996). *Masques*. Repères IREM 24, 43-64.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 2(2), 215-231.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* 10(2/3), 133-169.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development* 52, 83-94.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14, 293-305.

Vinner, S. (1987). Continuous Functions-Images and Reasoning in College Students. In: Bergeron, J. C., Herscovics, N., Kieran, C. (eds.). *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, 177-183). Montréal, Canada: Université de Montréal.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics education. In: Harel, G, Dubinsky, E. (eds.). *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. (*MAA notes* volume 25, 195-213). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Vinner, S., Dreyfus, T. (1989). Images and Definition for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20(4), 356-366.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the19th Century. *Archives for History of Exact Sciences* 16(1), 37-85.

CAPÍTULO 3

El teorema de Pitágoras, pruebas sin palabras, apoyadas por la tecnología

Alfinio Flores Peñafiel[1]

Resumen

Se describe el uso de páginas interactivas relacionadas con el teorema de Pitágoras, creadas por el autor y disponibles en línea (https://www.geogebra.org/m/UEQj5gJE). Estas páginas sugieren demostraciones del tipo llamado "pruebas sin palabras". Los alumnos pueden demostrar el teorema de Pitágoras por partición y recomposición. En los primeros cuatro ejemplos las piezas se giran y en los siguientes tres ejemplos las piezas se trasladan. En cada actividad se dan al maestro sugerencias para guiar a los alumnos a fin de que expresen con sus propias palabras las relaciones geométricas que observan, conjeturen, den evidencia que apoye sus conjeturas, hagan explícitas las relaciones entre los elementos de las figuras y las partes de la demostración, y presenten argumentos convincentes para justificar las conjeturas.

Palabras clave: teorema de Pitágoras, demostración sin palabras, didáctica, conjeturas.

[1] University of Delaware, e-mail: alfinio@udel.edu

Abstract

We describe the use of interactive pages related to the Pythagorean theorem, made by the autor, and available online (https://www.geogebra.org/m/UEQj5gJE). These pages suggest “proofs without words”. Students can prove the theorem using partitions and re-compositions. In the first four examples the pieces are rotated and in the next three examples the pieces are translated. For each activity we give suggestions of how the teacher can guide students to express in their own words the geometrical relations they observe, conjecture, provide evidence to support their conjectures, make explicit the relation among the elements of the figures and parts of the demonstration, and provide convincing arguments to justify their conjectures.

Keywords: Pythagorean Theorem, Demonstration without Words, Didactics, Conjectures.

Con el programa de geometría dinámica *GeoGebra* (International GeoGebra Institute, 2018) se pueden crear páginas interactivas para los alumnos. En las páginas interactivas los alumnos pueden girar o trasladar elementos de figuras geométricas y observar qué relaciones entre las partes se mantienen constantes y cuáles cambian. GeoGebra, además de ser gratuito, cuenta con un sitio en internet donde estas páginas interactivas se pueden exhibir y compartir para que estén al alcance de todos.

En este capítulo se describe cómo los alumnos pueden usar algunas páginas interactivas relacionadas con el teorema de Pitágoras, creadas por el autor, que están disponibles en línea (Flores Peñafiel, 2017, https://www.geogebra.org/m/UEQj5gJE). En estas páginas (donde las figuras aparecen a todo color) los alumnos pueden demostrar el teorema de Pitágoras por descomposición y recomposición. Es decir, una figura se corta en piezas y luego las piezas se reacomodan por medio de rotaciones y traslaciones para formar otra figura. De esta de manera, la igualdad de áreas entre la figura inicial y la figura final queda clara pues las piezas utilizadas son las mismas, y las áreas de las piezas no cambian al trasladarlas o rotarlas. En los primeros cuatro ejemplos las piezas se giran y en los siguientes tres ejemplos las piezas se trasladan. Estas demostraciones son del tipo llamado “pruebas sin palabras”.

Desde luego, interactuar con las figuras dinámicas para ver cómo se relacionan las diferentes áreas, constituye sólo el primer paso. Los alumnos deben ser guiados para expresar con sus propias palabras las relaciones geométricas que observan, conjeturar, dar evidencia que apoye sus conjeturas, y presentar argumentos convincentes para justificarlas. El maestro puede guiar a los alumnos para hacer explícitas las relaciones entre los elementos de las figuras y las partes de la demostración. En este capítulo la longitud de la hipotenusa se denota como c, y las longitudes de los catetos como a y b. Se supone $b \geq a$, y se llama b al cateto mayor.

Figuras con bisagras

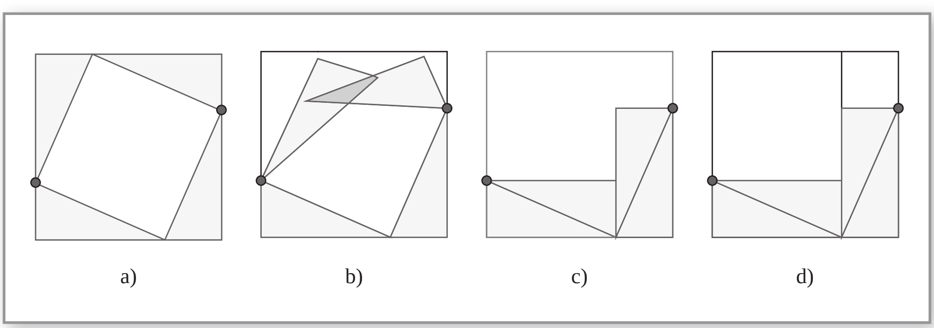
En las primeras cuatro páginas los alumnos pueden girar partes de una figura alrededor de puntos fijos, que se llamarán bisagras, para formar otras figuras con la misma área.

Página 1 Cuatro triángulos bisagras

Esta página muestra primero el cuadrado grande compuesto por cuatro triángulos rectángulos congruentes entre sí y el cuadrado sobre la hipotenusa (figura 3-1a). Los alumnos pueden girar dos de los triángulos alrededor de las bisagras rojas. El cuadrado grande queda ahora formado por los mismos cuatro triángulos y los cuadrados sobre los catetos, de modo que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa. Las figuras usadas en esta página interactiva son semejantes a las usadas por el matemático Bhaskara en India en el siglo XII.

Los alumnos pueden justificar de manera más explícita por qué esta demostración es válida. Al ser congruentes los cuatro triángulos rectángulos, al acomodarlos como se ilustra en la figura 3-1a, por una parte, dos lados de dos triángulos forman una recta, y por otra parte se forma un ángulo recto, ya que se usan dos ángulos complementarios. De este modo la figura completa es un cuadrado cuyo lado es $a + b$, que contiene un cuadrado de lado c. Los alumnos

Figura 3-1 Cuatro triángulos y los cuadrados de los lados.



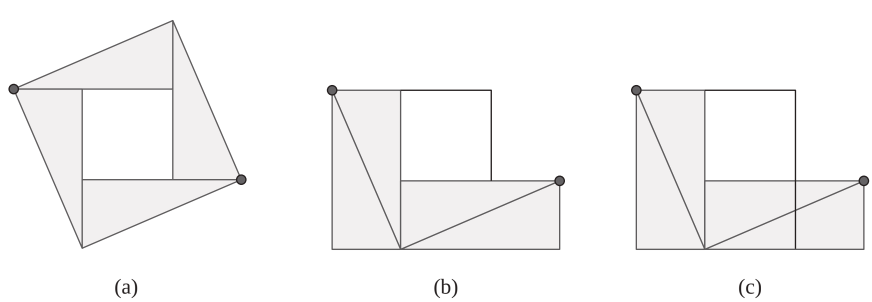
pueden expresar el área del cuadrado grande, por una parte, como $(a + b)^2$, y por otra como la suma de las áreas de los cuatro triángulos más el área del cuadrado de la hipotenusa. En términos algebraicos la igualdad se puede expresar como $(a + b)^2 = 4 \times ab/2 + c^2$. Si desarrollan ambos lados y simplifican, los alumnos pueden obtener la igualdad $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, de donde $a^2 + b^2 = c^2$.

Página 2 Cuatro triángulos dos bisagras

Esta página (figura 3-2) muestra primero cuatro triángulos rectángulos congruentes que junto con un cuadrado de lado $b - a$ forman el cuadrado sobre la hipotenusa c^2 (figura 3-2a). Los alumnos pueden girar dos de los triángulos para formar los cuadrados sobre los catetos, a^2 y b^2 (figura 3-2c), de modo que $a^2 + b^2 = c^2$. Para llegar a este resultado de otra forma, los alumnos pueden expresar el área del cuadrado sobre la hipotenusa (figura 3-2a) también como la suma del pequeño cuadrado de lado $b - a$ y los cuatro triángulos rectángulos, para obtener la igualdad $c^2 = (b - a)^2 + 4 \times ab/2$. Al expandir y simplificar el lado derecho de la ecuación se obtiene la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

El cuadrado inicial es semejante a las figuras usadas en la antigua China relacionadas con el teorema de Pitágoras (Swetz & Kao, 1977). El libro antiguo *Zhou bi suan jing* contiene ejemplos para calcular lados de triángulos rectángulos que muestran que el teorema era conocido y utilizado en China desde los tiempos antiguos (Cullen, 1996). Zhou se refiere a una antigua dinastía china (1046-771 a.C.), por lo que es posible que los matemáticos chinos hayan conocido el teorema siglos antes de Pitágoras.

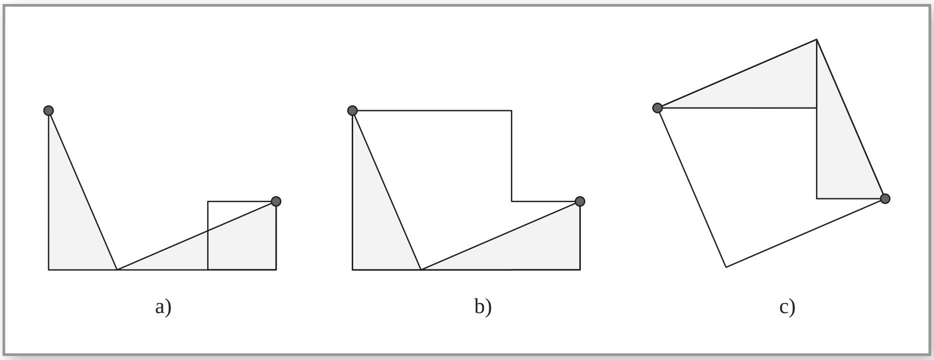
Figura 3-2 Cuadrado sobre la hipotenusa y cuadrados sobre los catetos.



Página 3 Dos triángulos bisagras

En esta página (figura 3-3) se muestran dos triángulos rectángulos congruentes entre sí y un polígono irregular que junto con los triángulos forma los cuadrados de los catetos. Cuando los alumnos giran los dos triángulos 90°, se forma el cuadrado sobre la hipotenusa. Los alumnos pueden ver que ángulos complementarios de dos triángulos forman una recta al exterior y un ángulo recto al interior en la posición inicial. Después de rotar las figuras, los ángulos complementarios se juntan para formar un ángulo recto. Asimismo, los alumnos pueden ver que los otros dos ángulos de la figura final efectivamente son también ángulos rectos.

Figura 3-3 Dos triángulos se giran.



Página 4 Dudeney bisagras

Esta página (figura 3-4) muestra primero el cuadrado sobre el cateto mayor, dividido en cuatro cuadriláteros congruentes. Los alumnos pueden girar tres de estos cuadriláteros moviendo el control deslizante (figura 3-5). Al final de la rotación de 180° los cuatro cuadriláteros, más el cuadrado sobre el cateto menor, forman el cuadrado sobre la hipotenusa (figura 3-6).

Figura 3-4 Descomposición del cuadrado sobre el cateto mayor.

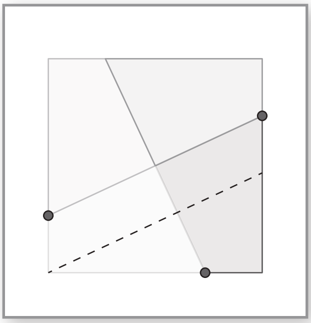


Figura 3-5 Tres de las partes giran.

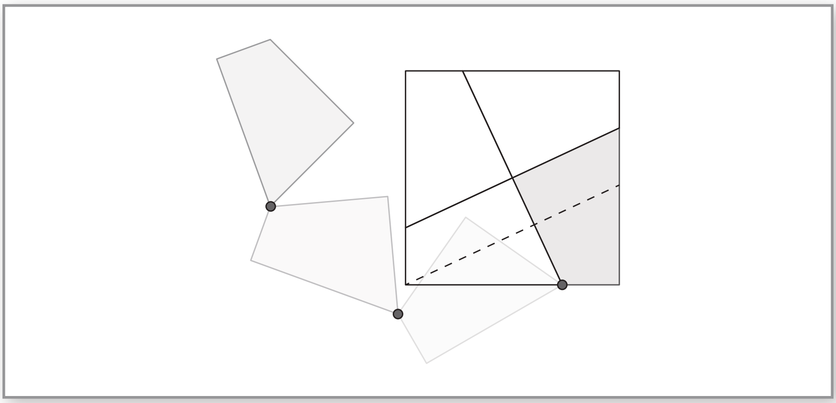
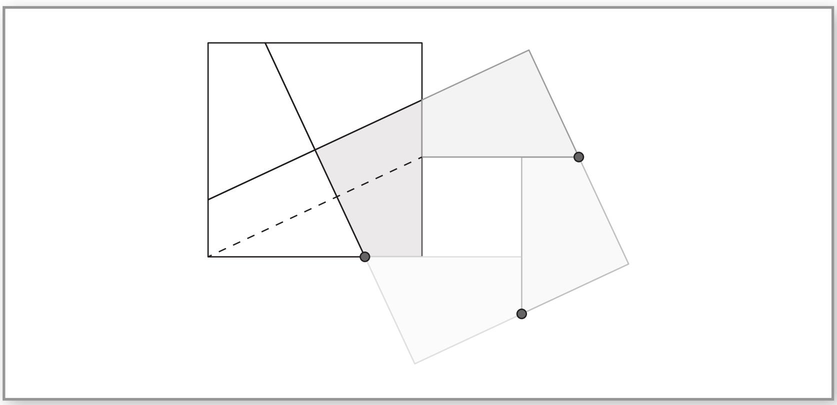
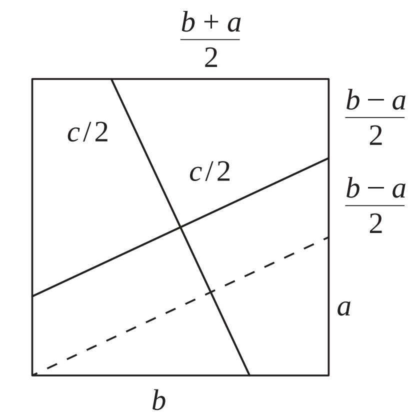


Figura 3-6 Descomposición del cuadrado sobre la hipotenusa.



Al usar las medidas de los cuatro cuadrángulos que forman b^2, los alumnos pueden verificar que los cuadriláteros reacomodados, más el cuadrado vacío, forman el cuadrado de la hipotenusa. Las medidas se pueden derivar de la forma en que se dividió b^2, mediante dos segmentos de longitud c, perpendiculares entre sí, que pasan por el centro del cuadrado. Uno de estos segmentos es paralelo a la hipotenusa indicada por el segmento punteado (figura 3-7) el cual corta el lado del cuadrado en dos partes de longitud a y $b - a$. El segmento por el centro del cuadrado corta el segmento de longitud $b - a$ en dos partes iguales (una rotación de 180° y el hecho de que lados opuestos en un paralelogramo son congruentes ayudan a ver esto). Por lo tanto, los lados de cada cuadriláte-

Figura 3-7 La descomposición de b^2.



ro son $c/2$, $c/2$, $\frac{a+b}{2}$ y $\frac{b-a}{2}$. Cada cuadrilátero tiene dos ángulos opuestos que son rectos, por lo que los otros dos ángulos opuestos son suplementarios. Al colocar los cuadriláteros como sugiere la figura 3-6, los lados de longitud $c/2$ de dos cuadriláteros forman una línea recta ya que los ángulos son suplementarios. De esta manera se forma un cuadrado de lado c, y los otros lados de los cuadriláteros al interior quedan perpendiculares, por lo que se forma un pequeño cuadrado. La diferencia entre el lado de longitud $\frac{a+b}{2}$ y el lado de longitud $\frac{b-a}{2}$ es precisamente a, por lo que el cuadrado vacío es en efecto a^2.

La razón por la que se asocia el nombre de Dudeney con el uso de bisagras en esta partición del cuadrado sobre el cateto mayor es que la idea de usar bisagras para descomposiciones y recomposiciones de polígonos es de Dudeney (1919). Sin embargo, autores anteriores a Dudeney usaron esta partición de manera estática para demostrar el teorema (Loomis, 1940: 104-105).

Los alumnos también pueden usar figuras con bisagras en otros temas. Por ejemplo, pueden establecer conexiones entre las fórmulas para las áreas de triángulos, rectángulos, paralelogramos, trapecios, cometas y polígonos regulares (Flores, 2009), así como interactuar con adoquinados con bisagras para ver de manera dinámica transformaciones entre diferentes formas de adoquinar el plano con polígonos (Flores, 2017).

Recomposición por traslaciones de piezas

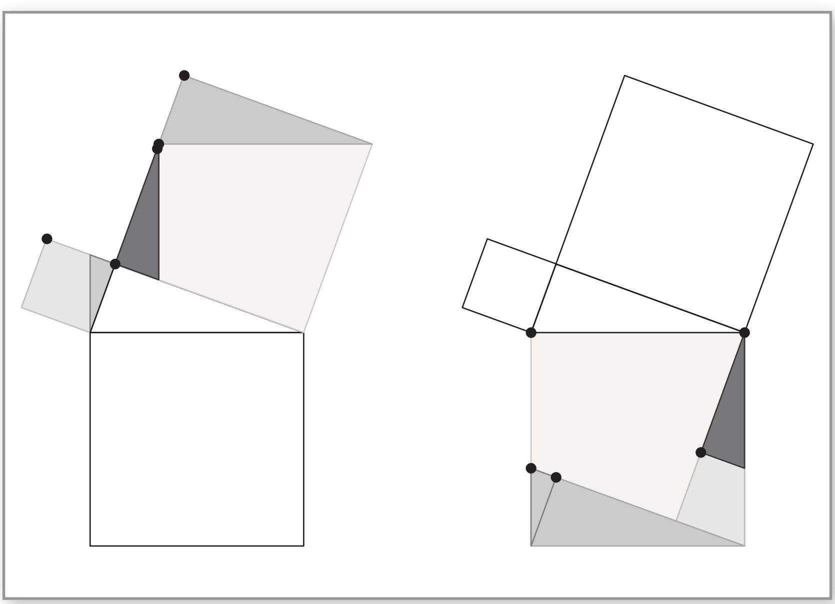
En los siguientes tres ejemplos, los alumnos trasladan figuras geométricas para llenar contornos.

Página 5 Pitágoras cinco piezas

En esta página los cuadrados sobre los catetos están formados por cinco piezas de colores (diferentes tonos grises en la figura 3-8). Los alumnos trasladan las piezas para llenar el cuadrado sobre la hipotenusa.

Los alumnos pueden darse cuenta de que, en esta descomposición de los cuadrados de los catetos por medio de dos segmentos perpendiculares a la hipotenusa, y un segmento paralelo, se forman tres triángulos semejantes, uno de ellos congruente al triángulo original. El cateto mayor del triángulo azul (gris oscuro en la figura 3-8) es $b - a$, por lo que la hipotenusa de este triángulo es $c(b - a)/b$. El cateto mayor del triángulo morado (menor de los triángulos) es a, por lo que la hipotenusa es ac/b. La suma de estas dos hipotenusas es por tanto $(cb - ca + ca)/b = c$. De manera semejante, los alumnos pueden verificar que el cateto menor del triángulo azul (gris oscuro) es congruente con la base menor del trapecio turquesa (el menor de los trapecios en la figura 3-8). Como las

Figura 3-8 Reacomodando cinco piezas.

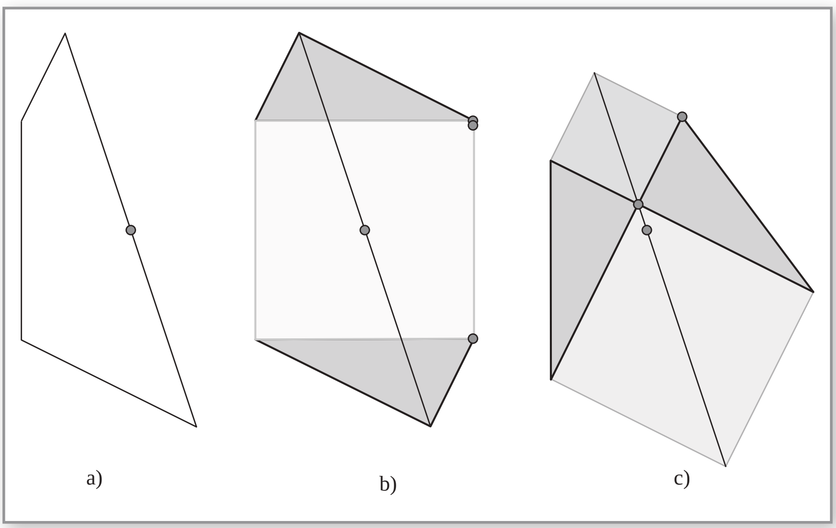


longitudes de lados de figuras que quedan juntas al reacomodarlas son iguales, y como los ángulos de distintas piezas que quedan juntas son complementarios o suplementarios, al trasladar las piezas se llena por completo el cuadrado de la hipotenusa del triángulo original con los cuatro cuadriláteros y el cuadrado del cateto menor.

Página 6 Hexágonos dinámicos

En esta página (figura 3-9) los alumnos trabajan con dos contornos hexagonales formados con dos cuadriláteros con la misma área. El primer hexágono, formado por un cuadrilátero y su imagen rotada 180° (figura 3-9b), puede ser llenado por el cuadrado sobre la hipotenusa y dos triángulos rectángulos. El otro hexágono está formado por el cuadrilátero original y su imagen reflejada (figura 3-9c). El segundo contorno hexagonal puede ser llenado por los cuadrados sobre los catetos y los dos triángulos rectángulos.

Figura 3-9 Demostración usando dos hexágonos.



Los alumnos pueden dar un argumento para probar que en efecto los dos hexágonos pueden ser llenados como sugiere la página interactiva. Se denota como α al ángulo opuesto al cateto menor, y como β al ángulo opuesto al cateto mayor. El cuadrilátero está construido de modo que dos de sus ángulos son $90° + \alpha$ y $90° + \beta$ y los otros dos ángulos son de 45° (figura 3-10).

Figura 3-10 Los elementos del cuadrilátero.

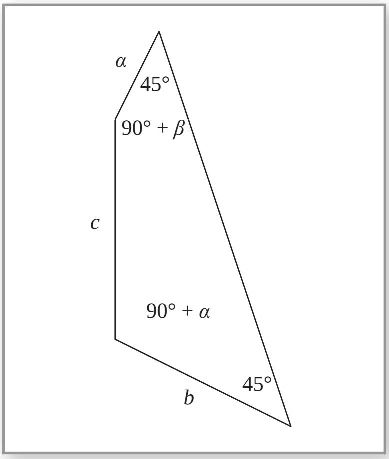
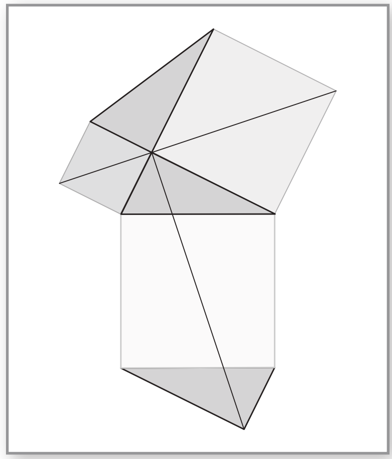


Figura 3-11 Dos hexágonos con la misma área.



Como $\alpha + \beta = 90°$, se tiene que los segmentos *b* y *a* son ortogonales. Al rotar un segmento 180° con respecto del punto medio del lado mayor del cuadrilátero se obtiene un segmento paralelo. Por tanto, la rotación del segmento *b* queda perpendicular al segmento *a* del cuadrilátero original, y la rotación del segmento *a* queda perpendicular al segmento *b*. De esta manera se forman dos triángulos rectángulos en el hexágono, y un cuadrado de lado *c* en medio (figura 3-9b). Por otra parte, cuando el cuadrilátero se refleja con el lado mayor como eje de simetría, dos ángulos de 45° forman un ángulo recto, y los alumnos pueden ver que es posible acomodar los cuadrados de los catetos y en medio dos triángulos rectángulos (figura 3-9c). Los dos hexágonos aparecen de manera natural al añadir dos triángulos a la configuración usual de cuadrados alrededor del triángulo rectángulo (figura 3-11).

Página 7 Pitágoras rompecabezas

Esta página contiene las figuras para armar de diferentes maneras el contorno de un rompecabezas (figura 3-12) y así establecer igualdades de áreas. Hall (1972) diseñó un rompecabezas de esta forma con piezas de materiales concretos.

En la figura 3-13a se muestra cómo los alumnos pueden llenar el contorno con el cuadrado rojo (cuadrado mayor), el cuadrado azul (cuadrado menor), el triángulo rectángulo y el cuadrado blanco (actividad 1). Si en vez de usar el cuadrado rojo de la figura 3-13a, usan el paralelogramo rojo (gris oscuro en la

Figura 3-12 El contorno y las piezas para llenarlo.

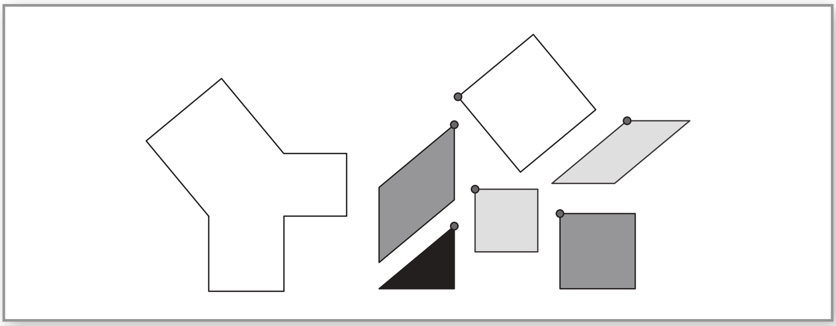


Figura 3-13 El contorno llenado de dos maneras diferentes.

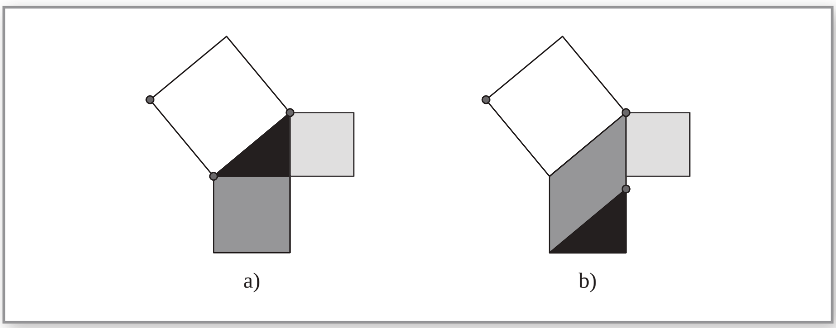
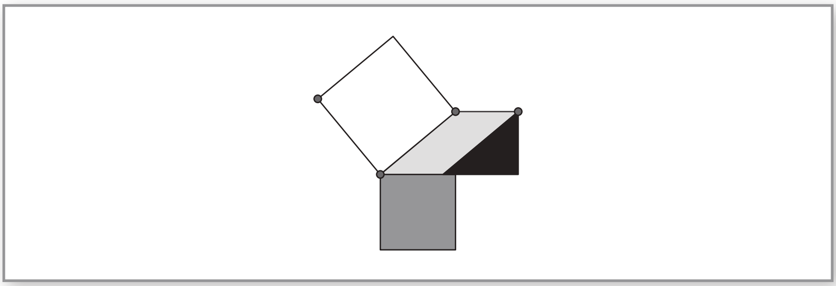


figura 3-13b), pueden llenar el contorno como se muestra en la figura 3-13b (actividad 2). Los alumnos pueden ver que las áreas del cuadrado rojo (a) y del paralelogramo rojo (b) son iguales, así como argumentar que el área total no ha cambiado, que las otras tres piezas son las mismas, y que sólo se sustituyó el cuadrado rojo por el paralelogramo rojo. O bien, pueden argumentar que el lado del cuadrado es congruente con la base del paralelogramo, y que la altura del paralelogramo es congruente con el lado, y que por tanto, usando la fórmula para el área del paralelogramo, se obtiene lo mismo que el área del cuadrado.

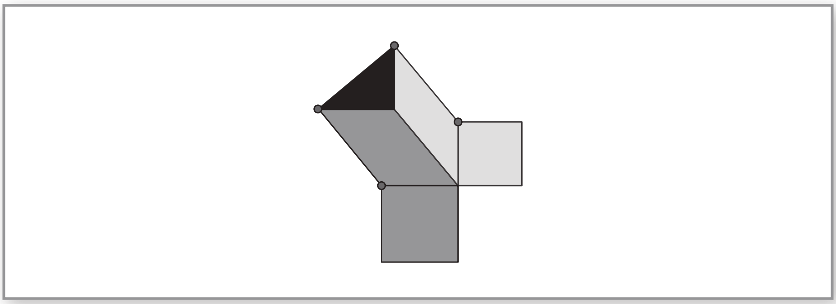
De manera semejante los alumnos pueden llenar el contorno como se muestra en la figura 3-14 (actividad 3), comparar con la actividad 1 y concluir que el área del cuadrado azul (cuadrado menor en la figura 3-12) es igual al área del paralelogramo azul (paralelogramo menor en la figura 3-12). De manera parecida, pueden argumentar que el área total no ha cambiado, que las otras tres piezas son las mismas, y que sólo se sustituyó el cuadrado azul por el paralelogramo azul.

Figura 3-14 Paralelogramo azul en vez de cuadrado azul (gris claro).



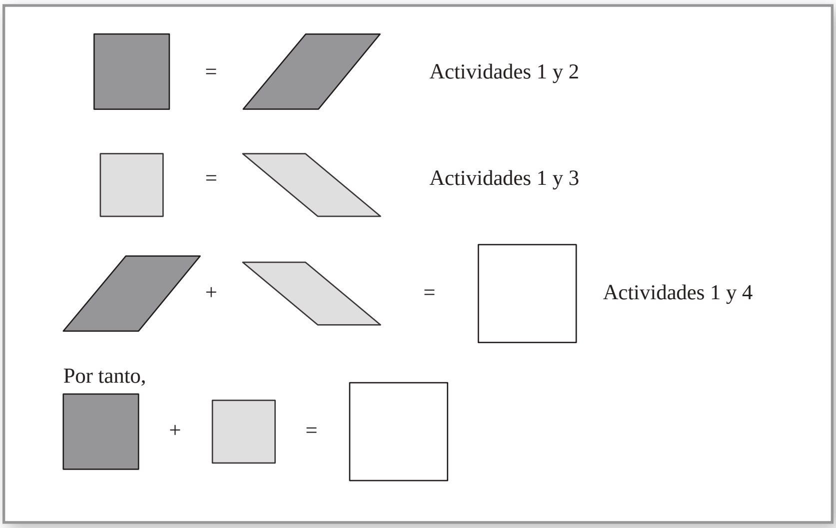
Al llenar el contorno como en la figura 3-15 (actividad 4) y comparar con la actividad 1, los alumnos pueden ver que la suma de las áreas de los dos paralelogramos es igual al área del cuadrado blanco. El argumento para justificar la igualdad es semejante: el total es el mismo, tres de las piezas son las mismas (dos cuadrados y un triángulo), y sólo se sustituyeron los dos paralelogramos por el cuadrado blanco.

Figura 3-15 Dos paralelogramos en vez del cuadrado sobre la hipotenusa.



Por último, los alumnos pueden aplicar el razonamiento deductivo mediante los resultados de actividades anteriores. Los alumnos han encontrado que las áreas del paralelogramo rojo y el cuadrado rojo son iguales (actividades 1 y 2); que las áreas del paralelogramo azul y el cuadrado azul son iguales (actividades 1 y 3), y que la suma de las áreas de los dos paralelogramos es igual al área del cuadrado blanco (actividades 1 y 4). Usando propiedades de la igualdad, tales como la transitividad, los alumnos pueden concluir que la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa. Algunos alumnos usan su propia notación y representación

Figura 3-16 Representación pictórica de un razonamiento deductivo.



gráfica para complementar su argumento verbal acerca de áreas iguales (figura 3-16). En esta notación el signo = se usa para indicar igualdad de áreas.

Página 8 Pitágoras Dirichlet

Esta página (figura 3-17) sugiere que la cuarta parte del cuadrado sobre la hipotenusa (punteado) puede ser cubierta por un cuadrado que es la cuarta parte

Figura 3-17 Un cuarto del cuadrado de la hipotenusa.

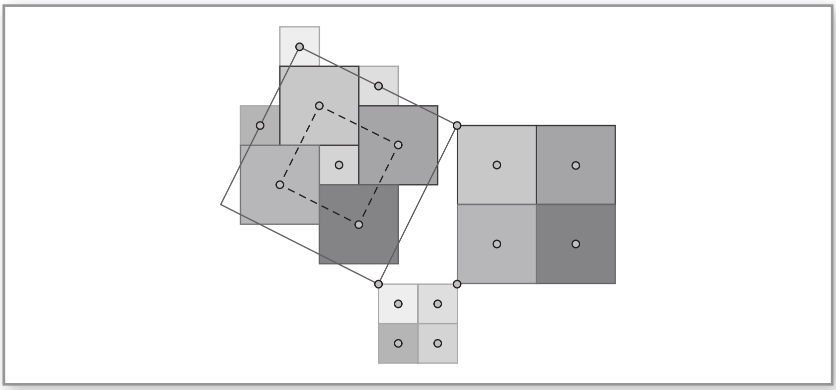
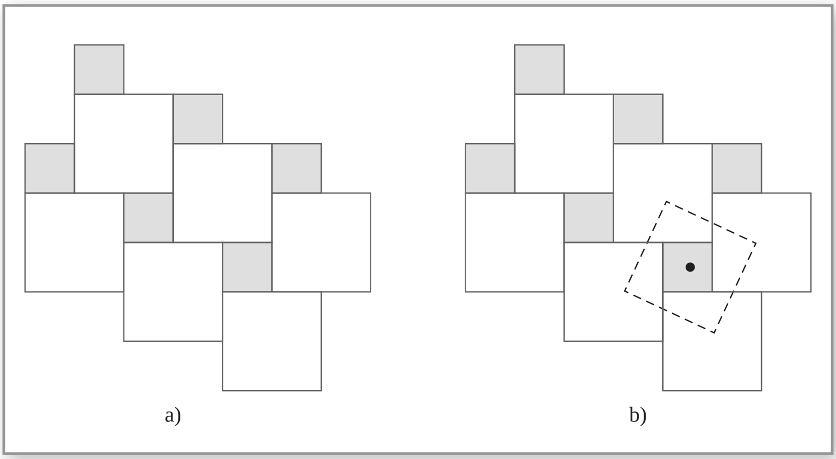


Figura 3-18 Cuadrados de dos tamaños llenan el plano.



del cuadrado del cateto menor, y cuatro fragmentos que forman la cuarta parte del cuadrado del otro cateto. El cuadrado punteado queda partido igual que en el caso de la figura 3-6. Los alumnos pueden cambiar la forma del triángulo rectángulo para ver que la relación entre los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa es cierta para cualquier triángulo rectángulo.

El patrón geométrico formado por cuadrados de dos diferentes tamaños que cubren una superficie (figura 3-18a), es parecido a las configuraciones que diseñan los tejedores de esteras en Angola, y que fueron utilizadas por Gerdes para demostrar el teorema de Pitágoras. En uno de sus ejemplos, Gerdes (1999: 77) usa el hecho de que un adoquinado del plano cuya región fundamental está formada por dos cuadrados de diferentes tamaños (cuyos lados corresponden a los catetos de un triángulo rectángulo), la región de Dirichlet correspondiente a la retícula formada por los centros de los cuadrados más pequeños es un cuadrado que corresponde al cuadrado de la hipotenusa (figura 3-18b). La región de Dirichlet de un punto de la retícula es el conjunto de puntos en el plano que están más cerca de este punto que de cualquier otro punto de la retícula (Coxeter, 1969). Ésta es la razón por la que se usa el nombre de Dirichlet para esta página.

Comentarios finales

Las páginas interactivas ofrecen a los alumnos la oportunidad de tener un papel más activo al explorar por qué para un triángulo rectángulo con catetos a y b, y con hipotenusa c, se cumple la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Los alumnos pueden experimentar en línea y convencerse de manera visual acerca de la igualdad de las áreas de las figuras formadas por las partes movibles antes de moverlas y después de reacomodarlas. Los alumnos tienen la posibilidad de hacer explícitas sus conjeturas, apoyarlas con evidencia empírica, y con la guía del maestro, justificarlas de maneras más formales usando razonamientos deductivos. Ver diferentes argumentos para el mismo teorema también da a los alumnos la oportunidad de desarrollar una mejor comprensión. Como dice Minsky, "uno no entiende algo hasta que lo aprende de más de una manera" (citado por Herold, 2005: 101). El teorema de Pitágoras revela una relación profunda entre una expresión numérica y la forma de un triángulo, y es uno de los teoremas fundamentales de la geometría euclidiana. Demos a los alumnos la oportunidad de aprenderlo de muchas maneras.

Referencias

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry* (2a ed.). New York, NY: Wiley.

Cullen, Christopher (1996). *Astronomy and mathematics in ancient China: The Zhou bi suan jing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dudeney, Henry E. (1919). *The Canterbury puzzles* (2a ed.). Edinburgh: Thomas Nelson and sons. http://www.gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm

Flores, A. (2009). Area Formulas With Hinged Figures. En T. V. Craine (ed.), *Understanding geometry for a changing world (297-313). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.*

__________ (2017). Hinged Tilings. *North American GeoGebra Journal*, 6(1), 1-11.

Flores Peñafiel, A. (2017). Particiones dinámicas para el teorema de Pitágoras. https://www.geogebra.org/m/UEQj5gJE

Gerdes, Paulus (1999). *Geometry from Africa.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Hall, Gary D. (1972). *A Pythagorean Puzzle*. Arithmetic Teacher, 19(1), 67-70.

Herold, Rebecca (2005). *Managing an Information Security and Privacy Awareness and Training Program*. Boca Raton, FL: CRC Press.

International GeoGebra Institute (2018). *GeoGebra* [programa interactivo]. Consultado en https://www.geogebra.org/

Loomis, Elisha S. (1968). *The Pythagorean Proposition*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Swetz, F. J. & Kao, T. I. (1977). *Was Pythagoras Chinese? University Park, PA: Pennsylvania State University.*

CAPÍTULO 4

Redefinición del concepto de recta tangente y secante

Una definición geométrica e intuitiva de recta tangente a una curva, sin estar mediada por la diferenciabilidad

Carlos Armando Cuevas Vallejo,[1] *Miguel Delgado Pineda*[2]
y *François Pluvinage*[3]

Resumen

El concepto matemático de recta tangente ya estaba presente en la cultura griega de la Antigüedad. Desde entonces, ha sido un concepto fundamental en la cultura matemática. Aunque elemental desde el punto de vista geométrico ante la aparición de nuevas curvas, fue redefinido varias veces en la historia, y finalmente formalizado con la aparición del

[1] Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional 2508. C.P. 07360. Ciudad de México, México; e-mail: ccuevas@cinvestav.mx

[2] Departamento de Matemáticas Fundamentales, Facultas de Ciencias. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Senda del Rey 9, 28040 Madrid, España; e-mail: miguel@uned.mat.es

[3] IREM de Strasbourg France y Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional 2508, C.P. 07360. Ciudad de México, México; e-mail: fpluvinage@cinvestav.mx.

cálculo diferencial. Sin embargo, esta formulación acarrea dos problemas: primero, cuando este concepto se presenta en precálculo, su definición no debería depender de la derivada; y segundo, existen gráficas de funciones continuas con recta tangente en algunos puntos que esta definición no cubre. Aquí se propone una definición de recta tangente a la gráfica de una función continua sin estar mediada por la condición de diferenciabilidad. Además, si la función es derivable esta definición resulta equivalente a la definición usual de recta tangente. Además, se propone un algoritmo para la determinación de la recta tangente, y se introduce una nueva definición de recta secante a la gráfica en un punto. Esta definición resalta el carácter local de ambos conceptos.

Palabras clave: recta secante, recta tangente, rectas tangentes laterales, derivada en un punto.

Abstract

A mathematical concept present from Greek culture; is the tangent line. Since then, it has been a fundamental concept in the mathematical culture. Although elementary from the geometric point of view, before the appearance of new curves, it was redefined several times in history, and finally formalized with the appearance of differential calculus. However, this formulation brings two problems: First: when this concept is presented in precalculus, its definition should not depend on the derivative and second: there are graphs of continuous functions with a tangent line in some points that this definition does not cover. Our proposal consists in proposing a tangent line definition to the graph of a continuous function without being mediated by the condition of differentiability. In addition, if the function is derivable, this definition is equivalent to the usual definition of a tangent line. Additionally, an algorithm for determining the tangent line is proposed, and a new secant line definition is introduced to the graph in a point. This definition highlights the local character of both concepts.

Keywords: Secant line, Straight tangent, Straight side tangents, Derived in a point.

1. Antecedentes históricos

El historiador Coolidge (1951) propone cinco etapas en la generación de la definición de recta tangente: la primera con Euclides, Apolonio y Arquímedes (siglos III y II a.C.); la segunda con Fermat y Descartes en el siglo XVI; la tercera con Roberval y Torricelli; la cuarta con de Sluze y Barrow, y la quinta con Newton y Leibniz (siglo XVII). Esto se debió a la aparición, en el tiempo, de diversas curvas que hacían insuficientes las definiciones anteriores. Debe observarse además que los objetos matemáticos también fueron evolucionando en el siglo XVII, cuando se desarrolló la geometría analítica (1637) pero el concepto de función no se había definido formalmente.

Algunas definiciones muy posteriores, como la de Martínez de la Rosa (2009), incluyen a las gráficas de las funciones, sin embargo, la definición de recta tangente institucionalmente aceptada requiere de la derivada. Sin intentar un estudio exhaustivo del desarrollo histórico del concepto de recta tangente, se hará un breve recorrido de las distintas definiciones que se consideran más importantes, a fin de sentar las bases para introducir una propuesta propia.

Quizá la primera referencia registrada de la definición de recta tangente se encuentra en los elementos de Euclides (Euclides, 1991: 291):

> *Definición RT_1:* se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta.[4]

Además, se define, en el caso del círculo, el concepto de recta secante:

> *Definición RS_1:* recta secante a una circunferencia es aquella que corta a la misma en dos puntos distintos.

Es necesario destacar el carácter intuitivo de las expresiones *toca* y *corta*, así como subrayar que esta definición de Euclides es clara y caracteriza la situación de la recta y la circunferencia (válida también para elipse y parábola). Sin embargo, la claridad con que se expresa la definición de recta tangente a la circunferencia no se generaliza a otras curvas. A pesar de ello, como se verá adelante, esta definición se ha generalizado erróneamente hacía curvas en general (Cantoral & Miron, 2000: 270; Canul *et al.*, 2011: 176; Kajander & Lovric, 2009: 5). Algo aún peor ha sucedido con la recta secante.

Los propios griegos pronto se dieron cuenta de que esta definición no era suficiente para todas las curvas que conocían. Apolonio de Perga (262-190 a.C.)

[4] El traductor hace notar que dentro de la cultura griega se distinguía la palabra tocar para tangente, en lugar de encontrar o cortar para otro tipo de contacto.

expresó una extensión de la definición de Euclides para la circunferencia, que incluía a otras cónicas como la parábola o la elipse. Pero más que definir con precisión la recta tangente, Apolonio estableció métodos para calcular la recta tangente a cada cónica que Artigue (1990) sintetiza en la siguiente definición:

> *Definición RT_2:* una recta es tangente a una curva, cuando ella tiene un punto común con la curva y permanece siempre del mismo lado de la curva.

Esta nueva definición y sus métodos fueron reutilizados por Wallis en 1655. En palabras de hoy en día (Suzuki, 2005: 352), el método utilizado por Wallis y Apolonio es el siguiente:

> Supongamos que deseamos encontrar la tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La línea tangente $y = T(x)$ puede ser definida como la línea apoyada sobre un lado de la curva; por lo tanto, ya sea que $f(x) > T(x)$ para todo $x \neq a$, o $f(x) < T(x)$ para todo $x \neq a$.

Esta definición no es adecuada para otras curvas conocidas que fueron apareciendo, por ejemplo, la espiral de Arquímedes (287-212 a.C.). La definición RT_2 entra en crisis al cuestionar cómo es la recta del eje *Ox*, en el origen de la función $f(x) = x^3$. Esto hace que la agenda de los matemáticos del siglo XVII se interese por problemas de tangentes y puntos extremos (Grabiner, 1983).

Surgieron otras definiciones hasta llegar a Pierre de Fermat (1601-1665). Destaca que, al describir la tangente, Fermat, se anticipa al cálculo diferencial y propone, además, el cálculo de máximos y mínimos, usando el concepto de recta tangente (Bell, 2009).

> El proceso de trazar una línea recta, tangente a la curva, en cualquier punto *P* en la curva, y tomando otro punto *Q* también en la curva y trazar la línea recta *PQ* para unir *P* y *Q*. Luego, con la imaginación, dejar que el punto *Q* se mueva a lo largo del arco de la curva desde *Q* a *P*, hasta que *Q* coincida con *P*, cuando la cuerda *PQ* en la posición límite, justamente descrita, venga a ser la tangente *PP* a la curva en el punto *P*, que es lo que estamos considerando.

Sin duda esta interpretación tiene un carácter numérico de carácter local. Así mismo, Fermat empleaba este método para calcular el máximo o mínimo que se encontraba al fondo de una hondonada o en la cúspide de una cima, mediante la consideración de que en ese punto la pendiente es 0 (Andreu & Riestra, 2007).

La siguiente interpretación corresponde al matemático y filósofo, contemporáneo y antagonista de Fermat, René Descartes (1596-1650), quien propuso un método algebraico conocido como el segundo método de Descartes, en el que se inspiró Vivier (2011) para mostrar la recta tangente a una curva. En notación actual, el segundo método de Descartes se puede describir como sigue:

> La ecuación de una recta que toca la curva $f(x, y) = 0$ en (a, b) es $y = m(x - a) + b$, donde m denota un parámetro a ser determinado. Para que la recta sea tangente, el sistema de ecuaciones $f(x, y) = 0$ y $y = m(x - a) + b$) debe tener una raíz doble en $x = a$ (o bien, raíz doble en $y = b$) (Suzuki, 2005: 342).

Este método ejemplarizado, basado en la propuesta de Descartes, es sencillo, pero induce a pensar que el contacto de una recta tangente con la gráfica es de orden dos en el punto de tangencia, mientras que el contacto de las secantes es de orden uno. Además, tiene el problema de que, cuando la función polinómica es de grado mayor, el cálculo de las raíces se convierte en una dificultad en extremo compleja (Cuevas & Madrid, 2013). Con relación a esta dificultad, cabe destacar el trabajo realizado por el matemático holandés Jan Hudde (1628-1704), quien creó un algoritmo para detectar una raíz doble en un polinomio, con lo cual extendió el método de Descartes.

Debe recordarse que, poco antes de Descartes, emergió el álgebra con François Viète, o Vieta (1540-1603). El plano cartesiano, como hoy se entiende, sólo se introdujo después, y el concepto actual de función apareció tras poco más de 250 años.[5]

La siguiente interpretación corresponde a Gilles Personne de Roberval (1602-1675), quien propone un método en todo diferente a los de sus antecesores. En lugar de métodos que se anticipan al cálculo, utilizó un acercamiento a conceptos físicos. La idea es muy sencilla: si se tiene una curva, que se supone se generó mediante el movimiento de una partícula puntual, la recta tangente en un punto de la curva es la línea recta de la velocidad instantánea de ese punto en cualquier momento (Coolidge, 1951: 455). Sin duda, surgía un problema cuando se tenía que precisar la velocidad instantánea.

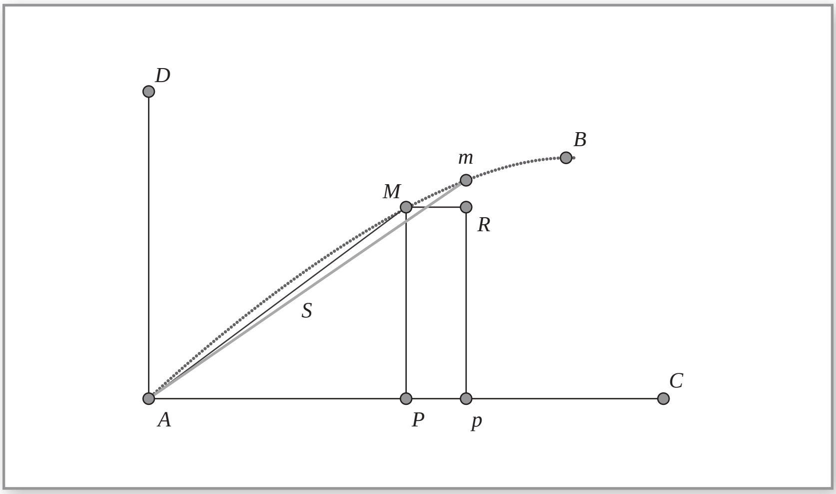
Apoyado en la consideración de infinitésimos, se hizo un retorno a la geometría. La figura 4-1 ilustra la definición de Leibniz, en una formulación dada por l'Hôpital:[6]

---

[5] La definición moderna de función de Dirichlet es la siguiente: "Una variable y es función de una variable x definida en $a < x < b$ si a cada valor de la variable x en el intervalo indicado, corresponde un valor definido de la variable y".

[6] Guillaume François Antoine, marqués de l'Hôpital (1661-1704). Un noble matemático de quien se refieren, además como mecenas de matemáticos, a quienes pagaba porque se le incluyera en afamados teoremas.

Figura 4-1 Recta tangente como prolongación de la hipotenusa del triángulo de Leibniz.



> Las ordenadas PM y pm están infinitamente cerca la una de la otra; la recta tangente a la curva dada en el punto M se define como la prolongación del segmento infinitésimo Mm.

Sin embargo, esta visión geométrica no prosperó y fue necesario esperar hasta el siglo XIX para que Cauchy (1789-1857) resolviera el problema de forma definitiva en 1823, cuando dio una precisa definición de la derivada en términos del nuevo concepto denominado límite…" (Martínez de la Rosa, 2009: 9).

> *Definición RT_3:* se define a $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ como la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en $(a, f(a))$.

En síntesis, la definición hasta hoy aceptada de recta tangente, en un punto P a la gráfica de una función derivable, es la recta que contiene al punto $P = (a, f(a))$ y cuya pendiente es la derivada de la función para el valor a.

De forma intuitiva, e ingenua, se suele decir que es la recta que resulta de la posición última (la posición última o la posición límite debe definirse) de las rectas secantes que se forman al acercarse al punto P. La propuesta de definición desarrollada aquí mantiene en vigor esa visión intuitiva, pero sin necesidad de acercamiento alguno.

2. Problemática y concepciones erróneas

Al preguntar a profesores y estudiantes, tanto de nivel medio superior como de superior, cuál es la definición de recta tangente, se detecta una dificultad cognitiva en la enseñanza de precálculo y del cálculo diferencial. La mayoría se manifiesta como conocedora de la definición RT_1 de Euclides, mientras que unos pocos señalan la definición RT_4 de la derivada. Esta dificultad se trata en los siguientes párrafos.

En general, el término *concepción*, de amplio uso en la comunidad de matemática educativa, se refiere al comportamiento observable de los estudiantes ante un grupo de tareas que conllevan el mismo desafío relativo a determinado concepto matemático (Artigue, 1990: 265; Castela, 1995: 9). Para Balacheff, una concepción es el estado del equilibrio dinámico de un ciclo de acción/retroalimentación entre un alumno y un medio bajo restricciones excesivas de viabilidad, cuya caracterización se basará en comportamientos observables del sistema (acción, retroalimentación) y en los resultados de su funcionamiento (Balacheff, 2013: 5). En la investigación empírica realizada para este trabajo, el interés se centró en establecer el comportamiento de los profesores frente a tareas que tienen que ver con el concepto de recta tangente.

Castela (1995) presenta un seguimiento puntual del problema de recta tangente referido a una investigación desarrollada en Francia. Llevó a cabo su investigación con estudiantes de liceo (preparatoria), realizó una entrevista a maestros, y observó que la mayoría de los estudiantes conservan como válida la definición que adquirieron en la enseñanza elemental, para el caso del círculo (Castela, 1995: 11), esto es:

> *Definición EE_1:* una línea (recta) es tangente al círculo (circunferencia) si tiene con él un solo punto en común.

Castela destaca que los problemas planteados son, en general, de corte algebraico y tienen que ver con puntos en común de la tangente con una parábola. Además, los profesores eluden dar una definición y trabajan con la idea intuitiva que los estudiantes poseen desde la educación elemental. Aún más,

> Se alienta a los estudiantes a generalizar lo que saben sobre la tangente a una circunferencia con los nuevos elementos introducidos en la escuela secundaria antes del capítulo sobre derivación.

Con esta información, los estudiantes acceden a cursos de Cálculo y, en los mismos, se encuentran con las siguientes definiciones sobre la recta tangente en un punto *A* (Castela, 1995: 14):

> *Definición ES_1:* límite de rectas que pasan por *A* y otro punto *M* de la gráfica.
>
> *Definición ES_2:* la línea recta que pasa por *A* y cuyo coeficiente director es el valor de la derivada.
>
> *Definición ES_3:* representación gráfica de la función lineal afín tangente en *A*.

A lo anterior, Castela agrega:

> […] hacemos notar que esa generalización de la recta tangente a la circunferencia no facilita el paso de una definición a otra. Además, se perciben dificultades para comprender la definición ES_1 como un paso límite de rectas secantes. La definición ES_2 es la más aceptada, puesto que la mayoría de los problemas elegidos como retos para los estudiantes son del tipo cálculo de la ecuación de recta tangente a una curva definida por una función, donde se hace uso de las tablas de funciones derivadas (Castela, 1995: 14-16).

La autora concluye que este tipo de ejercicios encaminan al estudiante a una concepción algorítmica y algebraica del Cálculo. De nuevo debe resaltarse que los docentes eluden la definición de recta tangente y utilizan una supuesta concepción natural, o intuitiva, que los estudiantes tienen de la misma (Castela, 1995: 14-16).

Vivier (2013) complementa con su estudio la información anterior en la escuela francesa. Presenta un estudio de los libros de geometría más usuales en enseñanza secundaria en Francia donde distingue dos definiciones de recta tangente, las cuales se corresponden con las primeras indicadas por Castela. Tras aplicar un test a una muestra de estudiantes de preparatoria, concluye que más de la mitad, 51%, recurre a la definición ES_2 para describir la recta tangente. También observa que ningún estudiante intuye o tiene la concepción de la recta tangente como la posición límite de las rectas que pasan por el punto de tangencia y puntos de la curva que se acercan a este punto (Vivier, 2013: 5).

Otro problema, detectado por Vivier al examinar los libros de texto de Francia, es que en muchos libros de Geometría analítica y Cálculo en general se define el concepto de derivada a partir del concepto de recta tangente y, a su vez, se define la recta tangente en relación a la derivada (Vivier, 2013: 3).

Este círculo vicioso de definición circular lleva tanto a maestros como a alumnos hacia concepciones erróneas. Esto se mostrará más adelante.

En sentido análogo se expresan Canul *et al.* (2011), quienes realizaron un estudio con una muestra de 19 estudiantes de la Facultad de Matemáticas y encontraron que estos estudiantes "extrapolaron" la definición de Euclides a otras curvas presentadas mediante dibujos en puntos donde no era posible aplicar esa definición, con lo que se generó un conflicto cognitivo, detectable en algunas actividades en las cuales intentaron pasar de la concepción global de recta tangente a la concepción local de Leibniz (Canul *et al.*, 2011: 188-195). En el mismo sentido se manifiestan Viseu & Almeida (2003) en una experiencia realizada con 19 estudiantes en la cual prevalece la definición de recta tangente a una circunferencia, no se tiene una visión local del problema, y la idea de aproximar a la recta tangente por rectas secantes no resulta espontánea.

2.1 Problemática inicial

En resumen, se puede afirmar que los alumnos no obtienen una definición posterior a la de recta tangente a la circunferencia (RT_1), provista en la educación elemental. En cursos posteriores, los profesores suponen conocida la definición y de forma natural se generaliza la definición euclidiana RT_{-1}. De igual forma, en los cursos de Cálculo la recta tangente se define a partir de una curva en un punto *A*, en función de la derivada para el valor de la abscisa del punto *A*, y se justifica la derivada con la recta tangente.

2.2 Recta secante y recta tangente

El concepto de recta secante[7] a una curva está relacionado de manera estrecha con el de recta tangente, que también presenta problemas de definición y lleva a concepciones erróneas. La definición de recta secante y recta tangente a una circunferencia, en la geometría euclidiana, se adapta de modo perfecto tanto a una definición global como a una definición local; por lo tanto, en la educación elemental no es necesario especificar si la propiedad es una propiedad local o global. Sin embargo, las generalizaciones extensivas de las definiciones son erróneas para otras curvas, y, posiblemente, han sido una causa de que, en muchos casos, ambos conceptos se conciban como una propiedad global. En este sentido, se observa que con frecuencia se tiene un contraejemplo a una definición propuesta.

Y si, por ejemplo, se define recta tangente en un punto *A* como aquella función afín cuya gráfica contiene al punto *A* y cuya derivada es igual a la derivada de la función para el valor de la abscisa de *A*, cuando se les confronta con las figuras 4-2 a), 4-2 b) y 4-2 c) surge confusión y no se encuentra una definición clara de recta tangente ni de recta secante.

[7] La palabra secante proviene del latín *secans-tis* y de la palabra *secare*, que significa “cortar”.

Figura 4-2

Figura 4-2a ¿Es la recta que coincide con el eje *x* tangente o secante?

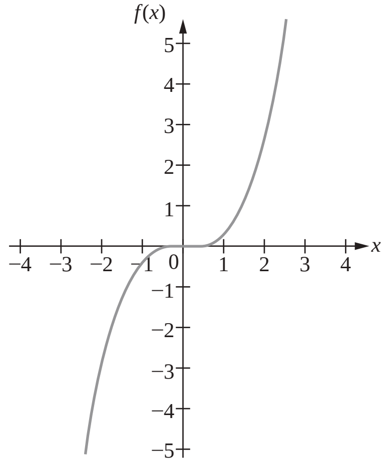


Figura 4-2b ¿Es la recta *l* tangente o secante?

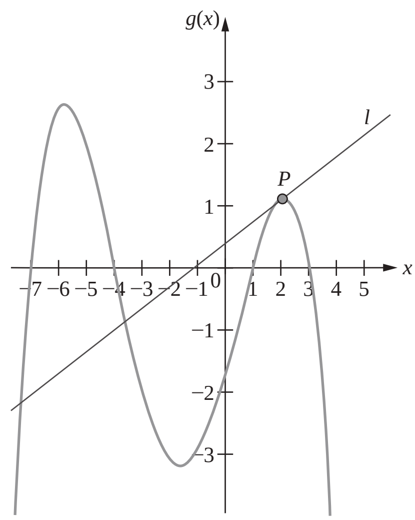


Figura 4-2c ¿Es la recta *l* secante?

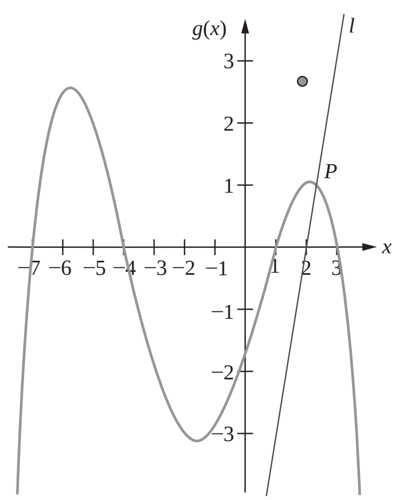


Figura 4-3

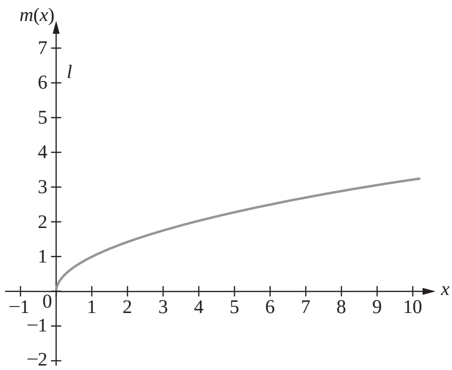


Figura 4-3a ¿Es la recta sobre el eje *y* tangente?

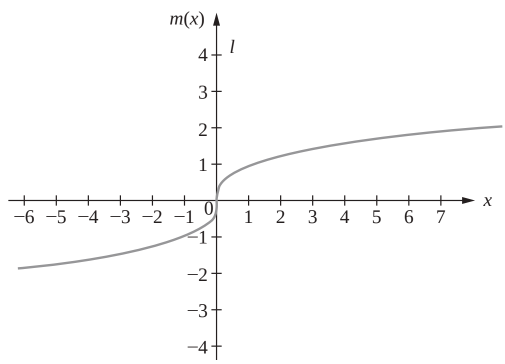


Figura 4-3b ¿Es la recta sobre el eje *y* tangente?

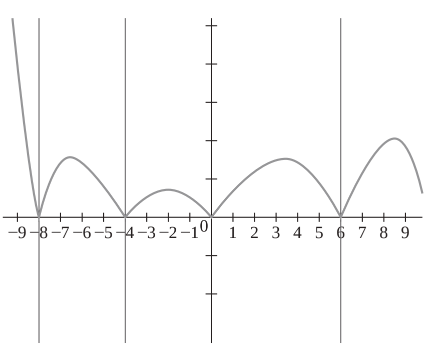


Figura 4-3c ¿Son las rectas en gris claro secantes o tangentes?

3. Estudio de campo sobre la recta tangente y la recta secante

Se realizaron dos experiencias a fin de confirmar la hipótesis de que en la educación superior y posterior persiste la definición de recta tangente como aquella que toca en un punto a la curva (Cantoral & Miron, 2000: 270; Castela, Canul *et al*., 2011; Vivier, 2011). Los sujetos de estudio en ambas experiencias fueron profesores de niveles medio superior y superior.

3.1 Primera experiencia universitaria

La muestra aleatoria fue de 11 profesores de un colegio tecnológico en México, todos ellos con más de 10 años de experiencia en cursos de cálculo diferencial tanto a nivel medio superior como superior. Por formación son físicos, matemáticos o ingenieros; tres de ellos con maestría y uno con doctorado en matemáticas. La aplicación de una batería de test arrojó los siguientes datos:

Test núm. 1

1. Defina de manera intuitiva qué entiende por recta tangente a una función en un punto.
2. Defina de manera intuitiva qué entiende por recta secante a una función en un punto.
3. ¿Es la recta tangente única en un punto de una curva?

☐ Sí ☐ No ☐ No sé

4. ¿Puede una recta ser a la vez tangente y secante en un punto de una curva?

☐ Sí ☐ No ☐ No sé

Para procesar las respuestas se diseñó una taxonomía que permitiera clasificarlas. Así, para el reactivo 1, en general hubo tres tipos de respuestas:

- 1a. Recta que toca o corta a la curva en un solo punto.
- 1b. Definición en esencia incorrecta.
- 1c. Respuesta sin sentido.

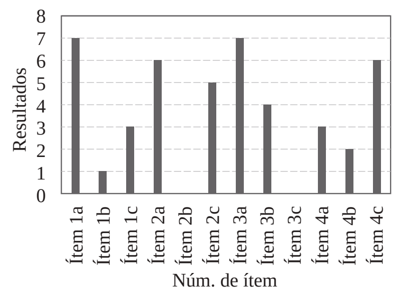
Para el reactivo 2, las respuestas se clasificaron en tres clases:

- 2a. Corta en dos puntos a la curva.
- 2b. Respuesta en blanco.
- 2c. Respuesta sin sentido.

Para las dos siguientes sólo se señala la opción elegida.

Gráfico 4-1 Respuestas test I, primera muestra.

1a. Recta que toca o corta a la curva en un solo punto.
1b. Definición incorrecta.
1c. Sin sentido.
2a. Corta en dos puntos a la curva.
2b. Respuesta en blanco.
2c. Sin sentido.
3a. Sí, 1ª opción.
3b. No, 2ª opción.
3c. No sé, 3ª opción.
4a. Sí, 1ª opción.
4b. No, 2ª opción.
4c. No sé, 3ª opción.



Es clara la pervivencia de la definición de Euclides para la recta tangente, puesto que de un total de 11 participantes, siete (63%) conserva esta definición. El resto carece de una definición aceptable.

En cuanto a la concepción de recta secante, seis profesores la definen como la recta que corta en dos puntos a la curva. El resto se confunde o no llega a una definición.

La unicidad de la recta tangente está en duda puesto que siete participantes afirman que la recta tangente es única, y cuatro niegan esa unicidad.

De las respuestas al reactivo 4 destaca que no se aclaró que fuera secante y tangente en el mismo punto. Tres profesores interpretaron que la recta puede ser tangente y secante a la vez (pero no sabemos si refieren al mismo punto o a otro punto). Dos profesores niegan esa posibilidad de ser tangente y secante, mientras que seis no saben responder.

3.2 Segunda experiencia universitaria

Se experimentó con una muestra aleatoria de 32 profesores, pero en este caso los sujetos de estudio eran profesores universitarios y de preparatoria. Tan sólo se trataba de ver si se mantenía la tendencia de respuestas respecto a la primera muestra, y se obtuvieron las siguientes clases de respuestas.

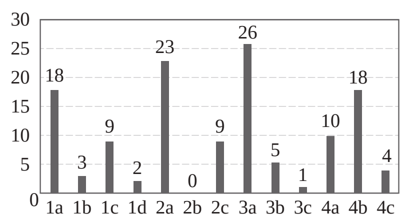
En cuanto a la definición de recta tangente, 18 sujetos exponen la definición euclidiana, mientras que nueve presentan una respuesta sin sentido. Tres respuestas utilizan la definición del Cálculo y otras dos hacen referencia a que se trata de una propiedad local. En esta muestra el 84% presenta una definición inadecuada o sin sentido.

Con respecto a la definición de recta secante, 71% de los encuestados asocia la recta tangente con dos puntos de corte. El resto se confunde.

Sobre la unicidad de la recta tangente, se tiene que 81% de la muestra afirma que la tangente es única y 15% lo niega. También se destaca que 21% afirma que la tangente no pude ser a la vez secante, y el resto se confunde.

Gráfico 4-2 Respuestas test I, segunda muestra.

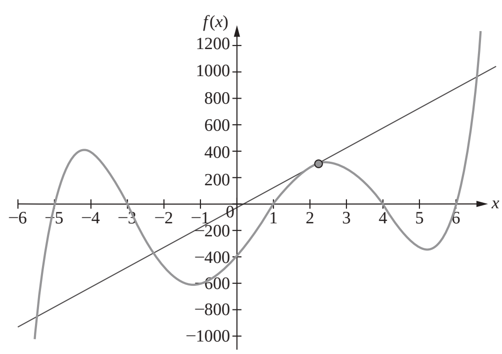
1a. Recta que toca en un solo punto de la curva.	3. Tangente única.
1b. Recta cuya pendiente es la derivada.	3a. Sí.
1c. Respuesta sin sentido.	3b. No.
2. Secante.	3c. No sé.
2a. Recta que toca o se aproxima a su densidad del punto.	4. Puede ser secante y tangente.
2b. Recta que corta a la curva localmente en dos puntos.	4a. Sí.
2c. Sin sentido.	4b. No.
	4c. No sé.



El conjunto inicial de preguntas marcado como test núm. 1 de la muestra segunda fue modificado con un nuevo conjunto de preguntas con contenido gráfico que se debía interpretar: test núm. 2.

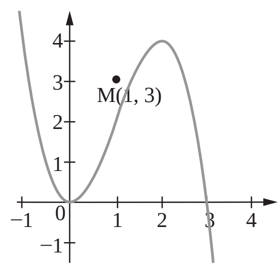
Test núm. 2

1. Observe la figura, ¿es la recta l tangente o secante a la función $f(x)$?



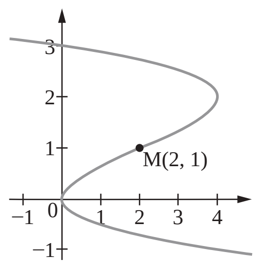
2. En cada figura F, representada en el plano cartesiano, están una gráfica de curva y un punto M. En cada caso, la pregunta es: ¿se puede trazar desde el punto M una recta tangente a la curva? Elegir una respuesta *Sí* o *No*, y, de elegir la respuesta *Sí*, hacer un trazo de tangente.

Figura F_1



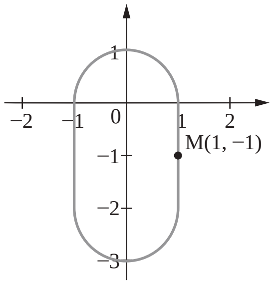
Tangente desde M: Sí ☐, No ☐
Sí → Trazar la tangente sobre la figura

Figura F_2



Tangente en M: Sí ☐, No ☐
Sí → Trazar la tangente sobre la figura

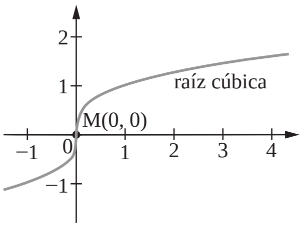
Figura F_3



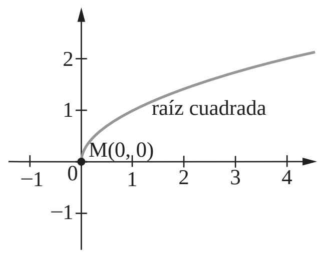
Tangente desde M: Sí ☐, No ☐
Sí → Trazar la tangente sobre la figura

3. ¿Existe en el punto M una tangente a la gráfica? En caso de respuesta positiva, se solicita escribir la ecuación de la tangente.

Gráfica G_1



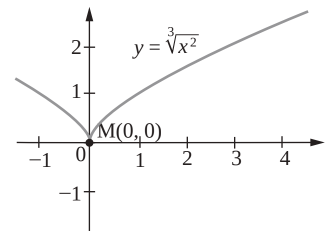
Gráfica G_2



Tangente en M: Sí ☐, No ☐

Sí →Ecuación de la tangente:

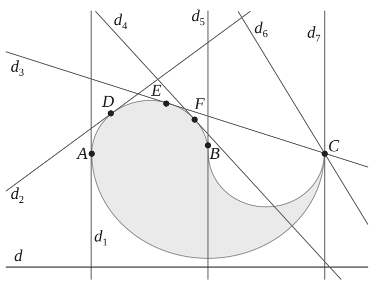
Gráfica G_3



Tangente en M: Sí ☐, No ☐

Sí → Ecuación de la tangente:

4. En el plano euclidiano se ha dibujado la superficie sombreada, cuya frontera es una curva compuesta por tres semicircunferencias. ¿Qué se puede decir de la posición de cada una de las rectas representadas con respecto a esta curva? (El primer caso es un ejemplo).



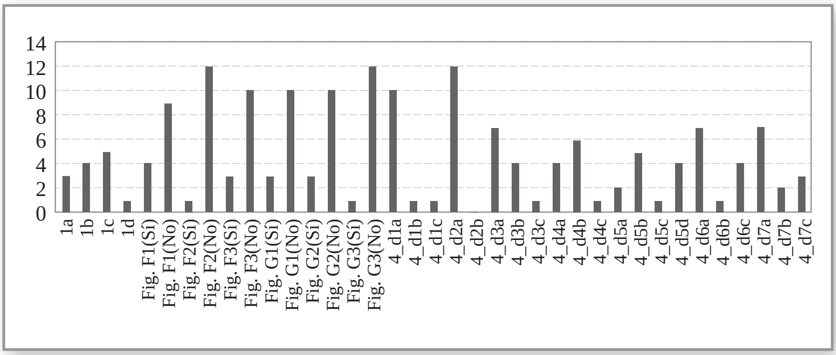
La recta d no es secante ni tangente a la curva.
La recta d_1............................
La recta d_2............................
La recta d_3............................
La recta d_4............................
La recta d_5............................
La recta d_6............................
La recta d_7............................

Para el reactivo 4 se empleó una nomenclatura para describir las clases[8] agrupadoras de las respuestas:

- 4_*d*1*a* = Tangente; 4_*d*1*b* = Secante; 4_*d*1*c* = Ni tangente, ni secante.
- 4_*d*2*a* = Tangente; 4_*d*2*b* = Secante.
- 4_*d*3*a* = Tangente; 4_*d*3*b* = Secante; 4_*d*3*c* = Tangente y secante.
- 4_*d*4*a* = Tangente; 4_*d*4*b* = Secante; 4_*d*4*c* = Tangente y secante.
- 4_*d*5*a* = Tangente; 4_*d*5*b* = Secante; 4_*d*5*c* = Tangente y secante; 4_*d*5*d* = Ni tangente, ni secante.
- 4_*d*6*a* = Tangente; 4_*d*6*b* = Secante; 4_*d*6*c* = Ni tangente, ni secante.
- 4_*d*7*a* = Tangente; 4_*d*7*b* = Secante; 4_*d*7*c* = Ni tangente, ni secante.

[8] En un estudio ulterior, esta clasificación se enriquece al tomar en cuenta indicaciones de los puntos considerados (ejemplo para d_1: mencionar al punto *A* como punto de tangencia).

Gráfico 4-3 Respuestas Test 2.



Al analizar los datos aportados por la muestra se encuentra que:

- Del reactivo 1, el de la recta dibujada, tres sujetos afirman que es tangente, cuatro que es secante y cinco que es ambas cosas. No se aclara dónde es tangente ni dónde es secante.
- De la figura F_1, en el reactivo 2, cuatro profesores afirman que se puede trazar una recta tangente desde un punto exterior a la curva, mientras que nueve lo niegan.
- De la figura F_2, sólo un encuestado afirma que se puede trazar la recta tangente en el punto de la curva, mientras que 12 niegan esa posibilidad.
- De la figura F_3, tres miembros de la muestra afirman que sí se puede trazar la recta tangente a la curva que es una recta vertical, mientras 10 profesores ven imposible la existencia de recta tangente.
- De la figura G_1, del reactivo 3, tres profesores afirman que sí se puede trazar la recta tangente, y 10 lo niegan.
- De la figura G_2, tres profesores ven posible trazar la recta tangente; de nuevo, 10 niegan esa posibilidad.
- De la figura G_3, sólo un profesor ve plausible trazar la recta tangente, mientras que 12 destacan que es imposible.

Del ítem 4, donde hay que clasificar varias rectas, se obtuvo:

- De la recta d_1, 10 profesores la catalogan como recta tangente, y sólo uno como recta secante.
- De la recta d_2, 10 profesores la clasifican como recta tangente, uno como recta secante, y uno como las dos cosas.

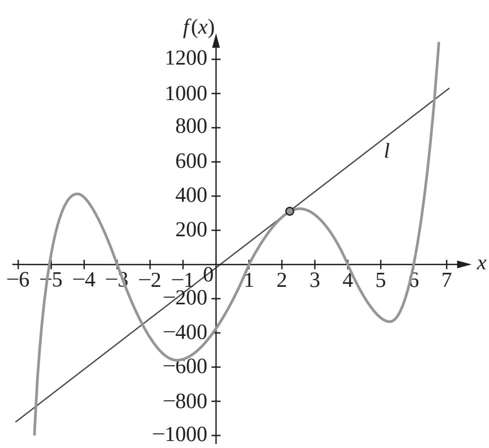
- De la recta d_3, siete encuestados la ven como recta tangente, cuatro como recta secante, y uno como recta tangente y secante a la vez.
- De la recta d_4, cuatro miembros de la encuesta entienden que es recta tangente, seis recta secante, y uno que es tangente y secante.
- De la recta d_5, dos profesores la clasifican como recta tangente, cinco como recta secante, uno como recta secante y tangente, y cuatro como ninguna de las dos.
- De la recta d_6, seis encuestados la catalogan de recta tangente, uno de recta secante, y cuatro de recta secante y tangente.
- De la recta d_7, siete profesores la clasifican como recta tangente, dos como recta secante, y tres como ambas cosas.

3.3 Tercera experiencia

Se realizó una nueva experiencia con una muestra de 32 profesores de educación media y superior de otro estado de México. Para esta experiencia, se hizo una modificación ligera a la primera pregunta del test núm. 2, quedando de la siguiente forma:

Gráfico 4-4 Test I, modificado.

1. Observe la figura
   ¿Es l una recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$?
   En caso afirmativo, marque el punto de contacto con una T.
   ¿Es l una recta secante a la gráfica de la función $f(x)$?
   En caso afirmativo, marque con una S un punto que la defina como recta secante.



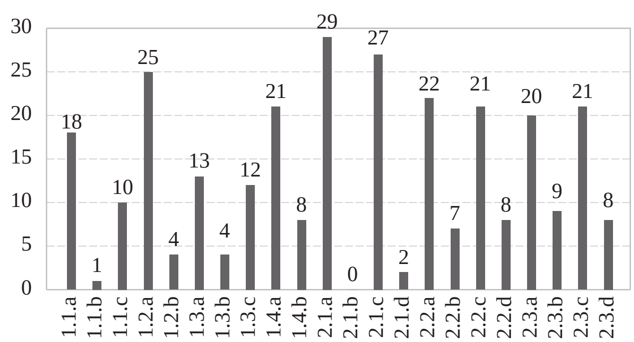
En esta ocasión se obtuvieron los datos mostrados en el siguiente gráfico.

Gráfico 4-5 Test núm. 2. Primera parte. Preguntas 1 y 2.

Pregunta 13 posibles respuestas
1.1 Es una recta tangente
    1.1.a. Sí.
    1.1.b. No.
    1.1.c. No sé.
1.2 Marcó corretamente el punto.
    1.2.a. Sí.
    1.2.b. No.
1.3 Es una recta secante.
    1.3.a. Sí.
    1.3.b. No.
    1.3.c. No sé.

1.4 Marcó corretamente el punto.
    1.4.a. Sí.
    1.4.b. No.
2.1 4 posibles respuestas.
    2.1.a. Sí.
    2.1.b. No.
    2.1.c. Sí trazó.
    2.1.d. No trazó.

2.2 4 posibles respuestas.
    2.2.a. Sí.
    2.2.b. No
    2.2.c. Sí trazó.
    2.2.d. No trazó.
2.3 4 posibles respuestas
    2.3.a. Sí.
    2.3.b. No.
    2.3.c. Sí trazó.
    2.3.d. No trazó.



Las respuestas a esta nueva primera pregunta resultan por demás interesante es puesto que dejan ver la confusión reinante en muchos de los docentes. Así, 56% de los profesores afirma que la recta dibujada sí es recta tangente, mientras que 32% no sabe si lo es o no. Sin embargo, 78% dibuja de forma correcta el punto de tangencia. En consonancia con lo anterior, 40% afirma que es recta secante, mientras que 38% no sabe si lo es o no, y 66% marca bien el punto donde la recta es secante.

La segunda pregunta del test quedó igual y, en general, los profesores afirmaron que era posible dibujar una recta tangente en el punto propuesto y la dibujaron, aunque muchos de ellos con enorme titubeo. De esto queda reflejo a la hora de dibujar la recta, pues dibujaron sólo un segmento de recta que era un segmento tangente y evitaron extender ese segmento del dibujo a todo el plano.

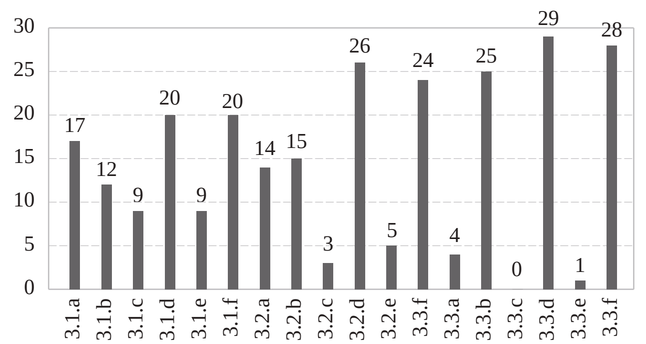
La tercera pregunta tampoco fue modificada y se obtuvieron los siguientes resultados:

Gráfico 4-6 Test núm. 2. Primera parte. Pregunta 3.

3.1 6 posibles respuestas:
- 3.1.a. Sí.
- 3.1.b. No/En blanco.
- 3.1.c. Sí, escribió la ecuación correctamente.
- 3.1.d. No, escribió ecuación incorrecta.
- 3.1.e. Sí, trazó correctamente.
- 3.1.f. No, trazó/incorrecta.

3.2 6 posibles respuestas:
- 3.2.a. Sí.
- 3.2.b. No/En blanco.
- 3.2.c. Sí, escribió la ecuación correctamente.
- 3.2.d. No, escribió ecuación incorrecta.
- 3.2.e. Sí, trazó correctamente.
- 3.1.f. No, trazó/incorrecta.

3.3 6 posibles respuestas:
- 3.3.a. Sí.
- 3.3.b. No/En blanco.
- 3.3.c. Sí, escribió la ecuación correctamente.
- 3.3.d. No, escribió ecuación incorrecta.
- 3.3.e. Sí, trazó correctamente.
- 3.3.f. No, trazó/incorrecta.



De nueva cuenta, el análisis de las respuestas evidencia la confusión entre los profesores: en la primera gráfica, 53% afirma que sí se puede trazar una tangente vertical, mientras que 38% lo niega; de ellos, sólo nueve pudieron escribir la ecuación (cosa que es elemental). Nueve la trazan en un segmento, mientras que 62.5% no lo hace.

La historia se repite en la siguiente gráfica con tangente vertical. Aquí, 43% responde que sí es posible trazar una tangente vertical en el extremo del dominio de la función, y 46% que no. De esta población, 80% no puede escribir la ecuación y 75% no la pudo dibujar.

Por último, en la tercera gráfica, sólo 12% afirma que sí es posible y el 78% lo ve imposible; de ellos, el 90% no pudo escribir la ecuación y 88% no pudo trazar la tangente.

Con la última pregunta de este test se confirma la confusión de conceptos en los profesores.

Gráfico 4-7 Test núm. 2. Pregunta 4.

4.1 4 posibles respuestas:
- 4.d1.a. Es tangente.
- 4.d1.b. Es secante.
- 4.d1.c. Es tangente y secante.
- 4.d1.d. Ninguna de las dos.

4.2 4 posibles respuestas:
- 4.d2.a. Es tangente.
- 4.d2.b. Es secante.
- 4.d2.c. Es tangente y secante.
- 4.d2.d. Ninguna de las dos.

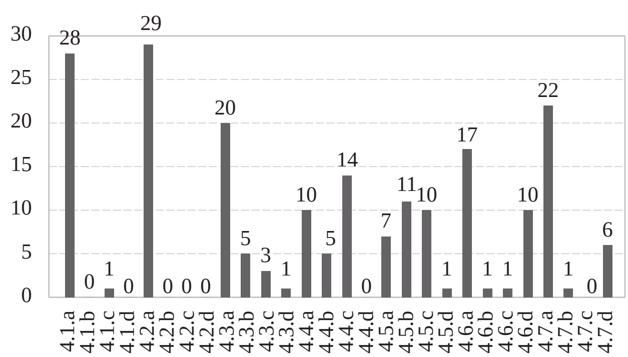
4.3 4 posibles respuestas.
- 4.d3.a. Es tangente.
- 4.d3.b. Es secante.
- 4.d3.c. Es tangente y secante.
- 4.d3.d. Ninguna de las dos.

4.4 4 posibles respuestas:
- 4.d4.a. Es tangente.
- 4.d4.b. Es secante.
- 4.d4.c. Es tangente y secante.
- 4.d4.d. Ninguna de las dos.

4.5 4 posibles respuestas:
- 4.d5.a. Es tangente.
- 4.d5.b. Es secante.
- 4.d5.c. Es tangente y secante.
- 4.d5.d. Ninguna de las dos.

4.6 4 posibles respuestas:
- 4.d6.a. Es tangente.
- 4.d6.b. Es secante.
- 4.d6.c. Es tangente y secante.
- 4.d6.d. Ninguna de las dos.

4.7 4 posibles respuestas:
- 4.d7.a. Es tangente.
- 4.d7.b. Es secante.
- 4.d7.c. Es tangente y secante.
- 4.d7.d. Ninguna de las dos.



Las rectas dibujadas d_1 y d_2 no ofrecen problemas, quizá porque no están situadas en un plano cartesiano. 87.5% afirma que la recta d_1 es tangente, 90% afirma que d_2 es tangente. La recta d_3 no les resultó tan simple, sólo 62% acepta que es tangente; la recta d_4 divide la opinión, 31% afirma que sólo es tangente, 15% que es secante, y 43% que es tangente y secante; la recta d_5 muestra un mayor descontrol, 21% la concibe como sólo tangente, 43% como sólo secante, y 31% como tangente y secante; en la recta d_6, 53% se equivoca al clasificarla como secante, y sólo 31% acierta al considerar que no es tangente ni secante. Por último 68% sostiene que la recta d_7 es tangente, y sólo 18% sostiene que no es tangente ni secante.

Los resultados de estas experiencias, llevadas a cabo en dos estados distintos de México, parecen refutar nuestra hipótesis inicial sobre la concepción de la recta tangente. Es decir, que la mayoría de los docentes asumen la definición euclidiana de recta tangente a una circunferencia, y, en consecuencia, sus estudiantes generalizan esa definición de recta tangente. Esto provoca que, con cierta frecuencia, los estudiantes enfrenten contradicciones. Además, la carencia de una definición generalista adecuada a todos los casos posibles no parece generar una crisis de concepto, debido a que la definición de recta tangente, como la recta cuyo coeficiente director es la derivada en el punto, es suficiente para los problemas o desafíos que se plantean a los estudiantes en los cursos de cálculo (en México). Se entiende que esos retos corresponden más a problemas de corte algebraico y, en consecuencia, no entran en conflicto con una definición inconsistente.

> Numerosas investigaciones han mostrado, por ejemplo, que la concepción dominante de la tangente desarrollada por la enseñanza actual es una concepción algebraica de esta última: la tangente en un punto M a la curva C representativa de la función f es la recta que pasa por M y cuyo coeficiente director es el valor de la derivada en ese punto (Artigue, 1990: 277).

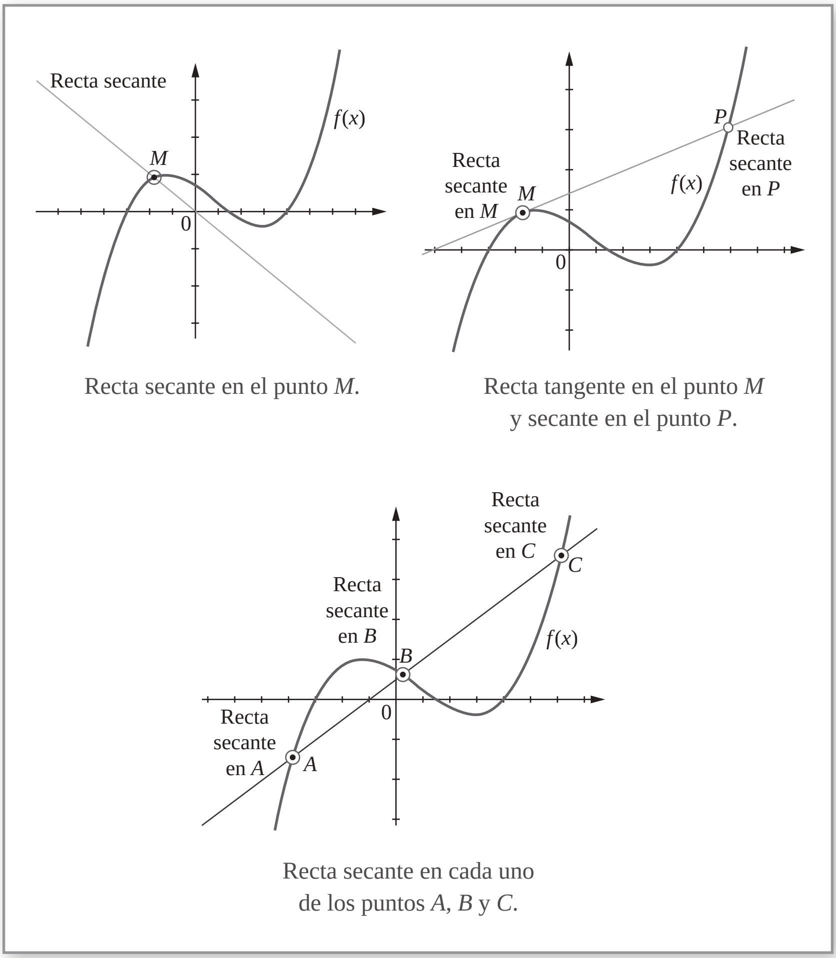
4. Definiciones de recta tangente y de recta secante

Entre los factores que a lo largo de la historia han dificultado definir con precisión el concepto de recta tangente, podemos anotar el de la evolución de los objetos matemáticos. Por ejemplo, el lento desarrollo del concepto de función, que tomó siglos de evolución (Cuevas & Díaz, 2014; Kleiner, 1989), impidió una definición general que comprendiera los casos de curvas planas y gráficas de funciones reales.

Aquí se presentarán nuevas definiciones de recta secante y de recta tangente a la gráfica de una función en un punto *P* sin recurrir a la derivada en ese punto. Estas definiciones poseen un marcado carácter geométrico y visual, y son de carácter local.

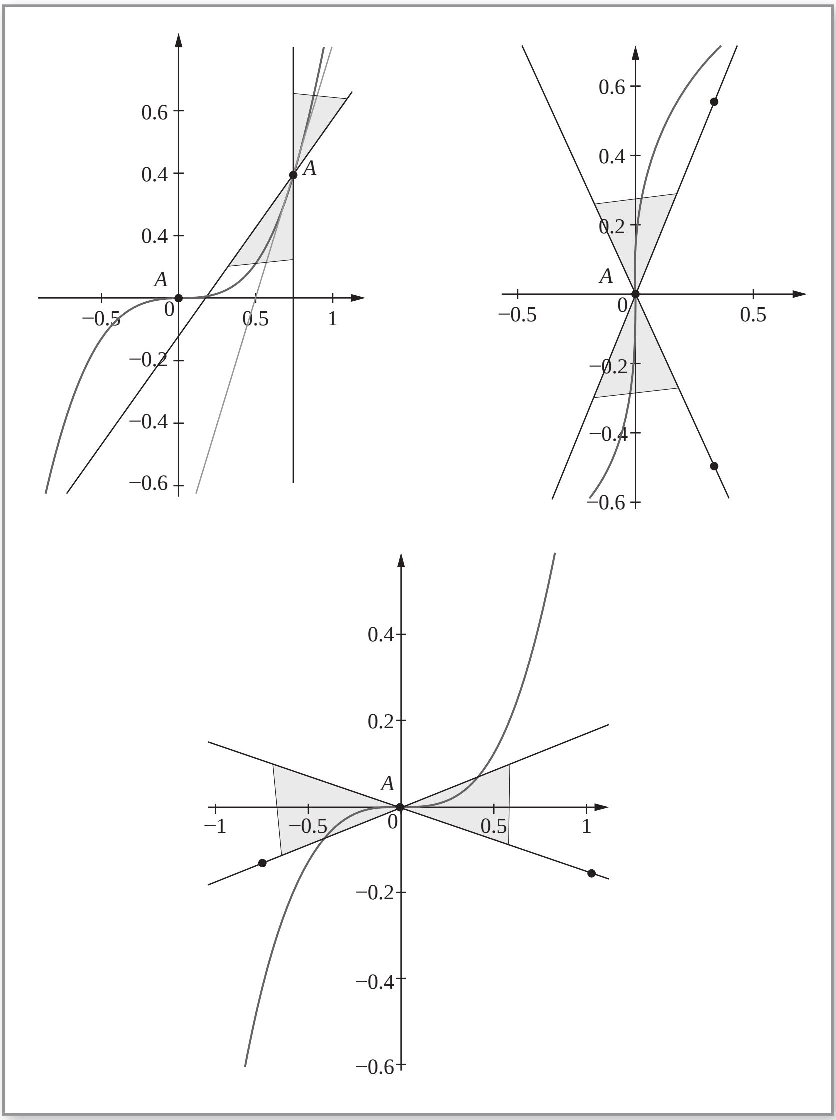
Sea c la curva correspondiente a la gráfica de una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en D. Se define a una recta secante en un punto P si localmente corta a la gráfica en dicho punto. De esta forma, se establece que una recta secante a c no necesariamente corta a c en dos puntos (figura 4-4).

Figura 4-4 Ejemplos de recta secante en un punto.



De igual forma, se establece que una recta r es tangente a una curva c si se comprueba que cualquier cono plano simétrico con eje r y vértice P contiene tanto a la recta r como un arco de curva alrededor de P (figura 4-5). Es decir, una recta L es tangente a una curva c si localmente ambas tienen un solo punto en común.

Figura 4-5 Ejemplo de recta tangente en un punto.



En la siguiente sección, ambas definiciones se justifican de manera formal y se precisan.

4.1 Situación inicial: rectas de una circunferencia

La estructura que se necesita en el plano para los estudios de rectas tangentes o rectas secantes no incluye el concepto de distancia. Por ello, se estudia el caso particular de una circunferencia para introducir las herramientas a utilizar.

Una recta r, sea secante o tangente a una circunferencia c, se puede caracterizar mediante el número de puntos comunes de la recta r y la circunferencia c. En efecto, r es recta secante si $Cardinal\ (c \cap r) = 2$, y será tangente sí $Cardinal\ (c \cap r) = 1$. De todo el haz de rectas que pasan por $P \in c$, sólo la recta perpendicular al radio que une el centro de c con P es la recta tangente, y todas las demás son rectas secantes.

Se utiliza la partición del plano generada por un par de rectas secantes en un único punto para definir la herramienta que se utilizará; un cono.

Definición 4.1.1 Cono cerrado

Sean dos rectas distintas r_1 y r_2 tales que $r_1 \cap r_2 = \{Q\}$. Se define un cono cerrado de vértice Q a cada conjunto formado por el par de regiones de ángulos iguales y opuestos, incluyendo las rectas. Además, se denota al conjunto del plano obtenido al hacer girar la recta r_1 hacia la recta r_2, con centro en Q como cono $[r_1, r_2]$, y como cono $[r_2, r_1]$ al otro.

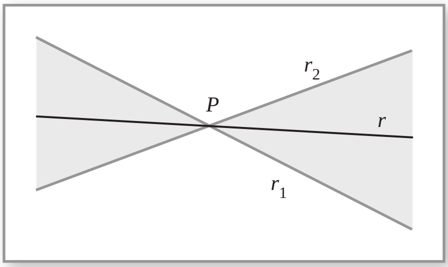
Definición 4.1.2 Entorno cónico

Dados una recta r, un punto $P \in r$ y un cono cerrado de vértice P, un cono $[r_1, r_2]$ de vértice P es un entorno cónico de la recta r si y sólo si $r \subset [r_1, r_2]$.

Si con $K_{p,r}$ se designa al conjunto de entornos cónicos cerrados, o c-entornos, de r de vértice P, entonces para dos conos $k_1, k_2 \in K_{p,r}$, se tiene $k_1 \cup k_2 \in K_{p,r}$ y $k_1 \cap k_2 \in K_{p,r}$. Es decir, la intersección o unión de dos c-entornos de una misma recta r en un punto P son c-entornos de r en P.

Además, $\bigcap_{k \in K_{P,r}} k \supset r$, puesto que los c-entornos son cerrados.

Figura 4-6 $[r_1, r_2]$ c-entorno de r de vértice P.



En algunas partes de este trabajo sólo se usará una de las dos zonas triangulares de un cono. Para cualquier cono $k = [r_1, r_2] \in K_{P,r}$ se denomina semientorno cónico cerrado, o *c*-semientorno de *r* de vértice *P* a cada una de las regiones cerradas que componen el cono.

Figura 4-7 $[r_1, r_2]$ *c*-semientorno de *r*.

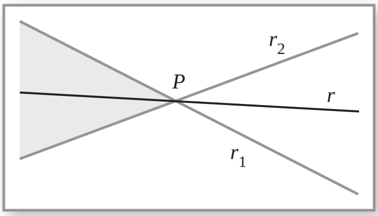
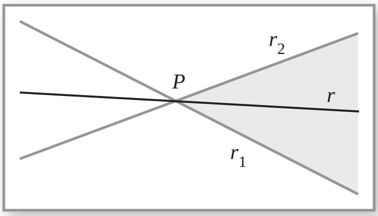


Figura 4-8 $[r_1, r_2]$ *c*-semientorno de *r*.



Si r_1 es la imagen simétrica de r_2 con respecto al eje *r*, entonces se dice que el entorno cónico de *r* es centrado.

Debemos observar que para cualquier $P \in r$ se cumple que el conjunto de entornos cónicos centrados de la recta *r* con vértice *P*, $K^c_{P,r}$ es un conjunto totalmente ordenado con la relación de contenido conjuntista. Es decir, dados dos conos centrados $k_1, k_2 \in K^c_{P,r}$, entonces o $k_1 = k_2$, o si $k_1 \neq k_2$, se cumple $k_1 \subset k_2$ o $k_1 \subset k_2$.

A continuación, se establece una caracterización constructiva de recta secante y otra de recta tangente a una circunferencia como propiedad local, relativa a un único punto de la circunferencia.

Proposición 4.1.3

Dados una circunferencia *c*, un punto $P \in c$ y una recta *r* con $P \in r$, la recta *r* es la recta tangente a la circunferencia *c* en el punto *P* si y sólo si para cualquier *c*-entorno de *r* de vértice *P* existe un arco de circunferencia a_c, tal que $P \in a_c$, que cumplen $a_c \subset [r_1, r_2]$.

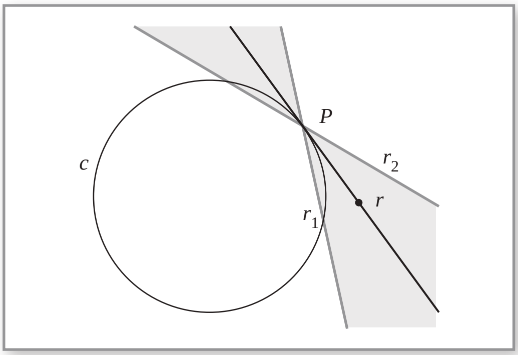


Figura 4-9 Recta tangente a *c* en el punto *P*.

Estas proposiciones establecen una caracterización de la recta tangente y de las rectas secantes a una circunferencia en un punto como propiedad relativa al punto de contacto con la circunferencia. Estas rectas secantes y la recta tangente son establecidas mediante una propiedad local, propiedad relativa a un único punto de la circunferencia.

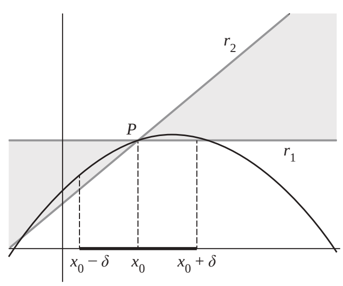
4.2 Posiciones relativas de una recta y la gráfica de una función

Se destaca la propiedad de que un arco de la gráfica esté contenido en un cono.

Definición 4.2.1 Entorno cónico local

Sean $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en D, $x_0 \in interior\ (D)$ y $P = (x_0, f(x_0))$. Un entorno cónico local, o c-entorno local, de la gráfica de la función f de vértice P es un cono $[r_1, r_2]$, con $\{P\} = r_1 \cap r_2$, para el cual existe un entorno $U_{x^0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de x_0, tal que la gráfica de la función restringida a U_{x^0} está contenida en el cono. Es decir, $\{(x, f(x)) | x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \subset [r_1, r_2]$.

Figura 4-10 c-entorno local de una función.



Esta definición se extiende con facilidad a semientornos cónicos locales, o c-semientornos laterales.

Definición 4.2.2 Semientorno cónico local

Sean $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en D, $x_0 \in D$ y el punto $P = (x_0, f(x_0))$. Un semicono $[r_1, r_2]$, con $\{P\} = r_1 \cap r_2$, es c-semientorno por la izquierda de P para la gráfica de f, si existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ tal que $\{(x, f(x)) | x \in (x_0 - \delta, x_0)\} \subset [r_1, r_2]$. Un semicono $[r_1, r_2]^+$, con $\{P\} = r_1 \cap r_2$, es c-semientorno por la derecha de P para la gráfica de f, si existe un intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ tal que $\{(x, f(x)) | x \in (x_0, x_0 + \delta)\} \subset [r_1, r_2]^+\}$.

Figura 4-11 *c*–semientorno por la izquierda.

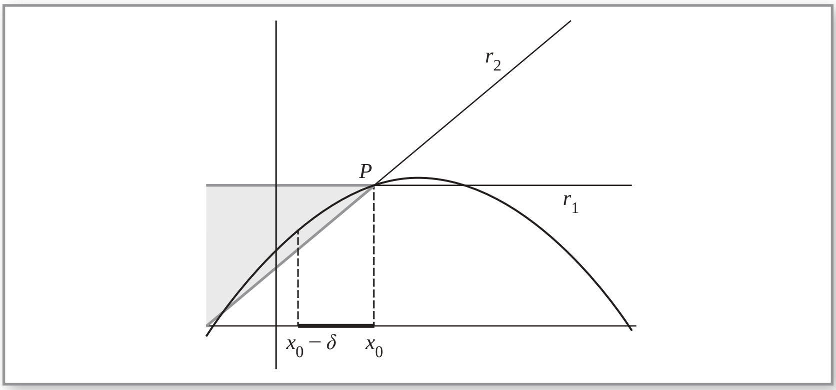
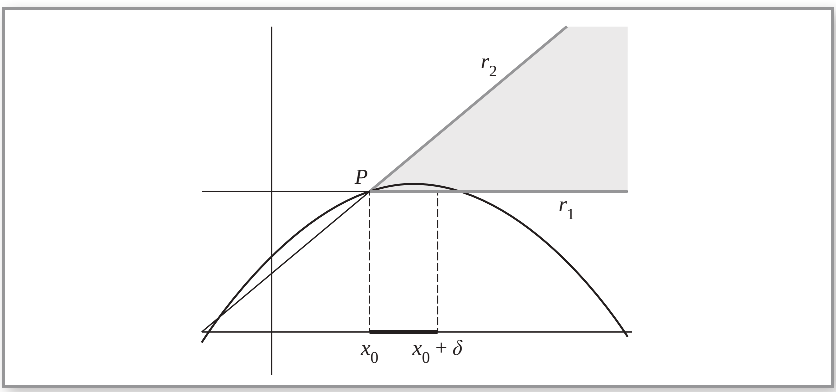


Figura 4-12 *c*–semientorno por la derecha.



Observación. Si sólo se considera un pequeño arco de la gráfica que contiene a cada punto común de las figuras 4-10 a 4-12, resulta que la posición relativa de la recta y la curva es distinta según el punto considerado. Además, con ingenuidad, "cortar localmente" en puntos donde la recta es secante, la gráfica de $f(x)$ está en cada uno de los dos semiplanos que define esa recta. "Tocar localmente" el punto donde la recta es tangente en un punto, la gráfica de la función queda en un único semiplano. Esto ocurre con las rectas secantes y la recta tangente a una circunferencia.

Al considerar la recta tangente en algún punto de inflexión, por ejemplo, la recta $y = 0$ "corta" a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$, y es la recta tangente. Así pues, no se usará la propiedad "cortar o tocar" para definir recta secante o recta tangente en un punto.

Esta definición de recta secante es la generalización de la caracterización de la recta secante de una circunferencia de la proposición 3.2.3. En esta definición se mantiene el sentido local, aunque hubiere más de un punto en común.

Definición 4.2.3 Recta secante en un punto

Sean $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en D, $x_0 \in$ *interior* (D) y $P = (x_0, f(x_0))$. La recta s se dice secante a la gráfica de f en el punto P si y sólo si existe un c-entorno de vértice P de la recta s, $k \in \mathrm{K}_{P,s}$, y un entorno $U_{x^0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tales que $k \cap \{(x, f(x)) | x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} = \{P\}$.

Figura 4-13 Recta secante *s* en *P*.

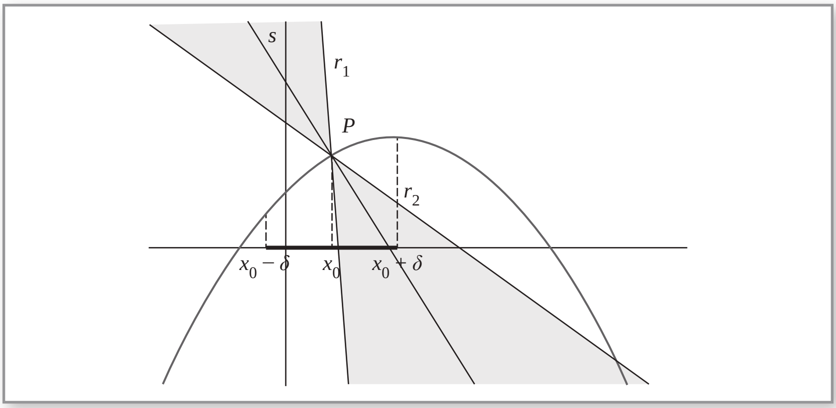
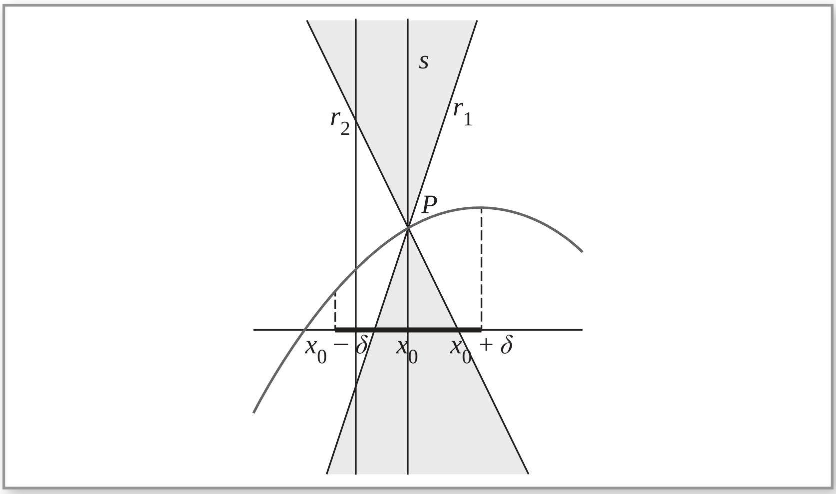


Figura 4-14 Recta secante vertical *s* en *P*.



La definición 4.2.3 se extiende a puntos frontera $x_0 \in D$, usando *c*-semientornos de una recta.

Con estas definiciones, se tiene que la gráfica de cualquier función lineal $g(x) = bx$, es una recta secante para las funciones $f_1(x) = \sqrt[3]{x^2}$ y $f_2(x) = \sqrt{x}$ en el punto $P = (0, 0)$.

Observación. Dada la gráfica de una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en D, $x_0 \in$ *interior* (D) y $P = (x_0, f(x_0))$, por el punto P pasa una infinidad de rectas secantes. Además, la negación de ser secante no define, necesariamente, a la recta tangente para funciones continuas (rectas de la figuras 4-15 y 4-16).

Figura 4-15 Recta tangente por la izquierda.

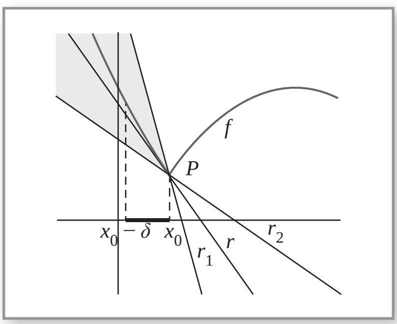
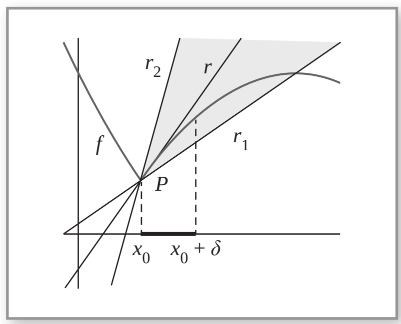


Figura 4-16 Recta tangente por la derecha.



Se describen aquellas rectas que tiene un punto en común con la gráfica en un entorno del punto y no son rectas secantes en el sentido de la definición 4.2.3.

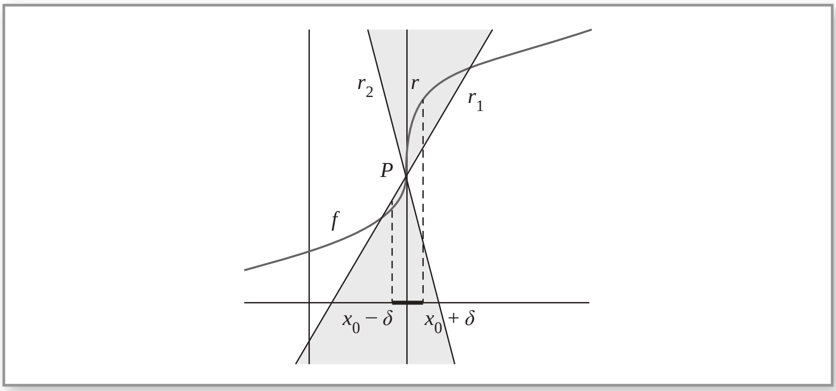
Definición 4.2.4 Recta tangente lateral

Sean $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en D, $x_0 \in D$ y una recta r que con tiene al punto $P = (x_0, f(x_0))$. Donde r es recta tangente por la izquierda (derecha) a la gráfica de f, en el punto P, si y sólo si cada *c*-semientorno de r por la izquierda (derecha) de vértice P, es un *c*-semientorno local de la función f de vértice P por la izquierda (derecha).

Definición 4.2.5 Recta tangente

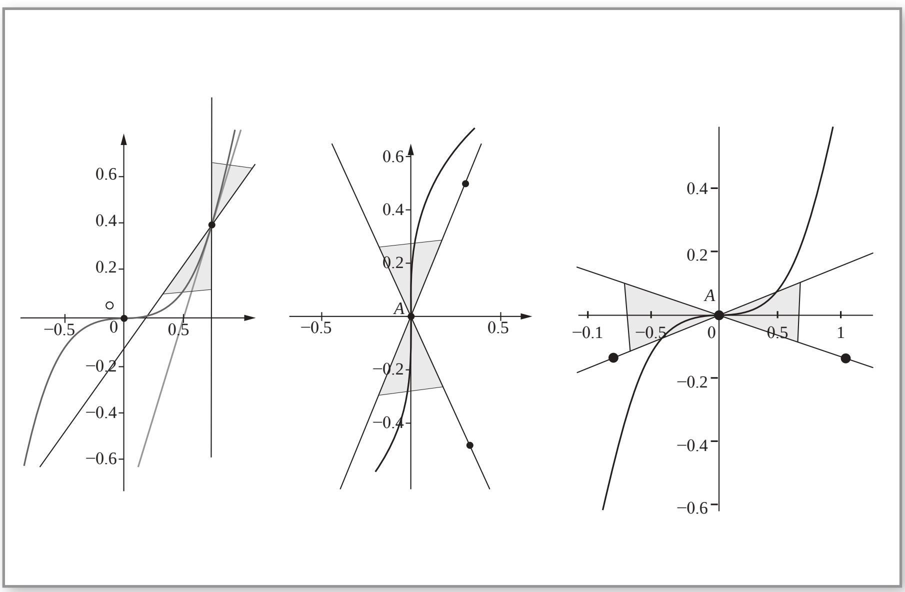
Sean $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en D, $x_0 \in$ *interior* (D) y el punto $P = (x_0, f(x_0))$. r es recta tangente a la gráfica de f en el punto P si y sólo si r es la recta tangente por la izquierda y por la derecha de la función f en P.

Figura 4-17 Recta tangente vertical a f en P.



Con esta definición se tiene que la recta tangente a una función afín, $f(x) = a_0 + a_1x$, en cualquier punto de la gráfica, es la propia recta que define su gráfica.

Figura 4-18 Ejemplos de recta tangente en un punto.



En la figura 4-18 se muestran algunas rectas tangentes y un c-entorno local.

Proposición 4.2.6 Caracterización de la recta tangente

Sean $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en D, $x_0 \in$ *interior* (D) y una recta r que contiene al punto $P = (x_0, f(x_0))$. La recta r es recta tangente a la gráfica de f en el punto P si y sólo si cada entorno cónico de r de vértice P es un entorno cónico local de f de vértice P.

Demostración:

Sea k un c-entorno de r y vértice $P = (x_0, f(x_0))$. Al ser r tangente por la izquierda, para el semicono izquierdo k^- de k existe un intervalo $I^- = (x_0 - \delta_1, x_0)$ tal que $f(I^-) \in k^-$. De forma análoga, al ser r tangente por la derecha, para el semicono derecho k^+ de k existe un intervalo $I^+ = (x_o, x_0 + \delta_2)$ tal que $f(I^+) \in k^-$.

Al considerar $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2]$, entonces $(x, f(x)) \in k$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Es decir, k es un c-entorno local de f.

Sea k_1 un c-semientorno por la izquierda de r. Se considera un c-entorno q_1 de r de tal forma que $q_1^- \subset k_1$ (q_1^- el semicono izquierdo de q_1).

De forma análoga, sea k_2 un c-semientorno por la derecha de r. Se considera un c-entorno q_2 de r de tal forma que $q_2^- \subset k_2$(q_2^+ el semicono derecho de q_2). El cono $k = q_1 \cap q_2$ es un c-entorno de r.

Si k es un c-entorno local de f, entonces k^- es un c-semientorno local, por tanto, k_1 es un c-semientorno local de f. De forma análoga, k^+ es un c-semientorno local, por tanto k_2 es un c-semientorno local de f. Luego, r es recta tangente por la izquierda y por la derecha.

Observación: Este resultado se interpreta como que, para cada c-entorno $k \in K_{P,r}$ de la recta tangente r y vértice P, existe un entorno $U_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ tal que $\{(x, f(x)) | \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ (figura 4-14). Además, la existencia de recta tangente es independiente de la condición de derivabilidad de la función. Por ejemplo, de acuerdo con la proposición 4.2.6, la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en el punto $P = (0, 0)$ tiene como recta tangente a $x = 0$ aunque no existe la derivada de f en $x_0 = 0$.

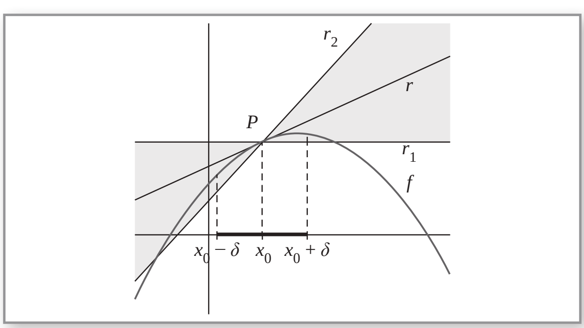


Figura 4-19 Recta tangente a *f* en *P*.

Corolario 4.2.7 Unicidad de la recta tangente

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en D, $x_0 \in$ *interior* (D) y r recta tangente a la gráfica de f en $P = (x_0, f(x_0))$. Entonces, la recta r es única.

Demostración:
Supuesto que r y s son dos rectas tangentes distintas para f en $P = (x_0, f(x_0))$, se consideran el c-entorno k_r de r formado por la recta bisectriz de r y s, y su simétrica con respecto a r y el c-entorno k_s de s formado por la recta bisectriz de r y s, y su simétrica respecto s.

Como r es recta tangente, entonces existe $U_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ tal que $\{(x, f(x)) | \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \subset k_r$.

Elegidos esos conos, entonces $\{(x, f(x)) | \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\} \cap k_s = \{P\}$ para cualquier $0 < \delta_1 < \delta$. Lo cual contradice el hecho de que s sea recta tangente.

5. Recta tangente a la gráfica de una función derivable

Las nuevas definiciones de recta tangente propuestas son equivalentes a la definición tradicional para una función derivable f en x_0.

Proposición 5.1 Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable por la izquierda en $x_0 \in D$ y el punto $P = (x_0, f(x_0))$. La recta $r \equiv y = f(x_0) + f'^{-}(x_0)(x - x_0)$ es la recta tangente por la izquierda a la gráfica de f en P.

Demostración: Sea $k^{-}[r_1, r_2]^{-}$ un c-semientorno por la izquierda de r de vértice P. Supongamos, sin perder generalidad en el razonamiento: $r_1(x) = f(x_0) + m_1(x - x_0)$, $r_2(x) = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ y $r_1(x) \leq r(x) \leq r_2(x)$, $\forall x < x_0$.

Al considerar $\beta = |m_1| + |m_2| \neq 0$, se cumple:

$$|r(x) - r_1(x)| \leq |r_2(x) - r_1(x)| \leq \beta |x - x_0|$$

y

$$|r(x) - r_2(x)| \leq |r_1(x) - r_2(x)| \leq \beta |x - x_0|, \quad \forall x < x_0$$

Al ser f derivable por la izquierda en x_0, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$. Así pues, $\forall \varepsilon > 0$ existe un intervalo $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0) \subset D$ tal que:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'^{-}(x_0) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Por tanto,

$$|f(x) - f(x_0) - f'^{-}(x_0)(x - x_0)| = |f(x) - r(x) < \varepsilon\, |x - x_0|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Además

$$|f(x) - r_1(x)| \leq |f(x) - r(x)| + |r(x) - r_1(x)| \leq \varepsilon\, |x - x_0| + \beta|x - x_0|, = (\varepsilon + \beta)|x - x_0|$$

Basta considerar el valor $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\varepsilon + 2\beta}$ para que

$$|f(x) - r_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |f(x) - r_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Así pues el c-semientorno k^{-} es un c-semientorno local de la gráfica de f y de vértice P por la izquierda. Luego, r es la recta tangente por la izquierda en el punto P. Con el mismo proceso de demostración se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 5.2 Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable por la derecha en $x_0 \in D$ y el punto $P = (x_0, f(x_0))$. La recta r de ecuación $r \equiv y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la recta tangente por la derecha a la gráfica de f en P. Como consecuencia de las proposiciones 4.1 y 4.2 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.3 Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x_0 *inferior* (D) y el punto $P = (x_0, f(x_0))$. La recta r de ecuación $r \equiv y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la recta tangente a la gráfica de f en P.

Conclusiones

En este trabajo se ha precisado el concepto de recta secante a la gráfica de una función en un punto como una propiedad local del punto y no se prioriza el número de puntos comunes de la recta y la gráfica. Este concepto ha permitido definir el concepto de recta tangente en un punto, y presentar un método de aproximación de la recta tangente en un punto a partir de dos rectas secantes en ese punto. La precisión de la aproximación puede validar el proceso común de dibujar la recta.

Esta nueva definición es equivalente a la definición tradicional para una función derivable, y es aplicable a funciones continuas no derivables en un punto. El método de búsqueda permite decidir si existe, o no, la recta tangente.

Se ha privilegiado el carácter intuitivo y gráfico de la definición en este trabajo, si bien, la definición y el método son descriptibles en métodos algebraicos.

La accesibilidad gráfica-visual permite presentar el concepto en los cursos de precálculo, sin hacer uso directo del concepto de límite ni del de derivada. Además, facilita la preparación del estudiante para comprender la derivada. Sin duda, el cálculo con la derivada presenta a la recta tangente de una forma sencilla pero algebraica en exceso.

Esta definición llena el espacio vacío entre la definición de recta tangente euclidiana y la del cálculo diferencial, y es una extensión de la presentada por Leibniz en aquellos puntos donde la función no es derivable, sino que mantiene su carácter local. Por ello, elimina las contradicciones y conflictos cognitivos relatados, muy frecuentes en la enseñanza del cálculo. Además, facilita la definición de la derivada sin entrar en ciclos educativos viciosos sobre este concepto.

Referencias

Andreu Ibarra, M. & Riestra Velázquez, J. A. (2007). Et si nous en restions à Euler et Lagrange? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures, *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Vol. 12, IREM de Strasbourg, Francia.

Apollonius of Perga (1978). Conics II. *On conic sections*. Encyclopedia Britannica, Inc. The Great books. Chicago: University of Chicago.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, núm. 23, 241-286.

Bell, E.T. (2009/1937). Capítulo IV. El príncipe de los aficionados: Fermat. *Los grandes matemáticos*, traducción de Felipe Jiménez de Asúa. Buenos Aires: Losada.

Campistrous, L. A., López Fernández, J. M. & Rizo Cabrera, C. Historia y didáctica: el caso del escrito de L'Hôpital Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Epsilon: *Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»*. 01/2011, 28 (77), 51-64. Recuperado de http://www.researchgate.net/publication/269517080

Cantoral, R. & Miron, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 3(3), 265-292.

Canul, E., Dolores, C. & Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 173-202.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1).

Coolidge, J. L. (1951). The Story of Tangents. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 58, núm. 7 (agosto-septiembre, 1951), 449-462.

Cuevas, C. A. & Madrid, H. (2013). Software educativo y el cálculo de raíces reales para el desarrollo de un curso conceptual de cálculo diferencial e integral; una historia sin fin. *La enseñanza del cálculo diferencial e integral, compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en Matemática Educativa*. Cuevas, C.A. & Pluvinage, F. (eds.). Pearson Educación, 1-16.

Cuevas, C. A. & Díaz, J. L. (2014). La historia de la matemática, un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. *El Cálculo y su Enseñanza*, año 5, vol. 5, septiembre 2013-septiembre 2014. México: Cinvestav-IPN, 165-179.

Descartes, R. (1954). *The Geometry*. Nueva York: Dover. (Traducido al inglés por D. E. Smith y M. L. Latham).

Euclides. (1991). *Elementos*. Libros I-IV. Trad. Ma. Luisa Puertas C. Madrid: Gredos.

Grabiner, Judithv. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56(4), septiembre.

Grattan-Guinness, I. (1984). Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una Introducción histórica. Grattan-Guinness, I. (comp.). Madrid: Alianza.

Kajander, A. & Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173-181.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journa*l, 20(4), septiembre, 282-300.

L'Hospital (1696). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, París: L'Imprimerie Royale.

Martínez de la Rosa, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. *Suma,* 61, 7-15.

Suzuki, J. (2005). The Lost Calculus (1637-1670): Tangency and Optimization without Limits. *Mathematics Magazine*, 78(5), diciembre.

Viseu, F. & Almeida, C. (2003). Interpretação gráfica do conceito de recta tangente a uma curva num ponto por professores estagiários. *Revista Portuguesa de Educação*, 16(2), 197-220. Portugal: CIEd/Universidade do Minho.

Vivier, L. (2011). La noción de tangente en la educación media superior. *El Cálculo y su Enseñanza,* vol. II, 1-29.

CAPÍTULO 5

Una clasificación de aspectos relacionados con los números reales en el nivel superior

Eloísa Benítez Mariño[1] y *José Rigoberto Gabriel Argüelles*[2]

Resumen

Este capítulo presenta un estudio descriptivo correlacional en el que se pregunta a los estudiantes qué es un número real. Se construye una clasificación con las ideas de los estudiantes y se compara con algunas categorías acerca del concepto obtenidas en un estudio previo, las cuales integran una categorización de los números reales. Se organizaron dos grupos distintos que aportaron sus respuestas, uno de 95 estudiantes de Ingeniería, y otro de 33 de Matemáticas. Las respuestas que proporcionaron los estudiantes se examinaron y detallaron mediante la técnica de análisis de contenido, a fin de constituir una clasificación para explicar e interpretar, además de para relacionarla con los elementos de la categorización. También se muestran algunas respuestas a la pregunta abierta y se verifican las categorías y características previas. Los resultados muestran que es necesario trabajar más en el entendimiento y aprendizaje acerca de los números reales.

Palabras clave: número real, clasificación, categorización, tarea abierta.

[1] elobenitez@uv.mx, Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, México.
[2] jgabriel@uv.mx, Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, México.

Abstract

This chapter present a descriptive correlational study in which, we ask to students what is a real number. We have built a classification with the ideas of the students and it was compared to some categories about this concept that we had obtained through a previous study and that integrate a categorization for the real number. We had two different groups for working in the answer. A group of 95 engineering students and a group of 33 math students. The content analysis of the responses was used as a technique. The answers of the students has been examined and detailed to the constitution of the classification for purposes of explanation and interpretation and its relationship with the categorization. We also show some answer to the open question and we have verified the previous categories and characteristics. Nevertheless, the results show that it is necessary to work more on the understanding and learning about the real numbers.

Keywords: real number, classification, categorization.

Planteamiento del problema y justificación

Al realizar la pregunta *¿qué es un número real?*, las respuestas pueden ser muy variadas. En el ámbito universitario, en particular en el área de las ciencias e ingenierías, se esperaría que las respuestas fueran: "es una sucesión de Cauchy de números racionales", "es una cortadura de Dedekind" o "es un punto de una recta". En este capítulo se muestra una clasificación de las distintas respuestas a la pregunta formulada y de las diferentes vertientes que adquieren. Esta clasificación está basada en las respuestas que dieron estudiantes de nivel superior sobre el concepto de número real, que después se compara con una categorización de los números reales resultante de un estudio previo.

Para elaborar la categorización de los números reales, se realizó un estado del arte basado en el análisis de investigaciones sobre este concepto, con la finalidad de encontrar una definición desde un punto de vista didáctico que se pueda presentar a estudiantes de los primeros semestres del nivel universitario. En dicho análisis no se encontró una definición de número real con las características indicadas (Benítez, 2015), por lo tanto se propone una categorización que puede apoyar el trabajo con los números reales. Además, ésta proporciona ideas sobre las propiedades matemáticas, resaltando las representaciones, usos y el papel de este tipo de números, que son la base del Cálculo y en general del análisis real en Matemáticas.

Investigaciones sobre la enseñanza de los números reales

Un análisis de investigaciones sobre la enseñanza de los números reales (Benítez, 2015) muestra las dificultades para trabajar el concepto y los aspectos del número real. Se distingue que las dificultades encontradas se presentan desde el nivel básico hasta el universitario. Entre ellas se encuentran:

- Dificultades para trabajar con los subconjuntos de los números reales y su respectiva definición (naturales, enteros, racionales e irracionales), así como con las propiedades algebraicas.
- Obstáculos epistemológicos en la introducción y evolución de ideas asociadas a los subconjuntos.
- Dificultades con conceptos relacionados con los números reales (por ejemplo, decimales, infinitesimales y límites).
- Dificultades para el trabajo con las distintas representaciones y la densidad.

Las nociones de orden presentan dificultades para los estudiantes del nivel medio superior, en tanto que el trabajo con las propiedades algebraicas que involucran el cero y el infinito presentan dificultades para los estudiantes del nivel superior y universitario.

Algunos aspectos de los números reales como los significados, numerabilidad, completitud —nociones relacionadas con una posible definición didáctica de los números reales y el cambio de trabajo de la matemática discreta a la continua—, presentan dificultades para los estudiantes en el nivel superior. Otros aspectos que han recibido atención en algunos estudios son la irracionalidad, el conocimiento intuitivo y formal, conceptos relacionados y tipos de pensamiento (a modo de ejemplo cronológico, ver Tall & Schwarzenberger, 1978; Monaghan, 2001; Sirotic & Zazkis, 2007; Bergé, 2008; Zachariades, Christou & Pitta-Pantazi, 2013).

En el análisis de diversas investigaciones sobre los números reales se encontró que no existe una integración sobre las ideas, características o propiedades principales de los números reales, sino que cada autor justifica la importancia de su tema de investigación haciendo alusión a la importancia que tiene en la Didáctica de estos números.

Esta revisión de documentos de investigación mostró que, si bien se habían considerado las dificultades para trabajar estas nociones vinculadas a los números reales, aún no se lograba establecer una herramienta o definición que apoyara el trabajo con este concepto. Con esta base, Benítez (2015) propone una herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje del concepto, una categorización didáctica del concepto de números reales que fue obtenida del análisis de algunos textos de Matemáticas, Investigación educativa e Historia de las Matemáticas.

Debe resaltarse que existen antecedentes importantes del uso de categorizaciones didácticas como alternativa para la enseñanza de conceptos matemáticos, por ejemplo, la de Ursini & Trigueros (1998), que ha resultado ser una buena práctica para estudiar un concepto en diferentes niveles educativos, y que se fundamenta en una descripción de las acciones que realizan los estudiantes al abordar los usos de la variable.

Categorización de los números reales como alternativa para su definición

A fin de superar la problemática descrita —que las ideas subyacentes que fundamentan el concepto de número real presentan dificultades entre los estudiantes desde el nivel básico hasta el superior, y que los textos educativos para la realización de la enseñanza/aprendizaje no ofrecen una definición didáctica— se propone la alternativa de emplear una categorización didáctica, que es resultado y producto de un proceso de investigación.

A través del análisis de los textos se identificaron nueve aspectos principales o categorías necesarias para que el estudiante pueda realizar de manera satisfactoria tareas que implican trabajar con los números reales. Las categorías con las que un estudiante debe trabajar para tener información y conocimiento necesario y suficiente sobre el tema son:

- Los subconjuntos que los componen (SC).
- Sus representaciones y significados (RS).
- Las distintas construcciones de los números reales (CN).
- Las propiedades algebraicas que los caracterizan (PA).
- Sus propiedades de orden (PO).
- Las propiedades topológicas (PT).
- La infinitud en los números reales (IR).
- Conteo, numerabilidad y no numerabilidad (NN).
- Completitud en los números reales (PC).

Se aclara que las categorías enunciadas cuentan con aspectos específicos relacionados con los números reales. Para este estudio sólo se utilizarán las categorías para clasificar las respuestas de los estudiantes. Un estudio más amplio implicaría reconocer los aspectos de cada categoría con respecto a las ideas que manifiestan los estudiantes, las características que abordan los libros de textos, o enfocarla al estudio de los maestros.

Las categorías anteriores serán consideradas en adelante como herramienta, marco de referencia y dominio de investigación para observar el diseño instruccional aplicado, así como analizar la evolución del currículo y de las ideas de enseñanza o prácticas. También deberán corroborar los aspectos que son propicios para conformar la identidad didáctica del número real, entre otros. En particular, en esta investigación las categorías se emplean para establecer una comparación con las respuestas de los estudiantes con relación a los aspectos de los números reales que contempla la categorización, tomando como base que, al no existir una definición adecuada para los estudiantes del nivel universitario, la alternativa es que, entre más aspectos de la categorización sean parte del conocimiento de los estudiantes, mayor será el nivel de comprensión de los números reales.

Las categorías han tenido aportaciones significativas en el avance de distintas ciencias o del conocimiento, por ejemplo, la categoría de *contradicción* en la dialéctica materialista (Dialéctica, 2001). Con base en lo considerado por Cole (2003) sobre herramientas, lenguaje y mediación, se puede mencionar que, si bien el trabajo con los números reales implica más que el uso de herramientas para lograr esta meta, una categorización puede apoyar en el uso de lenguaje y la mediación simbólica en el sentido de Vygotski. Además, de acuerdo con Papay (2012), es imprescindible revisar y evaluar los propósitos didácticos que permiten el desarrollo profesional con ayuda de herramientas, por lo que el uso de una categorización debe ser explicitado para conocer a mayor profundidad sus aportes.

Aspectos metodológicos

El tipo de estudio es cualitativo descriptivo correlacional, tendiente a conocer relaciones entre variables y su grado de asociación. Los participantes son estudiantes de una licenciatura en Matemáticas y estudiantes del área de Ingeniería. La selección de los participantes se realizó por conveniencia, con el único requisito de estar adscritos a las áreas citadas. Cabe mencionar que estos estudiantes han tomado cursos de matemáticas en sus niveles escolares previos, así como algunos cursos de matemáticas del nivel superior. Las herramientas utilizadas en este estudio son una categorización y un cuestionario con una pregunta de respuesta abierta.

Se utilizó la técnica de análisis del contenido. El estudio se organizó a partir de una pregunta de respuesta abierta con la que se obtuvo información de los consultados. La recolección de datos se apoyó en la respuesta escrita del cuestionario. Posteriormente, se realizó el análisis de las respuestas para seleccionarlas y elaborar la clasificación que se compara con las categorías previamente consideradas. Lo anterior permite dilucidar si la clasificación de las respuestas se relaciona con la categorización o si se deben considerar otras características para el mejoramiento de la categorización. Esta forma del análisis de datos se apoya en el estudio previo de Benitez (2004).

Análisis de respuestas

La pregunta *¿qué es un número real?* fue contestada por 33 estudiantes de la licenciatura en Matemáticas y 95 de diversas ingenierías. Las respuestas de los estudiantes de Ingeniería se agruparon en ocho rubros: propiedades algebraicas, subconjuntos (naturales, enteros, racionales e irracionales), magnitudes físicas, punto de una recta, uso para contar, conjunto $(-\infty, \infty)$, subconjuntos (positivos, neutro, negativos), y otras. Las respuestas de los estudiantes de Matemáticas se agruparon en siete rubros: axiomas de campo, subconjuntos (naturales, enteros, racionales e irracionales), magnitudes físicas, punto de una recta, sucesión de Cauchy, uso para contar y ente abstracto. Se observó que algunos estudiantes apuntaron características pertenecientes a diferentes rubros.

En la tabla 5-1 se muestran las respuestas de los estudiantes de la licenciatura en Matemáticas. Los rubros con mayor frecuencia (11) de respuestas iguales están relacionados con los axiomas de campo algebraico y con los subconjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales. Por ejemplo, la respuesta del estudiante 2 fue que "son los números con los que podemos realizar todo tipo de operaciones"; este estudiante relaciona el número real con las *operaciones algebraicas*, sin embargo, no puede detectar que existen otros conceptos matemáticos (funciones, sucesiones, matrices, etc.) que también tienen una estructura algebraica y con los que se realizan operaciones.

Tabla 5-1 Alumnos de Matemáticas.

Total de alumnos de Matemáticas: 33							
Rubro	**Axiomas de campo**	**Subconjuntos N, Z, Q, I**	**Magnitud física**	**Punto de una recta**	**Sucesión de Cauchy**	**Uso para contar**	**Ente abstracto**
Frecuencia	11	11	2	5	3	6	4

El estudiante 26 menciona que "es un elemento del conjunto de los números reales que satisfacen los axiomas y propiedades que éste tiene". Este estudiante tiene la percepción de que existe un conjunto de números reales que cumple con ciertas propiedades, pero no las menciona, y permite dudar de la imagen mental del concepto de número real que posee. Para el estudiante 32, "es un elemento del conjunto de los números reales. Este conjunto es no vacío y cumple los axiomas de campo"; se puede interpretar que este estudiante tiene claro el concepto de campo algebraico y asocia los números reales como aquellos objetos que satisfacen las propiedades de un campo, sin embargo, existen varios objetos matemáticos que también constituyen un campo (los números racionales, los números complejos, las congruencias modulo p, con p un número primo, etc.), por lo tanto, un número real no puede ser caracterizado solamente como un objeto que satisface las propiedades de un campo.

Con respecto al agrupamiento de la respuesta relacionada con *subconjuntos naturales, enteros, racionales e irracionales*, el estudiante 3 respondió: "Es un número que pertenece al conjunto de los números reales. Puede ser racional o irracional". Como se puede observar, este estudiante asume que un número real ya es un número y tiene la noción de que los números reales se dividen en dos conjuntos ajenos: los racionales y los irracionales. Sin embargo, queda ambiguo qué concepto tiene de número racional y de número irracional. El estudiante 11 dice que "los números reales son todos los números positivos, los negativos, los enteros y los racionales"; esta respuesta tiene la característica de reflejar una percepción incompleta sobre los subconjuntos de los números reales, al mencionar que son los negativos y los positivos, no queda claro si el número cero ha sido considerado dentro de los positivos. También es interesante observar que el estudiante no menciona los números irracionales; probablemente no tenga una idea clara del concepto de número irracional.

El tercer agrupamiento, que relaciona los números reales con *magnitud física*, sólo recibió dos respuestas. El estudiante 1 contesta: "para no hacer tan larga esta escritura, sólo me queda decir que sólo es una denominación matemática que se da a estos números, ya que es por el simple hecho de que se puede describir el mundo físico con base en estos números, por ejemplo, la temperatura, o también en otros aspectos cotidianos como pagar o endeudarse". Cabe mencionar que este estudiante dio una amplia explicación de lo que considera número real, y su respuesta fue agrupada en tres rubros. Es importante citar la frase con la que cierra su respuesta "[…] solamente es mi humilde opinión y conocimiento, es lo que yo creo que son los números reales, con el perdón de tal vez, un matemático que sepa de verdad y me pueda explicar ¿qué es un número real?". Este alumno no tiene claro lo que es un número real, para él es un concepto matemático que cuenta con muchas características y piensa que sólo los matemáticos podrían dar una definición clara y concisa de lo que es un número real.

El cuarto agrupamiento, *punto de una recta*, se asoció con cinco respuestas. Se puede considerar que ésta debió ser la respuesta con más frecuencia, en virtud de que un primer acercamiento a un número real, presente desde la educación primaria, es su representación en una recta. Este desplazamiento podría explicarse porque durante la licenciatura en Matemáticas se fomenta la abstracción y se induce a los estudiantes a no dar argumentos geométricos para los razonamientos, dado que en algunos casos un argumento geométrico no es algo general, sino particular. Para el estudiante 4, "es un número que tiene una representación gráfica o una aproximación en la recta real". En la primera parte de su respuesta, no toma en cuenta que otros conceptos matemáticos también tienen representaciones gráficas, por ejemplo, un número complejo, un vector en tercera dimensión, una función, etc. La segunda parte permite considerar que tiene la idea de que algunos números no pueden ser representados en la recta, sólo aproximaciones (posiblemente racionales) de los números reales se pueden poner en correspondencia con un punto de una recta. El estudiante 17 responde que es "un símbolo que representa un valor numérico y éste es posible representarlo en una recta". Este estudiante alude a dos representaciones, una numérica y otra geométrica y, al parecer, la numérica se asocia con lo decimal y con la idea de que todo punto de la recta es un número real.

Tres respuestas se relacionan con la *sucesión de Cauchy*. Se esperaría que la respuesta de la mayoría de los estudiantes de una licenciatura en Matemáticas esté relacionada con sucesión de Cauchy o con cortadura de Dedekind, en virtud de que para los matemáticos una respuesta formal y consistente de qué es un número real sería: "un número real es una sucesión de Cauchy de números racionales" o "un número real es una cortadura de Dedekind de números racionales". Cabe mencionar que la frecuencia para sucesión de Cauchy es muy baja, y ninguna respuesta está asociada con cortadura de Dedekind.

En la respuesta del estudiante 8 sobre este tema se dice que "es donde convergen todas las sucesiones de Cauchy de racionales". La respuesta es un tanto ambigua; al parecer, trata de establecer algún conjunto formado por los límites de sucesiones de Cauchy. Desde el punto de vista matemático, ver a un número real como una sucesión de Cauchy es un proceso muy complicado y difícil de entender, porque un número real no sólo es una sucesión de Cauchy, sino la clase de equivalencias de sucesiones de Cauchy de números racionales. Además, estas sucesiones no necesariamente convergen dentro del conjunto de números racionales; se debe hacer una extensión al conjunto de números racionales para establecer la convergencia de las sucesiones de Cauchy. Para el estudiante 25 "es un elemento de un campo que se construye con series que convergen fuera de los racionales", respuesta que introduce un elemento adicional, la serie de números racionales. El estudiante tiene la idea de que las series convergentes de números racionales que no convergen a un racional generan a los números reales, lo cual resulta ser una conjetura interesante.

Este primer análisis concluye con las respuestas sobre *ente abstracto*. El estudiante 10 contesta que "es un ente abstracto perteneciente al campo de los reales", el estudiante 12 menciona que "es un ente abstracto que cumple con ciertas características o axiomas y que se ocupan para la mayoría de las cosas en la realidad", y el estudiante 16 lo describe como "un símbolo que se utiliza para representar entes creados por humanos". En las tres respuestas los estudiantes consideran al número real como una abstracción creada por el ser humano, que habita solamente en la mente. Al respecto, existe la discusión sobre si un número real existe como un objeto palpable o sólo como una representación mental, por ejemplo, cuando decimos "10 copas de vino" o "10 sillas", lo que estamos contando son los objetos (copas y sillas), y el número 10 indica que existe una correspondencia uno a uno entre las copas y las sillas, lo cual es muy útil en un banquete donde hay que poner mesas para 10 invitados.

La tabla 5-2 muestra cómo se agruparon las respuestas de 93 estudiantes de carreras de Ingeniería. A diferencia de los estudiantes de la licenciatura en Matemáticas, los de Ingeniería se inclinaron con mayor frecuencia por la agrupación s*ubconjuntos naturales, enteros, racionales e irracionales* (34 respuestas), seguida de *punto de una recta* (29 respuestas). También es importante hacer notar que los rubros *conjunto* (−∞, ∞*) y conjuntos de positivos, negativos, neutro* obtuvieron 17 respuestas cada uno. Todo lo anterior está relacionado con los libros de texto, por ejemplo, Leithold (1981) y Stewart (2012), empleados en cursos de cálculo de manera frecuente. Cabe mencionar que estos autores no incorporan un estudio detallado sobre números reales, pues sólo hacen notar que están relacionados con los puntos de una recta, que son el conjunto de números comprendidos en (−∞, ∞), que se pueden clasificar en negativos,

Tabla 5-2 Alumnos de Ingeniería.

Total de alumnos: 95								
Rubro	**Propiedades algebraicas**	**Subconjuntos N, Z, Q, I**	**Magnitud física**	**Punto de una recta**	**Uso para contar**	**Conjunto (−∞, ∞)**	**Conjunto de positivos negativos, neutro**	**Otras**
Frecuencia	3	34	9	29	9	17	17	12

neutro y positivos, o que están formados por los números naturales, los números enteros, los números racionales o los números irracionales.

Con respecto a la agrupación *subconjuntos naturales, enteros, racionales e irracionales*, el estudiante 3 dice: "un número real es aquel que puede ubicarse en una recta numérica viendo números enteros, fracciones, radicales positivos". Su respuesta es ambigua, tiene la idea de que las raíces son también números (irracionales), y hace hincapié en que sólo se pueden sacar raíces de números positivos. Resulta interesante que no hace uso del número racional y sigue utilizando la nomenclatura de los niveles básicos de fracción.

Para el estudiante 6, "es todo aquel número que se puede ubicar en la recta numérica (enteros positivos y negativos, fraccionarios, decimales, racionales, irracionales, etc.)". Este estudiante menciona fraccionarios y racionales, por lo que no es claro si los considera como dos conjuntos diferentes o sólo es redundante. También menciona los números decimales y da la impresión de no tener claro que los números racionales tienen una representación decimal; pareciera que para él los decimales son un conjunto diferente a los racionales. El estudiante 10 respondió que "es una representación de unidades que vemos todos los días. Pueden ser fraccionarios, radicales, etc. Los números reales los tenemos en todas partes". Este estudiante considera al número real como un objeto que se encuentra inmerso en todas partes y tiene un uso cotidiano para el ser humano. El estudiante 16 dice que "los números reales son todos los que podemos ubicar en una recta numérica, que va desde negativos, fraccionarios". Se hace notar que existe una similitud entre las respuestas de estos estudiantes, lo cual podría deberse a haber memorizado una definición dada por los profesores; sin embargo, no recuerdan con exactitud dicha definición.

Otras respuestas demasiado inconsistentes son las siguientes. Estudiante 23: "es un conjunto de números en el cual están involucrados otros grupos, como los números racionales e irracionales, todos éstos deben contar con un valor positivo y pertenecer a un conjunto llamado números naturales". Estudiante 46: "los números reales pueden ser racionales e irracionales que pueden expresarse con números naturales".

Con respecto al *conjunto* $(-\infty, \infty)$ el estudiante 1 da una respuesta muy concisa: "un elemento de un conjunto $(-\infty, \infty)$". Con esta respuesta es difícil saber la percepción que el alumno tiene de número real; se puede asumir que tiene un manejo adecuado de intervalo y está representando a los números reales como el intervalo $(-\infty, \infty)$. El estudiante 11 contesta de manera similar: "es un número que pertenece al conjunto de los números reales, los que incluyen desde el $-\infty$, 0, ∞ tomando en cuenta los decimales, excluyendo a los números complejos". Aquí se nota implícitamente que al mencionar al intervalo $(-\infty, \infty)$ existe una representación geométrica de número real relacionado con una recta; esto se constata con el estudiante 8: "un número real es aquel que se basa en la numeración de negativos, positivos, y decimales, que vienen desde el $-\infty$ al ∞ en un sistema. Y se representa en plano cartesiano en su mayoría, ya que en los ejes '*x*' y '*y*' vienen del $-\infty$ al infinito". Una respuesta similar a la anterior es la del estudiante 25: "es todo aquel número que se encuentra localizado en la recta numérica, a partir del cero hacia el más infinito o infinito negativo".

El análisis de las respuestas de los estudiantes muestra algo interesante. Algunos tratan de explicar qué es un número real con base en que no es un número complejo, es decir, tienen la idea de que dentro del conjunto de números existen los reales y los complejos, pero no distinguen con claridad la diferencia entre ambos. Por ejemplo, para el estudiante 12 "se define como aquel valor existente dentro de un dominio matemático. También se dice que un número real es un valor que se puede representar físicamente, caso contrario de uno imaginario, que es un número inexistente pero necesario para representar ciertos valores. Alumno 20: "son todos los números racionales incluyendo positivos, negativos, cero, que no son imaginarios o complejos". Estudiante 21: "es aquel número donde se encuentran números positivos y negativos. Todos aquellos donde no intervienen el valor imaginario *i*" Estudiante 30: "es aquel que se encuentra localizado en la recta numérica, o plano *x*, ya que los imaginarios se encuentran en el *y*". Lo anterior manifiesta una confusión en los estudiantes que han tenido contacto con los números complejos y tratan de asociar un número real con la parte real de un número complejo.

Algunas respuestas no se pudieron clasificar en algún rubro. Estudiante 9: "un número real es aquel al que se puede sacar raíz y es tangible como números positivos ya que pueden existir". Estudiante 26: "es aquel que puede ser de cualquier tipo excepto siendo negativo y tener algún radical". Estudiante 33: "conjunto de valores que están dentro del plano cartesiano, también se pueden representar en forma de un escalar y son ajenos al plano complejo, aunque este se componga de ellos".

Para finalizar esta sección, se observa que, en la mayoría de los casos, los estudiantes no pueden dar una definición precisa de número real, mientras que en algunos casos mencionan características de los números reales con algunas contradicciones. La mayoría de los estudiantes de Matemáticas basa su definición en los axiomas de campo, mientras que los estudiantes de ingeniería se apoyan en la idea de un punto de una recta.

Una clasificación relacionada con la categorización

En la sección anterior, las respuestas de los estudiantes se agruparon en varios rubros, a fin de integrar una clasificación que será comparada con la categorización de los números reales propuesta en la sección "Una categorización de

Tabla 5-3 Respuestas de los estudiantes en la categorización.

Categoría	Frecuencia	Ejemplos de respuestas
SC	79	• Es todo aquel número que se puede ubicar en la recta numérica (enteros, positivos y negativos, fraccionarios, decimales, irracionales). • Es un grupo de números que puede ser racional o irracional. • Sabemos que los números son la representación abstracta de una cantidad y éstos se clasifican a su vez en distintas ramas, naturales, enteros, racionales, irracionales.
RS	45	• Un símbolo que representa un valor numérico y éste es posible representarlo en una recta. • Un número real es todo aquel que se puede representar en la recta numérica. • Todo número (valor) que se puede representar en un eje coordenado.
CN	3	• Un número real se encuentra en la recta real, y son relaciones de equivalencia, sucesiones de Cauchy. • Es donde convergen todas las sucesiones de Cauchy de racionales.
PA	14	• Es un elemento perteneciente a lo que denominamos el conjunto de números reales los cuales tienen como característica su pertenencia en la recta real, además de cumplir características algebraicas específicas. • Los números reales se pueden encontrar en la recta y además forman un campo numérico que cumple con las propiedades de campo. • Es aquel que forma parte de un conjunto de elementos que conforman un campo, el cual ayudará a realizar operaciones binarias.
PO	0	
PT	0	
IR NN	0 15	• Es una cantidad que resulta de contar los elementos que forman un conjunto y se representa con una R. • Símbolo matemático que expresa una cantidad. • Todo digito numérico existente que sirve para expresar cantidades y hacer cálculos.
PC	0	
Total	**156**	**Respuestas relacionadas con las categorías**

los números reales como alternativa para su definición", para así establecer qué categorías están presentes en las concepciones de los estudiantes y determinar el conocimiento que tienen acerca de los números reales.

En la tabla 5-3 se relacionan las respuestas de los estudiantes con respecto a las categorías de número real, y se muestran algunos ejemplos de respuestas. Al analizar las respuestas de los estudiantes de la licenciatura en Matemáticas y de los estudiantes de Ingeniería, se encontró que las ideas de ambos tipos de grupos son similares. Por lo tanto, al clasificar sus respuestas se decidió no hacer distinción entre el tipo de carrera, y la tabla 5-3 presenta los resultados de los 128 alumnos.

La categorización propuesta contempla nueve categorías, de las cuales cinco se asociaron con las respuestas de los estudiantes, mientras que cuatro no presentaron relación alguna.

La categoría que se relaciona con más respuestas de los estudiantes fue la de *subconjuntos que componen a los números reales*, con 79 respuestas. Lo anterior tiene sustento en el currículo de los diferentes niveles escolares, donde se estudian principalmente los números naturales, los números enteros y los números racionales, aunque también se hace referencia a subconjuntos como los números negativos, los números positivos, el cero, los números pares, los números impares, etc. Por lo tanto, el estudiante tiene una imagen mental de que los números reales se dividen en subconjuntos, sin embargo, no logra percibir que existe una contención entre estos subconjuntos, es decir, que los naturales están contenidos en los enteros y los enteros a su vez están contenidos en los racionales. Además, el conocimiento sobre los números racionales se reduce, en algunos casos, a Pi, *e*, y raíces de algunos números primos. También se pudo detectar que algunos estudiantes mencionan los números decimales, al parecer con la idea de que éstos son diferentes a los números racionales.

La categoría de *representaciones y significados* fue la segunda con más frecuencia (45 respuestas relacionadas). Los estudiantes de Ingeniería relacionaron el número real con un punto de una recta o con un eje coordenado, lo cual indica que tienen una representación gráfica de número real; sin embargo, algunos mostraron confusión al relacionar a un número real con el plano cartesiano. Los estudiantes de Matemáticas mencionaron en menos proporción la representación gráfica, lo cual podría deberse a que la abstracción conforma la práctica en la mayoría de los cursos que toman.

Quince respuestas de estudiantes se refieren a la categoría *conteo*, *numerabilidad* y *no numerabilidad*. En estos casos, relacionaron un número real con cierta cantidad que tiene un uso, principalmente para medir y contar cosas. No se obtuvieron respuestas que tuvieran relación con la infinitud o la numerabilidad de conjuntos, lo cual induce a proponer cuestionarios más específicos sobre este tema.

La categoría *propiedades algebraicas* tuvo 14 respuestas relacionadas, resultado congruente, las operaciones aritméticas asociadas al concepto de número desde la educación básica (suma, multiplicación, resta, división, etc.): los estudiantes asocian la definición de número real con las operaciones algebraicas de éstos. Cabe mencionar que algunos de los estudiantes de Matemáticas definen los números reales como aquellos que satisfacen los axiomas de un campo, pero no logran visualizar que no es su única característica y que existen otros objetos matemáticos que también satisfacen los axiomas de campo.

Solo tres estudiantes, todos de la licenciatura en Matemáticas, relacionaron sus respuestas con la categoría de *distintas construcciones de números reales*. Las respuestas se refieren a la sucesión de Cauchy de números reales. No se hizo ninguna mención de las cortaduras de Dedekind o de construcción con reglas y compás.

Las categorías *propiedades de orden, propiedades topológicas, infinitud de los números reales y completitud de los números reales* no tuvieron respuestas asociadas a ellas. Una posible causa sería que en los cursos de los estudiantes de Ingeniería no se aborden estos temas o no se les dé la importancia requerida. En los cursos de la licenciatura en Matemáticas sí se abordan estos temas, sin embargo, los estudiantes no parecen considerar estas propiedades de los números reales como importantes o trascendentes.

Conclusiones

En este trabajo se analizó la concepción que tienen algunos estudiantes del nivel universitario acerca de los números reales mediante un cuestionario. Sus respuestas se describieron y relacionaron con una categorización de los números reales. No se encontraron diferencias significativas entre las respuestas de los alumnos según su formación (licenciatura en Matemáticas o en diversas ingenierías).

Se corroboró que los estudiantes no tienen una definición concreta y adecuada de número real; en sus respuestas solo describen ciertas propiedades de los números reales y de manera individual sólo una pequeña parte de los estudiantes mencionó tres características de los números reales, de acuerdo a la categorización propuesta.

Con respecto a las respuestas de los estudiantes y su relación con la categorización, en su mayoría los estudiantes describen a los números reales en términos de subconjuntos y de las propiedades algebraicas que éstos cumplen. Un aspecto del diseño instruccional permite observar que los alumnos de Ingeniería asocian un número real con un punto de la recta, lo cual indica que poseen una representación gráfica de éste; mientras que los estudiantes de Matemáticas poseen una imagen más enfocada a la estructura algebraica.

Debido a que los estudiantes no poseen una definición adecuada de los números reales, tal como se mostró en esta investigación, se propone como alternativa elaborar actividades didácticas donde el alumno trabaje con las diferentes categorías de números reales. Se parte de que, entre más aspectos conozca de éstos, podrá desarrollar una mayor comprensión al respecto.

Con base en las respuestas que dieron los estudiantes a la pregunta o tarea abierta,[3] a continuación proponemos una definición de número real:

> **Definición:** En el conjunto de los números reales se definen dos operaciones binarias (suma y multiplicación), que hacen que este conjunto forme una estructura algebraica de campo. En este conjunto existen subconjuntos importantes, entre los cuales se encuentran los números naturales, números enteros, números racionales y números irracionales. Los números reales también se pueden dividir en números negativos, el cero y los números positivos. Existen varias representaciones para los números reales, entre ellas encontramos la representación decimal y una representación gráfica como punto de una recta. También podemos asociar los números reales con diversas magnitudes o cantidades. Se pueden realizar construcciones formales de los números reales y una de ellas es mediante sucesiones de Cauchy de números racionales.

La definición anterior está incompleta, en virtud de que no se toman en cuentan todas las categorías, sin embargo, puede ser una primera aproximación y está creada con base en la respuestas de los estudiantes que participaron en esta investigación. Se agrega que incluso cuando los estudiantes son del nivel universitario, algunos elementos de su lenguaje escrito no son del todo adecuados.

Para finalizar, se mencionan algunos trabajos futuros para el uso de la categorización y sus aportaciones:

- Análisis de libros de texto.
- Aplicar cuestionarios sobre número real a profesores de Matemáticas.
- Aplicar cuestionarios sobre número real a expertos (matemáticos).
- Elaborar y aplicar actividades didácticas de los distintos aspectos del número real, que consideren el trabajo colaborativo y retroalimentación, entre otros aspectos.

---

[3] En el sentido descrito por Artigue (2015), quien considera que el conocimiento tiene el potencial para emerger de la resolución de una tarea abierta y avanzar hacia formas convencionales de conocimiento.

Referencias

Artigue, M. (2015). Some Reflections on ICMI Study 22. En Watson, A. & Ohtani, M. (eds.). *Task Design in Mathematics Education: An ICMI Study 22*. Nueva York: Springer.

Benítez, E. (2004). *Los usos de la variable en libros de texto de matemáticas para secundaria (tesis de maestría inédita).* México: Cinvestav.

Benítez, E. (2015). *Una categorización de los números reales* (tesis de doctorado inédita). México: Universidad Veracruzana.

Bergé, A. (2008). The Completeness Property of the Set of Real Numbers in the Transition from Calculus to Analysis. *Educational Studies in Mathematics,* 67(3), 217-235.

Cole, M. (2003). *Psicología cultural: una disciplina del pasado y futuro*, 2a ed. Madrid: Ediciones Morata.

Dialéctica. (2001). *En Filosofía en español*. Recuperado el 5 de mayo de 2018 de http://www.filosofia.org/enc/ros/dia.htm

Leithold, L. (1994). *El cálculo con geometría analítica,* 6a ed. México: Harla.

Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 239-257.

Papay, J.P. (2012). Refocusing the Debate: Assessing the Purposes and Tools of Teacher Evaluation. *Harvard Educational Review*, 82(1), 123-141.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007). Irrational Numbers: the Gap Between Formal and Intuitive Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 49-76.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas.* 7a ed. México: Cengage Learning.

Tall, D. & Schwarzenberger, R.L.E. (1978). *Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits*. Mathematics Teaching, 82(1), 44-49.

Ursini, S. & Trigueros, M. (1998). *Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable.* En Hitt, F. (ed.), *Investigaciones en matemática educativa II*, 445-459. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zachariades, T.; Christou, C. & Pitta-Pantazi, D. (2013). Reflective, Systemic and Analytic Thinking in Real Numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 5-22.

CAPÍTULO 6

Considerando la complejidad del aprendizaje y enseñanza del cálculo a partir de un experimento de diseño de software

Carlos Armando Cuevas Vallejo,[1] *Magally Martínez Reyes*[2] y *Luc Trouche*[3]

Resumen

En este capítulo se presenta el uso de la teoría de la trayectoria documental como marco de investigación para explorar la génesis del software CalcVisual, un sistema tutorial inteligente para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial. Se analizan los elementos de diseño, la adecuación del mismo a partir de la instrumentación por alumnos y maestros, y su aplicación por profesores con diferentes perfiles y experiencia. Estos factores han llevado a una evolución del software, pero también de la difusión del mismo entre diferentes niveles y distintos

[1] Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México; e-mail: ccuevas@cinvestav.mx

[2] Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, México; e-mail: mmreyes@hatmail.com

[3] Institut Français de l'Education, Ecole Normale Supérieure de Lyon, France; e-mail: luc.trouche@ens-lyon.fr

actores, como una forma de uso de la tecnología en el aula con resultados tangibles y reproducibles.

Palabras clave: sistema tutorial inteligente, cálculo diferencial, trayectoria documental, uso de tecnología en el aula.

Abstract

This chapter introduces the use of the theory of the documentary trajectory as a research framework to explore the genesis of the CalcVisual software, an intelligent tutorial system for teaching and learning differential calculus, analyzing the elements of design, the adequacy of the same from the instrumentation by students and teachers, and its application by professors with different profiles and experience. What has led to an evolution of software, but also of a level of use of it at different levels and by different actors, as a way of using technology in the classroom with tangible and reproducible results.

Keywords: Intelligent Tutorial System, Differential Calculus, Documentary Trajectory, Use of Technology in the Classroom.

Revisión de literatura y asuntos teóricos

La conciencia emergente del potencial y de la complejidad del aprendizaje en la enseñanza del cálculo

Uno de los problemas más frecuentes al inicio de la educación superior es la alta tasa de reprobación y falta de comprensión en los cursos tradicionales de cálculo diferencial e integral (Andreu & Riestra, 2007; Artigue, 1991; Hitt & Dufour, 2013; Flores, 2013; Martínez, 2005; Moreno, 2003; Tall, 2013, entre otros).

Por lo tanto, son frecuentes los informes sobre problemas en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial. Las diversas investigaciones al respecto pueden separarse en tres componentes:

- Aquellas que señalan que el cálculo diferencial e integral se enseña con una fuerte carga operativa en detrimento de la parte conceptual (Amit & Vinner, 1990; Tall, 2008; Skemp, 1976). Este tipo de enseñanza se basa mucho en el conocimiento algebraico de los estudiantes y muy poco en la intuición geométrica, y por esta razón este proceso ha sido llamado algebrización del cálculo (Castela, 1995). Está claro que una consecuencia de esto es establecer un repertorio de fórmulas y patrones en los que los significados y los conceptos quedan fuera.

- Otro problema detectado es el conflicto entre el rigor y la intuición. Casi desde la formalización del cálculo surgieron voces que advierten sobre la pérdida de significado en aras del rigor y la formalidad. Imaz & Moreno (2009) afirman que Luzin, Klein, Hilbert y Couran señalaron las consecuencias de haber reemplazado (o no haber tenido en cuenta de manera suficiente) el enfoque intuitivo que había dado tan buenos resultados desde Leibniz, Newton y Euler, y esto se afirma varias décadas después del proceso de aritmetización de Weierstrass, Dedekind y Cantor, como figuras principales. Como Thom Nóvikov señala, si es necesario elegir entre el rigor y los significados, se elegiría el significado (Moreno, 2013). En resumen, el excesivo rigor o aritmétización con el que se muestran los conceptos de cálculo a menudo tergiversan los significados. Debe señalarse que la investigación lógica no se lleva a cabo hasta que la intuición ha completado la tarea de la idealización (Klein, 1896: 247).
- Un tercer problema que se ha detectado en la investigación es el limitado uso de la tecnología digital en la enseñanza del cálculo. Aunque en la actualidad la tecnología es parte de la vida de los estudiantes, y existe un gran desarrollo en dispositivos digitales con software que tiene la capacidad de resolver problemas de cálculo en forma numérica y simbólica (Photomath, Geogebra, Graph, Mathematica y muchos más), una gran cantidad de profesores cuestiona e incluso rechaza el uso de estos dispositivos. Sin negar que el uso de la tecnología presenta ciertos problemas, el proceso de integración de la tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es indudable.

> *La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el aprendizaje de los estudiantes*
> (NCTM, 2016).

La toma de conciencia emergente del potencial y de la complejidad de las herramientas digitales para el aprendizaje de las matemáticas

En la red existe una abundancia de recursos de fácil disponibilidad, pero no es igual de sencillo integrarlos en la práctica y en la enseñanza de las matemáticas en el aula, una complicación que se manifiesta en la enseñanza del cálculo con la integración de calculadoras simbólicas y sistemas de álgebra computacional en los años noventa. Guin & Trouche (1999) señalan que se tiene mucho potencial en dichos entornos, pero también hay una gran complejidad en su integración.

Este potencial se observó con claridad a partir de la verdadera emergencia de los recursos digitales, cuando la tecnología parece esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y muestra su potencial para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso apropiado y responsable de la tecnología. Pueden hacer y probar conjeturas. Pueden trabajar a niveles más altos de generalización o abstracción. Sin embargo, la tecnología no puede reemplazar al profesor de matemáticas, ni puede usarse como un reemplazo de las comprensiones e intuiciones básicas. Por esta razón, el docente debe tomar decisiones prudentes sobre cuándo y cómo usar la tecnología, y debe asegurarse de que la tecnología mejore el pensamiento matemático de los estudiantes (NCTM, 2009).

Con certeza, el uso de la tecnología digital puede facilitar la aplicación de propuestas didácticas, tales como visualizar la realización de una determinada actividad en varios registros de representación semiótica de manera simultánea y transformar la tarea matemática en una tarea experimental que permita una introducción de los conceptos matemáticos más cercanos a su desarrollo histórico. Esto se comprueba en la enseñanza y aprendizaje del cálculo: por ejemplo, con el uso de software comercial y de la red (Alpha mathematica), es posible realizar muchas de las tareas habituales o rutinarias de un primer curso de cálculo, como derivar e integrar de forma numérica y simbólica (Forgaz, 2002; Asiala, 1997; Simmt, 1997).

La contraparte de este potencial apareció también con preguntas del tipo ¿cómo la tecnología influye en la enseñanza de las matemáticas?, ¿de qué manera los estudiantes descubren y construyen significados matemáticos mediante representantes de los objetos matemáticos? y ¿de qué forma pueden manipularlos con el apoyo de interfaces digitales? (Noss & Hoyles, 1996). La aproximación a la didáctica instrumental (Guin, Ruthven & Trouche, 2005) se desarrolló para tomar en cuenta estos fenómenos, distinguiendo dos procesos esenciales, instrumentación frente a instrumentalización, es decir, la influencia de la tecnología en la actividad de los estudiantes frente a la forma en que los estudiantes transforman y se apropian de la tecnología. Este enfoque evidencia también la importancia de las situaciones matemáticas implementadas por el profesor en la clase al tener en cuenta el poder de estas tecnologías.

Cabe destacar que, sin un cuidadoso diseño didáctico, el uso de nuevas tecnologías puede traer más desventajas que ventajas, por lo que es necesario garantizar la legitimidad pedagógica de estas herramientas, e incluso entonces se está lejos de asegurar su legitimidad científica o social. Esto podría generar un círculo vicioso que se ajusta a una actitud de militancia y proselitismo, inadecuada para otorgar herramientas a los docentes que les permitan enfrentar las dificultades que de manera inevitable encontrarán, que les permitan identificar las necesidades matemáticas y técnicas de génesis instrumental y superar una visión ingenua de la tecnología como un remedio para las dificultades de enseñanza (Artigue, 2002). De hecho, el impresionante desarrollo tecnológico digital con la incorporación de software con capacidad de manipulación simbólica, graficación y simulación cuestiona muchas de las prácticas de enseñanza en los cursos de matemáticas (Guin, Ruthven & Trouche, 2005; Ruthven & Hennessy, 2002).

El conocimiento emergente y la complejidad del rol del profesor en estos entornos

La pregunta sobre el rol del docente lleva a un comportamiento negativo y confuso acerca de su habitual tarea que, en muchos casos, conduce a no considerar las herramientas digitales como un recurso positivo, e incluso prohíbe el uso de artefactos digitales en sus cursos. Esta pregunta sobre el uso de la tecnología, que se refleja en los estándares del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), ha producido en los últimos años una cantidad considerable de investigación, con una reflexión crítica sobre la utilidad de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas (Lagrange, 2005). Esta problemática conduce a una primera pregunta didáctica: ¿cómo podemos introducir la tecnología de manera que promueva en el estudiante una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, sin demeritar sus habilidades operativas?

CalcVisual, un proceso de diseño continuo

El software, sus principios de diseño y una visita guiada

CalcVisual, acrónimo de cálculo visual, tiene varios propósitos:

- Ofrecer a la comunidad educativa un tutor inteligente de cálculo diferencial que apoye a los estudiantes en las tareas básicas de un primer curso de cálculo con información matemática confiable.
- Proponer una forma de usar la tecnología para apoyar la enseñanza de las matemáticas.
- Habilitar propuestas didácticas a través de la tecnología.
- Ofrecer una enseñanza de cálculo más conceptual que operativa.

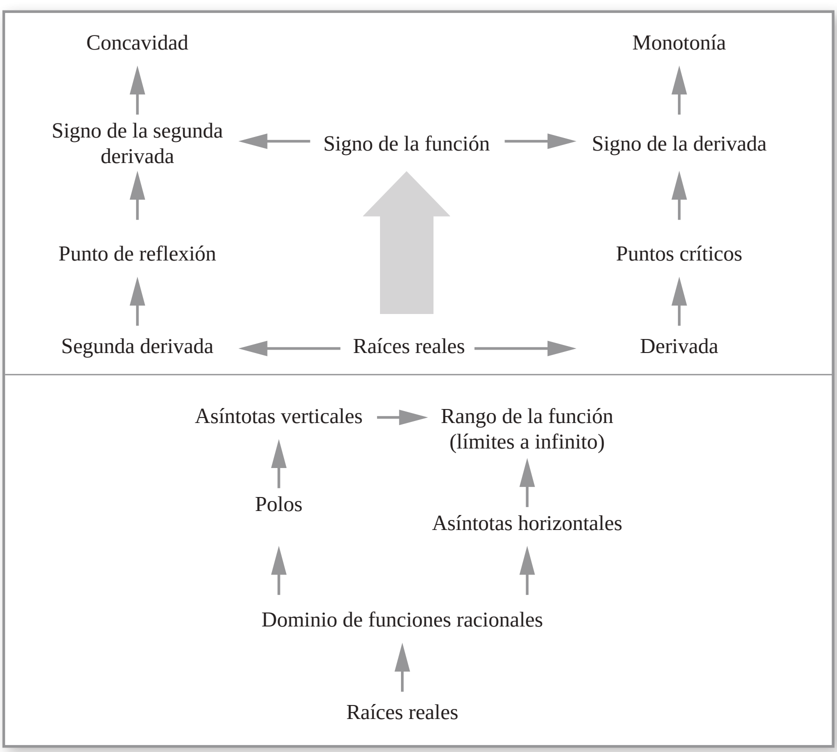
Estos propósitos se orientan al objetivo general de promover una mejor comprensión de los conceptos de cálculo diferencial.

Algunas características didácticas

El cálculo es la herramienta matemática más poderosa para determinar las principales propiedades de las funciones reales. En este sentido, CalcVisual introduce los conceptos de cálculo a través del proyecto de construir y reconocer el gráfico de una función polinómica, como proyecto de acción práctica (Cuevas & Pluvinage, 2003). De esta manera, los conceptos de cálculo se convierten en una necesidad para resolver el problema en juego.

Conceptos tales como raíces reales, signos, límites o derivadas se escalonan para que la resolución de cada uno de ellos sea un instrumento de resolución del siguiente. Por ejemplo, el primer concepto es el cálculo de raíces reales; una vez resuelto, el alumno puede usar este concepto para resolver el signo de la función. A su vez, estos dos conceptos se utilizan en la función derivada para resolver la monotonía de la función a graficar (figura 6-1).

Figura 6-1



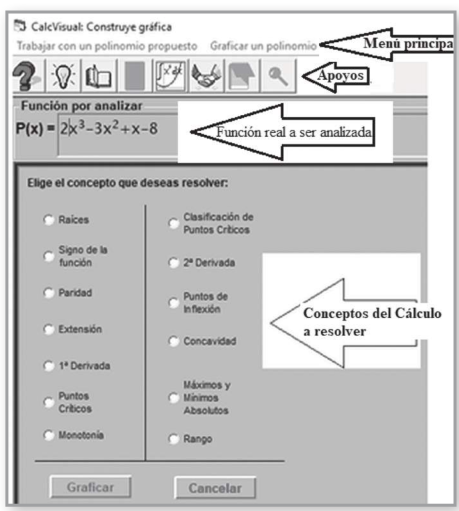
CalcVisual propone resolver cada concepto en varios registros de representación semiótica para promover una conversión entre ellos (Duval, 1988), además, el trabajo realizado en un registro semiótico se muestra en los otros registros (figura 6-3).

Para cada concepto se proponen actividades para resolverlo tanto de forma directa como inversa, y no impone una manera de resolver un cierto problema (Piaget, 1947).

Cómo funciona CalcVisual

Al inicio, el estudiante, el docente o el software proponen un polinomio para analizar y un concepto del cálculo a resolver (raíces reales, signo, monotonía, máximos y mínimos, concavidad y rango, entre otros). Mediante la resolución de los conceptos, se proporciona un esbozo de la gráfica de la función propuesta (figura 6-2).

Figura 6-2

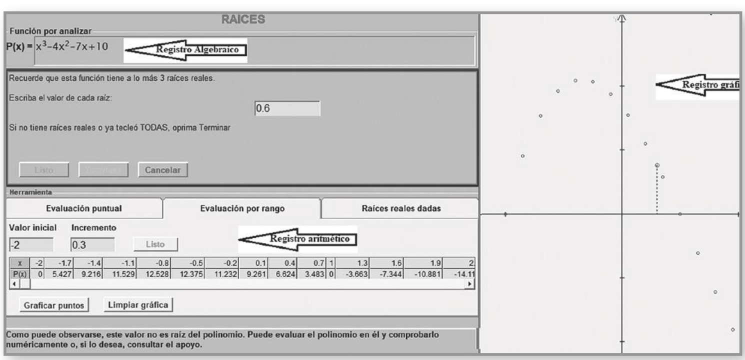


Diferentes tipos de apoyo proporcionados al estudiante

La ayuda o retroalimentación que CalcVisual brinda al alumno se presenta en cuatro formas (figura 6-2). Cualquier ayuda que proporcione el tutor aparece sólo a invocación del usuario. Una vez que el alumno haya leído las instrucciones proporcionadas por el tutor, puede cerrar la ventana y de inmediato volver para continuar con la resolución del problema.

- **Ayuda** (?): se proporciona por medio de un mensaje que comunica la acción que se espera que el usuario tome. Por ejemplo, indicaciones sobre cómo navegar en CalcVisual, qué tipo de datos se espera que el usuario escriba, o cómo se introducen estos datos en el sistema. Este primer nivel de ayuda en el sistema no proporciona guía académica (figura 6-3).
- **Apoyo** ( ): este soporte es ante todo académico y puede ser variable e interactivo. Se refiere a un problema y un nivel de profundidad en particular. Aplica el principio de mínima ayuda (Aebli, 1995), donde se espera que con un ligero "empujón", el alumno sea capaz de superar la dificultad presentada por el problema.
- **Texto** ( ): cuando el apoyo no es suficiente, el alumno puede tener otro tipo de asistencia, con acceso a un glosario de conceptos y terminología en un texto electrónico de cálculo diferencial.
- **Error:** esta retroalimentación se da cuando se produce un error sintáctico o semántico, o cuando se introduce un dato incorrecto. El mensaje indica con precisión el error, y se hace una breve sugerencia para corregirlo. Este mensaje siempre aparece cuando se detecta una falta en la entrada (figura 6-2). Las posibles fallas se detectan una a una (figura 6-3).

Figura 6-3



Es usual que el curso de cálculo tenga asignadas cuatro o cinco horas a la semana. Se recomienda utilizar CalcVisual la mitad de las horas, y en las restantes emplear los recursos tradicionales (pizarra, tiza, diagramas, ejercicios a lápiz y papel, etc.) con el profesor. Se recomienda implementar las horas destinadas a trabajar con CalcVisual en un laboratorio de cómputo sin el maestro. En algunos casos se tuvo el rol de profesor asistente, pero como un observador en el sentido de Keskessa (1994), es decir, que la función del observador debe referirse ante todo a la organización de la actividad del estudiante y a su progreso relacionado con un entorno establecido de antemano (Keskessa, 1994). El trabajo de laboratorio fue diseñado de manera colaborativa, con dos estudiantes por computadora —aquí se aplica la teoría sociocultural de Vygotsky, que señala la importancia del medio ambiente en la adquisición de conocimiento—. Vygotsky afirma que un profesor trabaja como mediador entre el conocimiento y el alumno, de modo que, al incorporar el trabajo colaborativo entre los alumnos, cada uno de ellos, en diferentes momentos, actúa como mediador. De acuerdo con estas ideas, asignar dos estudiantes a una computadora permitió el intercambio de preguntas y redujo la zona de desarrollo próximo, lo cual hizo posible cubrir el contenido del programa de forma más rápida y sencilla así como crear una dinámica de trabajo eficiente.

Se propone iniciar el estudio de polinomios y, una vez finalizado, continuar con funciones racionales y radicales. Aunque es posible llevar a cabo el estudio de racionales y radicales desde el final de la actividad de signo, el profesor elegirá lo que crea conveniente.

En el primer contacto con el sistema, los estudiantes trataron de descubrir cómo funciona y cómo interactuar con él. En esta etapa, la ayuda, los comentarios del tutor, la revisión sintáctica de respuestas erróneas y su interpretación gráfica fueron de gran ayuda.

Al incorporar el uso de CalcVisual en clase, a los estudiantes les resultó motivador experimentar con sus compañeros, ya que el software facilita las actividades de equipo entre el grupo. Sin embargo, también hubo cierta resistencia a modificar el trabajo tradicional, en la medida en que se vieron alterados los roles de profesor y alumno, el curso no se evaluó de la misma manera, y se requirieron habilidades autodidactas, algo que la mayoría de los estudiantes no posee. Además, este método de enseñanza contrasta con el resto de asignaturas de matemáticas, las cuales se enseñan de forma tradicional.

El desarrollo del curso se llevó a cabo de acuerdo con el modelo didáctico de Cuevas & Pluvinage (2003), en el cual la primera sugerencia es introducir un concepto matemático a través de un problema interesante que simule una situación real.

Por ejemplo, para introducir el concepto de raíz de acuerdo con el modelo didáctico, el sistema propone la siguiente actividad:

> Un globo se fija a la base de un contenedor cilíndrico. Una cierta cantidad de agua se pone en el contenedor. Se les pidió a los estudiantes que inflaran el globo hasta que su superficie superior se nivelará con la nueva superficie de agua en el contenedor. Luego se les pidió a los estudiantes que determinaran el radio del globo cuando alcanza la superficie del agua. El experimento se repite con diferentes cantidades de agua con un cierto rango (Cuevas *et al.*, 2005).

Este problema conduce a un polinomio de tercer grado cuya raíz es, de hecho, el radio. Encontrar raíces es un problema típico para los ingenieros. Es necesario señalar que el concepto de raíz real no siempre tiene sentido para los estudiantes, por lo que la actividad les da un sentido de interpretación adicional a su simple cálculo.

Una segunda sugerencia es que cada concepto debe ser enseñado en los diferentes posibles registros de representación semiótica (RRS). El software CalcVisual facilita el trabajo con diferentes RRS. Por ejemplo, los problemas de raíces se proponen a través de un registro gráfico, algebraico o aritmético: si se le pide a un alumno que encuentre el valor de una raíz, puede usar una herramienta en el sistema que proporcione una evaluación para un rango de valores; con esto, el alumno puede dar el valor numérico aproximado de la raíz. Cuando da la respuesta, puede obtener el resultado numérico y ver la respuesta gráfica. Si hay un deslizamiento, aparece un mensaje con una causa precisa del error y una pista para la solución.

Una tercera sugerencia didáctica de la propuesta citada indica que, tan pronto como el alumno puede reconocer un cierto concepto matemático de manera directa, se le pida que trabaje de manera inversa. Por ejemplo, siguiendo el concepto raíz, una vez que el alumno aprende a calcular las raíces reales de un polinomio, el sistema genera de manera arbitraria un cierto número de valores numéricos aleatorios, y luego le pide al estudiante que encuentre un polinomio que incluya tales valores como sus raíces.

Por último, para reforzar el conocimiento de los estudiantes, el modelo didáctico propone ejercicios de aplicación donde se requiere el uso de los conceptos aprendidos. En este caso, el sistema solicita que se determine el signo de una función; para hacer esto con éxito se requiere del concepto de raíz, recién aprendido.

El software, pasos adicionales

En los últimos años se añadió a CalcVisual un escenario didáctico interactivo en el que, a través de la simulación de un fenómeno natural, se introduce un concepto matemático. Una vez que se ha introducido el concepto matemático, se trabaja con CalcVisual. Por ejemplo, a las raíces se les presenta el problema de determinar el radio de un globo sumergido en un tanque, cuando es tangente al nivel del agua (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005). Una vez introducido el problema, CalcVisual comparte con el profesor la responsabilidad en lo que sigue del curso. Debe recordarse que CalcVisual, es un sistema no resolutivo y completamente interactivo.

Ventana 1

¿Cuáles fueron los motivos por los que se creó CalcVisual?

Un testimonio de Armando Cuevas, autor de CalcVisual

Las razones más importantes por las que se creó CalcVisual fueron:

Primera. Cursé mis estudios de bachillerato en un pequeño pueblo, al norte del país. Cuando inicié la educación preparatoria no había ningún maestro de matemáticas que pudiera enseñar geometría analítica; buscaron durante meses en el municipio (pueblos cercanos) y no encontraron. Cuando estudié la licenciatura en Matemáticas (1971), siempre me pregunté cómo personas semejantes a mí podrían obtener un conocimiento matemático, donde no hay profesores de matemáticas.

Segundo. Cuando inicié como profesor en la Universidad Autónoma Metropolitana (la tercera más importante en el país) en 1974, el curso de cálculo consistía en cinco clases semanales; los profesores impartían tres clases y las dos restantes eran dadas por profesores asistentes. Por varias razones, el maestro tenía poca comunicación con los ayudantes, de tal manera que con frecuencia se impartían dos cursos en uno. Aquí surgió la idea de crear un ayudante computacional que se encargara de las tareas más rutinarias del curso y permitiera al profesor dedicar su tiempo a un curso más analítico y conceptual.

Cuando terminé mi maestría en Matemática educativa, ingresé a un proyecto nacional para crear clases de matemáticas en microcomputadoras (1980) destinadas a estudiantes de secundaria (de 12 a 15 años); la solicitud expresa de la Secretaría de Educación fue "producir lecciones en la computadora" para que los estudiantes pudieran aprender matemáticas a pesar del maestro. Esta producción me llevó a crear lecciones tutoriales, antecedente de los sistemas tutoriales inteligentes. Este proyecto sólo tuvo resultados experimentales.

Al analizar las incipientes propuestas de sistemas tutoriales inteligentes (ITS), me alejé de la línea dominante de crear un sistema cada vez más inteligente, y me propuse crear la inteligencia en el usuario más que en el sistema.

En mi tesis doctoral se propuso a la comunidad el sistema tutorial inteligente, Lirec (LInea RECta), para instruir acerca de la línea recta, tema de la geometría analítica. Ahí fue cuando germinaron las ideas didácticas de un sistema amigable con retroalimentación y con cierta autonomía para el usuario. Lirec, un éxito que no capitalicé, tuvo amplio uso en México y América Latina. En este sistema propusimos el trabajo en tres registros de representación semiótica, con visualización simultánea, y comenzamos a hacer de las matemáticas un trabajo experimental. Cabe anotar que eran los inicios de la microcomputación y no había software educativo en el mercado.

El trabajo de maestro de matemáticas en la escuela preparatoria con frecuencia tiene una carga docente de al menos cinco cursos al día por maestro, con grupos de más de 60 estudiantes. Cuando comencé a producir sistemas de tutoriales inteligentes, un impulso fue la idea de reducir la enorme carga laboral del maestro.

Problemas pendientes

Evaluar el nivel de apoyo de CalcVisual en el trabajo docente:

- Como un software que define actividades didácticas para explorar conceptos de cálculo (problemas de enseñanza).
- Como un medio de generación y verificación de ejercicios (problemas de aprendizaje).
- Como soporte en la resolución de problemas de aplicación (problemas de aprendizaje).

Un nuevo experimento

Campo de experimento y elecciones metodológicas

Descripción de la escuela

Ante una creciente demanda educativa, la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM) comienza en 1984 un proceso de desconcentración. Durante los últimos 21 años, el Centro Universitario Valle de Chalco, ubicado en los suburbios del este del Estado de México, ha proporcionado educación superior a una población de 2,600 estudiantes en seis licenciaturas y tres maestrías, con una plantilla de 120 maestros para cubrir esta oferta educativa. Una de las licenciaturas que comienza con la fundación del Centro Universitario es la de Ingeniería en Computación, que desde sus comienzos comparte los problemas internacionales sobre la enseñanza de las matemáticas superiores y las altas tasas de reprobación. Ante esto, en 2003 se presentó una tasa de fracaso del 80% en la materia de Cálculo diferencial, por lo que se propone una iniciativa para incorporar los resultados de la investigación en cálculo diferencial e integral del Departamento de Educación Matemática (DME), Cinvestav, en cinco ejes:

1. Examen de diagnóstico para detectar deficiencias en los requisitos previos.
2. Conjunto de proyectos de acción práctica para tratar los conceptos previos al cálculo detectados a partir del diagnóstico.
3. Uso del software CalcVisual como herramienta de apoyo indispensable en el curso.
4. Modificación del programa oficial y reorganización de contenidos a partir del análisis histórico de la génesis de los conceptos.
5. Esquemas de validación de la relevancia de los materiales en diversas instituciones.

Cada uno de estos ejes se desarrolló a lo largo de 14 años con una incorporación gradual y de acuerdo con las condiciones de la institución y la disposición de los docentes, con la hipótesis de que la incorporación de la tecnología en el aula podría contribuir a la solución de los problemas, reducir la tasa de fracaso y potenciar el rendimiento académico de los estudiantes. Las características del proyecto se acordaron con las autoridades a fin de contar con las instalaciones y el apoyo adecuados para su implementación; los profesores con diferentes perfiles profesionales (ingenieros, matemáticos, físicos) se incorporaron de forma gradual a los diferentes niveles de uso del software CalcVisual, y la responsabilidad del seguimiento recayó en un estudiante de doctorado de DME que era parte de la plantilla docente del centro universitario.

Entre las condiciones de infraestructura, debe mencionarse que las aulas tienen capacidad para 45 estudiantes, las salas de informática tienen 25 computadoras y servicio de internet, además de cañón para proyectar. En 2003 los servicios eran deficientes ante la ausencia de replicadores de señales de internet, aunque en 2017 esta situación mejoró.

Descripción de los perfiles de los docentes

El curso de cálculo diferencial e integral comenzó en agosto de 2017, fueron asignados tres profesores con los siguientes perfiles:

Profesor 1. Matemático con maestría y doctorado en Física; experiencia de cuatro años impartiendo la materia de cálculo; edad de 45 años; tiene entrenamiento en el uso de tecnología, en específico en programación y uso de manipuladores simbólicos y gráficos como Mathematica y Matlab; maneja plataformas como Dropbox y Google Drive. Utiliza la tecnología para fines personales (correo electrónico, búsqueda de información en internet, WhatsApp) y para el uso de sus estudiantes (computadora portátil, tableta, calculadora). Usa Mathematica en sus clases de cálculo para preparar actividades y tareas para los estudiantes.

Profesor 2. Ingeniero en Informática con una maestría en Ciencias de la computación y un postgrado adicional en Matemáticas educativas; experiencia contable de un año; edad de 45 años; tiene entrenamiento en el uso de la tecnología, en programación específica y uso de calculadora gráfica. Utiliza la tecnología para fines personales (correo electrónico y búsqueda de información en internet) y para el uso de sus estudiantes (computadora portátil y proyector). En la clase de cálculo, usa CalcVisual a fin de mostrar las propiedades de los gráficos (dominio, límites, rango), y la calculadora para preparar las tareas para los estudiantes.

Profesor 3. Cuenta con una maestría en Matemáticas y un doctorado en Matemáticas educativas; experiencia informática de 10 años; edad de 44 años; tiene entrenamiento en el uso de la tecnología, con énfasis en el uso de aplicaciones, sistemas de tutoriales inteligentes (CalcVisual y Lirec) y el uso de manipuladores y gráficos simbólicos como Derive y Geogebra. Utiliza la tecnología para fines personales (correo electrónico y búsqueda de información en internet) y para el uso de sus estudiantes (computadoras portátiles, proyectores y plataformas de internet como Univermath, Descartes, etc.). Utiliza CalcVisual, Lirec y Derive para preparar actividades en clase, preparar tareas para los estudiantes y coordinar el trabajo autodidacta de los mismos en el aula.

Los profesores consideran que en el curso de cálculo los conceptos más complicados de la enseñanza son composición de funciones, regla de la cadena, cambio de variable en integración y números complejos. Por su parte, los conceptos considerados más importantes son función, derivada, integral, y uso y aplicación de cada concepto.

Planeación de la intervención de CalcVisual en la planificación del curso de cálculo

Para comenzar el curso de cálculo diferencial e integral, se logra que la aprobación de las autoridades se acompañe con las facilidades y el soporte correspondiente. En el Departamento de TIC se solicita la instalación del software CalcVisual, Derive, Geogebra y Adobe Flash (requerido para el funcionamiento de las simulaciones encontradas en el portal de Univermath: mattec.matedu.cinvestav.mx/univermath/escenarios.didacticos/), y se programa la asignación de horarios para el uso de la sala de cómputo. Esta sala cuenta con un proyector para revisar las actividades llevadas a cabo por un estudiante o el profesor durante la clase, además de 25 computadoras con acceso a internet.

Para la capacitación en el uso de CalcVisual, los docentes son autodidactas, practican las lecciones usando applets y exploran el software en casa o en la institución. Antes del inicio de las clases, el profesor 3 programó una sesión de inducción con los profesores 1 y 2 sobre el uso del software en las dos primeras semanas del curso.

Los tres docentes acordaron aplicar un cuestionario de diagnóstico para los estudiantes, explorar algunas de las habilidades básicas (aritmética, álgebra y pensamiento funcional) e incorporar tres sesiones usando el software CalcVisual y dos applets (poleas y globo) para cubrir los temas de raíces y signo de la función. Está considerada la presentación del maestro, la exploración guiada del applet y el trabajo independiente de los estudiantes con el applet; seguido de una introducción del maestro sobre el uso de CalcVisual y la exploración del software por parte del alumno.

- **Tema de raíces:** una sesión de dos horas, uso del applet de la polea, primera exploración de CalcVisual, las tareas 2 y 3 de poleas se dejan para trabajar y los comentarios se reservan para la próxima sesión.
- **Tema funciones polinomiales y racionales:** una sesión de dos horas, uso del applet del globo, uso de CalcVisual, detener las actividades de trabajo 2 a 5 y dejar retroalimentación para la próxima sesión.
- **Tema funciones polinomiales y racionales:** una sesión de dos horas, retroalimentación de actividades de poleas y globo. Se deja como tarea para casa, determinar las raíces, el dominio y el rango de diferentes tipos de funciones algebraicas mediante CalcVisual.

Desarrollo de sesiones y descripción de problemas en docentes

Desventajas

1. **Problemas de tipo didáctico:** las sesiones de retroalimentación —sobre exploración del uso de CalcVisual, ejemplos de uso de poleas y globo— se dieron entre los profesores, para quienes no es obvio que esta forma de trabajo corresponda a un método didáctico. El profesor 1 indica que no conoce los métodos didácticos, y el profesor 2 la considera constructivista; ambos coinciden en que se requiere una formación previa en dos sentidos: diferentes métodos didácticos y la modificación de la didáctica personal con el uso de la tecnología.
2. **Problemas de manejo de contenido:** los profesores 1 y 2 están muy dispuestos a incorporar CalcVisual y consideran que tiene un potencial como herramienta tecnológica, pero no lo manejan con un nivel suficiente de confianza, por lo que incluso limitan el acceso de los alumnos al software para no perder su imagen de suficiencia —al principio no pueden responder algunas preguntas que los estudiantes hacen sobre la navegación en el sistema, ni sobre el tipo de funciones que pueden funcionar en el software (sólo polinomios)—. Los profesores 1 y 2 indican que cubre el material básico, pero lo encuentran limitado al no explorar varios tipos de funciones, por lo que sólo utilizan CalcVisual en una cuarta parte del curso; uno de ellos regresa a su enseñanza sin el uso de la tecnología y el otro vuelve

a utilizar Matlab. Ambos profesores comentan que al principio la ayuda es confusa porque los menús aparecen pero el propósito del software no se entiende si no se recibe capacitación previa; algunas desventajas que observan son: la razón por la cual se le preguntó el número de raíces en el primer menú; no pueden mover la escala en los gráficos, ni escribir un cambio en el rango de valores.

Ventajas

Los tres docentes consideran que la principal razón para usar CalcVisual es que permite explorar los contenidos básicos del cálculo, con lo cual brinda apoyo y refuerza el conocimiento de los estudiantes. El software que los profesores 1 y 2 comparan con CalcVisual es Geogebra. La incorporación de CalcVisual en la planificación del curso no representa problemas de organización o de tiempos; consideran que genera confianza en los alumnos y, aunque los profesores 1 y 2 son considerados novatos en su uso, indican que ayuda a resolver problemas de enseñanza en su clase de cálculo, lo que les permite a los estudiantes comprender visualmente los conceptos y, al ser una herramienta de apoyo para explorar conceptos, les ayuda a resolver problemas de enseñanza por sí mismos. Usan CalcVisual para actividades específicas de dominio, rango, límites y derivada, y consideran que puede usarse en otras materias, como álgebra superior y geometría analítica.

Descripción de ventajas y desventajas en los estudiantes

Los estudiantes consideran que utilizar CalcVisual en el curso de cálculo fue bastante útil, pues aprenden de forma más fácil y práctica, los guía paso a paso, trabajar en parejas ayuda cuando surgen dudas, a veces usan las opciones de Ayuda, Apoyo y Libro de CalcVisual y software alternativo como Derive o Geogebra; es fácil de usar, aunque requiere de investigación de algunas partes del curso en libros o videos. De los 90 estudiantes que atienden los profesores, 70% usa CalcVisual cuando el profesor está en el aula y cuando deja tarea, 30% restante sólo lo usa cuando están en el aula porque no tienen acceso en casa o consideran que no lo requieren.

Algunas de las desventajas que los estudiantes observan son que no explica cómo obtener los resultados, al principio es difícil entender cómo se hace cada cosa o qué se hace, está bien cuando se trata de la gráfica porque deben explorar todos los conceptos para llegar a la gráfica, pero luego no saben lo que viene. También se indica que no todos los contenidos del curso están en software, en especial el estudio de funciones racionales y trigonométricas.

Confunden los temas de límites, signos y monotonía; además, el dominio no aparece. No les da más confianza para trabajar con CalcVisual porque sienten que necesitan al maestro.

Los estudiantes están dispuestos a incorporar CalcVisual; consideran que es muy útil verificar conjeturas y acelerar algunos cálculos, la familiaridad con el recurso tecnológico es gradual; les permite explorar los temas y luego practicar mediante ejercicios o tareas; puede ser utilizado en la institución y en casa. Consideran que el contenido debe extenderse a todos los temas del curso, en un inicio esperando que lo solucione todo o les dé resultados como algún otro software, pero luego parece apropiado que construyan lo que sea necesario para llegar a la solución de un problema. La utilidad de las secciones de Ayuda y Apoyo no se observa al principio, pues la diferencia entre el término técnico y el problema logístico que es diferente en cada tema sólo se valora después de trabajar con el sistema. Al principio era necesario que el profesor mostrara la forma de trabajar con el software a todo el grupo, pero luego dos de los compañeros de clase eran los que manejaban el sistema y mostraban a todo el grupo lo que hicieron; luego las parejas mostraron a todo el grupo cómo trabajaron, una dinámica que fomentó la participación y el avance de todos.

Consideraciones para el rediseño de CalcVisual

A partir de los resultados del uso de CalcVisual con los alumnos y de su incorporación en la planeación del curso de Cálculo por los profesores que experimentaron con el software, se pueden retomar algunas observaciones que permitan el rediseño de CalcVisual en función de adecuarlo al objetivo para el que se creó. Entre ellas se cuentan:

- Incluir más temas de los comprendidos en el plan de estudio.
- Incorporar un libro de texto y de actividades que ayude al docente en el diseño de actividades didácticas con el uso de CalcVisual y que permita alcanzar un cierto nivel de orquestación instrumental.
- Extender la explicación en temas como límites o el significado de la derivada, que son de difícil comprensión para los alumnos, complementando con otros recursos de ayuda.
- Separar los conceptos con objetivos terminales en cada concepto y no necesariamente unidos en un objetivo.
- Migrar el software a plataformas móviles,
- Extender el sistema a funciones algebraicas y trascendentes.

Ventana 2
Experiencias

Profesor 1

Al usar el software podían interactuar con él, e incluso formular preguntas y comprobar sus conocimientos en el programa, pudieron asimilar mejor los conceptos y resolver problemas más complejos con el apoyo de CalcVisual. Pude percibir que se contribuyó a desarrollar un pensamiento más analítico porque ellos analizaban las funciones, el comportamiento y los elementos de las mismas de forma gráfica y visual; por ejemplo, para el caso de dominio y límite de una función, ellos podían identificar muy rápido los resultados: con sólo analizar la gráfica casi de inmediato daban el resultado.

En una asesoría de preparación para un concurso estatal de Matemáticas, reuní a alumnos de semestres más avanzados, invité a dos de primero de este grupo, y puse problemas de cálculo de dominio de una función de forma gráfica y algebraica. Los alumnos de primero respondían y acertaban a la solución de manera rápida, mientras los alumnos de semestre avanzado preguntaban "¿por qué ellos pueden resolver los problemas muy rápido y con sólo visualizar la gráfica, y nosotros no?

Profesores 2, 3 y 4

Me pareció útil CalcVisual en el curso de cálculo; redujo mi carga docente y el número de asesorías. Los alumnos mejoraron en su comprensión de los conceptos del cálculo, y les motivó para utilizar otros software, como GeoGebra y Derive

Conclusiones

La trayectoria documental como marco de investigación en este trabajo permitió explorar la génesis del software CalcVisual desde el objetivo de creación, los elementos del diseño, la instrumentación por alumnos y maestros, y las experiencias de aplicación en aulas con profesores de diferentes perfiles y experiencia docente. De esta trayectoria derivan algunas conclusiones:

- La preparación inicial resulta indispensable para generar en los profesores una confianza que les permita diseñar y aplicar procesos de orquestación en sus grupos.
- Los niveles (novato, semiexperto y experto) determinan los procesos de instrumentación de CalcVisual, así como su instrumentalización por parte de los profesores y posteriormente de los alumnos.
- Alcanzar un nivel de uso por parte de los profesores que les permita explorar diferentes esquemas de orquestación resulta indispensable para detonar un uso de CalcVisual más abierto y con variantes que se sustenten en la creatividad y las necesidades cognitivas de los alumnos.

Un acuerdo común entre los docentes fue la existencia de un incremento en el grado de análisis y comprensión de los conceptos del cálculo mediante la utilización de CalcVisual. Queda un largo camino por recorrer para alcanzar la propuesta de una verdadera orquestación instrumental, pero es una tarea que creemos puede ser llevada a cabo por los maestros.

Referencias

Aebli, H. (1995). *12 formas básicas de enseñar*. España: NARCEA.

Amit, M. & Vinner, S. (1990). Some Misconceptions in Calculus: Anecdotes or the Tip of an Iceberg? In G. Booker, P. Cobb & T. N. De Mendicuti (eds.), *Proceedings of the 14th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, 3-10). Cinvestav, México: PME.

Andreu, M. & Riestra, J. (2007). Et si nous en restions à Euler et Lagrange ? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieure. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives,* 12, 165-187.

ANUIES (Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior) (2017). *Programa de Certificación Docente del Nivel Medio Superior*. Recuperado de http://www.anuies.mx/programas-y-proyectos/programa-de-certificacion-docente-del-nivel-medio-superior-certidems.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics Between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, 7(3), 245-274.

__________ (1991). Análisis. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(4), 399-431.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 7-47.

Cuevas, A. & Martínez, M. (2004). El ECAEM, un recurso alternativo para la enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial. *XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática*. España: Universidad Jaime I. Castellón.

Cuevas, A. & Mejía, H. (2003). *Cálculo visual*. México: Oxford University Press.

Cuevas, A. & Pluvinage, F. (2003). Les projets d`action pratique, éléments d´une ingénierie d´enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 8, 273-293.

__________ (2009). Cálculo y tecnología. *El cálculo y su enseñanza*. México: Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional.

Cuevas, A.; Moreno, S., & Pluvinage, F. (2005). *Una experiencia de enseñanza del objeto función. Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 177-208.

Cuevas, A.; Pluvinage, F. & Martínez, M. (2004). Ventajas y desventajas del uso de la computadora en el aula. *Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

Díaz Gómez, J.L. (2007). Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su enseñanza*, 4, 13-26.

Drijvers, P. (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment. Doctoral Dissertation.* Recuperado de: http://www.fi.uu.nl/publicaties/literaturur/6319.pdf.

Duval, R. (1998). *R*egistro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, P. (2013). Ayudando a futuros profesores a mejorar la comprensión conceptual del cálculo. La enseñanza del cálculo diferencial e integral. En A. Cuevas & F. Pluvinage (eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa,* 43-84. México: Pearson Educación.

Forgasz, H.J. (2002). Computers for Learning Mathematics: Gendered beliefs. *Proceeding of the 26st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 368. Cockburn, Anne D., Ed.; Nardi, Elena, Ed. Norwich, UK.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). Towards New Documentation Systems for Mathematics Teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218

Gueudet, G. & Trouche, L. (2012). Communities, Documents and Professional Geneses: Interrelated Stories. En G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (eds.), *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*, 305-322, NY: Springer.

__________ (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195-227.

Guin, D.; Ruthven, K. & Trouche, L. (eds.) (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*, Nueva York, Springer.

Hitt, F. & Dufour, S. (2013). Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada en el nivel preuniversitario, del rol de un libro de texto y su posible conexión con el uso de tecnología. En A. Cuevas & F. Pluvinage (eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexio-*

nes para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa, 19-42. México: Pearson Educación.

Imaz, C. & Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo*. México: Trillas.

Keskessa, B. (1994). Preuves et plans de signification: une hypothèse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 371-376.

Klein, F. (1896). The Arithmetizing of Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2(8), 241-249.

Lagrange, J. B. (2005). Transposing Computer Tools from the Mathematical Sciences into Teaching, Some Possible Obstacles. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche L. (eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*, 67-82. Dordrecht: Springer Netherlands.

Lagrange, J. B.; Artigue, M.; Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, 239-271. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Martínez, M. (2004). Propuesta de diseño para el desarrollo de software educativo para matemáticas. *II Workshop de Educación Matemática*. Asunción: Universidad de Paraguay.

__________ (2007). Estudio longitudinal de los resultados de incorporación de tecnología en cursos de cálculo diferencial en el Centro Universitario Valle de Chalco. Memorias del II Coloquio Internacional "Tendencias Actuales de Cómputo e Informática en México", UAEM.

Martínez, R. M. (2005). *Diseño de un prototipo de entorno computacional para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas para un curso de cálculo diferencial.* Tesis doctoral. México: Cinvestav DME.

Moreno, G. S. (2003). *Ambiente computacional para promover una mejor comprensión de conceptos matemáticos. Caso: máximos y mínimos*. Tesis doctoral. México: Cinvestav DME.

Moreno, L. (2013). Intuición y Rigor: una danza interminable. La enseñanza del cálculo diferencial e integral. En A. Cuevas & F. Pluvinage (eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa,* 85-106. México: Pearson Educación.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning Mathematics: The Danish Kom ProjecST. *Mediterranean Conference on Mathematical Education*. Athenas: The Hellenic Mathematics Society.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ruthven, K. & Hennessy, S. (2002). A Practitioner Model of the Use of Computer-Based Tools and Resources to Support Mathematics Teaching and Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 47-88.

Sabin, Z.; Aydogan, A. & Kursat, A. (2015). Understanding the Concept of Derivative: A Case Study with Mathematical Modeling. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. January. 11(1), 177188. Recuperado el 24 de enero de 2018 de https://www.researchgate.net/publication/273113614_Understanding_the_concept_of_derivative_A_case_study_with_mathematical_modelinge

Simmt, E. (1997). Graphics calculators in High School Mathematics. *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching*. 16(2/3), 269-289.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 1-26.

Stroup, W.M. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A Structural Synthesis of Learning Research. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7(2), 167-215.

Tall, D. (2013). Una aproximación sensible al Cálculo. La enseñanza del cálculo diferencial e integral. En A. Cuevas & F. Pluvinage (eds.). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa,* 127-158. México: Pearson Educación..

Tall, D. O. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.

Thurston, W. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education, flashback to the future, ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 42(7), 667-681.

__________ (2014). Webbing and Orchestration. Two Interrelated Views on Digital Tools in Mathematics Education, Teaching Mathematics and Its Applications. *International Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 33(3), 193-209, doi: 10.1093/teamat/hru014

UAEM (Universidad Autónoma del Estado de México) (2017). *Programa de capacitación.* Recuperado de http://didepa.uaemex.mx/.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.

CAPÍTULO 7

Un análisis sobre la tecnología en la enseñanza del cálculo en el nivel bachillerato

Una perspectiva desde el plan de estudios

Judith Hernández Sánchez,[1] *Eduardo Briceño Solís*[2]

Resumen

La integración de la tecnología no está alcanzando su dimensión didáctica en el aula de Matemáticas. Variables que inciden al respecto son: su poca legitimidad educativa, un dominio predominante de su uso informático y técnico sobre lo didáctico, las condiciones de infraestructura de las escuelas mexicanas, la falta de competencias tecnológicas y didácticas de los profesores y las decisiones acerca de su uso. En esta investigación interesa analizar la forma en la que se propone usar la tecnología

[1] Universidad Autónoma de Zacatecas, México; e-mail: judith700@hotmail.com
[2] Universidad Autónoma de Zacatecas, México; e-mail: ecbs74@gmail.com

en el currículo, mediante la descripción de los usos e intencionalidades presentes en los programas de estudio, como referente que favorezca la práctica del profesor. El currículo se aborda como una variable de corte institucional que podría estar incidiendo en la manera en la que la tecnología es integrada en la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas. Para sustentar lo anterior, se estudia el papel de la tecnología en los programas vigentes de las asignaturas de Cálculo diferencial e integral del nivel medio superior en México, a través del análisis de contenido y de un marco conceptual que categoriza las dimensiones en las que pueden clasificarse las intencionalidades de uso de la tecnología. Los resultados evidencian un doble discurso, expectativas con grandes alcances y actividades de enseñanza y aprendizaje con trayectorias didácticas limitadas. De este diagnóstico se desprende que, para desplegar un plan de estudios que potencie un uso razonado de la tecnología en el aula de matemáticas, éste debe trasmitir a los profesores un mensaje claro y contundente acerca de su uso didáctico. Se considera que ésta es un área de oportunidad que requiere una intervención focalizada desde el currículo de matemáticas.

Palabras clave: tecnología, integración, aula de matemáticas, cálculo, currículo.

Abstract

The integration of technology is not reaching its didactic dimension in the mathematics classroom. Variables that affect this are: its little educational legitimacy; a predominant domain of its informatical and technical use on the didactic; the infrastructure conditions of mexican schools; the lack of technological and didactic competences of the teachers or the decisions when using it. In this research we are interested in analyzing the way in which it is proposed to use technology in the curriculum. This through the description of the uses and intentions present in the study programs, as a reference that support the practice of the teacher. In this case, the curriculum becomes an institutional variable that could be affecting the way in which technology is integrated into the teaching and learning of mathematics. To give evidence of the above, the role of technology in the current programs of the Differential and Integral Calculus of the High School in Mexico is analyzed. For this purpose, the content analysis and a conceptual framework that categorizes the dimensions in which the intentions of using the technology can be classified. The results show a double discourse, expectations with great scope and teaching and learning activities with limited didactic trajectories. In this way, if you want to advance in a curriculum that promotes a reasoned use of technology in the classroom of mathematics, the message of this to the teachers must be clear and forceful to promote its didactic use. We consider that this is an area of opportunity that requires a focused intervention from the mathematics curriculum

Keywords: Technology, Integration, Math classroom, Calculus, Curriculum.

Introducción

Los esfuerzos realizados para lograr una implementación exitosa de la tecnología en las aulas abarcan desde la creación específica de programas hasta la donación de equipo de cómputo a estudiantes del nivel básico (Díaz-Barriga, 2013; López & Hernández, 2016). Sin embargo, las tecnologías presentan múltiples desafíos y retos para su integración, en especial en el aula de matemáticas. Dichos retos se originan tanto por su escasa legitimidad educativa (Artigue, 2000) como por variables de corte social, económico, cognitivo o institucional (Hitt, 2013). En esta investigación se toma al currículo como una variable de corte institucional que podría estar incidiendo en cómo se usa la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La razón es que el currículo presenta los propósitos educativos que deberían ser llevados al aula (Alsina, 2000; Stenhouse, 2003) y que por lo tanto se convierten en una guía para la práctica del profesor (Sowder, 2007; Godino, Batanero & Font, 2003). De manera específica, aquí interesa presentar una medición, a través de las expectativas vertidas en el currículo, del uso y la intencionalidad de la tecnología que podría estar presente en las aulas de Matemáticas.

Existen algunos señalamientos en este sentido. Para el caso de Francia, Artigue (2013) menciona que el plan de estudios está lejos de promover un uso razonado de la tecnología. Castro (2017) identifica que, en el currículo en matemáticas del nivel secundaria en México, predomina el uso de la tecnología en su dimensión informática y técnica. Por último, Hernández, Borjón y Torres (2016) analizaron los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas del nivel medio superior (NMS) en México, donde se identificó que las expectativas educativas no consideran el uso de la dimensión didáctica de la tecnología por los futuros profesores. Este panorama apunta a la advertencia de Beneitone *et al*. (2006) sobre el riesgo de que el currículo, y en particular los planes de estudio, promuevan la implementación de la tecnología desde una perspectiva técnica y no pedagógica.

Además, este tipo de investigaciones "no se limita al problema de contar con las herramientas que conforman estas tecnologías: equipos y programas de cómputo, sino que lo más importante es construir un uso educativo y, en estricto sentido, didáctico de las mismas" (Díaz-Barriga, 2013: 5). Para el presente trabajo, ese sentido de uso se puede plantear desde las expectativas vertidas en los programas que oficializan las autoridades educativas.

El análisis de contenido de los programas de las asignaturas de Cálculo diferencial e integral propuestos para la educación del NMS (SEP_DGB, 2013) permite sostener lo anterior a partir de la identificación de discursos presentes en los documentos educativos. Al igual que en los estudios mencionados arriba, se quiere evidenciar que las expectativas educativas de la tecnología que predominan en el currículo mexicano del NMS se refieren a la dimensión técnica y la informática. Esto limita los alcances de la tecnología, dado que el presentar o buscar información mediante las TIC no asegura que se esté construyendo conocimiento (Díaz-Barriga, 2013).

Intencionalidades educativas de la tecnología y enunciados característicos de sus usos

Se parte del supuesto de que la tecnología en el aula de Matemáticas es más que una herramienta para hacer lo mismo que con lápiz y papel, pero de forma rápida, y que no se limita a nuevas formas de búsqueda o presentación de información. Sin embargo, usar tecnología no es suficiente para concluir que se ha logrado su integración, por lo que debe preguntarse cuál es el papel que se le puede adjudicar a la tecnología escolar en función de lo que aprenden los estudiantes. Esto pone en el centro el análisis de lo que se aprende con el uso de tecnología. Por esta razón, la integración curricular implica un uso de la tecnología con un propósito claro, dirigido a construir un concepto, un proceso o un contenido en una disciplina específica; además de que forme parte del currículum y se use software educativo específico de la disciplina en cuestión, a fin de articular las partes de un todo y que no se convierta en un recurso periférico (Sánchez, 2003).

Se establece como objetivo de esta investigación describir la manera en que se presenta la tecnología en el currículum de matemáticas del NMS, e identificar qué tipo de tecnología se asocia a cada una de las dimensiones propuestas en Hernández *et al*. (2016), y que se describen a continuación:

- **Dimensión informática:** su uso tiene como principal alcance la búsqueda, presentación o reproducción de información. El tipo de tecnología más utilizada es internet para la búsqueda de información, software como PowerPoint o Prezi para la presentación de la misma.
- **Dimensión técnica:** las acciones realizadas en esta dimensión suelen relacionarse con efectuar las tareas que se hacen a lápiz y papel, pero de manera óptima y en menos tiempo. En general, esta dimensión está ligada a las acciones de calcular o comprobar resultados, y su principal representante es la calculadora.
- **Dimensión didáctica:** esta dimensión incluye todas las acciones cuyo sentido educativo se centra en la construcción conceptual y de significado de los objetos matemáticos (definiciones, procedimientos, propiedades o relaciones). Esta dimensión suele estar ligada a tecnologías que han sido creadas de manera específica para la educación matemática; entre ellas podemos mencionar el software CalcVisual o GeoGebra. Sin embargo, la forma en la que se usan las tecnologías es lo que determinará cuáles alcanzan esta dimensión.

En general, las dimensiones informática y técnica son usadas de manera periférica en el desarrollo del currículo, por lo que tienen un impacto limitado en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; en contraparte, la dimensión didáctica requiere de una articulación con las otras dimensiones. Por ello se propone que lograr la integración de la tecnología en el aula de matemáticas requiere que estas tres dimensiones estén articuladas y promuevan el aprendizaje en torno a los objetos inmersos en el currículo de matemáticas. Sin embargo, lograr que estas tres dimensiones estén presentes en el currículo de matemáticas de manera articulada y con un sentido didáctico es complejo y lleva tiempo.

Con base en lo anterior, se sostiene que un primer paso hacia esta integración es hacerla evidente en los documentos que acompañan y sirven de referencia al profesor. Para facilitar el análisis de los programas de Cálculo diferencial e integral se utilizaron los enunciados característicos que determinan la intencionalidad de la tecnología y que se proponen en el libro de códigos en Castro (2017). La tabla 7-1 presenta algunos de estos enunciados a manera de ejemplo para hacer más entendibles estas dimensiones.

Tabla 7-1 Enunciados característicos de las dimensiones de uso de la tecnología.

Dimensión	Enunciados característicos
Informática	Presentar información Comunicar información Buscar información Reproducir información
Técnica	Saber el manejo de la tecnología Agilizar procesos Facilitar cálculos Contrastar soluciones Verificar resultados Simular acontecimientos
Didáctica	Analizar de manera visual Explorar significados Experimentar ideas matemáticas Buscar relaciones entre representaciones Analizar patrones de secuencias para llegar a una generalización Elaborar y confirmar conjeturas

Metodología

De acuerdo con Kothari (2004), se busca retratar con precisión las características de una situación o fenómeno, por lo que la investigación es de tipo descriptivo con un enfoque cualitativo. Mediante los usos e intencionalidades de la tecnología, se busca describir de qué manera se presenta ésta en las asignaturas de Cálculo diferencial e integral del NMS. Para lograrlo, se plantea que el método de Análisis de Contenido propuesto en Bernete (2013) permitirá identificar el sentido con el que se propone introducir la tecnología en estas asignaturas. Las fases para el diseño de esta investigación se describen enseguida.

Trabajo previo

Se eligieron los programas de las asignaturas de Cálculo diferencial del quinto semestre y Cálculo integral del sexto semestre del nivel medio superior (SEP_DGB, 2013). La organización e interpretación de los datos se realizó mediante dos herramientas. Por un lado, el sistema de categorías propuesto en Hernández *et al*. (2016), el cual establece las dimensiones de la tecnología (informática, técnica y didáctica) con los criterios de clasificación de uso e intencionalidad. Por otro, los enunciados característicos propuestos en Castro (2017) que se conformaron en el libro de códigos.

Las unidades de contexto se determinaron a partir de las secciones en las que se divide el programa del NMS: fundamentación, cruce de competencias genéricas con competencias disciplinares básicas, y bloques (cada uno de los cuales contiene desempeños al concluir el bloque, competencias a desarrollar, actividades de enseñanza, actividades de aprendizaje, rol docente y consultas).

Por último, se tomó como unidades de registro a los fragmentos identificados en cada unidad de contexto que propongan el uso de la tecnología. Ésta es la unidad más simple sobre la que se realizaron las categorizaciones de la dimensión presente de la tecnología. La ficha de registro de la información se presenta en la tabla 7-2.

Tabla 7-2 Ficha de registro para los fragmentos que proponen uso de tecnología.

<table>
<tr><th>Bloque</th><th>Nombre del bloque</th><th>Tiempo asignado</th></tr>
<tr><td colspan="3">Desempeños del estudiante al concluir el bloque</td></tr>
<tr><td>Objetos de aprendizaje</td><td colspan="2">Competencias a desarrollar</td></tr>
<tr><td>Actividades de enseñanza</td><td>Actividades de aprendizaje</td><td>Instrumentos de evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="3">Rol docente</td></tr>
<tr><td colspan="3">Material didáctico</td></tr>
</table>

Extracción de datos

Se realizó la transcripción de los fragmentos al instrumento presentado en la tabla 7-2 y se retomó el libro de códigos propuesto en Castro (2017). Por último, en la tabla 7-3 se propone el instrumento que concentra los fragmentos para su análisis y clasificación en alguna de las categorías establecidas.

Tabla 7-3 Ficha de análisis y categorización de los fragmentos que proponen uso de tecnología.

Clave de ubicación	Fragmentos (unidad de registro)	Uso	Intención	Dimensión	Tipo de tecnología

Con los datos concentrados en los instrumentos de recopilación y extracción, se propuso la etapa de explotación de los datos.

Operaciones e interpretación de los resultados

Para el proceso de análisis se midió la frecuencia con la que se propone usar la tecnología para cada dimensión dividida en las unidades de contexto. Además, se identificaron las competencias, actividades y acciones, así como su sentido de uso de tecnología con mayor presencia, que podrían estar presentes en el aula de matemáticas para las asignaturas de Cálculo. Esto permitió identificar los principales usos educativos de la tecnología en la enseñanza del Cálculo, y cuáles de ellos tiene un sentido didáctico. En la siguiente sección se presentan los resultados del análisis de las dos asignaturas.

Integración, usos e intencionalidades de la tecnología en el programa de Cálculo diferencial

La asignatura de Cálculo diferencial pertenece al campo disciplinar de Matemáticas del nivel medio superior, y está ubicada en el quinto semestre en el componente de formación propedéutico. Esto significa que su finalidad se relaciona con la profundización de aquellos conocimientos que le permitan al egresado emprender estudios de nivel superior.

Expectativas sobre la tecnología para la asignatura de Cálculo diferencial

El uso de la tecnología aparece por primera vez en la sección de fundamentación de esta asignatura, donde se formula que “facilitará el planteamiento de modelos y estudiar sus variaciones de una forma dinámica, para el planteamiento de problemas, su resolución, análisis y toma de decisiones en situaciones de su vida familiar, social, escolar y laboral” (SEP_DGB, 2013: 7). Esta expectativa para la tecnología se interpreta en dos dimensiones:

1. **Técnica:** como herramienta que facilita el planteamiento de problemas.
2. **Didáctica:** como recurso que permite estudiar de una forma dinámica las variaciones de los modelos para su planteamiento, resolución, análisis y toma de decisiones.

Se espera que estas intenciones de la fundamentación se vean apoyadas en los bloques establecidos para la asignatura. Estas expectativas corren a cargo del profesor, por lo que estarán ligadas a las unidades de contexto designadas como rol docente y actividades de enseñanza. Estas unidades serán analizadas en la siguiente sección.

Las ocho competencias disciplinares extendidas del campo de Matemáticas forman parte de los logros esperados en los estudiantes al finalizar su formación matemática en este nivel educativo. Una de ellas propone el uso de la tecnología: "Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación" (SEP_DGB, 2013: 12). Aquí, la tecnología se presenta como una herramienta que apoya los métodos para realizar la acción (argumentar la solución de un problema), por lo tanto, la dimensión identificada en esta competencia es:

- **Técnica**: las TIC como herramientas que apoyan los métodos (gráficos, numéricos, analíticos y variacionales) para la solución obtenida de problemas.

Este primer análisis sugiere que se deben promover las tres dimensiones de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial. En el caso de los estudiantes, su alcance es ante todo técnico. Para ver la congruencia de estas expectativas con lo propuesto en el desarrollo de la materia de Cálculo diferencial; en la siguiente sección se describe cómo se sugiere su promoción.

Expectativas sobre la tecnología para cada bloque en la asignatura de Cálculo diferencial

La asignatura de Cálculo diferencial se divide en cuatro bloques temáticos, todos los cuales incluyen el uso de la tecnología. En los cuatro bloques se propone que el rol del docente respecto a las tecnologías es promover "el uso de las tecnologías de la información como estrategias para el desempeño de los estudiantes" (SEP_DGB, 2013: 15, 21, 27 y 33). Esta propuesta ve a la tecnología como una estrategia, sin embargo, su nivel de generalidad impide su categorización (aunque se especifica al cañón y la calculadora como el tipo de tecnología que se usará). Lo anterior parece sugerir una tendencia hacia las dimensiones técnica e informática, pero la falta de claridad sobre su sentido y alcance educativo deja esta interpretación a los profesores.

En los cuatro bloques fueron analizados, la tecnología se presenta tanto en las competencias a desarrollar en cada bloque como en las actividades de enseñanza y aprendizaje que se espera apoyen su promoción. Al respecto se encontraron 15 fragmentos donde se identifica la presencia de la tecnología en la asignatura de Cálculo diferencial; los cuales fueron desagregados en categorías de dimensión como se muestra en la tabla 7-4.

Tabla 7-4 Dimensiones de la tecnología en la asignatura de Cálculo diferencial.

Bloque	Dimensión	Frecuencia	Tipo de tecnología
I Argumentas el estudio del cálculo mediante el análisis de su evolución, sus modelos matemáticos y su relación con hechos reales	Informática	2	Blog, presentación multimedia
	Técnica	0	
	Didáctica	0	
II Resuelves problemas de límite en situaciones de carácter económico, administrativo, natural y social	Informática	3	Proyector, internet, PowerPoint
	Técnica	3	Software Derive, TIC, GeoGebra, Graph, Math, Pinacle
	Didáctica	0	
III Calculas, interpretas y analizas razones de cambio en fenómenos naturales, sociales, económicos y administrativos	Informática	1	PowerPoint
	Técnica	0	
	Didáctica	2	TIC, Derive, GeoGebra, Graph, Matlab
IV Calculas e interpretas máximos y mínimos aplicados a problemas de optimización	Informática	1	Internet
	Técnica	1	Derive
	Didáctica	2	Tic, internet
	Total	**15**	

Se identificó que cerca de la mitad de los usos con tecnología tiene un sentido informático, PowerPoint e internet como principales representantes. La dimensión técnica y la didáctica suponen 26% de los usos cada una; en ambos casos sus principales representantes son el software educativo en matemáticas y las TIC. Aunque la dimensión didáctica está presente con el mismo peso que la técnica, es la dimensión informática la que predomina al estar presente en todos los bloques. Es interesante identificar que, aunque en el marco referencial de la asignatura no aparezca la dimensión informática, ésta predomine en el desarrollo de los bloques de la asignatura, lo cual confirma la falta

Figura 7-1 Fragmento del bloque I con uso de tecnología.

Actividades de enseñanza	Actividades de aprendizaje
Diseñar un *blog* en internet o realizar una presentación multimedia e integrar un breve comentario sobre los antecedentes históricos del Cálculo diferencial y sus aplicaciones en la resolución de problemas del entorno.	Interactuar con su profesor/a y sus compañeros(as) a través del *blog* o la presentación multimedia, aportar comentarios fundamentales en las lecturas realizadas, dar su punto de vista sobre la importancia que tiene el estudio del cálculo en la vida diaria, mencionar y explicar al menos tres ejemplos en los que se vea reflejada su aplicación.

Fuente: SEP_DGB (2013: 12).

de congruencia entre lo que se pide al profesor y lo que se le propone para lograrlo.

Como evidencia de lo anterior, en la figura 7-1 se presenta un fragmento del programa que plantea el uso e intencionalidad de la tecnología interpretado en el bloque I. En la tabla 7-5 se realiza el análisis de este fragmento.

En los resultados también se observó una relación entre la temática a desarrollar en el bloque y las dimensiones de la tecnología utilizadas en cada uno de ellos.

- En el bloque I se propone introducir los antecedentes históricos y la importancia del cálculo, por lo que la dimensión predominante es la informática, con las intenciones de propiciar la interacción y presentar los antecedentes históricos del surgimiento del Cálculo. En este bloque las dimensiones técnica y didáctica no están presentes.
- En el bloque II se propone resolver problemas con límites, y se asocia a la dimensión técnica evidenciada en la fundamentación de la asignatura. Esto se confirma por la frecuencia con que se presentan los usos técnicos de la tecnología. Las principales acciones refieren a la elaboración de gráficas mediante Derive, GeoGebra, Graph o Math. Entre las acciones de corte informático, se le pide al estudiante ver presentaciones o proyecciones con información específica sobre el límite y los procesos para calcularlo. Al igual que el bloque anterior, no se identifica el componente didáctico de la tecnología.
- El bloque III se centra en calcular, interpretar y analizar razones de cambio. Se propone que este bloque podría estar asociado a la expectativa con sentido didáctico evidenciada en la fundamentación de la tarea. Por primera vez en el desarrollo curricular, se propone el uso

Tabla 7-5 Análisis de fragmento del bloque I.

Clave de ubicación	Fragmento	Clave de ubicación	Fragmento	Uso	Intención	Dimensión	Tipo de tecnología
ACT_ENS_B1	Diseñar un *blog* en internet o realizar una presentación multimedia sobre los antecedentes históricos del Cálculo diferencial y sus aplicaciones en la resolución de problemas del entorno. (p. 12)	ACT_APR_B1	Interactuar con su profesor/a y sus compañeras(os) a través del *blog* o la presentación multimedia, …	Diseñar un blog en internet	Interacciones profesor-estudiante, estudiante-estudiante	Informática	*Blog*
				Realizar una presentación multimedia	Interacciones profesor-estudiante, estudiante-estudiante	Informática	Presentación multimedia

de la tecnología con un sentido didáctico, en específico, mediante las acciones de modelar, simular e interpretar problemáticas de razón de cambio, con la intención de resolver problemas. La tecnología propuesta para alcanzar estos propósitos es software educativo específico para la educación matemática como Derive y GeoGebra. En este bloque no se presenta la dimensión técnica.

- El bloque IV aborda el cálculo e interpretación de máximos y mínimos. Es el único donde se presentan las tres dimensiones de la tecnología, así como el único en el cual internet alcanza su dimensión didáctica. Se pide al estudiante investigar en internet gráficas sobre el comportamiento del clima 50 años atrás para identificar máximos, mínimos y enlistar sus características y consecuencias. Lo anterior incluye relacionar conceptos matemáticos con contextos no matemáticos; además de propiedades e interpretación de la información encontrada en internet.

En la siguiente sección se presentan los resultados y el análisis de la asignatura de Cálculo integral.

Integración, usos e intencionalidades de la tecnología en el programa de Cálculo integral

La asignatura de Cálculo integral pertenece al campo disciplinar de Matemáticas del nivel medio superior, y está ubicada en el sexto semestre en el componente de formación propedéutico.

Expectativas sobre la tecnología para la asignatura de Cálculo integral

El uso de la tecnología aparece por primera vez en la fundamentación de la asignatura, donde se sostiene que "[…] el uso de las TIC permite que software como: GeoGebra, Mathgv y Graph, faciliten el planteamiento de modelos y el estudio de sus variaciones de una forma dinámica, para el planteamiento, resolución, análisis y toma de decisiones en situaciones de su vida familiar, social, escolar y laboral" (SEP_DGB, 2013: 7). Esta expectativa se ubica en dos direcciones:

- **Técnica:** el uso de software como GeoGebra, Mathgv y Graph permite el planteamiento de modelos.
- **Didáctica:** el uso de software como GeoGebra, Mathgv y Graph permite el estudio de las variaciones de una forma dinámica, para el planteamiento, resolución, análisis y toma de decisiones.

Estas expectativas son muy parecidas a las propuestas para la asignatura de Cálculo diferencial, salvo que en este caso se especifica como principales representantes a software educativo relacionado con la educación matemática. En esta asignatura se propone promover la misma competencia 4, la cual tiene un sentido didáctico y propone a las TIC como herramienta que apoya los métodos (gráficos, numéricos, analíticos y variacionales) para la solución obtenida de problemas. Como sucede con la asignatura de Cálculo diferencial, en Cálculo integral no se considera la dimensión informática, pero si las otras dos (técnica y didáctica). En la siguiente sección se revisa la congruencia de estas expectativas con lo propuesto para el desarrollo de la materia mediante el análisis de las sugerencias de promoción.

Expectativas sobre la tecnología para cada bloque en la asignatura de Cálculo integral

La asignatura de Cálculo integral también se divide en cuatro bloques temáticos, y todos incluyen el uso de la tecnología. El análisis inicia con el rol y la función del docente en el logro de las competencias genéricas y disciplinares propuesto para cada bloque. También se presenta el papel de la tecnología en estas funciones.

Para los bloques I y IV se sugiere al profesor promover la misma función que en la asignatura de Cálculo diferencial, la cual no aporta información necesaria para ser categorizada. Sin embargo, para el bloque II se propone que el docente haga un uso informático y para el bloque III se espera que alcance un sentido didáctico. De la siguiente manera:

- **Dimensión informática del bloque II para el rol docente:** usar TIC como estrategia para presentar la información del cálculo de primitivas.
- **Dimensión didáctica del bloque III para el rol docente:** usar las TIC para analizar problemas de aplicación de la integral definida.

En la asignatura de Cálculo integral la tecnología se ve como un recurso con alcances informáticos y didácticos que se sugiere al profesor para promover las competencias propuestas en cada bloque.

Por último, se presenta la categorización de las competencias a desarrollar en cada bloque y las actividades de enseñanza y aprendizaje que deberían apoyar su promoción. Se encontraron 20 fragmentos donde se identifica la presencia de la tecnología; desagregados en las categorías de dimensión que se muestran la tabla 7-6.

Tabla 7-6 Dimensiones de la tecnología en la asignatura de Cálculo integral.

Bloque	Dimensión	Frecuencia	Tipo de tecnología
I Aplicas la diferencial en estimación de errores y aproximaciones de variables en las ciencias exactas, sociales, naturales y administrativas.	Informática	1	Presentación multimedia
	Técnica	0	
	Didáctica	0	
II Determinas la primitiva de una función e integras funciones algebraicas y trascendentes como una herramienta a utilizar en las ciencias exactas, sociales, naturales y administrativas.	Informática	3	Presentación con TIC, páginas electrónicas, correo electrónico y *blog*
	Técnica	0	
	Didáctica	1	Video
III Calculas e interpretas el área bajo la curva en el contexto de las ciencias exactas, naturales, sociales y administrativas.	Informática	5	TIC, enlaces de internet, presentación en TIC, páginas electrónicas
	Técnica	5	Software graficador (GeoGebra, Mathgv, Graph)
	Didáctica	0	
IV Resuelves problemas de aplicación de la integral definida en situaciones reales en el campo de las ciencias exactas, naturales, sociales y administrativas.	Informática	4	Fuentes electrónicas, internet
	Técnica	0	
	Didáctica	1	TIC
	Total	20	

Para la enseñanza del Cálculo integral se propone la presencia de la tecnología en todos los bloques. Las intenciones identificadas para esta asignatura son: informática 65%, técnica 25% y didáctica 10%. La dimensión informática predomina tanto en la asignatura como en cada bloque. El bloque con mayor presencia de tecnología es el III.

En el caso de la dimensión informática, el principal uso es la investigación en páginas o direcciones electrónicas de internet. Los usos ligados a la intención técnica son calcular el área bajo la curva, representar de manera gráfica el área limitada y comparar la integral con las sumas de Riemman, para lo cual se recurre al software graficador.

El caso de las fuentes de consulta y su papel en el uso de la tecnología en las asignaturas de Cálculo diferencial e integral

Las fuentes de consulta constituyen otra unidad de contexto que puede ser analizada para ambas asignaturas son. Se dividen en fuentes básicas, complementarias y electrónicas. Las dos primeras se centran en libros de matemáticas, y no fueron mencionadas en los fragmentos del programa con uso de tecnología, por lo que consideran fuera del alcance del estudio. El uso de las consultas electrónicas se sugiere en los fragmentos donde la tecnología tiene una intencionalidad, por lo que estas fuentes sí fueron analizadas.

Las consultas electrónicas propuestas en los programas de ambas asignaturas son enlaces que, en su mayoría, llevan a páginas a las cuales no se puede acceder por una u otra razón. Por ejemplo, de los 22 enlaces, o vínculos, propuestos para la asignatura de Cálculo diferencial, la mitad se encuentra no disponible; las restantes son, casi todas, páginas sin ningún respaldo institucional. Estas páginas proponen informaciones de corte histórico, listas de ejercicios o notas sobre temas, por lo que son congruentes con los fragmentos a los que fueron asociadas y cuya intencionalidad tecnológica es de corte informático.

El único enlace cuyo contenido podría apoyar una intencionalidad didáctica en el uso de la tecnología tiene el respaldo institucional de la Universidad de Sonora. Se trata de una secuencia de actividades ubicada en http://www.fisica.uson.mx/manuales/mecanica/mec-lab04.pdf

En este enlace se presenta un documento en versión PDF que trabaja el tema de la velocidad instantánea, el cual propone una situación relacionada con un móvil que se mueve sobre un riel. En la figura 7-2 se muestran las herramientas computacionales y parte de las instrucciones para el uso de una applet. En la figura 7-3 se presentan las preguntas que los estudiantes deberán responder.

Figura 7-2 Indicaciones para el uso de tecnología propuesta en la secuencia.

Herramienta computacional

1. Utilice las herramientas para el laboratorio de Mecánica que se localiza en la página del Departamento de Física, http://www.fisica.uson.mx/mecanica/.
2. Seleccione el *applet* estudio de la velocidad y lea con cuidado las instrucciones.
3. Capture en la ventana de datos los valores de tiempo y posición de la tabla I en la forma $(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), (t_3, x_3)\ldots, (t_N, x_N)$.
4. Seleccione 5 como el punto de interés para calcular la velocidad instantánea.
5. Haga clic en el botón calcular.
6. Obtenga el valor de la velocidad instantánea para el punto (t_5, x_5) de la ventana de resultados del *applet*.
7. Anote sus resultados en la tabla III.

Tabla III	
Velocidad instantánea (cm/s)	
Incertidumbre (cm/s)	

Fuente: http://www.fisica.uson.mx/manuales/mecanica/mec-lab04.pdf

Figura 7-3 Preguntas propuestas en la secuencia.

Preguntas

¿Cuál es el valor que obtuvo para la velocidad instantánea en ese instante de tiempo utilizando el método gráfico?
¿Cuál es el valor que obtuvo para la velocidad instantánea en ese instante de tiempo utilizando el *applet*?
¿Cuál es la diferencia porcentual entre estos dos resultados?
Obtenga la velocidad instantánea para todos los puntos utilizando el *applet*.
¿Cómo calcularía la velocidad instantánea para todos los tiempos sin usar el *applet*?

Fuente: http://www.fisica.uson.mx/manuales/mecanica/mec-lab04.pdf

Esta actividad, propuesta por la Universidad de Sonora, da indicios de que es posible incluir materiales de apoyo a los profesores que propongan un uso didáctico de la tecnología. Sin embargo, es el único material incluido en las fuentes de consulta que cumple con esta característica.

Conclusiones

Los análisis realizados a los programas de estudio de Cálculo diferencial e integral abonan a favor de la hipótesis planteada. Es decir, que en el currículo para la enseñanza del Cálculo del NMS hay evidencia de que se potencian las dimensiones informática y técnica sobre la didáctica. Para sustentar lo anterior se mostró que la fundamentación y la competencia disciplinar presentan las dimensiones técnica y didáctica, pero en el desarrollo de actividades de enseñanza y aprendizaje predomina la dimensión informática. Además, las actividades que plantean un uso de la tecnología con intención informática se presentan con casi el doble de frecuencia que las otras. Todo esto supone una incongruencia entre las expectativas creadas en la fundamentación y la competencia disciplinar de estas asignaturas y las actividades propuestas para lograrlo.

También se identificó que el uso más frecuente de la dimensión informática refiere a la búsqueda en internet para presentar información sobre fundamentos históricos, conceptos y aplicaciones del contenido matemático escolar; en general, este uso se presenta al inicio o cierre de un tema. Por otra parte, el principal representante de la dimensión técnica es el software como Derive o GeoGebra; aquí hay una mayor diversidad de usos como calcular límites, máximos y mínimos o áreas bajo la curva, utilizando la representación gráfica de funciones o áreas limitadas por curvas. Por último, la dimensión didáctica está ligada principalmente al uso de modelar y simular problemas de variación o relativos a fenómenos donde se involucra la integral.

En la sección final se presentó evidencia de que las fuentes de consulta electrónica resultan insuficientes y limitadas, por lo que se sugiere la búsqueda de páginas electrónicas respaldadas por instituciones educativas. También se considera útil incluir diseños que hayan sido implementados con resultados favorables en la enseñanza del Cálculo y que estén sustentados en investigación de dicho campo. Con estas sugerencias se espera alcanzar dos objetivos ligados a la integración de la tecnología: aumentar los temas que podrían tratarse con el uso de tecnología y dar evidencia de que la tecnología tiene usos didácticos más amplios para la enseñanza del cálculo

El presente estudio busca ubicarse entre los trabajos que, según Godino (2006), están interesados en analizar la influencia de la tecnología en el currículum. Se espera que los resultados de esta investigación sirvan para que el nuevo currículum de matemáticas no repita las limitantes características del que se encuentra vigente.

Referencias

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En Goñi, J.M. (coord.). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*, 13-21. España: Graó.

Artigue, M. (2000). Instrumentation Issues and the Integration of Computer Technologies into Secondary Mathematics Teaching. *Proceedings of the Annual Meeting*, 7-17. Potsdam, Alemania. Recuperado de: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000

__________ (2013). L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique. *Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 4(1). Recuperado de: http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/159

Beneitone, P.; Esquetini, C.; González, J.; Marty, M.; Siufi, G., & Wagenaar, R. (eds.) (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina*. Informe Final Proyecto Tuning América Latina 2004-2007. España: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen. Recuperado de http://tuning.unideusto.org/tuningal/

Bernete, F. (2013). Análisis de contenido. En Lucas, A. & Noboa, A. (eds.), *Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de los datos*, 221-261. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Castro, A. (2017). *La integración de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: usos e intencionalidades en el curriculum oficial del nivel secundaria*. (Tesis inédita de maestría). México: Universidad Autónoma de Zacatecas.

Díaz-Barriga, A. (2013). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. *Revista Iberoamericana de Educación Superior,* 4(10), 3-21.

Godino, J. (2006). Presente y futuro de la investigación en didáctica de las Matemáticas. En 29ª Reunión Anual de la Associação Nacional de Pós- Graduação e Pesquisa em Educação.

Godino, J.; Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Obtenido del Proyecto Edumat-Maestros Matemáticas y su Didáctica para Maestros.* Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Hernández, J.; Borjón, E., & Torres, M. (2016). La presencia de la tecnología en la formación inicial de los profesores de Matemáticas del nivel medio superior. *Revista Ecomatemático,* 7(1), 6-19.

Hitt, F. (2013). ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Electrónica AMIUTEM*, 1(1), 1-18.

Kothari, C. (2014). *Research Methodology. Methods and Techniques.* India: New Age International (P) Limited.

López, J. & Hernández, J. (2016). Usos de la tecnología en los libros de secundaria y competencias estandarizadoras. En R. d. Ibarra Reyes, E. d. Bueno Sánchez, R. Ibarra Escobedo, & J. L. Hernández Suárez, *Trascender el neoliberalismo y salvar a la humanidad*, 923-935. Zacatecas.

Perrenoud, P. (2010). *Diez nuevas competencias para enseñar*. España: Graó.

Rojano, T. & Solares, A. (coords.) (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países*. México: INEE-Cinvestav.

SEP_DGB (2013). *Cálculo diferencial*. Serie de programas de estudio. México: Dirección General de Bachillerato.

__________ (2013). *Cálculo integral*. Serie de programas de estudio. México: Dirección General de Bachillerato.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Frank K. Lester, Jr. (ed.). Vol. 1, 157-223.

Stenhouse, L. (2003). *Investigación y desarrollo del currículum.* Madrid: Morata.

CAPÍTULO 8

¿Cómo se usan los contenidos del cálculo en ingeniería?

El caso de la integral y el momento flector[1]

Alejandro S. González-Martín[2]

Resumen

En este capítulo se presenta una propuesta para identificar tareas y técnicas propias de las carreras de ingeniería que usan la noción de integral para definir sus propias nociones y deducir propiedades, pero sin recurrir de manera explícita a técnicas o tecnologías de cálculo integral. Las herramientas proporcionadas por la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) de Chevallard (1999) permiten estudiar praxeologías e identificar las conexiones y desconexiones entre el contenido de los cursos de cálculo y de los cursos profesionales; en particular, analizar el caso del estudio del momento flector y el primer momento de área en ingeniería civil y mecánica.

Palabras clave: teoría antropológica de lo didáctico, cálculo integral, praxeología, momento flector.

[1] Este capítulo sintetiza los resultados presentados en González-Martín & Hernandes-Gomes (2017, 2018).

[2] Departamento de Didáctica-Universidad de Montreal, Canadá; e-mail: a.gonzalez-martin@umontreal.ca

Abstract

In this chapter we present a proposal to identify tasks and techniques specific to engineering careers, which use the notion of integral to define their own notions and deduce properties, but without explicitly using techniques or technologies of integral calculus. The tools provided by the Anthropological Theory of the Didactic (TAD) of Chevallard (1999) allow us to study praxeologies and identify the connections and disconnections between the content of the courses of calculation and professional courses; in particular, analyze the case of the study of the bending moment and the first moment of area in civil and mechanical engineering.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic, Integral Calculus, Praxeology, Bending moment.

Introducción

El estudio de las matemáticas, y en particular del Cálculo, es necesario en muchas áreas científicas y tecnológicas, incluyendo la ingeniería. Sin embargo, las dificultades que los estudiantes universitarios encuentran en sus cursos de matemáticas pueden llevarles a abandonar sus aspiraciones de carrera (Ellis, Kelton & Rasmussen, 2014). La investigación en educación matemática y en ingeniería ha identificado, en la trayectoria de los estudiantes, dos momentos importantes en los que estas dificultades se manifiestan. En primer lugar, la transición entre los estudios preuniversitarios y los universitarios presenta grandes dificultades, en particular en lo referente a las matemáticas (Rooch, Junker, Härterich & Hackl, 2016) y, en el caso de ingeniería, los estudiantes parecen no tener la preparación suficiente para sus cursos (Bowen, Prior, Lloyd, Thomas & Newman-Ford, 2007); de hecho, Fadali, Johnson, Mortensen y McGough (2000: S2D-19) afirman que "habilidades pobres en matemáticas son un obstáculo importante para completar […] programas de ingeniería".[3] En segundo lugar, la investigación ha identificado una desconexión entre el contenido de los cursos de matemáticas y los cursos profesionales en los programas de ingeniería. Por ejemplo, Loch y Lamborn (2016: 30) afirman que: "las matemáticas se enseñan a menudo de una forma 'matemática', enfocada en los conceptos y la comprensión matemática, en lugar de en las aplicaciones. Las aplicaciones

[3] Todas las citas de este capítulo son traducciones libres hechas por el autor.

se ven después en los estudios en ingeniería". Esta desconexión puede crear un "vacío en la habilidad de los estudiantes para usar las matemáticas en su práctica en ingeniería" (Christensen, 2008: 131). Este vacío puede ser agravado por el hecho de que, de manera tradicional, los programas de ingeniería están organizados en dos bloques: los cursos de ciencias básicas (física, matemáticas…) en los dos primeros años, y los cursos técnicos específicos a cada área de ingeniería en los años siguientes. Sobre esta situación, Winkelman (2009: 306) indicó que "los dos primeros años se dedican típicamente a las ciencias básicas, lo que significa que los estudiantes podrían encontrar profesores ingenieros solamente en el tercer año de estudios". Como consecuencia, los estudiantes a menudo encuentran difícil conectar los contenidos matemáticos con los contenidos profesionales. Para Flegg, Mallet & Lupton (2011: 718), "sin una conexión explícita entre teoría y práctica, el contenido matemático de los programas de ingeniería puede no ser visto como relevante por los estudiantes". Enfrentadas con estos problemas, las comunidades de investigación sobre el aprendizaje de la matemática y de la ingeniería han desarrollado investigaciones y discusiones sobre "cómo mejorar el aprendizaje matemático de los estudiantes de ingeniería y, en consecuencia, sus cursos profesionales" (Bingolbali, Monaghan & Roper, 2007: 764). Algunos esfuerzos han sido realizados para disminuir esta distancia entre las prácticas en ingeniería y en matemáticas; por ejemplo, al conectar los métodos básicos en matemáticas con aplicaciones (Rooch *et al*., 2016) o introducir cursos en modelización matemática y resolución de problemas en los primeros años de los programas de ingeniería (Wedelin, Adawi, Jahan & Andersoon, 2015). Este tipo de iniciativas parece tener efectos positivos en el aprendizaje de los estudiantes.

La investigación en didáctica de las matemáticas a nivel universitario ha identificado varias dificultades que los estudiantes de Cálculo encuentran en sus estudios; sin embargo, existe una falta de investigaciones sobre cómo los profesores de los cursos profesionales en ingeniería consideran y usan las herramientas matemáticas enseñadas en los cursos de matemáticas de los primeros años. En general, se espera que los estudiantes en los cursos profesionales hayan adquirido una comprensión de las nociones matemáticas enseñadas en los primeros años. En las investigaciones para este trabajo, interesó estudiar cómo las nociones de Cálculo (que se espera que los alumnos hayan comprendido) son utilizadas en los cursos profesionales en ingeniería, identificando posibles rupturas entre la manera en que estas nociones son introducidas y usadas en Cálculo y la manera en que son usadas en los cursos profesionales posteriores. El primer paso consiste en el análisis de cómo son presentadas estas nociones en los libros usados en los cursos de ingeniería, con base en el principio de que la mayoría de los profesores universitarios usa los libros como un recurso importante para organizar sus curos (Mesa & Griffiths, 2012). Aunque, en la actualidad, no existan muchos trabajos de investigación sobre cómo los contenidos matemáticos son usados en cursos profesionales, este tipo de investigación puede servir para acercar dos comunidades. Por un lado, este tipo de análisis puede ser útil para profesores de cursos de matemáticas en ingeniería, al permitirles entender mejor cómo las nociones que ellos enseñan serán usadas en los cursos profesionales siguientes, lo cual puede llevarles a reflexionar sobre las conexiones (o falta de éstas) entre el contenido de sus cursos de Cálculo y el contenido de los cursos profesionales. Por otro lado, los profesores de cursos profesionales pueden beneficiarse de un análisis crítico de su uso de matemáticas, lo que les permitiría ayudar a los estudiantes a hacer conexiones entre el contenido de ambos cursos. En este sentido, se concuerda con la posición de Castela sobre la cuestión de escoger contenidos matemáticos apropiados para los programas universitarios profesionales:

> […] los matemáticos necesitan tomar distancia con su propia cultura […]. Tienen que reconsiderar las preguntas siguientes: ¿qué praxeologías matemáticas son útiles para tales áreas de ingeniería o profesionales? ¿Qué necesidades hay que satisfacer? ¿Qué discurso hace que la técnica matemática sea comprensible? Se trata de una investigación epistemológica que consideramos como un prerrequisito para el diseño de programas matemáticos para los programas de formación de profesionales (Castela, 2016: 426).

En las siguientes secciones se presentan los resultados acerca del uso de la integral en un curso profesional en ingeniería. Se ofrecen detalles de los resultados sobre el uso de la integral para definir el momento flector y se sintetizan los resultados sobre el uso de la integral para trabajar con el primer momento de área. Primero se desarrollan las herramientas teóricas usadas en la investigación, para después describir la metodología y definir el momento flector. Por último, se presentan algunos resultados principales y su discusión.

Marco teórico

Dado que en la investigación descrita en este capítulo interesa conocer cómo se usan las nociones del Cálculo en los cursos profesionales de ingeniería, se considera apropiado un enfoque institucional. En particular, la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) de Chevallard (1999) ofrece herramientas útiles para analizar la actividad matemática, pues considera que las actividades humanas están institucionalmente situadas y, en consecuencia, que el conocimiento sobre estas actividades también lo está (Castela, 2006: 420). La TAD ofrece un modelo epistemológico general del conocimiento matemático, donde la matemática se ve como una actividad humana dentro de la cual se estudian varios tipos de problemas (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005: 236).

Un elemento central de esta teoría es la noción de *praxeología* (u *organización praxeológica* u *organización matemática*, MO en lo que sigue), formada por un cuarteto $[T/\tau/\theta/\Theta]$, que consiste en un tipo de tarea a realizar T, una técnica τ que permite completar la tarea, un discurso (llamado tecnología) θ que explica y justifica la técnica, y una teoría Θ que incluye el discurso. Los dos primeros elementos $[T/\tau]$ constituyen el *bloque práctico* (o *saber-hacer*), compuesto de tipos de tareas y técnicas, mientras que el *bloque saber* $[\theta/\Theta]$ describe, explica y justifica lo que se hace. Estos dos bloques son elementos importantes del modelo antropológico de la actividad matemática, que puede ser usado para describir el conocimiento matemático. Además, la TAD distingue diferentes tipos de MO: puntual (asociada con un tipo específico de tarea), local (integra múltiples MO puntuales que se pueden explicar usando el mismo discurso tecnológico) y regional (integra MO locales que aceptan el mismo discurso teórico) (Barbé *et al*., 2015: 237-238).

Las praxeologías, así como el conocimiento en general, pueden moverse desde la institución donde se crearon hacia otras instituciones donde son útiles (Castela & Romo Vázquez, 2011). Éste es el caso, por ejemplo, de las nociones matemáticas usadas para resolver problemas de ingeniería. En este proceso, existen *efectos traspositivos* en las praxeologías en cuestión (Castela & Romo Vázquez, 2011; Chevallard, 1999). Se considera también el trabajo de Castela, el cual identifica que

> […] cuando un fragmento de conocimiento social, producido en una institución determinada I, se mueve hacia otra institución I_U para ser usado, la hipótesis epistemológica de la TAD enuncia que este cruce de frontera resultará muy probablemente en algunas transformaciones de este conocimiento, llamadas efectos transpositivos" (Castela, 2016: 420).

En este proceso de cruce de frontera, algunos (o todos) los elementos de la praxeología de partida pueden evolucionar. Por lo tanto, es importante analizar tanto los tipos de tareas y técnicas como los discursos y teorías utilizados. Para ello, esta investigación identifica MO locales presentes en los cursos profesionales en ingeniería y analiza cómo son usados los contenidos de Cálculo (*bloque práctico*), y si este uso está conectado de alguna forma a la forma en que estas nociones suelen ser presentadas en los cursos de Cálculo (*bloque conocimiento*).

Metodología

De acuerdo con Castela (2016), para analizar cómo se usan contenidos matemáticos para resolver problemas de un área profesional determinada, es necesario primero entender y definir estos problemas. Esto se consigue de mejor manera en colaboración con profesionales de esas áreas. En este sentido, es importante señalar que, para comprender cómo se usan las nociones de Cálculo en los cursos de ingeniería, se realizaron varios encuentros con un profesor de ingeniería que tiene su diploma de ingeniería y su maestría en el área de ingeniería civil, con más de 28 años de experiencia en la enseñanza de varios cursos profesionales en universidades brasileñas, además de experiencia de trabajo como ingeniero en varios proyectos. Este profesor explicó las nociones abordadas en este capítulo y ayudó a identificar contenidos de cursos donde las nociones de Cálculo de una variable son usadas. Para empezar la investigación, se escogió estudiar la manera en que la noción de integral es usada en cursos de ingeniería, y se identificaron dos nociones: momento flector y primer momento de área. Los resultados sobre la primera noción se desarrollan de forma detallada, mientras que los resultados acerca de la segunda se sintetizan de forma breve al final.

En la universidad del profesor entrevistado, las nociones de momento flector (asociado al esfuerzo cortante) y de primer momento de área se introducen en el tercer semestre del programa (segundo año), en el curso Resistencia de materiales para Ingeniería civil (los estudiantes siguen Cálculo en los dos primeros semestres). El programa de este curso incluye tres libros internacionales clásicos (todos traducidos al portugués), con Beer, Johnston, DeWolf & Mazurek (2012) como obra de referencia. Se procedió en dos etapas:

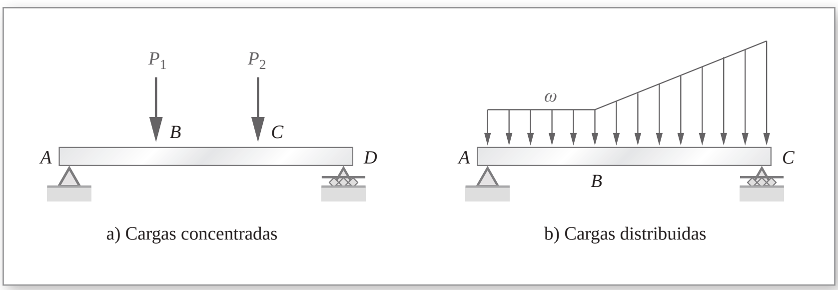
- En primer lugar, un análisis de la estructura general del contenido relativo a integrales en los cursos de Cálculo. Se identificaron las principales tareas propuestas a los estudiantes, y se agruparon según los elementos tecnológicos necesarios para llevarlas a cabo, identificando así las principales MO locales que estructuran este contenido.
- En segundo lugar, comenzaron los análisis del libro de referencia del curso de Resistencia de materiales. Se identificaron todas las apariciones de momento flector y de primeros momentos en el libro (mediante la búsqueda de palabras clave en una versión electrónica del libro). Para cada aparición de estas nociones, se analizan las tareas propuestas en el libro. Para cada una de estas tareas, se analizan las técnicas y discursos (tecnologías) usadas por el libro. La noción de momento flector es presentada en el capítulo 5; sin embargo, la noción de primer mo-

mento se usa en diferentes capítulos del libro, donde varias nociones de ingeniería son introducidas y explicadas, por lo que los discursos tecnológicos son bastante variados, y dan lugar a varias MO. En lo que sigue se ofrecen detalles más específicos de estos análisis.

Fuerza cortante y momento flector

Este contenido se introduce en la parte del curso sobre el análisis y diseño de vigas, un aspecto importante de la ingeniería civil y mecánica. En general, las cargas son perpendiculares al eje de la viga (*cargas transversales*), lo que produce flexiones y cortes en las vigas. Estas cargas transversales pueden ser concentradas (medidas en newtons, libras o sus múltiplos: kilonewtons y kips), distribuidas (medidas en N/m, kN/m, lb/ft o kips/ft), o ambas (figura 8-1).

Figura 8-1 Tipos de cargas (Beer *et al.*, 2012: 34).



Cuando una viga está sujeta a cargas transversales, cualquier sección de ésta experimenta dos fuerzas internas: un esfuerzo cortante (V) y un par flector (M). La segunda crea tensiones normales a la sección transversal, mientras que el esfuerzo cortante crea tensiones de corte. En consecuencia, el criterio de resistencia para construir una viga suele ser el valor máximo de la tensión normal a la viga.

De este modo, uno de los factores más importantes a considerar para construir una viga para una carga dada, consiste en localizar y medir el mayor momento flector. Para determinar esta localización, se enseña a los estudiantes técnicas para dibujar diagramas de momento flector, definiendo M en varios puntos sobre la viga y midiendo la distancia x a partir de un extremo.

Análisis de datos y discusión

La integral en el curso de Cálculo

El curso de Cálculo se enseña en el primer año del programa, repartido en dos semestres en dos cursos: Cálculo I y Cálculo II. Hasta hace unos pocos años, las integrales se abordaban sólo en Cálculo II, sin embargo, parte del contenido se puso en el curso Cálculo I para que los estudiantes tuvieran algunas herramientas al comenzar el curso Física II (en el segundo semestre). Así, las integrales aparecen hacia el final de Cálculo I y son el tema central de Cálculo II. El contenido cubre la noción de integral indefinida (antiderivada de f), sumas de Riemann e integral definida, aplicaciones para el cálculo de áreas, integración por sustitución y volúmenes (Cálculo I), así como métodos de integración, integrales impropias y longitud de arco de curva (Cálculo II). La referencia principal es el libro clásico de Stewart (2012).

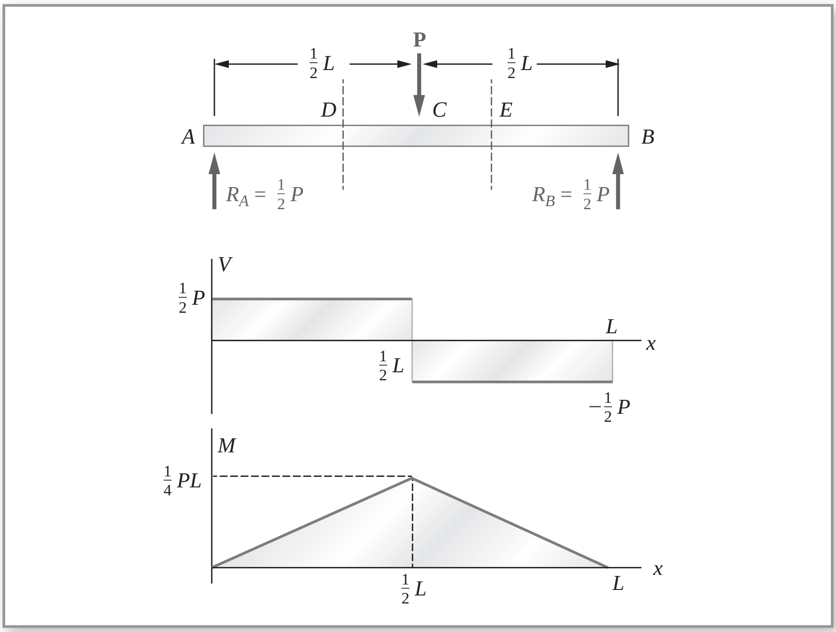
El contenido sobre integrales se estructura, en lo fundamental, en dos MO locales. La primera, MO_{M1}, introduce técnicas para el cálculo de integrales indefinidas (comienza con integración inmediata, seguida de varias técnicas de integración). Los elementos teóricos que justifican los diferentes métodos están casi siempre ausentes, y los que se presentan, se explican sin una demostración. La segunda MO, MO_{M2}, introduce las sumas de Riemann para definir de manera formal la integral definida e interpretarla como un área, lo que lleva al teorema fundamental del cálculo y al cálculo de integrales definidas mediante la regla de Barrow; esto conduce a algunas aplicaciones de la integral (área, volumen…). Muchas técnicas usadas en MO_{M2} se pueden obtener a partir de MO_{M1}.

Además, la conexión entre el signo de la derivada y la monotonía de la función (θ_1) se presenta en Cálculo I y se usa en algunas tareas, como el trazado de la gráfica de funciones. También se abordan algunas conexiones entre diferenciabilidad y continuidad (θ_2).

Fuerza cortante y momento flector

El contenido relativo al trazado de diagramas de momento flector se presenta en el capítulo 5 de Beer *et al*. (Analysis and Design of Beams for Bending, 2012). El capítulo comienza introduciendo diferentes tipos de vigas y cargas, así como las nociones de carga (w), el esfuerzo cortante (V) y el momento flector (M). La sección 5.1 introduce las relaciones entre, y las direcciones de, las fuerzas V y M en diferentes secciones de una viga, según el tipo de carga. En esta sección, los cálculos se hacen a partir de la idea de que la suma de fuerzas debe ser igual a cero, mediante fórmulas introducidas en secciones previas del libro. El trazado de diagramas de momento flector lleva a configuraciones como la que se muestra en la figura 8-2. Por supuesto, alguien con conocimientos de Cálculo podría comenzar a hacer conexiones entre las gráficas de V y M, pero esta conexión se hace hasta la sección 5.2 (Relationships Between Load, Shear, and Bending Moment).

Figura 8-2 Ejemplo de diagrama de momento flector para cargas concentradas (Beer *et al.*, 2012: 350).



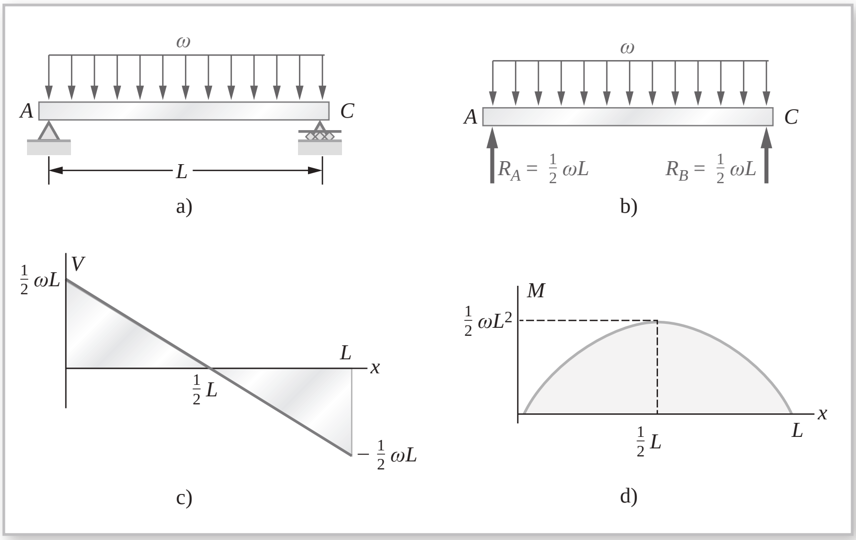
La técnica usada en la sección 5.1 es bastante rudimentaria, pero la sección 5.2 define de forma explícita (mediante derivadas e integrales, razón por la cual el interés se centra en esta sección) las relaciones entre w, V y M para facilitar el trazado de diagramas de momento flector, que es el tipo de tarea (T_E) a resolver. La sección 5.2 presenta una nueva praxeología (relacionada con la de la sección 5.1) que introduce el cálculo de V y M en dos puntos adyacentes, x y Δx. Los autores desarrollan a partir de resultados de 5.1, para llegar a que $\Delta V = -w\Delta x$ y dicen: “dividiendo ambos miembros de la ecuación por Δx y haciendo que Δx se acerque a cero: $dV/dx = -w$. [Esto] indica que, para una viga cargada como se muestra [en una figura dada], la pendiente dV/dx de la curva de la fuerza de corte es negativa” (Beer *et al.*, 2012: 360). Es importante señalar dos cosas. En primer lugar, el libro no usa la notación de límites, lo que puede dificultar que los estudiantes conecten el contenido con praxeologías de Cálculo (por ejemplo, cuando se definen derivadas y cuando se pasa de Δx a dx). Aunque la tecnología empleada para llegar a la expresión final se basa en contenido estudiado en clases de Cálculo previas, no es seguro que todos los estudiantes podrán hacer esta conexión. En segundo lugar, el libro relaciona dV/dx con la noción de pendiente, pero (de forma sorprendente) lo relaciona con un solo caso (mostrado en una figura), en lugar de explicarlo como un principio general mediante la tecnología θ_1 del curso de Cálculo. Esto podría llevar a algunos estudiantes a pensar que esta conexión entre pendiente de V y w se aplica sólo a la figura mostrada. Aunque las nociones (y sus propiedades) introducidas para abordar T_E se definen a partir de herramientas de Cálculo, no se relacionan de forma explícita con tecnologías (tales como θ_1) de este curso. Por último, la expresión obtenida se integra entre los puntos C y D para obtener: "$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w dx$" y "$V_D - V_C$ = (área bajo la curva de la carga entre C y D)".

En general, aunque el libro use elementos de Cálculo, evita un uso explícito del tipo de notación y propiedades que han sido institucionalizados en esta disciplina (tales como θ_1 y θ_2). Por ejemplo, el libro dice: "[$dV/dx = -w$] no es válido en un punto donde se aplica una carga concentrada; la curva de la fuerza de corte es discontinua en ese punto" (Beer *et al*., 2012: 361). Esta redacción evita enunciados claros sobre continuidad y diferenciabilidad (disponibles en θ_2). Tal como Castela (2016) lo señala en un contexto diferente, aquí se parte de que los autores buscan desarrollar otro tipo de conocimientos, correlacionados de manera fuerte con el contexto profesional. Mediante técnicas similares a las usadas para deducir V (y, de nuevo, evitando escribir límites y con la fórmulación "haciendo que Δx se acerque a cero"), se deduce la expresión $dM/dx = V$ y los autores enuncian:

> [esto] indica que la pendiente dM/dx de la curva del momento flector es igual al valor de la fuerza de corte. Esto es cierto en cualquier punto donde la fuerza de corte tenga un valor bien definido (por ejemplo, no se aplican cargas concentradas). [Esto] también muestra que $V = 0$ en puntos donde M es máxima. Esta propiedad facilita la determinación de puntos donde la viga puede fallar debido a la flexión.

Debe señalarse de nuevo que los autores evitan usar de manera explícita una tecnología introducida en Cálculo (θ_1), con lo cual esta conexión se hace menos evidente para los estudiantes. Por último, se deduce que: "$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx$" y que "$M_D - M_C$ = (área bajo la curva de la fuerza cortante entre C y D)".

Figura 8-3 Ejemplo resuelto (Beer *et al.*, 2012: 362).



Puede verse que el libro evita usar de manera explícita propiedades institucionalizadas en el curso de Cálculo, lo que lleva a un tipo de praxeología en donde se escriben herramientas de Cálculo, pero se favorecen técnicas geométricas. Con esto no quiere decirse que dichas técnicas sean erróneas, pero pueden llevar a lagunas en el conocimiento de los estudiantes, quienes podrían no reconocer el mismo objeto (*integral*) que ya conocen del curso de Cálculo. Como muestra, el primer ejemplo resuelto (t_1) (figura 8-3) presenta una carga w distribuida con uniformidad. Mediante fórmulas previas, se deducen las fuerzas de reacción en las extremidades $\left(\text{iguales a } \frac{1}{2}wL\right)$, lo que lleva a deducir que $V_A = \frac{1}{2}wL$ y a que $V - V_A = \int_0^x wdx = -wx$, lo que lleva a que $V = V_A - wx = \frac{1}{2}wL - wx = w\left(\frac{1}{2}L - x\right)$. Nótese que la notación es diferente a la usada en la parte teórica y que la expresión depende del parámetro w (con lo cual se introduce una técnica τ_1 diferente de lo presentado antes, y que no aborda la presencia de w). Este hecho no se explicita y se presenta una figura (8-3c) que da por hecho que los estudiantes pueden interpretar una gráfica que depende de un parámetro, con lo cual ignoran las conocidas dificultades de los estudiantes con parámetros (Furinghetti & Paola, 1994). El valor máximo del momento flector se obtiene al calcular el área bajo la región triangular positiva

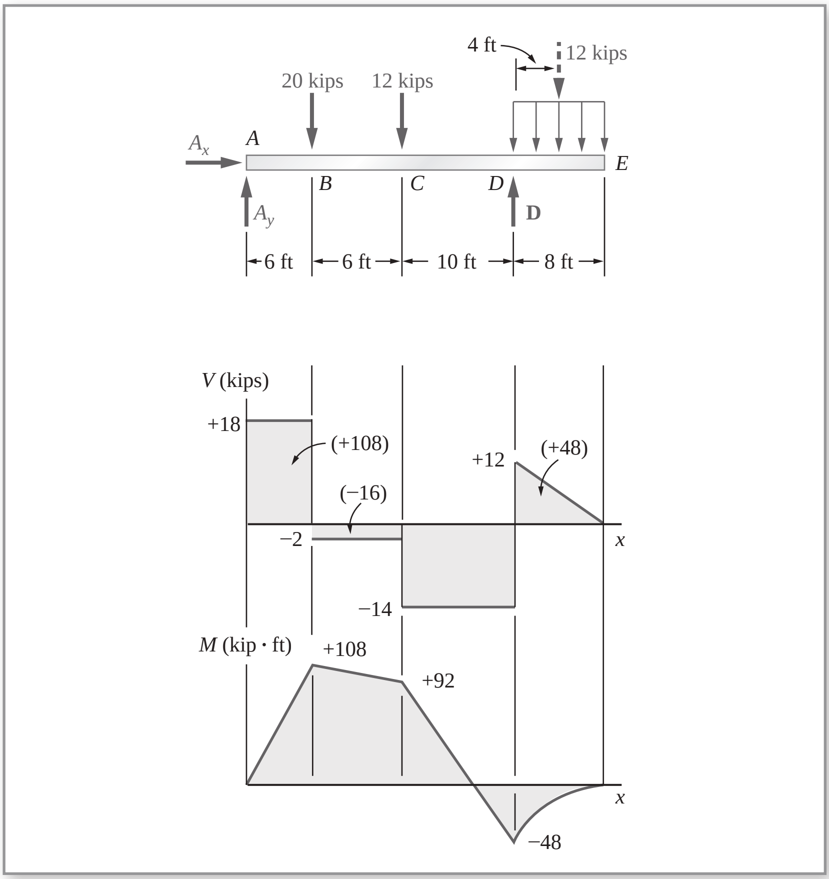
$\left(M_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{2}\right)$, y la curva se dibuja a mano (otra técnica que no aborda de manera explícita que M ha sido introducida como la integral de V). Los autores concluyen:

> Nótese que la curva de carga es una línea recta horizontal, la curva de la fuerza de corte es una línea recta oblicua y la curva del momento flector es una parábola. Si la curva de carga hubiese sido una línea recta oblicua (primer grado), la curva de la fuerza de corte sería una parábola (segundo grado) y la curva del momento flector sería una cúbica (tercer grado). Las curvas de la fuerza de corte y del momento flector tienen siempre uno y dos grados más que la curva de carga, respectivamente. Con esto en mente, los diagramas de la fuerza de corte y del momento flector se pueden dibujar sin tener que determinar las funciones $V(x)$ y $M(x)$ (Beer *et al*., 2012: 362).

Observe que se usa un caso único para introducir un elemento tecnológico importante (θ_E) que es útil para resolver T_E (cuando se dibuja a mano), pero este elemento no se justifica de forma general, aunque se hayan introducido V y M como integrales (y mostrado que sus coeficientes pueden ser deducidos como primitivas), lo que permitiría usar una tecnología proveniente del curso de Cálculo (en específico, la presente en MO_{M1}) para esta justificación. En su lugar, el libro escoge introducir una regla (θ_E) e indica al estudiante que apenas tiene que añadir uno o dos grados, respectivamente, para dibujar $V(x)$ y $M(x)$.

El siguiente problema resuelto pide a los estudiantes (de nuevo con fórmulas de la sección 5.1) que calculen los valores de fuerzas en los extremos de intervalos y varias áreas mediante geometría. Se pide a los estudiantes que dibujen a mano la curva del momento flector (figura 8-4), incluso para funciones cúbicas (en otros problemas siguientes). De este modo, dado el diagrama original (parte superior de la figura 8-4), los estudiantes pueden deducir el valor de V, que será constante en ciertos intervalos, y deducir su valor específico en D y E, además de unirlos con segmentos rectos. Una vez que el estudiante tiene el gráfico de V, es posible calcular las áreas bajo cada segmento para deducir los valores de M en B, C y D, uniéndolos a mano. En resumen, se puede ver que el libro introduce una praxeología para resolver el problema del esbozo del diagrama del momento flector (T_E). Sin embargo, aunque las nociones necesarias para resolver esta tarea sean introducidas a través de herramientas matemáticas (en este caso, la integral), las tecnologías se apoyan en resultados matemáticos implícitos que no son identificados con claridad, lo cual favorece una perspectiva centrada en un discurso profesional. Las técnicas que se presentan se limitan a calcular ciertos puntos en una gráfica y a unirlos mediante propiedades geométricas, lo que puede dificultar que los estudiantes hagan

Figura 8-4 Ejemplo resuelto (Beer *et al.*, 2012: 363).



conexiones con las técnicas y nociones introducidas en el curso de Cálculo. También se señala que, si bien las nociones son presentadas como una integral, este hecho no se hace explícito en las técnicas ni en el discurso para justificarlas. Además, puesto que es posible ignorar las explicaciones del libro y apenas centrarse en las técnicas para aprender a resolver las tareas, no es evidente que los estudiantes conectarán este contenido con el estudiado en cursos previos de Cálculo. Así, el libro introduce una praxeología en la que el bloque práctico se presenta de forma clara $[T_E/\tau_E]$, pero en la que el bloque saber (sobre todo, θ_E) combina elementos matemáticos con elementos de la profesión de ingeniería, y deja varios hechos implícitos. Además, este tipo de tareas no justifica la necesidad de aprender todo el contenido y técnicas relativos a la integración que ya se habían estudiado en el curso de Cálculo.

Síntesis de resultados sobre el primer momento de área

Los momentos de área suelen enseñarse en cursos de ingeniería que tratan la resistencia de materiales. En ingeniería civil, por ejemplo, para resolver problemas de flexión de vigas se debe tomar en cuenta algunas características geométricas específicas de las secciones transversales. En esta situación, la noción de primer momento de área se utiliza para calcular el centroide de un área y los esfuerzos cortantes en la flexión transversal. El centroide de un área A es su baricentro geométrico y el punto C de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ tales que las relaciones siguientes se cumplen: $\int_A x\, dA = A\bar{x}$ y $\int_A x\, dA = A\bar{y}$. Según Beer *et al*. (2012: A2), el primer momento del área A con respecto al eje x (resp. eje y) se define en términos matemáticos como la integral $Q_x = \int_A y\, dA \left(\text{resp. } Q_x = \int_A y\, dA\right)$. En ambas integrales, el subíndice A en el signo de integral indica que la integral se calcula sobre toda el área transversal. Ambas integrales caracterizan la suma de los productos de cada elemento de área dA y su distancia al eje respectivo (x o y), y se miden en unidades cúbicas (Beer *et al*., 2012). Cuando un área posee un eje de simetría, el primer momento con respecto a ese eje vale cero, puesto que cada elemento de área dA de abscisa x (resp. ordenada y) corresponde a un elemento de área dA' de abscisa $-x$ (resp. ordenada $-y$). Esto implica que, cuando un área posee un eje de simetría, su centroide está situado sobre ese eje. Por ejemplo, en una sección rectangular (dos ejes de simetría), su centroide C coincide con su centro geométrico. Determinar la posición del centroide es importante, pues varias fuerzas en una barra pasan a través de su centroide.

Al analizar el libro de la misma manera que para el momento flector, los resultados actuales muestran que, aunque esta noción se defina como una integral, en ninguna sección del libro el estudiante debe realizar un cálculo de integrales (tabla 8-1). (Para más detalles vea González-Martín & Hernandes-Gomes, 2018).

Tabla 8-1 Síntesis del uso de primeros momentos en Beer *et al*. (2012).

Descripción del uso	Términos usados	Capítulo-secciones
El término aparece en una explicación teórica. Aparece con una expresión que usa el signo integral, pero no se realiza ningún cálculo.	Primer momento, Primer momento de área, Q, centroide	4.2 (p. 245), 4.2 (p. 245), 4.4 (p. 262), 4.6 (p. 274)
		6.1 (p. 421), 6.1 (p. 421), 6.3 (p. 437)

<table>
<tr><td rowspan="4">El término aparece en una explicación teórica. Aparece sin una expresión que use el signo integral.</td><td rowspan="4">Primer momento, Primer momento de área, Q, centroide</td><td>4.3 (p. 262)</td></tr>
<tr><td>6.1C (p. 424), 6.1C (p. 424),
6.4 (p. 440), 6.6 (p. 454, pp. 459-460), Review (p. 467)</td></tr>
<tr><td>8.1 (p. 559), Review (p. 591)</td></tr>
<tr><td>9.5A (p. 651), 9.5A (p. 651),
9.5A (p. 654), 9.5A (p. 654),
9.6B (p. 666)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Aplicación de concepto: el término aparece en algunos cálculos, pero no se realiza ningún cálculo de integrales.</td><td rowspan="4">Primer momento, Primer momento de área, Q, centroide</td><td>4.2 (p. 247, p. 248)</td></tr>
<tr><td>6.1 (p. 422), 6.1 (p. 422),
6.3 (p. 438), 6.6 (pp. 456-457)</td></tr>
<tr><td>8.3 (pp. 577-578)</td></tr>
<tr><td>9.5A (p. 652), 9.5A (p. 653),
9.5A (p. 655), 9.5A (p. 656),
9.6B (p. 667), 9.6C (p. 669)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Problema resuelto: el término aparece en algunos cálculos, pero no se realiza ningún cálculo de integrales.</td><td rowspan="3">Primer momento, Q, centroide</td><td>4.3 (p. 251), 4.5 (p. 265),
4.10 (p. 326)</td></tr>
<tr><td>6.2 (p. 429), 6.5 (pp. 443-446),
6.6 (p. 462)</td></tr>
<tr><td>8.3 (p. 583)</td></tr>
</table>

Conclusiones

En este capítulo se presentan resultados (detallados para el momento flector y de forma sintética para el primer momento de área) sobre el proceso de cruce de frontera (Castela, 2016) de contenido relativo a las integrales, y se examina cómo éste es utilizado en técnicas y tecnologías en una praxeología propia de ingeniería civil y mecánica. La literatura científica ha identificado desconexiones entre los cursos de matemáticas y los cursos profesionales en ingeniería (Christensen, 2008; Loch & Lamborn, 2016), y la presente investigación permite identificar de forma precisa algunas de estas desconexiones. Además, se sostiene que las herramientas proporcionadas por la TAD permiten estudiar praxeologías e identificar las conexiones y desconexiones entre el contenido de los cursos de Cálculo y el de los cursos profesionales. En particular, los análisis realizados permiten identificar tareas y técnicas propias de la ingeniería que usan la noción de integral para definir sus propias nociones y deducir propiedades, pero sin usar de forma explícita técnicas o tecnologías de Cálculo. Así, se ve que las técnicas presentadas se basan en consideraciones geométricas y en contenidos previos de ingeniería, lo que puede enmascarar el hecho de que las nociones usadas se definen como integrales.

Es probable que se justifique el estudio del cálculo integral en los programas de ingeniería basados en la idea de que "los ingenieros usan integrales". Sin embargo, nos parece que la forma en que las integrales se enseñan en los cursos de Cálculo sigue praxeologías matemáticas reconocidas (aceptadas y reconocidas por la institución de investigación en matemáticas; Castela, 2016: 421). Estas praxeologías matemáticas ignoran el uso de integrales en los cursos profesionales. La pregunta clave, señalada al final de la introducción —"¿qué necesidades hay que satisfacer?"—, parece ser ignorada por las praxeologías desarrolladas en los cursos de Cálculo, lo que resulta en dos usos diferentes del *mismo* objeto.

Existe la intención de completar los análisis detallados sobre el uso de momentos flectores y momentos de área, para proporcionar un retrato más detallado del uso de integrales en este contenido. Este trabajo será seguido de análisis de otros contenidos de ingeniería, lo que permitirá comprender mejor el uso de contenidos del Cálculo por los ingenieros, además de identificar posibles rupturas experimentadas por los estudiantes de ingeniería.

Referencias

Barbé, J.; Bosch, M.; Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: the Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1), 235-268.

Beer, F.; Johnston, E. R.; DeWolf, T., & Mazurek, D. F. (2012). *Mechanics of Materials* (7a ed.). Nueva York: McGraw-Hill Education.

Bingolbali, E.; Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering Students' Conceptions of the Derivative and Some Implications for their Mathematical Education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(6), 763-777.

Bowen, E.; Prior, J.; Lloyd, S.; Thomas, S., & Newman-Ford, L. (2007). Engineering More Engineers-Bridging the Mathematics and Careers Advice Gap. *Eng. Education*, 2(1), 23-32.

Castela, C. (2016). When Praxeologies Move from an Institution to Another: an Epistemological Approach to Boundary Crossing. En R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (eds.), *Proceedings of the KHDM Conference: Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*, 153-161. Kassel: Universitätsbibliothek Kassel.

Castela, C., & Romo Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Christensen, O. R. (2008). Closing the Gap Between Formalism and Application —PBL and Mathematical Skills in Engineering. *Teaching Mathematics and its Applications*, 27(3), 131-139.

Ellis, J.; Kelton, M. L., & Rasmussen, C. (2014). Student Perceptions of Pedagogy and Associated Persistence in Calculus. *ZDM - The Int. Journal on Mathematics Education*, 46(4), 661-673.

Fadali, M. S.; Johnson, J.; Mortensen, J., & McGough, J. (2000). A New on-line Testing and Remediation Strategy for Engineering Mathematics. Paper presented at the 30th Annual Frontiers in Education Conference. Building on A Century of Progress in Engineering Education. Conference Proceedings (IEEE Cat. No.00CH37135).

Flegg, J.; Mallet, D. & Lupton, M. (2011). Students' Perceptions of the Relevance of Mathematics in Engineering. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(6), 717-732.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J. P. da Ponte & J. V. Matos (eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, 368-375). Lisboa: University of Lisbon.

González-Martín, A. S. & Hernandes-Gomes, G. (2017). How are Calculus Notions Used in Engineering? An Example with Integrals and Bending Moments. En T. Dooley & G. Gueudet (eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2073-2080. Dublín: DCU Institute of Education and ERME.

__________ (2018). The Use of Integrals in Mechanics of Materials Textbooks for Engineering Students: The Case of the First Moment of an Area. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N.M. Hogstad (eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2018)*, 125-134. Kristiansand: University of Agder and INDRUM.

Loch, B. & Lamborn, J. (2016). How to Make Mathematics Relevant to First-Year Engineering Students: Perceptions of Students on Student-Produced Resources. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(1), 29-44.

Mesa, V. & Griffiths, B. (2012). Textbook Mediation of Teaching: an Example from Tertiary Mathematics Instructors. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 85-107. doi: 10.1007/s10649-011-9339-9

Rooch, A.; Junker, P.; Härterich, J., & Hackl, K. (2016). Linking Mathematics with Engineering Applications at an Early Stage – Implementation, Experimental

Set-Up and Evaluation of a Pilot Project. *European Journal of Engineering Education*, 41(2), 172-191.

Stewart, J. (2012). *Calculus* (7a ed.). Belmont: Cengage Learning.

Wedelin, D.; Adawi, T.; Jahan, T., & Andersson, S. (2015). Investigating and Developing Engineering Students' Mathematical Modelling and Problem-Solving Skills. *European Journal of Engineering Education*, 40(5), 557-572.

Winkelman, P. (2009). Perceptions of mathematics in engineering. *European Journal of Engineering Education*, 34(4), 305-316.