



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**“INESTABILIDAD MODULACIONAL EN SISTEMAS NO LINEALES
DESCRITOS POR LA ECUACIÓN NO LINEAL NO – AUTÓNOMA DE
SCHRÖDINGER”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

ANTARES SAYLE REYES HERNÁNDEZ

ASESOR DE TESIS:

DR. MÁXIMO AUGUSTO AGUERO GRANADOS

CO-ASESOR DE TESIS:

DRA. TATYANA BELYAeva LEONIDOVNA



TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO

FEBRERO 2022

Dedicatoria

Esta tesis está dedicada a la memoria de mi papá, Fred Reyes Cordero, quien me enseñó que el mejor conocimiento que se puede tener es el que se aprende por sí mismo, por siempre apoyarme y darme razones para creer en mi misma, darme seguridad y por ser un padre ejemplar.

A mi mamá, Celene Hernández Becerril, quien me enseñó que incluso la tarea más grande se puede lograr si se hace un paso a la vez, por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ella he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy.

A Julieta por ser mi mejor amiga, prima, consejera y protectora, hoy que no estás seguirás siendo esa hermana con la que las risas siempre estarán, la que me enseñó a defenderme y a no tener miedo.

A mi familia, porque me impulsa a seguir adelante cada día, por aguantar todo lo que hemos vivido y con ello mi mal carácter y miedo, por darme fuerzas y ánimos en mis días de debilidad, por siempre estar ahí cuando mas lo necesito.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Introducción	1
1. Conceptos fundamentales	5
1.1. Estudio de la dinámica de estructuras solitónicas y el surgimiento de efecto de recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam.	5
1.2. Antecedentes del concepto solitón y de inestabilidad modulacional	6
1.3. Inestabilidad Modulacional	8
1.4. Sistemas Lineales y No Lineales	10
2. Fenómeno recurrente de Tsingou Fermi Pasta Ulam	14
2.1. Experimento	15
2.2. Ondas	20
2.3. Serie de Taylor	20
2.4. Ecuación de Korteweg-de Vries	22
3. Solitones y la ecuación no lineal de Schrödinger	24
3.1. Solitones	25
3.2. Ecuación no lineal de Schrödinger	27
3.3. Soluciones de solitón y resultados de la dispersión inversa . . .	33
3.4. Períodos de solitón	38
4. Inestabilidad modulacional	41
4.1. Análisis de la dinámica del sistema de Akhmediev y Korneev .	44
4.2. Experimento de Gaetan Van Simaey, Philippe Emplit, y Marc Haelterman	52
4.3. Espectro de inestabilidad de modulación en una fibra óptica de dispersión variable	56

5. Inestabilidad modulacional en la ecuación no lineal de Schrödinger	67
5.1. Modelación matemática de pulsos no lineales con inestabilidad modulacional según la NLSE no autónoma.	70
5.2. Estudio de las regiones de inestabilidad modulaciones en NLSE no autónomo con coeficientes variables.	82
6. Conclusiones	88
Referencias	92

Introducción

La mayoría de los fenómenos que ocurren en la naturaleza tienen un carácter no lineal. Por ejemplo, el movimiento de las olas en el mar, los sistemas meteorológicos, interacción de partículas elementales, propagación de ondas en medios continuos y discretos, en economía está el modelo de Goodwin (el cual presenta una interacción entre renta y capital, el ciclo límite que se genera sólo es producto de la estructura funcional del modelo, no depende de las condiciones iniciales y no son necesarios factores exógenos para poner el ciclo en movimiento), procesos biológicos, etc.

El comportamiento lineal de un elemento facilita su estudio, en la realidad todo elemento se comporta como no lineal pero los resultados de su estudio no difieren, dicho comportamiento se expresa por medio de una función lineal del tipo $f(x) = ax + b$, que es la ecuación de la recta en su forma pendiente y ordenada al origen. Dos ejemplos sencillos de estos fenómenos son:

- a) El resorte, donde la Ley de Hooke el comportamiento fuerza deformación es lineal ($F = -kx$, donde F representa a la fuerza aplicada para deformar un resorte y que a su vez está en función de la constante de elasticidad k del resorte y de la deformación lineal x).
- b) El Principio de Arquímedes que afirma que; un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo, recibe un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del volumen del fluido que desaloja. Esta fuerza recibe el nombre de empuje hidrostático o de Arquímedes y se mide en Newtons, ($E = mg = \rho_f g V$, donde E es el empuje, ρ_f es la densidad del fluido, V el volumen del fluido desplazado por algún cuerpo sumergido parcial o totalmente en el mismo, g la aceleración de la gravedad y m la masa, de este modo, el empuje depende de la densidad del fluido, del volumen del cuerpo y de la gravedad existente en ese lugar).

A diferencia de los fenómenos lineales, donde el método de Fourier es el más indicado, no existe un método de estudio único para los problemas no lineales.

En el presente trabajo estudiamos la inestabilidad modulacional (IM) inducida en el marco del modelo de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) no autónoma y que posee la característica de ser no integrable. Generalizamos el algoritmo de la IM dado por Akira Hasegawa [18], y lo aplicamos a sistemas no autónomos con dispersión y no linealidades variables.

Es este trabajo de tesis se encuentra organizado como sigue:

1. **Conceptos Fundamentales:** En este capítulo se revisarán los conceptos básicos relacionados con los capítulos que se estudiarán más adelante, así como sus antecedentes.
2. **Fenómeno de recurrencia de Tsingou Fermi Pasta Ulam:** En este capítulo se dará a conocer el experimento de Tsingou Fermi Pasta Ulam, se explicará definiciones relacionadas con este tema.
3. **Solitones y la ecuación no lineal de Schrödinger:** En este capítulo se explicará de manera detallada el concepto de solitón, y su relación con la ecuación no lineal de Schrödinger, así como el tipo de soluciones que tienen.
4. **Inestabilidad modulacional:** Este capítulo se explicará de manera detallada el concepto de estabilidad e inestabilidad modulacional, el análisis de la dinámica del sistema de Akhmediev y Korneev, el experimento de Gaetan Van Simaey, Philippe Emplit, y Marc Haelterman y el espectro de inestabilidad de modulación en una fibra óptica de dispersión variable.
5. **Inestabilidad modulacional en la ecuación no lineal de Schrödinger:** De manera análoga, este capítulo contiene el análisis de la inestabilidad modulacional de las soluciones para la ecuación no lineal, no autónoma de Schrödinger, así como la modelación matemática de pulsos no lineales, y el estudio de las regiones de inestabilidad modulacional con coeficientes variables.

6. Conclusiones: Se explican los resultados de relación de dispersión, así como el alcance que tiene el trabajo realizado.

Además se estudian las relaciones de dispersión que acoplaran al número de ondas K con la frecuencia de la perturbación Ω que a su vez conllevará a la obtención de regiones de estabilidad de la IM inducida y se analizará el proceso que para el surgimiento de la inestabilidad modulacional, la condición más importante es la dispersión anómala de la velocidad del grupo. Esta condición asume una no linealidad de Kerr [18-22].

Capítulo 1

Conceptos fundamentales

1.1. Estudio de la dinámica de estructuras solitónicas y el surgimiento de efecto de recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam.

La recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam (FPU) fue reportada por primera vez en el marco de un estudio numérico de cadenas vibratorias unidimensionales de partículas en equimass conectadas por resortes lineales y débilmente no lineales. Esperaban que el acoplamiento no lineal entre masas oscilantes vecinas, que es responsable del intercambio de energía entre los modelos de vibración, eventualmente conduciría a una equipartición irreversible de energía en un amplio espectro, es decir, que el sistema se "termalizaría".

En cambio, observaron un intercambio de energía aparentemente periódico entre solo unos pocos modelos de orden superior y el modelo fundamental, donde la energía estaba inicialmente confinada. Casi toda la energía volvió al modelo inicialmente excitado después de un tiempo conocido como tiempo de recurrencia de FPU. La recurrencia de FPU es omnipresente en la ciencia no lineal, como lo revela la gran variedad de campos de investigación, como la física del plasma y la hidrodinámica en los que se ha predicho teóricamente [5]

Fermi, Pasta y Ulam descubrieron un proceso de transferencia de energía reversible inesperado entre modelos espectrales excitados en una cadena de osciladores no lineales acoplados en los que el sistema vuelve a su estado inicial, conocido hoy como recurrencia de FPU.

Unos diez años después, en un intento de resolver este misterio, Zabusky y Kruskal utilizando computadoras más avanzadas modificaron las ecuaciones utilizadas por Fermi, Pasta y Ulam. En concreto, resolvieron la ecuación de Korteweg – de Vries, que describe ondas no lineales de agua en canales poco profundas u ondas de periodo largo en redes de cristal no lineales. Zabusky y Kruskal numéricamente descubrieron en el sistema una onda que llamaron “solitón”, que es una onda solitaria que se propaga sin cambio de forma.

Se ha avanzado considerablemente en las investigaciones de la inestabilidad modulacional en el marco de diferentes modelos matemáticos de importancia física, incluidas las ecuaciones de evolución no lineal con coeficientes variables. En matemática y física aplicadas, estas ecuaciones se conocen como no autónomas, y sus soluciones viajeras exactas se conocen como solitones no autónomos (adaptados a las variaciones de dispersión y no linealidad) para distinguirlos de los solitones canónicos.

Las ecuaciones de evolución no lineales no autónomas completamente integrables están asociadas con el método de transformada de dispersión inversa (IST) con parámetros espectrales de tiempo variables.

Los sistemas de ondas casi integrables exhiben la recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam (FPU), cuando un sistema de tamaño finito repite aproximadamente su estado inicial después de un período de evolución.

1.2. Antecedentes del concepto solitón y de inestabilidad modulacional

La historia de los solitones, de hecho, se remonta a 1834, año en que Scott Russell observó un montón de agua en un canal que se propagaba sin distorsiones durante varios kilómetros. He aquí una cita de su informe publicado en 1844:

Yo estaba observando el movimiento de un bote que era arrastrado rápidamente a lo largo de un estrecho canal por un par de caballos, cuando el bote se detuvo de repente, no así la masa de agua en el canal que había puesto en movimiento; se acumuló alrededor de la proa del buque en un estado de vio-

lenta agitación, luego, dejándolo atrás repentinamente, rodó hacia adelante con gran velocidad, asumiendo la forma de una gran elevación solitaria, un montón de agua redondeado, liso y bien definido, que continuó su curso a lo largo del canal aparentemente sin cambio de forma o disminución de velocidad. Lo seguí a caballo y lo alcancé todavía rodando a una velocidad de unas ocho o nueve millas por hora, conservando su figura original de unos treinta pies de largo y un pie a pie y medio de altura. Su altura disminuyó gradualmente, y después de una persecución de una o dos millas lo perdí en las curvas del canal. Tal fue, en el mes de agosto de 1834, mi primera entrevista casual con ese singular y hermoso fenómeno que he llamado la Ola de Traslación.

Estas ondas se llamaron más tarde ondas solitarias. Sin embargo, sus propiedades no se entendieron por completo hasta que se desarrolló el método de dispersión inversa. El término solitón se acuñó en 1965 para reflejar la naturaleza corpuscular de esas ondas solitarias que permanecían intactas incluso después de colisiones mutuas. Desde entonces, los solitones se han descubierto y estudiado en muchas ramas de la física, incluida la óptica. En el contexto de las fibras ópticas, el uso de solitones para comunicaciones ópticas se sugirió por primera vez en 1973. Para el año 1999, se habían completado varios ensayos de campo que utilizaban solitones de fibra. La palabra “solitón” se ha vuelto tan popular en los últimos años que una búsqueda en Internet arroja miles de resultados. Del mismo modo, las bases de datos científicas revelan que cada año se publican cientos de trabajos de investigación con la palabra “solitón” en su título. Debe enfatizarse que la distinción entre un solitón y una onda solitaria no siempre se hace en la literatura de óptica moderna, y es bastante común referirse a todas las ondas solitarias como solitones [12].

Los solitones son ondas solitarias no lineales, auto-localizadas, robustas y de larga vida. Ellos no se dispersan y preservan su identidad durante la propagación y después de una colisión. Surgen en cualquier sistema físico que posea tanto no linealidad como dispersión. El día de hoy el concepto de solitones proporciona un ejemplo notable en el que una solución matemática abstracta ha producido un gran impacto en el mundo real de las altas tecnologías. Durante las últimas décadas de su desarrollo, el concepto de solitón ha reunido a matemáticos y físicos de diferentes áreas, en particular, de la física de la materia condensada, atómica y de baja temperatura, óptica no lineal, mecánica de fluidos y física de partículas. [27,28].

Los solitones tienen propiedades inusuales de onda y de partícula al mismo tiempo (conservan su forma cuando se propagan e incluso después de chocar entre sí). La descripción de los procesos físicos subyacentes a este fenómeno inusual requiere del uso de ecuaciones no lineales específicas. Por lo tanto, los solitones dieron lugar al desarrollo de toda una rama física matemática aplicada, dedicada a las muchas y variadas manifestaciones de estos procesos no lineales.

Es importante investigar a la estabilidad de estas ondas no lineales respecto a qué condiciones se observaría a un tren de ondas periódicas que retornan a su estado inicial, simulando el efecto de recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam, o bien en analogía a el efecto “deja vu” en procesos no lineales.

Una manifestación de la no linealidad de la fibra ocurre a través de los solitones ópticos, formados como resultado de la interacción entre los efectos dispersivos y no lineales. La palabra solitón se refiere a tipos especiales de paquetes de ondas que pueden propagarse sin distorsiones a largas distancias. Los solitones se han descubierto en muchas ramas de la física. En el contexto de las fibras ópticas, los solitones no solo son de fundamental interés, sino que también han encontrado aplicaciones prácticas en el campo de las comunicaciones por fibra óptica [12].

1.3. Inestabilidad Modulacional

La inestabilidad modulacional es un proceso debido a la interacción entre la modulación de la auto fase y la dispersión anómala, las perturbaciones débiles de la onda continua crecen exponencialmente y se transforman en trenes de pulsos.

Un tren de pulsos, se refiere a una serie de pulsos continuos por un intervalo de tiempo, cuyos factores son la frecuencia de repetición y su nivel, de tal forma que se puede conocer la frecuencia.

Una onda continua (cw o CW) es una onda electromagnética típicamente senoidal de amplitud y frecuencia constantes. También conocidas como “ondas no amortiguadas”. Se caracteriza por ocupar poco ancho de banda y tener una relación señal- ruido muy alta que permite la comunicación a larga distancia a un en condiciones desfavorables de propagación.

Las ondas continuas se rompen en paquetes de ondas pequeñas cuando hay ligeras perturbaciones (ondas secundarias) sobre la parte superior de la onda continua inicial. Este proceso se conoce como inestabilidad modulacional (IM) y más tarde se descubrió que este fenómeno está estrechamente relacionado con el problema de recurrencia de FPU. Cuando la perturbación secundaria de un solo modo con cierta frecuencia alcanza una amplitud máxima, la perturbación se reduce de tamaño y eventualmente desaparece, de manera que la onda inicial no perturbada se restaura completamente en orden inverso.

En los campos de la óptica no lineal y la dinámica de fluidos, la IM es un fenómeno donde las desviaciones de una forma de onda periódica se refuerzan por la no linealidad, conduciendo a la generación de bandas laterales espectrales y la eventual transformación de onda en un tren de pulsos [10-14]. La Inestabilidad modulacional espacial en láseres de alta potencia en disolventes orgánicos fue observada por los científicos rusos N. F. Pilipetskii y A. R. Rustamov en 1965 [15] y la derivación matemática de la IM fue publicada por V. I. Bespalov y V. I. Talanov en 1966 [16]. En 1967, T. B. Benjamin y J. E. Feir descubrieron y modelaron este fenómeno para ondas de gravedad superficiales periódicas (ondas de Stokes) en agua [17].

En los últimos años se han logrado avances considerables en el marco de ecuaciones de evolución con coeficientes variables [19-26]. A estas ecuaciones se les conoce como ecuaciones no autónomas y sus soluciones de ondas viajeras exactas se conocen como solitones no autónomos (adaptados a la variación de la dispersión y no linealidad) para distinguirlos de los solitones canónicos. Es de notar que las ecuaciones de evolución no lineales no autónomas completamente integrables son asociados con el método de transformación de dispersión inversa (IST) con variaciones en el parámetro espectral de tiempo [19-21]

Muchos sistemas no lineales exhiben una inestabilidad que conduce a la modulación del estado estacionario como resultado de una interacción entre los efectos no lineales y dispersivos. Este fenómeno se denomina inestabilidad de modulación y se estudió durante la década de 1960 en campos tan diversos como la dinámica de fluidos, la óptica no lineal y la física de plasmas. En el contexto de las fibras ópticas, la inestabilidad de la modulación requiere una dispersión anómala y se manifiesta como una ruptura de la radiación CW o cuasi CW en un tren de pulsos ultracortos. Esta sección analiza la inestabilidad de modulación en fibras ópticas como una introducción a la teoría de solitones[12].

La inestabilidad de modulación (IM) es un proceso no lineal que se ha investigado ampliamente en varios campos de la física, incluidos el plasma, la hidrodinámica y la óptica, entre otros. En presencia de una onda continua de alta potencia (cw), la IM conduce a la aparición y amplificación de bandas laterales de ganancia en el espectro de ondas. [34]

1.4. Sistemas Lineales y No Lineales

La linealidad de un sistema permite a los investigadores hacer ciertas suposiciones matemáticas y aproximaciones, permitiendo un cálculo más sencillo de los resultados. Ya que los sistemas no lineales no son iguales a la suma de sus partes, usualmente son difíciles (o imposibles) de modelar, y sus comportamientos con respecto a una variable dada.

Algunos sistemas no lineales tienen soluciones exactas o integrables, mientras que otros tienen comportamiento caótico, por lo tanto no se pueden reducir a una forma simple ni se pueden resolver. Un ejemplo de comportamiento caótico son las olas gigantes. Aunque algunos sistemas no lineales y ecuaciones de interés general han sido extensamente estudiados, la vasta mayoría son pobremente comprendidos.

■ Sistemas lineales

En matemáticas una función lineal es aquella que satisface las siguientes propiedades (ya que en un sistema tiene que poner en conjunto de dos o más ecuaciones).

1. Aditividad: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

2. Homogeneidad: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Estas dos reglas tomadas en conjunto se conocen como Principio de superposición.

■ **Sistemas no lineales**

Las ecuaciones no lineales son de interés en física y matemáticas debido a que la mayoría de los problemas físicos son implícitamente no lineales en su naturaleza. Ejemplos físicos de sistemas lineales son relativamente raros. Las ecuaciones no lineales son difíciles de resolver y dan origen a interesantes fenómenos como la teoría del caos. Una ecuación lineal puede ser descrita usando un operador lineal, L . Una ecuación lineal en algún valor desconocido de u tiene la forma:

$$Lu = 0.$$

Una ecuación no lineal es una ecuación de la forma:

$$F(u) = 0.$$

Para algún valor desconocido de u .

Para poder resolver cualquier ecuación se necesita decidir en qué espacio matemático se encuentra la solución u . Podría ser que u es un número real, un vector o, tal vez, una función con algunas propiedades.

Las soluciones de ecuaciones lineales pueden ser generalmente descritas como una superposición de otras soluciones de la misma ecuación.

Un sistema físico, matemático o de otro tipo es no lineal cuando las ecuaciones de movimiento, evolución o comportamiento que regulan su comportamiento son no lineales.

En física, una ecuación de movimiento es la formulación matemática que define la evolución temporal de un sistema físico en el espacio. Esta ecuación relaciona la derivada temporal de una o varias variables que caracterizan el estado físico del sistema, con otras magnitudes físicas que provocan los cambios en este.

En diversas ramas de las ciencias la no linealidad es la responsable de comportamientos complejos y, frecuentemente, impredecibles o caóticos.

Capítulo 2

Fenómeno recurrente de Tsingou Fermi Pasta Ulam

El fenómeno de recurrencia en sistemas no lineales con muchos grados de libertad fue observado por primera vez en un experimento numérico por Fermi, Pasta y Ulam en 1954. La idea de Fermi era abordar cómo la aleatorización debida a la interacción no lineal conduce a la equipartición de energía entre un gran número de grados de libertad en la cadena mecánica que incluía 64 osciladores complementados con condiciones iniciales de onda larga.

La frecuencia baja u onda larga se refiere a la banda del espectro electromagnético, y más particularmente a la banda de radiofrecuencia, que ocupa el rango de frecuencias entre 30 y 300 kilohercios (longitud de onda de 10 a 1 kilómetro). Propagación por onda de tierra, atenuación débil.

En esta banda operan sistemas de ayuda a la navegación aérea y marítima, como los radio faros o las radio balizas, así como sistemas de radiodifusión.

En lugar de la equipartición de energía, los experimentos numéricos mostraron que después de un tiempo finito se logró una recurrencia a los datos iniciales acompañada de un intercambio de energía cuasi-periódico entre varios modos inicialmente salidos. Ese fenómeno de recurrencia se conoció como el problema de Fermi-Pasta Ulam (FPU) y ha sido uno de los temas más atractivos para numerosas investigaciones.

La cuestión fue encontrar cómo el movimiento entero podría eventualmente termalizarse. John Pasta un físico recién llegado, asistió en la tarea de un diagrama de flujo, programando y Tsingou corriendo códigos en "the

MANIAC". El problema resultó ser oportuno. Los resultados obtenidos fueron completamente del agrado de Fermi, como su gran conocimiento de movimiento ondulatorio había esperado (Ulam, 1991)[8].

Lo que Tzingou, Fermi, Pasta y Ulam estaban tratando de hacer fue verificar numéricamente un problema básico de mecánica estadística; es decir, la creencia de que en un sistema mecánico con muchos grados de libertad y cercano a un estado de equilibrio, una introducción de energía al sistema provocaría la termalización de la misma, es decir, causaría que la energía se distribuya equitativamente entre los modelos normales del sistema linealizado [8].

La equipartición de energía entre los modelos normales está relacionada con las propiedades ergódicas de dicho sistema. En 1914, Debye sugirió que la conductividad térmica finita de una malla inarmónica se debe a las fuerzas no lineales en la malla. Esta sugerencia llevó a Tzingou, Fermi, Pasta y Ulam a creer que un estado inicial suave podría eventualmente relajarse hasta una equipartición de energía entre todos los modelos de oscilación debido a la no-linealidad [8].

2.1. Experimento

Tsingou, Fermi, Pasta y Ulam (TFPU), en Los Álamos, durante los años de la segunda posguerra, estudiaron el fenómeno de transmisión de calor en sólidos y con el fin de comprobar el teorema ergódico, se apoyaron en cálculos numéricos sobre un sistema discreto de masas unidas por fuerzas no lineales. Encontraron un fenómeno extraño que fue denominado como fenómeno recurrente de TFPU.

El objetivo principal de Fermi y colaboradores era justamente comprobar usando la nueva computadora MANIAC, la teoría de equipartición de la energía.

Como analizar las colisiones de un gas era demasiado complicado, entonces decidieron usar un modelo matemático de un sistema físico simple (cuerda discreta). Se propuso que si se le inyecta energía desde fuera a un sistema de 32 partículas formando esta cuerda, la energía se distribuiría equitativamente entre todos los modelos de vibración. Esto se llevaría a

cabo según la hipótesis de Tsingou, Fermi, Pasta y Ulam debido a la interacción entre las masas vecinas mediante fuerzas internas no lineales.

Como se mencionó TFPU tomaron 32 partículas (o átomos) y los unieron mediante hipotéticos resortes argumentando que entre las masas vecinas actuaban fuerzas no lineales de las siguientes formas: En el primer caso se tomó una función no lineal cuadrática (α)

$$T = x + \alpha x^2 \quad (2.1)$$

En el segundo caso de fuerzas se usó (β)

$$T = x + \beta x^3 \quad (2.2)$$

Y también una combinación de ambas, y en el tercer caso se supuso que la función $T(x)$ era una función lineal segmentada.

El efecto de los términos no lineales pequeños αx^2 y βx^3 era “perturbar” el comportamiento periódico del caso lineal; De esta forma, crearon este modelo matemático de un cristal unidimensional, consistente en una cadena de partículas de masas unitarias atadas entre sí por resortes que originan fuerzas no lineales.

Una vez contruidos los algoritmos y llevados al código de la máquina para procesarlos, se obtuvieron resultados bastante desalentadores. La duración de sus cálculos fluctuó entre 10 000 y 82 500 pasos de cómputo. Pero, contrario a lo que esperaban encontrar, la máquina entregó resultados inesperados. La energía no se termaliza, es decir, no ocurre la distribución equitativa de la energía cuando se tiene este tipo de sistemas no lineales.

La energía inicialmente empieza a distribuirse en el primer modelo, luego pasa al segundo que es de oscilación, y así sucesivamente, pero en el tercero y cuarto se detiene el proceso, y súbitamente regresa al estado inicial de la distribución de energía. No se cumple la teoría ergódica. Por lo tanto, claramente se observa un fenómeno recurrente, es decir, se regresa hacia estados anteriores.

El TFPU se puede explicar de la siguiente manera, si tenemos una varilla de metal y la calentamos por un extremo, entonces después de un cierto tiempo el calor se propagará por toda la varilla, y no se espera que el calor se detenga bruscamente y retorne luego al lugar de donde partió, por eso la recurrencia de TFPU es “contraintuitiva” e inesperada.

Zabusky y Kruskal usaron computadoras más avanzadas y ecuaciones mejoradas discretas del modelo de TFPU . En el límite continuo, de la ecuación discreta de la cuerda no lineal ellos llegaron a obtener una ecuación, conocida ahora como ecuación de Korteweg y DeVries para la descripción de las ondas que se propagan a lo largo de la cadena no lineal de TFPU . Usando la descomposición de Taylor en las discretizaciones, recuperaron ecuaciones no lineales en diferencias, del tipo usado por TFPU . Así, cuando consideraron una cadena de TFPU tipo α , ellos llegaron a la ecuación kdv , y al considerar una cadena tipo β , encontraron la ecuación modificada de Korteweg y De Vries.

Se han observado interacciones no lineales inusuales entre "pulsos de ondas solitarias" que se propagan en medios dispersivos no lineales. Estos fenómenos se observaron en las soluciones numéricas de la ecuación de Korteweg deVries [7].

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (2.3)$$

La ecuación de Korteweg deVries se puede utilizar para describir el comportamiento asintótico unidimensional de largo tiempo de amplitud pequeña pero finita: ondas de aguas poco profundas, ondas magnetohidrodinámicas de plasma sin colisión y ondas largas en cristales anarmónicos [7].

Además, la interacción y focalización en el espacio-tiempo de los pulsos de ondas solitarias permite dar una descripción fenomenológica de la recurrencia cercana al estado inicial en cálculos numéricos para una cuerda no lineal débilmente discretizada hecha por Fermi, Pasta y Ulam (FPU).

Se obtuvieron soluciones numéricas espacialmente periódicas de la ecuación de Korteweg deVries con un esquema que conserva el impulso. Para una variedad de condiciones iniciales normalizadas a una amplitud de 1.0

y para pequeñas δ^2 , los fenómenos computacionales observados se pueden describir en términos de tres intervalos de tiempo.

(I) Inicialmente, los dos primeros términos de la ecuación (2.3) dominan y se produce el fenómeno de adelantamiento clásico; es decir, u se eleva en regiones donde tiene una pendiente negativa.

(II) Después de que u se haya empinado lo suficiente, el tercer término se vuelve importante y sirve para prevenir la formación de una discontinuidad. En cambio, se desarrollan oscilaciones de longitud de onda pequeña (de orden δ). Las amplitudes de las oscilaciones crecen y finalmente cada oscilación alcanza una amplitud casi constante (que aumenta linealmente de izquierda a derecha) y tiene una forma casi idéntica a la de una solución de onda solitaria individual de la ecuación (2.3).

(III) Por último, cada *pulso de onda solitaria* o *solitón* comienza a moverse uniformemente a una velocidad (relativa al valor de fondo de u desde el que se eleva el pulso) que es linealmente proporcional a su amplitud. Por lo tanto, los solitones se separan. Debido a la periodicidad, dos o más solitones eventualmente se superponen espacialmente e interactúan de manera no lineal. Poco después de la interacción, reaparecen prácticamente sin cambios en tamaño o forma. Es decir, los solitones se *atraviesan* unos a otros sin perder su identidad.

Para encontrar soluciones estacionarias de la ecuación (2.3) en un marco que se mueve con velocidad c se sustituye

$$u = U(x - ct)$$

en la ecuación (2.3) y obtiene una ecuación diferencial ordinaria no lineal de tercer orden para u . Esto tiene soluciones periódicas que representan trenes de ondas, pero para explicar el concepto de solitón se necesita una solución que sea asintóticamente constante en el infinito ($u = u_\infty$ en $x = \pm\infty$) (Se tratará un problema con condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, donde se supone que $u_0(x)$ es una función con fronteras y que es tres veces continuamente diferenciable. Se considera el caso de intervalo infinito, $-\infty < x < \infty$, con $u(x, t)$ que desaparece o se hace cero rápidamente cuando $|x| \rightarrow \pm\infty$).

El resultado de tal cálculo es

$$u = u_{\infty} + (u_0 - u_{\infty}) \operatorname{sech}^2 \left[\frac{(x - x_0)}{\Delta} \right], \quad (2.4)$$

donde u_0 , u_{∞} y x_0 son constantes arbitrarias y

$$c = u_{\infty} + \frac{(u_0 - u_{\infty})}{3} \quad (2.5)$$

Por lo que, cuanto mayor sea la amplitud del pulso y menor la δ , más estrecho será el pulso. Estos pulsos son soluciones estrictas sólo cuando están completamente aislados, pueden existir en estrecha proximidad e interactuar sin perder su forma o identidad [7].

El experimento de TFPU simulaba las vibraciones de una cuerda unidimensional con extremos fijos y con fuerzas de recuperación elásticas, entonces se analizó numéricamente un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias. Resumiendo, ellos investigaron una malla unidimensional compuesta de N osciladores con interacciones de vecinos cercanos y aplicando condiciones de frontera triviales [8].

En (1967) Clifford Gardner, John Green, Martin Kruskal y Robert Miura, de "The Plasma Princeton Laboratory", notaron un vínculo inesperado y misterioso entre la ecuación de Schrödinger estacionaria para una partícula en el espacio unidimensional en mecánica cuántica y la ecuación KdV. Este vínculo les permitió utilizar el método (a principios de los 50's) de la teoría de dispersión inversa para obtener soluciones solitónicas de la ecuación KdV [8].

La analogía entre la recurrencia de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) y el fenómeno neuropsicológico "déjà vu" fue presentado por Nail Akhmediev [35]. Una de las aclaraciones más completas del fenómeno del "déjà vu" la da Armin Schneider en el libro "La mente confabuladora: cómo el cerebro crea la realidad" de la siguiente manera: "Déjà vu" denota la identificación errónea del momento presente, que se experimenta como si ya se hubiera vivido exactamente de la misma manera antes [36]. "Déjà vu" se considera como un estado mental en el que una persona siente que alguna vez estuvo en una

situación similar o en un lugar similar, y un episodio pasado se repite en el presente. Este fenómeno ha recibido el nombre francés de “déjà vu” que significa “ya visto”, y ha sido de interés para investigadores de diversos campos de la ciencia durante décadas. El fenómeno del “déjà vu” puede ser considerado como una incertidumbre de la memoria y una fusión del pasado y el presente, induciendo un sentimiento de inadecuada familiaridad con la situación presente[36].

2.2. Ondas

Existen diversas definiciones de onda, entre las cuales se destacan las siguientes: Una onda es cualquier señal reconocible, transferida de una parte del medio a otra, con una velocidad de propagación reconocible. La señal se puede distorsionar, cambiar su magnitud y su velocidad siempre y cuando sea reconocible [40].

Una onda es una perturbación en un sistema físico que es tanto repetitiva en el tiempo como periódica en el espacio. Es capaz de transmitir energía e información de un lugar a otro sin transportar materia [41].

Diferentes características son importantes en diferentes tipos de onda. Es posible clasificar a las ondas en dos tipos; ondas hiperbólicas y ondas dispersivas. Las ondas hiperbólicas son formuladas matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Por otra parte, las ondas dispersivas se clasifican por el tipo de solución que admite la ecuación que las genera. Esta clasificación no es exclusiva, algunas ondas pueden entrar en ambas clasificaciones y algunas otras en ninguna [40].

Una onda continua (cw) es una onda electromagnética típicamente senoidal de amplitud y frecuencia constantes. También conocidas como ondas no amortiguadas.

2.3. Serie de Taylor

Una serie de Taylor es una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios como $(x - a)^n$

llamados términos de la serie, dicha suma se calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto a suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie. A la serie centrada sobre el punto cero, es decir, cuando $a = 0$, se le denomina también serie de Maclaurin

Esta aproximación tiene tres ventajas importantes:

1. la derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales.
2. se puede utilizar para calcular valores aproximados de funciones.
3. es posible calcular el valor ideal de la aproximación.

Algunas funciones no se pueden escribir como serie de Taylor porque tienen alguna singularidad. En estos casos normalmente se puede conseguir un desarrollo en serie utilizando potencias negativas de x .

La serie de Taylor de una función real o compleja $f(x)$ infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo a es la siguiente serie de potencias:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (2.6)$$

donde $n!$ denota el factorial de n . Utilizando la notación sigma, lo anterior puede ser escrito de manera compacta como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (2.7)$$

donde $f^{(n)}(a)$ denota la n -ésima derivada de f evaluada en el punto a . (La derivada de orden cero de f es definida como la propia f y tanto $(x-a)^0$ como $0!$ son ambos definidos como 1.)

En particular, cuando $a = 0$, la serie es denominada: serie de Maclaurin, como se menciono anteriormente.

Cabe destacar que en una serie de Taylor de potencias centrada en a de la forma $\sum a_n(x-a)^n$ siempre se puede hacer el cambio de variable $z = x - a$ (con lo que $x = z + a$ en la función a desarrollar original) para expresarla como $\sum a_n z^n$ centrada en 0. Luego hay que deshacer el cambio de variable. Por ejemplo, si se quiere desarrollar la función $f(x) = x \ln x$ alrededor de $a = 1$ se puede tomar $z = x - 1$, de manera que se desarrollaría $f(z + 1) = (z + 1) \ln(z + 1)$ centrada en 0.

2.4. Ecuación de Korteweg-de Vries

La ecuación de Korteweg-de Vries o KdV es una ecuación en derivadas parciales que incluye efectos de no linealidad y dispersión a la vez. Físicamente, es un modelo que describe, en una dimensión espacial, la propagación de ondas de longitud de onda larga en medios dispersivos. La propagación de ondas solitarias en la superficie del agua, en canales poco profundos, es un ejemplo de medio dispersivo en el que se pueden hallar este tipo de ondas. En la física-matemática representa el prototipo de un sistema no lineal completamente integrable. El método por medio del cual se mostró su integrabilidad se conoce como el método de dispersión inversa. La ecuación aparece escrita en la literatura de muchas formas y esta es una de ellas:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (2.8)$$

donde x , t y v denotan posición espacial, temporal y amplitud respectivamente. El primer término de la ecuación denota la evolución temporal de la perturbación o campo v (se puede considerar como la elevación de la superficie del agua relativa a su posición de equilibrio), el segundo es considerado el término no lineal debido a la multiplicación entre v y su primer derivada parcial con respecto al espacio, y el tercer término es el dispersivo debido a la tercera derivada parcial espacial de v .

Capítulo 3

Solitones y la ecuación no lineal de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger no lineal se utiliza para describir la propagación de ondas en medios no lineales. Hay muchos ejemplos, como las ondas de aguas profundas, o la óptica no lineal, efecto Kerr en fibras ópticas, describe ondas electromagnéticas.

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) surge en varios temas relacionados con la física, esta ecuación se utiliza para modelar diferentes fenómenos con aplicaciones a diferentes campos tales como: física de semiconductores, condensación de Bose-Einstein, física de plasma, dinámica biomolecular, ondas en el agua y óptica no lineal por mencionar algunos.

La ecuación NLS expresa la relación de dispersión lineal que es afectada por el engrosamiento de las líneas espectrales asociados a la modulación y a las interacciones resonantes no lineales. En óptica, esto también puede ser visto como una extensión a los medios no lineales en aproximaciones paraxiales, ampliamente utilizados para la propagación de ondas lineales en medios aleatorios.

El condensado de Bose-Einstein es una propiedad que se presenta en ciertos materiales, fue descrita teóricamente por Bose y Einstein en 1924 y demostrada experimentalmente en 1995 por Erick Cornell y Carl Wieman. Se caracteriza principalmente porque a bajas temperaturas cercanas al cero absoluto, las partículas que conforman el material pasan al estado fundamental (el nivel de mínima energía), dicho fenómeno solo ocurre para bosones debido a que no obedecen el Principio de exclusión de Pauli.

3.1. Solitones

Al estudiar la estabilidad de un sistema dinámico lo que interesa saber es el comportamiento de alguna solución del tipo estado estacionario (puntos de equilibrio, orbitas periódicas, ondas solitarias, ondas periódicas, etc.) cuando pequeñas perturbaciones se introducen a dicha solución. Si estas perturbaciones crecen a medida que transcurre el tiempo, entonces se dice que la solución es inestable. De lo contrario, si las pequeñas perturbaciones decaen en el tiempo, entonces la solución es estable [39].

Históricamente, fue siete años después de la predicción teórica de Hasegawa y Tappert (la ecuación no lineal de Schrödinger cúbica (NLSE), descubrimiento teórico de Zakharov y Shabat en 1972, describe el comportamiento no lineal de pulsos en fibras ópticas) [29] que la transmisión de un solitón se demostró con éxito experimentalmente en una fibra óptica por Mollenauer, Stolen y Gordon [30]. El concepto de solitón canónico se desarrolló para sistemas no lineales y dispersivos que han sido autónomos (descritos por ecuaciones autónomas con coeficientes de dispersión y no linealidad constantes); es decir, el tiempo solo ha desempeñado el papel de la variable independiente y no ha aparecido explícitamente en la ecuación de evolución no lineal [10-11]. Por otro lado, los sistemas físicos no autónomos sometidos a algún tipo de esfuerzo externo son de gran interés porque son mucho más comunes y realistas, y no están idealizados como canónicos autónomos. Tales situaciones podrían incluir golpes repetidos a un solitón en medios no uniformes con gradientes de densidad dependientes del tiempo. Estas situaciones son típicas para experimentos con solitones ópticos temporales y espaciales, láseres de solitones e interruptores de solitones ultrarápidos y puertas lógicas. La formación de solitones de onda de materia en condensados de Bose-Einstein (BEC) ajustando magnéticamente la interacción interatómica cerca de una resonancia de Feshbach proporciona un buen ejemplo de un sistema no lineal no autónomo [21].

En términos generales, el concepto de solitones no autónomos se introdujo para los sistemas no lineales y dispersivos dirigidos por modelos no lineales no autónomos (de coeficientes variables) con potenciales externos que varían en tiempo y espacio. Las soluciones de solitón para los modelos de ecuaciones no lineales de Schrödinger (NLSE) con dispersión, no linealidad, ganancia o absorción variables y, en casos más generales, sujetos a potenciales externos que varían en tiempo y espacio, amplían sustancial-

mente el concepto de solitones clásicos y lo generalizan a la abundancia de solitones no autónomos que interactúan elásticamente y generalmente se mueven con amplitudes, velocidades y espectros variables [25].

Se demostró que los solitones no autónomos existen solo bajo ciertas condiciones, y las funciones de parámetros que describen dispersión variable, no linealidad, ganancia o absorción y potenciales externos no homogéneos no pueden elegirse independientemente: ellos satisfacen a las leyes de adaptación de solitones tanto a los potenciales externos como a las variaciones de dispersión y no linealidad. Hasta ahora, a diferencia de los solitones canónicos, se conocen muy pocos detalles sobre la integrabilidad completa de los modelos no lineales no autónomos distintos de la NLSE. Los solitones no autónomos son en cierto modo diferentes de los solitones canónicos en los sistemas autónomos, y de otras maneras iguales [19].

Sistemas autónomos y no autónomos

La clasificación de sistemas dinámicos en autónomos y no autónomos se usa comúnmente en la ciencia para caracterizar diferentes situaciones físicas en las que, respectivamente, está presente o ausente una fuerza motriz externa dependiente del tiempo. El tratamiento matemático de un sistema de ecuaciones no autónomo es mucho más complicado que el de un sistema autónomo tradicional. Como ilustración típica, podemos mencionar tanto un péndulo simple cuya longitud cambia con el tiempo como un oscilador Duffing no lineal parametrizado [33].

El concepto de solitón clásico fue desarrollado para sistemas no lineales y dispersivos que han sido autónomos; el tiempo sólo ha desempeñado el papel de la variable independiente y no ha aparecido explícitamente en la ecuación de evolución no lineal. Sin embargo, sistemas físicos pueden estar sometidos a alguna forma de fuerza dependiente del tiempo, incluyendo la dispersión, la no linealidad y potenciales externos dependientes del tiempo.

3.2. Ecuación no lineal de Schrödinger

En un material dieléctrico ordinario, el índice de refracción aumenta en proporción al cuadrado del campo eléctrico [10]. Esta propiedad se conoce como efecto Kerr. Akira Hasegawa consideró dicho efecto para escribir el índice de refracción como:

$$n = n_0(\omega) + n_2|E|^2 \quad (3.1)$$

Aquí, la magnitud de E representa la amplitud efectiva del campo eléctrico y n_2 se denomina coeficiente de Kerr. Para una fibra de vidrio, se sabe que n_2 tiene un valor de aproximadamente $1,2 \times 10^{-22} \frac{m^2}{V^2}$. El efecto Kerr se origina a partir de una deformación de las órbitas de los electrones en las moléculas de vidrio debido al campo eléctrico aplicado. Como resultado, tiene un tiempo de respuesta extremadamente corto del orden de 10^{-15} segundos [10].

Dado que una fibra óptica estándar tiene un área de sección transversal efectiva de aproximadamente $60 \mu m^2$, una potencia óptica de aproximadamente $100 mW$ produciría un campo eléctrico del orden de $10^6 \frac{V}{m}$. En consecuencia, el índice de refracción aumenta por un factor de aproximadamente 10^{-10} . Debido a esto, el número de onda de la onda de luz en una fibra cambia por un factor de $n_2|E|^2 \frac{\omega}{c}$, como se indica por $\frac{ck}{\omega} = n$. Si se toma una longitud de onda nominal de $1,5 \times 10^{-6} m$, el cambio en el número de onda también se vuelve del orden de km^{-1} . Si se incorpora este efecto no lineal en el lado derecho de

$$k - k_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 + \dots,$$

y

$$i \frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{k''}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2}$$

ahora se modifica para

$$i \frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{k''}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + g \frac{|E|^2 E}{\epsilon^2} = 0 \quad (3.2)$$

En esta expresión, $g = \frac{2\pi n_2 \alpha}{\lambda}$ y α representan el factor de reducción debido a que la intensidad de la luz varía en la sección transversal de la fibra y toma un valor de aproximadamente $\frac{1}{2}$ en la mayoría de los casos. Si se compara (3.2) con la ecuación de Schrödinger,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi = 0, \quad (3.3)$$

y se reemplaza V por $|E|^2$, t por ξ y x por τ , se reconoce la similitud exacta. El hecho de que el potencial V de la ecuación de Schrödinger esté representado por $|E|^2$ se origina en que el índice de refracción varía en proporción a la magnitud E^2 . Por esta razón, (3.3) se denomina ecuación de Schrödinger no lineal [10].

Dado que, en la ecuación de Schrödinger, V expresa el potencial que atrapa a la cuasipartícula representada por la función de onda ψ , el hecho de que V aumente en proporción a $|E|^2$ indica que si k'' es negativo, la profundidad del potencial de atrapamiento aumenta en proporción a la intensidad de la luz. Por lo tanto, si k'' es negativo, el potencial que es proporcional a $|E|^2$ tiene el efecto de atrapar la energía de las olas, que de lo contrario tiende a expandirse debido a la dispersión. A esto se le llama el autoatrapamiento de una ola.

Cuando la intensidad de la onda se concentra en una región local debido a este autoatrapamiento, la conservación de la energía requiere que el ancho del pulso se acorte en proporción inversa al $|E|^2$. A medida que avanza este atrapamiento, el efecto de dispersión, que aumenta en proporción inversa al cuadrado del ancho del pulso, se vuelve más efectivo y el efecto de la expansión del pulso pesa más que el efecto de la contracción debido a la no linealidad, causando que el pulso se expanda. En algunos valores del ancho del pulso, se puede formar el efecto de expansión debido a la dispersión y el efecto de autorretención debido al equilibrio de la no linealidad, y un pulso estacionario [10].

Para derivar esta solución estacionaria, primero se normaliza (3.2) de la siguiente forma:

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q = 0 \quad (3.4)$$

aquí

$$q = \frac{\sqrt{g} \lambda}{\varepsilon} E \quad (3.5)$$

$$T = \frac{\tau}{(-\lambda k'')^{\frac{1}{2}}} \quad (3.6)$$

$$Z = \frac{\xi}{\lambda} \quad (3.7)$$

Si se usan ejemplos como $D = -10 \frac{ps}{(nmkm)}$, $\lambda = 1,5 \mu m$, la elección de $10^{-4,5}$ para la amplitud normalizada ε en estas expresiones da relaciones tales que $Z = 1$ corresponde a $\xi = 1,5 km$, $q = 1$ corresponde a $E = 2 \times 10^6 \frac{V}{m}$, y $T = 1$ corresponde a $t = 2 ps$.

Akira Hasegawa buscó una solución localizada de $|q|$ que sea estacionaria en Z , es decir, una forma estacionaria del paquete. Dado que estamos el interés esta en una solución localizada, se afirma que la solución sea de una joroba simple imponiendo las siguientes condiciones:

1) $|q|^2$ está acotado por los dos límites ϱ_s y ϱ_D ;

2) en $|q|^2 = \varrho_s$, $|q|^2$ es un extremo, es decir, en $|q|^2 = \varrho_s$, $\frac{\partial |q|^2}{\partial T} = 0$,

pero $\frac{\partial^2 |q|^2}{\partial T^2} \neq 0$;

3) ϱ_D es el valor asintótico de $|q|^2$ como $T \rightarrow \pm\infty$, es decir,

como $|q|^2 = \varrho_D$, $\frac{\partial^n |q|^2}{\partial T^n} = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Ahora se busca una solución de (3.4) que satisfaga estas condiciones. Para lograr esto, se introducen dos variables reales, ρ y σ , que representan las partes real e imaginaria de q :

$$q(T, Z) = \sqrt{\rho(T, Z)} e^{i\sigma(T, Z)} \quad (3.8)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.4), se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\rho \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) = 0 \quad (3.9)$$

y

$$\frac{1}{8} \frac{d}{d\rho} \left[4\rho^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 \right] = \frac{\partial \sigma}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \quad (3.10)$$

La condición estacionaria de $|q|^2 (= \rho)$ da $\frac{\partial \rho}{\partial Z} = 0$. Por lo tanto, de (3.9), se tiene:

$$\rho = \frac{\partial \sigma}{\partial T} = c(Z) \quad (3.11)$$

Ahora mostraron que la única elección posible para la constante de integración $c(Z)$ es una constante independiente de Z . Para probar esto, notaron que el lado izquierdo de (3.10) es una función de T solamente, y por lo tanto

$$\frac{\partial \sigma}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 = f(T) \quad (3.12)$$

Tomando derivaciones con respecto a Z y T , se tiene:

$$\frac{\partial^3 \sigma}{\partial Z^2 \partial T} - \frac{1}{\rho^3} \frac{d\rho}{dT} \frac{dc^2}{dZ} = 0, \quad (3.13)$$

mientras que de (3.11),

$$\frac{\partial^3 \sigma}{\partial Z^2 \partial T} = \frac{1}{\rho} \frac{d^2 c}{dZ^2} \quad (3.14)$$

por eso

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 c}{dZ^2} - \frac{1}{\rho^3} \frac{d\rho}{dT} \frac{dc^2}{dZ} = 0 \quad (3.15)$$

o

$$\frac{\frac{d^2 c}{dZ^2}}{\frac{dc^2}{dZ}} = \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dT} = \text{constante} \quad (3.16)$$

Como no se puede aceptar la solución $\rho^{-2} \frac{d\rho}{dT} = \text{constante}$, la única opción alternativa es $c(Z) = \text{constante}$. En consecuencia, (3.11) se convierte en

$$\rho \frac{\partial \sigma}{\partial T} = c_1(\text{constante}), \quad (3.17)$$

o

$$\sigma = \int \frac{c_1}{\rho} dT + A(Z) \quad (3.18)$$

Como se ha demostrado que $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$ es una función de T solamente, de (3.10), $\frac{\partial \sigma}{\partial Z}$ también debería ser una función de T . Por lo tanto, se toma $\frac{dA}{dZ}$ como constante ($= \Omega$)

$$\sigma = \int \frac{c_1}{\rho} dT + \Omega Z \quad (3.19)$$

Si se usa esta expresión en (3.10), se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $\rho(T)$

$$\left(\frac{d\rho}{dT}\right)^2 = -4\rho^3 + 8\Omega\rho^2 c_2\rho - 4c_1^2 \quad (3.20)$$

Ahora se busca una solución de esta ecuación, sujeta a las condiciones 1 a 3

Para satisfacer la condición 1, $\frac{d\rho}{dT}$ debe anularse sólo en dos valores de ρ , ρ_D y ρ_s . Además, para que la raíz en ρ_D represente un valor asintótico de ρ , debe ser una raíz doble. Estas condiciones se cumplen sólo para $-4c_1^2 \geq 0$, o $c_1 = 0$ y, por lo tanto, también $c_2 = 0$. La ecuación (3.20) se reduce a

$$\left(\frac{d\rho}{dT}\right)^2 = -4\rho^3 + 8\Omega\rho^2 = -4\rho^2(\rho - \rho_s) \quad (3.21)$$

donde

$$\rho_s = 2\Omega \quad (3.22)$$

La ecuación (3.21) se puede integrar para dar

$$\rho = \rho_0 \operatorname{sech}^2(\sqrt{\rho_0} T), \quad (3.23)$$

donde $\rho_0 (= \rho_s) = 2\Omega$, $\Omega > 0$ y

$$\sigma = \Omega Z = \frac{\rho_0}{2} \quad (3.24)$$

Ahora puede demostrarse que la ecuación de Schrödinger (3.4) se satisface mediante otra función $q'(T, Z)$, dada por

$$q'(T, Z) = \exp\left[-i\left(kT + \frac{1}{2}k^2 Z\right)\right] \phi(T + kZ, Z) \quad (3.25)$$

Con la variable independiente adicional k y las constantes de fase θ_0 y σ_0 , la solución de la envolvente solitaria se convierte en

$$q(T, Z) = \eta \operatorname{sech} \eta (T + kZ - \theta_0) \exp \left\{ -ikT + \frac{i}{2} (\eta^2 - k^2) Z - i\sigma_0 \right\}, \quad (3.26)$$

donde $\sqrt{\rho_0}$ es reemplazado por η .

La solución de onda solitaria representada por (3.26) tiene cuatro parámetros. Son η que representa la amplitud y ancho de pulso de la onda solitaria, k que representa su velocidad (obsérvese que esta velocidad representa una desviación de la velocidad del grupo), y 2 parámetros que representan las constantes de fase θ_0 y σ_0 . Se observa que la altura del pulso η es inversamente proporcional al ancho del pulso η^{-1} , y que la constante k , que representa la velocidad de transmisión del pulso, es independiente de la altura del pulso η .

En este aspecto particular, este último hecho difiere del solitón KdV donde la velocidad del solitón es proporcional a la altura del pulso. Zakharov y Shabat lograron resolver la ecuación no lineal de Schrödinger considerando el problema de dispersión inversa y, por lo tanto, demostraron que la solución de la ecuación puede describirse mediante la combinación de soluciones de onda solitaria expresadas en (3.26) y una onda continua. A este respecto (3.26) es la solución en solitón de la ecuación no lineal de Schrödinger. Por esta razón, la solución de onda solitaria expresada en (3.26) se denomina solitón envolvente [10].

3.3. Soluciones de solitón y resultados de la dispersión inversa

La formulación en términos del par de Lax, de la evolución temporal de un sistema dinámico, fue desarrollada por Peter Lax en el contexto de la propagación de ondas no lineales en medios continuos. En el método de dispersión inversa se hace uso del par de Lax para resolver una gran variedad de sistemas no lineales que aparecen en la física. De particular importancia es la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), La característica más importante de la existencia del par de Lax, radica en que permite construir de una forma simple las cantidades conservadas del sistema.

El Método de Dispersión Inversa

El Método de Dispersión Inversa, permite resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales, pero que son totalmente integrables. Lo que se hace es encontrar o determinar un sistema de ecuaciones espectrales asociadas a la ecuación no lineal, y en base a una solución particular generar nuevas soluciones de tipo solitón. Estas ecuaciones espectrales no son otra cosa que ecuaciones diferenciales lineales, de las que se obtienen los conocidos pares de operadores de Lax, y que al ser integradas precisamente tienen como condición a la misma ecuación diferencial no lineal que se busca resolver.

En matemáticas, la transformada de dispersión inversa es un método para resolver algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales. El método es un análogo no lineal, y en cierto sentido generalización, de la transformada de Fourier, que a su vez se aplica para resolver muchas ecuaciones diferenciales parciales lineales. El nombre de "método de dispersión inversa" proviene de la idea clave de recuperar la evolución temporal de un potencial a partir de la evolución temporal de sus datos de dispersión: la dispersión inversa se refiere al problema de recuperar un potencial de su matriz de dispersión, en oposición al problema de dispersión directa de encontrar la matriz de dispersión del potencial .

Siguiendo el método de Gardner y de Lax, Zakharov y Shabat han descubierto que el valor propio λ de las ecuaciones de valores propios de tipo Dirac.

$$L\psi = \lambda\psi, \quad (3.27)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

con

$$L = \begin{pmatrix} 1 + \beta & 0 \\ 0 & 1 - \beta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

se vuelve invariante en el tiempo si u evoluciona de acuerdo con la ecuación no lineal de Schrödinger de la forma,

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q|u|^2 u = 0, \quad (3.30)$$

donde $\beta^2 = 1 - \frac{2}{Q} = \text{constante}$, y la evolución temporal de la función propia ψ viene dada por

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = A\psi \quad (3.31)$$

donde

$$A = -\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{bmatrix} \frac{|u|^2}{1+\beta} & i \frac{\partial u^*}{\partial x} \\ -i \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{-|u|^2}{1-\beta} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Una vez que se ha descubierto la estructura de la ecuación de valor propio que satisface los criterios de Lax, se puede aplicar la técnica de dispersión inversa para obtener la evolución temporal del potencial q , y la ecuación no lineal de Schrödinger se puede resolver para una condición inicial localizada [10]. Como en el caso de la ecuación KdV, la invariancia temporal de los valores propios proporciona las propiedades de los solitones que se crean a partir de la condición inicial en términos de los valores propios de la forma potencial inicial. Para la ecuación no lineal de Schrödinger $i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q = 0$, la estructura apropiada de la ecuación de valores propios se convierte en (3.31)

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial T} + q_0(T) \psi_2 = \zeta \psi_1 \quad (3.33)$$

$$-i \frac{\partial \psi_2}{\partial T} - q_0^*(T) \psi_1 = \zeta \psi_2 \quad (3.34)$$

Se escribió el valor propio de esta ecuación como:

$$\zeta_n = \frac{k_n + i\eta_n}{2}, \quad (3.35)$$

las soluciones de n solitones que surgen de esta forma de onda inicial son una generalización de $q(T, Z) = \eta \operatorname{sech} \eta (T + kZ - \theta_0) \exp \left\{ -ikT + \frac{1}{2}(\eta^2 - k^2)Z - i\sigma_0 \right\}$, y están dadas por

$$q(T, Z) = \sum_{j=1}^N \eta_j \operatorname{sech} \eta_j (T + k_j Z - \theta_{0j}) \times \exp \left\{ -ik_j T + \frac{i}{2}(\eta_j^2 - k_j^2)Z - i\sigma_{0j} \right\}. \quad (3.36)$$

Se observo que la amplitud y la velocidad del solitón se caracterizan por las partes imaginaria y real del valor propio (3.35). Por ejemplo, si se aproxima la forma del pulso de entrada de un láser de modo bloqueado como

$$q_0(T) = A \operatorname{sech} T, \quad (3.37)$$

los valores propios de (3.34) se obtienen analíticamente y el número de valores propios N viene dado por (3.31)

$$A - \frac{1}{2} < N \leq A + \frac{1}{2}, \quad (3.38)$$

donde los valores propios correspondientes son imaginarios y están dados por

$$\zeta_n = i \frac{\eta_n}{2} = i \left(A - n + \frac{1}{2} \right), n = 1, 2, \dots, N \quad (3.39)$$

Si A es exactamente igual a N , la solución se puede obtener en términos de N solitones y sus amplitudes vienen dadas por

$$\eta_n = 2(N - n) + 1 = 1, 3, 5, \dots, (2N - 1) \quad (3.40)$$

Se señala que en este caso particular, todos los valores propios son imaginarios. En consecuencia, $k_n = 0$, y todas las velocidades de los solitones en el marco de referencia de la velocidad del grupo son 0.

Mientras que la velocidad de los solitones en la ecuación de KdV es proporcional a la amplitud, los de la ecuación de Schrödinger no tienen tal dependencia. En general, si la forma del pulso de entrada es simétrica, como en este ejemplo de la secuencia T, se puede demostrar que los valores propios de (3.33) y (3.34) son imaginarios, y los solitones de salida se propagan exactamente a la misma velocidad (3.32). Cuando varios solitones se propagan a la misma velocidad, la forma del pulso superpuesto oscila debido a la interferencia de fase entre los solitones [10].

$$q_0(T) = (1 + \Delta) \operatorname{sech} T, \quad (3.41)$$

(3.39) da $\eta = 1 + 2\Delta$ para el valor de $A = 1 + \Delta$. A partir de esto, la forma del solitón de salida viene dada por

$$q(T) = (1 + 2\Delta) \operatorname{sech}(1 + 2\Delta) T \quad (3.42)$$

Dado que la energía del solitón está dada por

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dT, \quad (3.43)$$

la diferencia de energía entre la entrada y la salida se convierte en

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 + 2\Delta)^2 \operatorname{sech}^2 T dT \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} (1 + 2\Delta)^2 \operatorname{sech}^2(1 + 2\Delta) T dT = \Delta^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

es decir, la energía del solitón es menor por un factor Δ^2 en comparación con la energía del pulso de entrada. Esto significa que si la amplitud de entrada no es exactamente un número entero N, parte de la energía del pulso

de entrada se transfiere a otras ondas, es decir, a una onda dispersiva lineal que no forma un solitón [10].

3.4. Períodos de solitón

N solitones que se propagan a la misma velocidad se propagan junto con interacciones de fase [10]. En general, la periodicidad de esta oscilación viene dada por la frecuencia de pulsación común más baja,

$$Z_0 = \frac{2\pi}{|\omega_i - \omega_j|}, \quad (3.45)$$

donde $\omega_j = \frac{\eta_j^2}{2}$, siendo η_j la parte imaginaria de los valores propios de la forma de pulso inicial (3.32). En particular, cuando la forma del pulso está dada por (3.37), el período de oscilación de n solitones se reduce a la forma simple,

$$Z_0 = \frac{\pi}{2} \quad (3.46)$$

La cantidad Z_0 a menudo se denomina período de solitón.

La ecuación no lineal de Schrödinger es integrable debido a que tiene un número infinito de cantidades conservadas. Escribimos aquí las tres cantidades conservadas más bajas;

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |q(Z, T)|^2 dT \quad (3.47)$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(q^* \frac{\partial q}{\partial T} - q \frac{\partial q^*}{\partial T} \right) dT \quad (3.48)$$

y

$$C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial q}{\partial T} \right|^2 - |q|^4 \right) dT \quad (3.49)$$

Se observa que la solución de un solitón

$$q(T, Z) = \eta \operatorname{sech} \eta (T + kZ - \theta_0) \exp \left\{ -ikT + \frac{1}{2}(\eta^2 - k^2)Z - i\sigma_0 \right\}$$

Se obtiene minimizando C_3 , siendo constantes las restricciones C_1 y C_2 [10].

Capítulo 4

Inestabilidad modulacional

La inestabilidad modulacional puede considerarse como un criterio al momento de clasificar el comportamiento cualitativo de ondas moduladas tales como paquetes de ondas. El paquete de ondas, también llamado envolvente, es una superposición lineal de ondas, la cual puede tomar forma de un pulso y se desplaza de forma relativamente compacta antes de dispersarse, esto en caso de que la velocidad de fase sea diferente a la velocidad de grupo. A este fenómeno se le llama dispersión. En muchos sistemas en los cuales las ecuaciones dinámicas admiten soluciones periódicas, representadas por trenes de onda, es posible que se presente inestabilidad modulacional bajo ciertos parámetros. La inestabilidad modulacional se presenta cuando perturbaciones oscilatorias son introducidas a estados estacionarios de tipo tren de onda, las cuales generan un crecimiento exponencial en la amplitud de la onda, conforme transcurre el tiempo, lo que a su vez genera un rompimiento en la envolvente [37].

Los estudios sobre inestabilidad modulacional se iniciaron en 1960, de manera independiente, por los científicos del oeste (Estados Unidos y Europa), y científicos soviéticos. Por lo general estos estudios estaban orientados a diferentes aplicaciones en física. La mayoría de los primeros trabajos en el oeste estaban relacionados con hidrodinámica: ondas de agua, convicción, etc. Por otro lado, los trabajos sobre inestabilidad modulacional de los científicos soviéticos estaban vinculados con, los entonces recientes, progresos en: electrodinámica, incluyendo óptica no lineal (lasers, auto focalización, ondas de radio no lineales etc.) y física de plasma [38].

La inestabilidad modulacional (IM) se refiere al fenómeno en el que una onda continua inicialmente perturbada (cw) tiende a romperse espontáneamente en un tren de pulsos periódico similar a un solitón mientras se

propaga a través de un medio dispersivo no lineal, como una fibra óptica. En el dominio de la frecuencia, este fenómeno se puede interpretar como un proceso de mezcla de cuatro ondas, parcialmente degenerado con emparejamiento de fase en el que una onda de bombeo intensa produce energía a un par de ondas de banda lateral débiles, es decir, un Stokes (desplazado al rojo) y un anti-Stokes (desplazamiento al azul), ubicada simétricamente en los dos lados de la onda de la bomba.

Para fines de este trabajo se considera sólo el proceso de IM escalar que no implica la alteración del estado de polarización de la luz. En este caso, la condición de coincidencia de fase requerida solo se puede obtener con una dispersión de velocidad de grupo negativa (anómala) debido al coeficiente de índice no lineal positivo de la sílice, el constituyente de las fibras ópticas elegido para utilizar como material no lineal en el experimento de Gaetan Van Simaey, Philippe Emplit y Marc Haelterman [5].

Desde un punto de vista matemático, la IM escalar en óptica es equivalente a la inestabilidad de Benjamin-Feir predicha en el contexto de la hidrodinámica mediante un análisis de estabilidad lineal. El enfoque de Benjamin-Feir aplicado a la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) permite predecir las condiciones de ocurrencia de la IM, así como la tasa de crecimiento inicial y la frecuencia característica de la inestabilidad [5].

Sin embargo, debido a que este enfoque se basa en un análisis perturbativo, no proporciona información sobre el comportamiento a largo plazo de una onda moduladamente inestable. El crecimiento exponencial inicial del par de banda lateral espectral débil predicho por el análisis de estabilidad lineal se produce a expensas de la onda de bombeo. Una vez que la onda de bombeo se agota significativamente, el crecimiento de las bandas laterales ya no es exponencial y tiene a lugar un proceso de transferencia de energía más complejo en el sistema [5].

La dinámica de la IM en el régimen de agotamiento de la bomba fue descrita por Lake, Yuen y Ferguson en el marco de su estudio de ondas de aguas profundas no lineales en el que demostraron, en particular, que la ecuación NLS reproduce la inestabilidad de Benjamin-Feir. Mediante simulaciones numéricas de la ecuación NLS con una onda uniforme perturbada como condición inicial, mostraron que, luego del crecimiento exponencial inicial predicho por Benjamin y Feir, la amplitud de modulación alcanza un má-

ximo y luego disminuye hasta que el sistema finalmente regresa cerca de su estado inicial, mostrando de esta manera que la IM es reversible. Este proceso de crecimiento y descomposición ocurre casi periódicamente, al menos durante los primeros períodos característicos. En consecuencia, la energía de la onda inicialmente confinada al modo de frecuencia portadora (o fundamental) experimenta periódicamente una expansión a unos pocos modos de banda lateral vecinos, seguido de un retorno casi completo a la condición inicial. Este retorno periódico en el tiempo de la solución al estado inicial casi sin modular se conoce como fenómeno de recurrencia de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) [5].

En fibra óptica no lineal, se ha prestado atención al estudio teórico de la dinámica de la IM. En particular, el régimen de agotamiento de la bomba se analizó convenientemente a través de la aproximación truncada de tres modelos que reduce la ecuación NLS a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que describen la interacción no lineal entre la onda de la bomba, a la frecuencia portadora ω_0 , y las dos primeras ondas de banda lateral contiguas, a frecuencias $\omega_0 \pm \Omega$. Se ha demostrado que, si la desafinación de la banda lateral de la bomba Ω satisface la condición de adaptación de fase requerida para IM, los modos de Fourier de orden superior pueden despreciarse en una buena aproximación, ya que quedan fuera de la banda de ganancia de IM [5].

Mediante un análisis basado en cantidades invariantes del problema, se ha demostrado que toda la dinámica del proceso de IM se puede representar mediante un Hamiltoniano conservador unidimensional. La evolución recurrente (periódica) de las ondas se representan como trayectorias cerradas en el retrato del espacio de fase de este Hamiltoniano. Esta representación proporciona una visión intuitiva de la dinámica del sistema y permite una interpretación directa del complejo comportamiento no lineal de IM. Este enfoque muestra que, dependiendo de los parámetros del sistema, las amplitudes y fases iniciales de las tres ondas, la evolución puede ser espacialmente periódica o no [5].

4.1. Análisis de la dinámica del sistema de Akhmediev y Korneev

Akhmediev y sus colaboradores desarrollaron otro enfoque del problema. Derivaron soluciones periódicas espaciotemporales analíticas exactas de la ecuación NLS (en términos de funciones elípticas de Jacobi) que representan la evolución espacial de ondas inicialmente continuas (o periódicamente moduladas). Como consecuencia, su enfoque da cuenta inherentemente de un número arbitrario de modelos de banda lateral que interactúan. De esta forma, Akhmediev y sus colaboradores han podido predecir que en el proceso de IM la energía se distribuirá espectralmente entre los modelos de orden superior de acuerdo con una ley de progresión geométrica; es decir, el logaritmo de la energía de los modelos de orden superior disminuirá linealmente con el orden del modelo. Este hallazgo ha sido confirmado por simulaciones por computadora de la ecuación NLS [5].

Considerando la ecuación NLS que gobierna la propagación de las envolventes de onda en las fibras ópticas:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -i\beta_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + i\gamma |E|^2 E, \quad (4.1)$$

donde E es la envolvente del campo eléctrico, z es la distancia de propagación, t es el tiempo en un marco de referencia que viaja a la velocidad de grupo de la luz, β_2 es el coeficiente de dispersión y $\gamma = \frac{2\pi n_2}{\lambda A_{eff}}$ es el coeficiente no lineal, donde λ es la longitud de onda de luz, A_{eff} es el área central efectiva de la fibra y n_2 es el coeficiente de índice no lineal. Para derivar las características básicas de IM, se recurre a un análisis de estabilidad lineal de la solución de cw perturbada de la Ec. (4.1), es decir, $E(t, z) = [\sqrt{P_0} + a(t, z)] \exp(i\gamma P_0 z)$ donde P_0 se supone constante y con $|a|^2 \ll P_0$. Linealizando con respecto a a , se obtiene la siguiente relación de dispersión:

$$K = \pm \frac{1}{2} |\beta_2| \Omega [-\Omega^2 - \text{sgn}(\beta_2) \Omega_c^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

donde K y Ω , son la ganancia y la frecuencia de la IM, según lo definido por $a(t, z) \propto \exp(Kz) \cos(\Omega t)$. De la ecuación (4.2) se puede deducir que

K exhibe una parte real positiva (correspondiente al inicio de la inestabilidad) en el régimen de dispersión anómala ($\beta_2 < 0$) y que la curva de ganancia espectral IM, $Re[K(\Omega)]$, alcanza un pico en el valor $K = \gamma P_0$ para $\Omega = \left(\frac{2\gamma P_0}{|\beta_2|}\right)^{\frac{1}{2}} = \Omega_{opt}$ y exhibe un ancho de banda finito que está limitado por $\Omega_c = \sqrt{2}\Omega_{opt}$. Resulta que el valor $|\Omega| = \Omega_{opt}$ corresponde a la condición de adaptación de fase de la interacción de mezcla de cuatro ondas subyacente entre la onda portadora a la frecuencia ω_0 y las dos primeras bandas laterales de modulación contiguas a las frecuencias $\omega_0 \pm \Omega$. Este emparejamiento de fase ocurre siempre que la contribución lineal al desajuste del vector de onda que se debe a la dispersión de la velocidad del grupo, $\Delta k = \beta_2 \Omega^2$, se compensa exactamente por la contribución no lineal, $\Delta k_{NL} = 2\gamma P_0$, tal que $\Delta k = -\Delta k_{NL}$.

La técnica para este análisis de estabilidad lineal con la que describir el régimen de bombeo agotado y obtener información sobre el comportamiento de la IM a largo plazo se basa en un modelo truncado de tres ondas. En este enfoque, la fenomenología de la IM se limita a la interacción entre la onda de bombeo y el par de ondas de Stokes y anti-Stokes de frecuencias $\omega_s = \Omega_0 - \Omega$ y $\omega_a = \omega_0 + \Omega$, respectivamente. Siempre que la desafinación de banda lateral cw de la bomba Ω satisfaga $\frac{\Omega_c}{2} < |\Omega| < \Omega_c$, los modelos de Fourier de orden superior pueden despreciarse, ya que quedan fuera de la banda de ganancia de IM y, por lo tanto, no son linealmente inestables. En el análisis, se muestra que la evolución del sistema se rige por el siguiente conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias en modo acoplado:

$$\begin{aligned}
-i\frac{dE_0}{dz} &= \gamma[|E_0|^2 + 2(|E_s| + |E_a|)]E_0 + 2\gamma E_s E_a E_0 * \exp(+i\Delta kz) \\
-i\frac{dE_s}{dz} &= \gamma[|E_s|^2 + 2(|E_a| + |E_0|)]E_s + 2\gamma E_a * E_0^2 \exp(-i\Delta kz) \\
-i\frac{dE_a}{dz} &= \gamma[|E_a|^2 + 2(|E_s| + |E_0|)]E_a + 2\gamma E_s * E_0^2 \exp(-i\Delta kz)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $E_0(z)$ es la amplitud de la bomba, $E_s(z)$ y $E_a(z)$ son las ondas de Stokes y anti-Stokes, respectivamente, $\Delta k = k_s + k_a - 2k_0$ es el desajuste lineal del vector de onda. Teniendo en cuenta que los últimos términos coherentes en el lado derecho de las Ecs. (4.3) son responsables de los intercambios de energía entre las olas. Se han descuidado otros términos cúbicos que re-

presentan la generación de nuevos componentes de frecuencia, ya que no están emparejados en fase.

En consecuencia, se puede verificar a partir de las Ecs. (4.3) que la potencia total $P_{tot} = |E_0|^2 + |E_a|^2 + |E_s|^2$ se conserva. Las ecuaciones (4.3) se reescriben entonces convenientemente en términos de la amplitud y la fase de las tres ondas definidas a través de las relaciones $E_j = |E_j|exp(i\Phi_j) = A_jexp(i\Phi_j)$ con $j = 0, a, s$. Introduciendo la potencia de bomba normalizada $\eta(z) = \frac{A_0^2(z)}{(P_{tot})^{\frac{1}{2}}}$, las amplitudes de banda lateral normalizadas $a_a(z) \equiv \frac{A_a(z)}{(P_{tot})^{\frac{1}{2}}}$ y $a_s \equiv \frac{A_s(z)}{(P_{tot})^{\frac{1}{2}}}$, y la coordenada longitudinal escalada $\xi = \gamma P_{tot}z$, se puede reformular el sistema de las ecuaciones (4.3) en cuatro ecuaciones reales equivalentes:

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta}{d\xi} &= -4\eta a_a \sin\Phi & a) \\
\frac{da_s}{d\xi} &= \eta a_a \sin\Phi & b) \\
\frac{da_a}{d\xi} &= \eta a_a \sin\Phi & c) \\
\frac{d\Phi}{d\xi} &= k + [2\eta - (a_s^2 + a_a^2)] \sin\Phi + \left[\eta \left(\frac{a_s}{a_a} + \frac{a_a}{a_s} \right) - 4a_s a_a \right] & d)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $\Phi(\xi) = k\xi + \Phi_a(\xi) + \Phi_s(\xi) - 2\Phi_0(\xi)$ es la fase que gobierna el proceso de mezcla de cuatro ondas y $k = \frac{\beta_2 \Omega^2}{\gamma P_{tot}}$ es el desajuste lineal normalizado del vector de onda. Las ecuaciones (4.4) proporcionan alguna interpretación física del modelo aproximado de tres ondas [Ecs. (4.3)]. La última ecuación de las Ecs. (4.4) revela que el flujo de energía entre la bomba y las bandas laterales depende solo de su fase relativa. $\sin\Phi > 0$, la potencia fluye desde la bomba a las bandas laterales, mientras que ocurre lo contrario cuando $\sin\Phi < 0$.

La transferencia de potencia máxima se obtiene para $\Phi = \pm \frac{\pi}{2}$. En particular, si se considera una onda de bombeo en conjunto que se propaga con dos bandas laterales débiles (es decir, $a_s^2 + a_a^2 \ll \eta \approx 1$), se encuentra a partir de la Ec. (4.4d) que la tasa de crecimiento de la banda lateral alcanza un má-

ximo para $k = -2$, o, de manera equivalente, para $|\Omega| = \left(\frac{2\gamma P_{tot}}{|\beta_2|}\right)^{\frac{1}{2}}$, que es la desafinación que corresponde a ganancia máxima de IM, Ω_{opt} , encontrada en el análisis de estabilidad lineal [5].

Continuando con el análisis de la dinámica del sistema reduciendo todo el conjunto de las Ecs.(4.4) a una sola ecuación para la potencia de bombeo normalizada η por medio de tres cantidades invariantes del problema. Las soluciones para esta ecuación se pueden encontrar en términos de funciones elípticas de Jacobi. Para condiciones iniciales adecuadas, estas soluciones exhiben recurrencia FPU, y la distancia de recurrencia calculada se compara con la obtenida en simulaciones numéricas de la Ec. (4.1).

Con las tres cantidades invariantes, Cappellini y Trillo demostraron que toda la dinámica de las ecuaciones del modelo (4.4) se pueden describir convenientemente mediante un Hamiltoniano conservador unidimensional cuyas variables conjugadas canónicas son la potencia de bombeo η y la fase Φ . La evolución recurrente de las ondas se representa mediante trayectorias cerradas en el retrato del espacio de fase de este Hamiltoniano en coordenadas polares (η, Φ) . Este modelo predice con precisión las distancias de recurrencia y proporciona una idea clara del comportamiento a largo plazo de la IM [5].

Finalmente, Akhmediev y colaboradores obtuvieron, mediante sustitución directa, soluciones exactas de la ecuación NLS para una bomba inicial modulacionalmente inestable cw perturbada por dos pequeñas bandas laterales Stokes y anti-Stokes ubicadas simétricamente alrededor de la frecuencia de la bomba. Expresaron la solución en forma de expansión de Fourier [5].

$$u(z, t) = f_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \cos[n(t + t_0)\sqrt{2}] \quad (4.5)$$

Encontraron que el sistema exhibe un comportamiento recurrente y que la energía contenida en los armónicos superiores $|f_n(z)|^2$ disminuye según una progresión geométrica para cualquier valor de z en el proceso de evolución del IM. Demostraron que, cuando la modulación de amplitud alcanza un máximo, la energía en las componentes de Fourier de la ecuación. (4.5) es igual a

$$|f_0|^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$|f_n|^2 = 2(\sqrt{2} - 1)^{2n}$$

La dispersión Raman espontánea, provoca una transferencia de potencia de la bomba a una banda de Stokes con desplazamiento de 13,2 THz, puede actuar como una fuente adicional de disipación. Para completar, la dispersión Raman entre la bomba y las bandas laterales, aunque es débil, también debe tenerse en cuenta el modelo de Gaetan Van Simaey, Philippe Emplit, y Marc Haelterman [5].

Se consideran coeficientes realistas que corresponden a la fibra de sílice de telecomunicaciones estándar elegida para el experimento, es decir, $\beta_2 \approx -21 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$, $A_{eff} = 87 \mu\text{m}^2$ y $\gamma = 1,26 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$ para $n_2 = 3 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ W}^{-1}$, donde γ toma en cuenta el promedio de polarización que se debe a la birrefringencia residual, ya que la fibra de propagación no mantenía la polarización [5].

Se calcularon ϕ y η numéricamente a partir de los tres primeros modos de Fourier de la solución numérica de la ecuación NLS generalizada. Se eligieron $\Omega = \Omega_{opt}$ como condición inicial, por lo que la ganancia de IM inicial es máxima [5].

En el estudio del modelo de Gaetan Van Simaey, Philippe Emplit, y Marc Haelterman las pérdidas distribuidas conducen a una aceleración de la dinámica de IM, es decir, a un período de recurrencia más corto. En consecuencia, la trayectoria para el caso realista se está acercando progresivamente a uno de los dos puntos elípticos estables. Sin embargo, el agotamiento de la bomba y la evolución general siguen siendo comparables con los del caso ideal de referencia de las Ecs. (4.4), al menos durante el primer período de recurrencia. En cuanto a la dispersión Raman, el efecto es similar al de las pérdidas distribuidas, aunque significativamente más débil. El pequeño efecto de la dispersión Raman se puede explicar por dos hechos [5].

Primero, la frecuencia de IM óptima, Ω_{opt} , es mucho más baja que el cambio Raman natural. Por tanto, la dispersión Raman no tiene ningún efecto sobre la transferencia de potencia entre las ondas implicadas en el proce-

so de IM y, en consecuencia, induce la misma pérdida efectiva para las tres ondas [5].

En segundo lugar, como la potencia de la bomba de entrada en el experimento permanece muy por debajo del umbral para la dispersión Raman espontánea, su contribución a la dinámica de IM, como una pérdida distribuida efectiva [5].

Como resultado, la diferencia entre la evolución a largo plazo de IM con y sin inclusión de la dispersión Raman y la pérdida de acoplador, se debe a la pérdida de inserción del acoplador 99: 1. Al contrario de lo que podría pensarse, el efecto de la pérdida localizada de 0.2 dB no es equivalente al de una pérdida distribuida de la misma magnitud. El efecto del acoplador en la evolución de la IM depende en gran medida de la ubicación del acoplador a lo largo de la línea de fibra y de la etapa correspondiente en la evolución de la IM [5].

En conclusión al análisis teórico de Gaetan Van Simaey, Philippe Emplit, y Marc Haelterman es que los efectos perturbativos del sistema experimental real sólo afectan levemente cuantitativamente, pero ciertamente no cualitativamente, el comportamiento a largo plazo de la IM. En particular, el análisis muestra que las perturbaciones no impiden que se observe la naturaleza reversible del IM, ya que no se observa ningún cambio significativo en la dinámica durante al menos un período de recurrencia de FPU [5].

La teoría presentada hasta ahora ha descrito la dinámica de IM que tiene ondas cw como condiciones iniciales. Sin embargo, la mayoría de los estudios experimentales de IM se realizaron con pulsos en lugar de cw. Las observaciones rigurosas de la IM, que requerirían una gran potencia de bombeo en el régimen cw, se ven obstaculizadas por efectos no lineales en competencia, el más fuerte de los cuales es la dispersión de Brillouin. Este efecto provoca el agotamiento de la potencia de la bomba, actuando así como una fuerte fuente de disipación que niega la validez de las predicciones extraídas de la ecuación conservadora NLS. En experimentos con IM, esta dificultad suele superarse mediante el uso de pulsos de láser de tipo Gaussiano para aumentar el umbral de dispersión de Brillouin por encima de la potencia de la bomba mediante la dispersión espectral de la bomba [5].

Generalmente se considera que los pulsos gaussianos mucho más largos que el período de modulación de IM operan en el régimen de cuasi-cw. Sin embargo, mientras que los pulsos gaussianos han demostrado ser útiles en la investigación de la evolución inicial de la IM, no son adecuados para demostrar su comportamiento recurrente a largo plazo. La razón es que tales pulsos contienen un rango continuo de niveles de potencia de modo que distintas porciones del pulso exhiben diferentes ganancias y frecuencias de IM (tanto la ganancia de IM como la frecuencia alcanzan un máximo en el pico del pulso). Por tanto, cada porción del pulso tiende a seguir su propia dinámica, pero también está conectada a las porciones vecinas a través de la dispersión cromática [5].

Este comportamiento de pulso conduce a una difuminación del patrón modulacional y, naturalmente, la evolución a largo plazo del patrón difiere fuertemente de la predicha con las condiciones iniciales de cw.

Para superar este patrón, realizaron la investigación de la reversibilidad de IM recurriendo al uso de pulsos grandes de forma cuadrada en lugar de pulsos gaussianos. Al hacerlo, se asegura un régimen de cw efectivo sobre la mayor parte del pulso porque la meseta del pulso, correspondiente a un solo nivel de potencia, es mucho más larga que los flancos ascendente y descendente del pulso. Esta solución es útil solo si el período del patrón de IM es mucho más corto que la meseta del pulso [5].

No obstante, se esperan algunas diferencias entre el comportamiento a largo plazo de un pulso de forma cuadrada y el de un cw puro. Los bordes agudos de subida y salida, en particular, dan lugar a ondas dispersivas a medida que se propagan a lo largo de la fibra. De esta manera, estos bordes actúan como una fuente de dispersión adicional en el sistema que afecta significativamente el comportamiento a largo plazo de la IM [5].

Sin embargo, las características cualitativas que denotan la reversibilidad del proceso de IM, la distancia de recurrencia en particular, son básicamente las mismas en ambos casos, al menos durante los primeros períodos. Como consecuencia, este breve análisis demuestra que el uso de pulsos cuadrados suficientemente grandes es apropiado para demostrar la reversibilidad de la IM [5].

Por lo tanto, el diseño de un generador de pulsos cuadrados ha sido crucial para producir la reversibilidad de IM en las fibras ópticas. Esta fuente fue concebida y realizada experimentalmente con un espejo de bucle óptico no lineal (NOLM por sus siglas en inglés).

El NOLM es un interferómetro de Sagnac antiresonante totalmente de fibra. Consiste en un bucle de fibra cerrado por los dos puertos de salida de un acoplador de fibra balanceado (pérdida de inserción, 3 dB). Cuando una señal ingresa al puerto de entrada, su energía se divide a través del acoplador en dos señales de igual intensidad. Las señales de propagación en sentido horario y antihorario acumulan la misma fase durante la propagación e interfieren destructivamente en el puerto de salida. Por lo tanto, la energía óptica de entrada se refleja completamente de regreso al puerto de entrada del dispositivo, actuando luego como un espejo [5].

Se puede obtener una transmisión parcial a través del puerto de salida NOLM si se rompe la simetría entre las trayectorias ópticas en sentido horario y antihorario en el bucle. Para generar pulsos cuadrados, se opera el NOLM en una configuración de dos longitudes de onda. La conmutación de una porción de forma cuadrada de una señal cw en una longitud de onda se logra mediante la inyección en una dirección del bucle (la dirección en el sentido de las agujas del reloj) un pulso de control intenso en una longitud de onda diferente, una señal de onda continua de baja potencia ($\sim 8mW$) es proporcionada por un láser de retroalimentación distribuida sintonizado a 1551 nm, y el pulso de control de alta potencia es proporcionado por un láser de modo bloqueado $Nd : YAG$ que emite pulsos de 120 ps a 1064 nm a una tasa de repetición de 82 MHz. Se propaga en el sentido de las agujas del reloj y sale del bucle en el acoplador $WDM2$. El bucle está hecho de una fibra monomodo estándar de 360m de largo [5].

Como la fibra no mantiene la polarización, se ha insertado un controlador de polarización (PC) en el lazo para garantizar el correcto funcionamiento del dispositivo. Las ondas de señal en sentido horario y antihorario experimentan una modulación de fase cruzada inducida por el pulso de control. Se ha demostrado que los cambios de fase en el sentido de las agujas del reloj, Φ_{cntw} , y en el sentido contrario a las agujas del reloj, Φ_{clkw} , cw, las señales causadas por un pulso de control $P_c(t)$ se pueden escribir, respectivamente, como

$$\begin{aligned}\Phi_{clkw}(t) &= 2 \int_0^L P_c(t - \Delta\beta'z) dz, \\ \Phi_{cntw} &= 2\langle P_c \rangle L,\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde L es la longitud del bucle, $\langle P_c \rangle$ es la potencia promediada en el tiempo del haz de control y $\Delta\beta' = \frac{1}{v_{gc}} - \frac{1}{v_{gs}}$ es la diferencia en el retardo de grupo entre el control y las ondas de señal. La distancia entre la señal en el sentido de las agujas del reloj y el pulso de control se evaluó mediante mediciones de retardo de grupo y se encontró que era $-1,5\frac{ps}{m}$. Debido a esta interrupción, se imparte un desplazamiento de fase Φ_{clkw} sobre una parte, de duración $\Delta\beta'L$, de la señal en el sentido de las agujas del reloj. La transmisión de intensidad del NOLM es

$$T_I(t) = \sin^2 \left[\frac{\Delta\Phi(t)}{2} \right]\tag{4.7}$$

donde $\Delta\Phi(t) = \Phi_{clkw}(t) - \Phi_{cntw}$. La longitud del bucle L es de 360 m y produce un tiempo de respuesta de $\sim \Delta\beta'L = 540ps$ en la fibra de sílice estándar que constituye el bucle. Este tiempo representa la duración de la señal transmitida por el NOLM. El mejor contraste en la intensidad transmitida a la salida del NOLM se obtiene cuando la diferencia de fase no lineal $\Delta\Phi$ asciende a π . Verificamos experimentalmente que esta condición se obtiene cuando la potencia máxima de los pulsos de control se sintoniza a 17 W. Tenga en cuenta que $\Phi_{cntw} \approx 0$, porque la potencia de control promedio en la trayectoria óptica en sentido antihorario es tan baja como $\sim 175mW$. Los pulsos cuadrados transmitidos se midieron con un fotodiodo rápido (tiempo de respuesta, $\sim 70ps$) y se mostraron en un osciloscopio de muestreo [5].

4.2. Experimento de Gaetan Van Simaey, Philippe Emplit, y Marc Haelterman

Los pulsos de forma cuadrada generados por el NOLM a 1551nm constituyeron la onda de bombeo. La IM fue sembrada por una pequeña señal cw emitida por una fuente sintonizable en longitud de onda (láser semiconductor de cavidad externa). La semilla y la onda de bombeo se amplificaron

a través de un amplificador de fibra dopada con erbio (precedido por un preamplificador con una potencia de salida saturada de 18mW), bombeado por cuatro láseres semiconductores multiplexados en longitud de onda. Las ondas de bombeo y semilla se inyectaron luego en una fibra de telecomunicaciones estándar monomodo de baja pérdida ($0,2 \frac{dB}{km}$) de 2.070m de longitud, cuyos parámetros fueron los indicados anteriormente en la Subsección 2.B. Se insertó un acoplador 99:1 (pérdida de inserción, 0.2dB) después de una longitud de fibra de 1km de modo que los espectros de salida pudieran registrarse simultáneamente al final y en el medio de la línea de fibra. Estas medidas se realizaron con un analizador de espectro óptico [5].

Después de la amplificación, la potencia de meseta de los pulsos de la bomba se pudo ajustar de 1 a 2.3W en la entrada de la línea de fibra, mientras que la potencia de semilla de cw siempre se mantuvo $\sim 27dB$ más baja. El umbral de potencia para Raman $P_0^{th} \simeq \frac{16A_{eff}}{(g_R L_{eff})}$, donde $g_R \simeq 10^{-13} mW^{-1}$ es el coeficiente de ganancia Raman, $L_{eff} \simeq 2km$ es la longitud de interacción efectiva y $A_{eff} = 87\mu m^2$ es el área núcleo efectiva. Por tanto, se puede encontrar que $P_0^{th} \simeq 7W$, que está muy por encima de la potencia máxima de bombeo (2.3W) que alcanzó en el experimento. En consecuencia, la ganancia de Raman espontánea permaneció insignificante durante todo el experimento y no afectó la evolución de IM en la fibra. Además, como la duración media de los pulsos cuadrados ($\sim 550ps$) fue mucho menor que la duración del fonón acústico ($T_B = 16ns$) involucrado en el proceso de dispersión de Brillouin, se puede demostrar que la ganancia de Brillouin se reduce por debajo de la ganancia de Raman y, por lo tanto, se elimina por completo.

La frecuencia de semilla se sintonizó para mantener la frecuencia de desafinación Ω en su valor máximo de ganancia de IM, Ω_{opt} , para todos los niveles de potencia de la bomba, que corresponde a un rango de sintonización de 340–520GHz (0.44–0.66nm en longitud de onda), para cada potencia de bomba de entrada, la frecuencia de la semilla a la frecuencia del máximo de la banda lateral de Stokes que apareció en el régimen de IM espontánea. Esta banda lateral, que reproduce el perfil de ganancia espectral de IM, es directamente visible (es decir, distinguible del ruido) en el analizador de espectro óptico, siempre que la potencia de la bomba sea superior a 1W. Para una potencia de bomba menor, la ganancia de IM espontánea es muy débil que el máximo no puede aislarse del ruido de fondo, lo que explica el límite inferior de potencia de la bomba de 1W que se tuvo que respetar en el expe-

rimento [5].

Los espectros a 1 y 2 km se registraron en las condiciones descritas anteriormente para varios valores de potencia de entrada P_0 . El espectro presenta bandas laterales débiles a 2km, mientras que se observaron bandas laterales significativamente más fuertes a 1km. Este resultado es una indicación de la reversibilidad del proceso de IM.

Se verifica que la potencia relativa de la banda lateral a 2km inicialmente crece con P_0 para alcanzar un máximo en $P_0 \simeq 1,5W$ y luego disminuye a un mínimo ubicado en $P_0 \simeq 2,2W$ antes de aumentar nuevamente.

Aproximadamente cuando la potencia de la banda lateral a 2km alcanza su máximo, se puede iniciar la medición de la potencia de la banda lateral a 1km porque se distingue del ruido solo a la potencia de bomba correspondiente, $P_0 \simeq 1,5W$.

Un aumento adicional de la bomba potencia conduce a un aumento de la potencia de la banda lateral a 1km y a una disminución de la potencia de la banda lateral a 2 km. Esta medida demuestra claramente la reversibilidad de la IM.

También se encontro la evolución tanto de las potencias relativas de la componente cw $\frac{P_{cw}}{P_0}$ como de la primera banda lateral $\frac{P_1}{P_0}$ a 2km. El máximo de potencia de banda lateral en $P_0 = 1,55W$ corresponde a un mínimo de potencia de componente de cw, de acuerdo con la teoría.

Por otro lado se obtuvieron las curvas teóricas (sólidas) obtenidas por simulación numérica de la ecuación NLS generalizada (incluidas todas las pérdidas y la dispersión Raman). Se verifica una excelente concordancia entre teoría y experimento, pero cabe señalar que, para obtener esta concordancia, tuvieron que realizar la simulación con pulsos cuadrados.

Aunque el uso de pulsos cuadrados asegura un régimen cuasi-cw de buena calidad espectral, los flancos ascendente y final tienen un efecto significativo en la IM. Esto explica por qué, contrariamente a lo que se predijo con la ecuación NLS sin pérdidas, Eq.(4.1), el mínimo de potencia de banda lateral a 2km no coincide precisamente con el máximo a 1km [5].

Sin embargo, antes de seguir estudiando la reversibilidad de IM, se analiza el espectro de IM en una escala logarítmica obtenido con el agotamiento máximo de la bomba a 1km, correspondiente a una potencia de bomba de $P_0 = 2,35W$. Verifique a partir de que la potencia en las bandas laterales espectrales siguen una ley de progresión geométrica.

El análisis de Gaetan Van Simaey, Philippe Emplit y Marc Haelterman indica que la potencia en las bandas laterales de Stokes y anti Stokes y sus armónicos de orden superior se distribuyen de acuerdo con una progresión geométrica (es decir, el logaritmo de potencias de banda lateral sucesivas exhibe una ley de desintegración lineal) de relación media $\sim 0,175$, con desviaciones estándar de $\sim 15\%$ para los modos Stokes y $\sim 5\%$ para los modos anti-Stokes. Este resultado concuerda notablemente con la teoría de Akhmediev, que predice una relación de $(\sqrt{2} - 1)^2 \simeq 0,17$ cuando la modulación de amplitud de la entrada cw y el agotamiento de la bomba alcanzan un máximo [5].

Para hacer una investigación experimental más detallada del comportamiento a largo plazo de IM, observaron la evolución del espectro de salida para una longitud de fibra fija con varias condiciones de potencia de bomba de entrada.

Los resultados experimentales pueden ser representados por la distancia de propagación escalada $\xi = \gamma P_{tot} D$ que se introdujo en las Ecs.(4.4). De hecho, se puede estudiar la evolución de ξ a un valor fijo de z simplemente variando la potencia de entrada P_0 . Con $z = 2km$, el rango 1–2,3W de la potencia de entrada corresponde a una variación de ξ de 2.77 a 6.10, lo que permite un estudio cómodo y detallado de la reversibilidad de IM.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que esa variable ξ no es estrictamente equivalente a la distancia de propagación física en el experimento porque no permite tener en cuenta el efecto de la pérdida de inserción del acoplador, cuyo valor y posición varían en función de la potencia de la bomba de entrada [5].

La reversibilidad de IM se demuestra por los resultados experimentales. Observaron que la energía, inicialmente confinada principalmente a la onda de bombeo, se transfiere progresivamente a las bandas laterales y sus

armónicos superiores, lo que conduce a un fuerte agotamiento de bombeo de aproximadamente el 70%.

Hasta ocho modos detectables están involucrados en este proceso de intercambio de energía. Después de una cierta distancia de propagación ($\xi = 4,1$), la transferencia de energía se invierte y toda la potencia fluye de regreso desde los modelos de banda lateral a la onda de bombeo.

Este proceso de intercambio de energía recíproco entre la bomba y un número significativo de modelos de banda lateral no es más que la firma espectral del fenómeno de recurrencia de FPU. La característica notable es que la transferencia de potencia entre los modos de banda lateral es perfectamente sincrónica a pesar del número relativamente grande de modos involucrados. Como afirman teóricamente Yuen y Ferguson, es este sincronismo el que explica un retorno (casi completo) a la condición inicial [5].

Al mostrar que la ecuación NLS es un modelo adecuado para describir el comportamiento a largo plazo de IM en fibras, los resultados proporcionan una prueba más de la validez de la ecuación NLS para la descripción de procesos dinámicos no lineales complejos en fibras ópticas, un tema que es sigue siendo a menudo objeto de debate. El resultado más sorprendente es la verificación cuantitativa de la progresión geométrica de las potencias de banda lateral de orden superior predichas por Akhmediev y Korneev [5].

Un interruptor totalmente óptico basado en la dinámica de IM a largo plazo debe operarse en un rango de parámetros donde $-1 < k < 0$, por lo que la potencia de la bomba de salida (o banda lateral) depende en gran medida de la fase relativa inicial $\Phi(\xi = 0)$, lo que produce ya sea un intercambio de energía periódico entre las olas o un agotamiento aperiódico de la bomba, que conduce asintóticamente a $\eta = 0$ según las condiciones de lanzamiento [5].

4.3. Espectro de inestabilidad de modulación en una fibra óptica de dispersión variable

En la óptica de fibras no lineales, en el proceso de la IM se ha demostrado en fibras con Dispersión de Velocidad de Grupo (GVD) constante y anómala, así como en fibras GVD normales al permitir el cumplimiento de la condi-

ción de coincidencia de fase no lineal a través de una dispersión de cuarto orden, birrefringencia o estructura multimodal [34].

Gracias al panorama de la dispersión periódica, que conduce al Emparejamiento Cuasifásico (QPM) del proceso no lineal de Mezcla de Cuatro Ondas (FWM), las bandas laterales de IM se pueden observar incluso en el régimen de GVD promedio normal de una Fibra Óptica Oscilante de Dispersión (DOF) los trabajos experimentales recientes han confirmado el proceso de IM inducido por QPM en el régimen normal de GVD de DOF microestructurado alrededor de $1\mu m$, así como de DOF no microestructurado altamente no lineal en longitudes de onda de telecomunicaciones [34].

El espectro electromagnético es el conjunto de radiaciones electromagnéticas que se propagan a través del espacio en forma de ondas. Lo que identifica a cada tipo de radiación es su frecuencia, que es el número de ciclos que presenta en un tiempo determinado. Resulta útil caracterizar la señal en términos de su longitud de onda, una magnitud, expresada en metros, que es inversamente proporcional a la frecuencia y que mide la distancia que existe entre dos picos consecutivos de la onda. La energía asociada a cada una de estas longitudes de onda se expresa en electronvoltios .

Para Christophe Finot, Fang Feng, Yanne Chembo, y Stefan Wabnitz; La evolución del campo óptico ψ en un DOF se puede describir mediante la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE) que incluye tanto la no linealidad de Kerr γ como una dispersión de segundo orden que varía periódicamente $\beta_2(z)$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\beta_2(z)}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \gamma|\psi|^2\psi + i\frac{\alpha}{2}\psi = 0 \quad (4.8)$$

En la ecuación (4.8) no incluyeron términos de dispersión de orden superior o dispersión Raman. No obstante, comprobaron que estos efectos no tienen una influencia notable sobre la dinámica espectral del IM que describen.

La IM inducida por las variaciones longitudinales de la dispersión cromática se ha investigado teóricamente antes en una amplia gama de configuraciones, que van desde perfiles sinusoidales con un período espacial de unas pocas decenas de metros, hasta sistemas gestionados por dispersión

con períodos de varios kilómetros[34].

Consideraron en esta contribución el caso específico de DOF cuyos parámetros están inspirados en los trabajos numéricos previos que se llevaron a cabo en el contexto de la transmisión de señales de telecomunicaciones de alta velocidad en enlaces gestionados de dispersión densa. La fabricación de un DOF de este tipo es totalmente coherente con las técnicas de dibujo existentes. Más precisamente, el perfil de dispersión escalonada durante un período espacial K de la fibra en estudio es proporcionado por el mapa

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_2(z) = \beta_{2av} + \beta_{2amps} \text{if } z < \frac{\Lambda}{2} \\ \beta_2(z) = \beta_{2av} + \beta_{2amps} \text{if } z > \frac{\Lambda}{2} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

donde β_{2av} es la dispersión promedio de la fibra, y β_{2amps} es la mitad de la amplitud pico a pico de la variación de dispersión (la dispersión de segundo orden β_2 está relacionada con el parámetro de dispersión D por $D = -2\pi c \frac{\beta_2}{\lambda^2}$, siendo λ la longitud de onda y c la velocidad de la luz). Usando una descomposición de Fourier, es posible descomponer el perfil (4.9) en una serie de funciones sinusales que tienen frecuencias espaciales múltiples a $\frac{1}{\Lambda}$. En aras de la simplicidad, y dado que existen soluciones analíticas para este caso, se concentran en el componente fundamental de Fourier, de modo que se pueda reducir el perfil de dispersión escalonada (4.9) a la siguiente variación sinusoidal

$$\beta_2(z) = \beta_{2av} + \beta_{2amp} \sin\left(\frac{2\pi z}{\Lambda}\right) \quad (4.10)$$

donde β_{2amp} es la amplitud correspondiente de la variación de dispersión:

$$\beta_{2amp} = \frac{4\beta_{2amps}}{\pi}$$

Consideraron una DOF con una no linealidad de Kerr de $\gamma = 2W^{-1}km^{-1}$, un período espacial de la oscilación de dispersión $\Lambda = 1km$, y un valor promedio de dispersión de $D_{av} = 0,5 \frac{ps}{km}$ en la longitud de onda $\lambda_0 = 1550nm$.

La fibra es bombeada por un cw con la potencia promedio $P = 0,75W$ en λ_0 . La NLSE (4.8) se resuelve numéricamente mediante el algoritmo estándar de Fourier de paso dividido que incluye una semilla de ruido blanco de entrada débil, y los resultados se promedian en 24 disparos [34].

En presencia de variaciones de GVD longitudinales sinusoidales, el QPM de FWM o IM conduce a la aparición de bandas laterales de ganancia resonante, cuyo desplazamiento de frecuencia angular con respecto a la bomba puede predecirse analíticamente, asumiendo una fibra indefinidamente larga, como sigue:

$$\Omega_p = \pm \sqrt{\frac{\frac{2\pi p}{\Lambda} - 2\gamma P}{\beta_{2av}}} \quad (4.11)$$

con $p = 1, 2, 3, \dots$. Se ha demostrado que la ganancia experimentada por las p -ésimas bandas laterales después de una longitud de propagación L puede predecirse mediante:

$$G_p^{dB} = 10 \log_{10} \left\{ \exp \left[2\gamma PL \left| J_p \left(\frac{\beta_{2amp} \Omega_p^2}{\frac{2\pi}{\Lambda}} \right) \right| \right] \right\} \quad (4.12)$$

donde J_p es la función de Bessel de orden p . Tenga en cuenta que las Ecs.(4.11) y (4.12) se derivan de las Ecs.(4.8) - (4.10) en un límite de perturbación, es decir, siempre que $|\frac{\beta_{2amp}}{\beta_{2av}}| \ll 1$. Por lo tanto, estudiar el dominio de su validez en situaciones donde la amplitud de las oscilaciones de dispersión es igual o incluso mucho mayor que la dispersión promedio. Tenga en cuenta que, de hecho, los sistemas de transmisión gestionados por dispersión casi siempre operan en el régimen de gestión fuerte, a saber, la condición $|\frac{\beta_{2amp}}{\beta_{2av}}| \gg 1$, que es precisamente lo opuesto al dominio de validez de la teoría de la perturbación que permite derivar las Ecs. (4.11), (4.12).

Christophe Finot, Fang Feng, Yanne Chembo, y Stefan Wabnitz comienzan su estudio investigando la influencia de la amplitud de las fluctuaciones de dispersión β_{2amp} (o el correspondiente D_{amp}) en el espectro IM que se registra después de 12 períodos espaciales, es decir, una distancia de propagación de 12km. Los resultados para tres niveles de amplitud de las osci-

laciones de GVD, son $D_{amp} = 0,5, 1,7$ y $3,7 \frac{ps}{km \cdot nm}$.

De hecho, para un nivel relativamente bajo de fluctuaciones de dispersión, que es $D_{amp} = 0,5 \frac{ps}{km \cdot nm}$, observaron la generación de bandas laterales espectrales estrechas y desigualmente espaciadas, cuya posición es cualitativa acuerdo con las predicciones analíticas de Eq. (4.11). La posibilidad de observar IM inducida por QPM en tal situación, donde se genera un gran conjunto de líneas espectrales, fue confirmada experimentalmente en el trabajo de Droques [34].

Sin embargo, para un nivel creciente de oscilaciones de amplitud de dispersión, observaron dos características principales que conducen a una estructura muy diferente del espectro de IM de salida. La primera característica se explica por la evolución del coeficiente de ganancia según la Ec. (4.12) que conduce, para algunos valores del argumento, a la aniquilación de la amplitud de la banda lateral.

Por otro lado, la segunda característica está vinculada a FWM entre la onda de bombeo y la primera banda lateral QPM, y la posterior cascada del proceso FWM [34].

Para una amplitud aún mayor de las oscilaciones de dispersión, es decir, $D_{amp} = 3,7 \frac{ps}{km \cdot nm}$, observaron en lugar de una banda lateral de ganancia única, la aparición inesperada de un par de bandas laterales alrededor de la frecuencia angular Ω_1 . La aparición del nuevo par de bandas laterales no se explica por la mezcla no lineal entre las otras bandas laterales, pero es una propiedad intrínseca del espectro de ganancia IM de las Ecs. (4.8) y (4.10) en el régimen de gestión de la dispersión fuerte [34].

Para verificar tal afirmación, se puede escribir la solución cw perturbada de la NLSE (4.8, 4.10) como $\psi(z, t) = [\sqrt{P} + u(z, t)] \exp i P z$, donde suponemos $|u|^2 \gg P$, de modo que obtenemos la ecuación linealizada para $u(Z, T)$

$$i u_z = \beta^2 \frac{d(Z)}{2} u_{TT} + (u + u^*) \quad (4.13)$$

Aquí se definió $\beta^2 = \frac{L_{nl}}{L_d}$, donde la longitud no lineal $L_{nl} = \frac{1}{(\gamma P)}$, la longitud de dispersión $L_d = \frac{t_0^2}{|\beta_{2av}|}$, y $t_0 = 1 ps$ es una referencia unidad de tiempo, de

modo que:

$$Z = \frac{z}{L_{nl}}$$

$$T = \frac{t}{t_0}$$

Además,

$$d(Z) = \left[1 + \Delta \sin\left(\frac{2\pi Z}{\Lambda'}\right) \right]$$

Con

$$\Delta = \frac{\beta_{2amp}}{|\beta_{2av}|}$$

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{L_{nl}}$$

Al escribir ahora la solución de (4.13) como la suma de las bandas laterales de Stokes y anti-Stokes, $u(Z, T) = a(Z) \exp(i\Omega T) + b^*(Z) \exp(-i\Omega T)$, uno obtiene las dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales acopladas (EDO) con coeficientes periódicos para $a(z)$ y $b(z)$

$$a_z = i \frac{\beta^2}{2} \Omega^2 d(Z) a + i(a + b)$$

$$b_z = -i \frac{\beta^2}{2} \Omega^2 d(Z) b - i(a + b)$$
(4.14)

Estas ecuaciones son equivalentes a una única EDO de segundo orden o ecuación de Mathieu generalizada para la banda lateral de Stokes $a(z)$. En el caso general, la EDO periódica resultante no puede resolverse analíticamente para una fuerza arbitraria de la oscilación de dispersión: las condiciones de resonancia paramétrica (4.11) son estrictamente válidas solo en el límite de pequeñas oscilaciones.

Sin embargo, el análisis de estabilidad lineal correspondiente todavía se puede llevar a cabo numéricamente rigurosamente por la teoría de Floquet, que es análoga a la teoría de ondas de Bloch en la física del estado sólido [34].

Definiendo el vector solución de (4.14) como $\mathbf{s} = (a, b)$ y eligiendo las dos condiciones iniciales fundamentales $\mathbf{s}_1(Z = 0) = (1, 0)$ y $\mathbf{s}_2(Z = 0) = (0, 1)$, se obtiene de la solución de (4.14) en $Z = \Lambda'$ la matriz de solución principal $S = [\mathbf{s}_1(\Lambda')^t, \mathbf{s}_2(\Lambda')^t]$ (donde t denota el vector o la matriz transpuesta).

Según el teorema de Floquet, los valores propios de S, o los multiplicadores de Floquet $\lambda = \exp(\eta_F + i\sigma)$, tales que $|\lambda| > 1$ se obtiene la inestabilidad lineal de cw con respecto al crecimiento de las bandas laterales con desintonización de frecuencia Ω . Dado que la matriz de dispersión después de un número entero n de períodos es simplemente S^n , se pueden relacionar los multiplicadores de Floquet con la ganancia IM habitual G después de un período de la oscilación de dispersión mediante la relación

$$G = \frac{2\eta_F}{\Lambda'}$$

Con el fin de obtener una visión general de la amplitud de oscilación de la dispersión en el espectro de IM, llevaron a cabo un estudio sistemático, donde se pudieron observar comportamientos hasta $D_{amp} = 1 \frac{ps}{km}$. Para D_{amp} entre 1 y $2,75 \frac{ps}{km}$ FWM juega un papel importante y puede dar lugar a múltiples bandas laterales en cascada.

En el rango de amplitudes de oscilación de dispersión D_{amp} entre 3.6 y $4,4 \frac{ps}{km}$, se observó la división de dos bandas laterales alrededor de la posición espectral de la primera banda lateral QPM. Este comportamiento se observa para D_{amp} por encima de $6,5 \frac{ps}{km}$.

Por lo tanto, estudiaron con detalle la evolución de la ganancia en el conjunto discreto de longitudes de onda QPM que predice la ecuación (4.11).

$$G^{dB}(\omega) = 10 \log_{10} \left(\exp \left[2\gamma PL \left| J_1 \left(\frac{\beta_{2amp} \omega^2}{\frac{2\pi}{\Lambda}} \right) \right| \right] \right) \quad (4.15)$$

La fórmula anterior es una extensión de la ecuación (4.12), que inicialmente tenía como objetivo describir la ganancia exclusivamente en el conjunto discreto de las frecuencias QPM Ω_p , en un rango continuo de frecuencias, Ω en las proximidades de una frecuencia QPM. A pesar del uso de Eq. (4.15) no es completamente rigurosa (ya que esta fórmula se derivó solo para $\omega = \Omega_1$).

La expresión analítica (4.15) reproduce bien la pendiente interna de las dos bandas laterales. La validez de la aproximación analítica (4.15) también se confirma al realizar un análisis similar para un valor diferente de la amplitud de $D_{amp} = 6,7 \frac{ps}{km}$, de modo que también se observa división de banda lateral. En cada caso, se puede lograr una mejor concordancia cuantitativa con los valores numéricos mediante el análisis de estabilidad lineal de Floquet [34].

La aparición de estas bandas laterales está, directamente relacionada con su separación de la primera banda lateral QPM, cuya ganancia en Ω_1 es cero. La ganancia de las dos bandas laterales en la vecindad de Ω_1 puede aproximarse extendiendo la validez de la Ec. (4.12) a un rango continuo de frecuencias.

Examinaron la influencia de la ganancia o pérdida lineal de la fibra en el espectro de IM de salida resultante después de 12km de propagación. Para simplificar, limitaron el análisis para el caso donde se observa división de banda lateral, es decir, $D_{amp} = 3,7 \frac{ps}{km}$.

Por otro lado, cuando se trata del impacto de las pérdidas lineales, con un nivel de pérdidas tan bajo como 0.05 dB por km, la ganancia de IM de la banda lateral interna experimenta una disminución dramática. Por el contrario, la banda lateral exterior experimenta un ligero aumento de ganancia.

Para un aumento adicional del nivel de pérdidas (es decir, 0,1 dB / km), la ganancia de la banda lateral interior desciende a unos pocos dB solamente, mientras que la ganancia de la subbanda lateral exterior no lo hace cambiar significativamente [34].

La diferente dependencia de la ganancia y la pérdida de las dos subbandas laterales puede explicarse cualitativamente por el hecho de que la frecuencia angular de las bandas laterales resonantes predicha por la Ec. (4.11)

depende de la potencia, las potencias más altas favorecen valores más bajos de Ω_1 .

Para evaluar aproximadamente la influencia de α en el espectro de IM, utilizaron el siguiente enfoque aproximado: consideraron los espectros de ganancia de salida (en dB) después de n -períodos de la oscilación de dispersión como la suma de los espectros de ganancia previamente calculados experimentados durante una período espacial único para una potencia en la entrada del período que aumenta / disminuye exponencialmente con la longitud de propagación:

$$G^{dB}(\omega, \alpha) = \sum_{i=1 \dots n} G_F^{dB}(\omega, P_0 e^{-\alpha \Lambda i}) \quad (4.16)$$

Un buen acuerdo con la integración numérica de la ecuación. Se observa (4.9), lo que confirma nuestra explicación cualitativa. La ecuación. (4.16) reproduce las tendencias que se obtienen de la simulación completa y rigurosa del NLSE (4.8).

Se estudio la evolución del espectro de inestabilidad de modulación en una fibra óptica con dispersión que varía periódicamente, en función de la amplitud de oscilación de la dispersión. La teoría existente para los grados de libertad predice, además de la conocida inestabilidad de modulación que se observa en las fibras con dispersión constante, la aparición de un conjunto discreto e infinito de bandas laterales de resonancia paramétrica tanto en el régimen de dispersión normal como en el anómalo.

Sin embargo, estas bandas laterales de resonancia paramétrica se obtienen en un límite perturbativo de oscilaciones de dispersión relativamente pequeñas. Por lo tanto, en principio, no hay garantía sobre la supervivencia y existencia de resonancias paramétricas en DOF con oscilaciones de dispersión de amplitud relativamente grandes, o en el llamado régimen de gestión de dispersión fuerte [34].

Christophe Finot, Fang Feng, Yanne Chembo, y Stefan Wabnitz encontraron que en el límite de la oscilación de dispersión con una amplitud mucho mayor que la dispersión promedio de la fibra, las predicciones del análisis perturbativo generalmente se mantienen sorprendentemente bien. Sin embargo, en situaciones donde el análisis perturbativo estándar predice que las

bandas laterales paramétricas tienen una amplitud de fuga, observaron una aparición inesperada de nuevas bandas laterales de orden superior que resulta de la división de la banda lateral paramétrica original correspondiente.

Los resultados numéricos concuerdan cuantitativamente con un análisis de estabilidad de Floquet de mezcla de cuatro ondas en un DOF. Además, también demostraron que la ganancia o pérdida lineal puede tener una influencia en la remodelación de la amplitud relativa de cada una de las nuevas bandas laterales [34].

Capítulo 5

Inestabilidad modulacional en la ecuación no lineal de Schrödinger

La ecuación no lineal de Schrödinger conocida internacionalmente como “Nonlinear Schrödinger Equation” (NLSE), se origina al describir fenómenos no lineales con soluciones que pueden ser representadas en forma de paquetes de ondas armónicas (Makhankov, 1978, 1990)[8].

Uno de los rasgos más atractivos de la NLSE es que nos permite describir la evolución de los envolventes de un paquete de onda para ondas portadoras en el medio con dispersión cuadrática.

Resulta que la NLSE y la SG tienen propiedades semejantes, es decir, las envolventes de sus soluciones en forma de ondas viajeras son solitones.

La onda de luz en una fibra puede describirse mediante la ecuación no lineal de Schrödinger. Cuando la onda de entrada tiene forma de pulso, la salida se puede describir en términos de un conjunto de solitones y una onda dispersiva [10]. La cuestión de Akira Hasegawa sobre ¿qué sucede si la onda de luz de entrada tiene una amplitud continua? Comienza con la descripción de la envolvente de onda q dada por:

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q = -i\Gamma q, \quad (5.1)$$

donde $\Gamma = \frac{\gamma \lambda}{\epsilon^2}$.

Aquí, mostró que la onda de luz de entrada se vuelve inestable para una pequeña perturbación alrededor de la amplitud inicial q_0 . Esta inestabilidad

se denomina inestabilidad modulacional [10]. Para mostrar la inestabilidad, introdujo nuevas variables reales ρ y σ a través :

$$q = \sqrt{\rho} e^{i\sigma}, \quad (5.2)$$

y sustituya (5.2) en la ecuación no lineal de Schrödinger (5.1) para obtener :

$$\frac{\partial \rho}{\partial Z} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} + 2\Gamma \rho = 0, \quad (5.3)$$

y

$$\rho - \frac{\partial \sigma}{\partial Z} + \frac{1}{4\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 - \frac{1}{8\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 = 0. \quad (5.4)$$

Consideró una pequeña modulación de ρ y σ con la frecuencia de banda lateral dada por Ω , donde $\bar{\rho}_0$ es la intensidad inicial de la portadora, tal que:

$$\rho(T, Z) = \rho_0(Z) + Re \{ \rho_1(Z) e^{-i\Omega T} \}, \quad (5.5)$$

y

$$\sigma(T, Z) = \sigma_0(Z) + Re \{ \sigma_1(Z) e^{-i\Omega T} \}, \quad (5.6)$$

Sustituyendo (5.5) y (5.6) en (3) y (4) y linealizando los resultados, a partir de los términos de orden cero, se tiene:

$$\rho_0 - \frac{\partial \sigma_0}{\partial Z} = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial Z} + 2\Gamma \rho_0 = 0. \quad (5.8)$$

Las ecuaciones (5.7) y (5.8) se resuelven para la condición inicial $\rho_0(O) = \bar{\rho}_0$ y $\rho_0(O) = 0$, dando:

$$\rho_0(Z) = \bar{\rho}_0 e^{-2\Gamma Z}, \quad (5.9)$$

$$\sigma_0(Z) = \frac{\bar{\rho}_0}{2\Gamma} (1 - e^{-2\Gamma Z}). \quad (5.10)$$

La ecuación (5.9) indica que la intensidad promedio (portadora) disminuye exponencialmente a razón de 2Γ , donde $\bar{\rho}_0$ es la intensidad inicial de la portadora. A partir de los términos de primer orden, se tienen ecuaciones para la amplitud y la fase de la banda lateral,

$$\frac{d\rho_1}{dZ} + 2\Gamma\rho_1 - \Omega^2\rho_0\sigma_1 = 0, \quad (5.11)$$

y

$$\rho_1 \left(1 - \frac{\Omega^2}{4\rho_0}\right) - \frac{d\sigma_1}{dZ} = 0. \quad (5.12)$$

Para ilustrar la inestabilidad, se ignora la pérdida de fibra Γ y se escribe $\rho_1(Z)$ y $\sigma_1(Z)$ en términos de la amplitud de Fourier, $\rho_1(Z) = Re\{\rho_1 e^{ikZ}\}$ y $\sigma_1(Z) = Re\{\sigma_1 e^{ikZ}\}$. Entonces, (5.11) y (5.12) dan la siguiente relación de dispersión para el número de onda K y la frecuencia Ω :

$$K^2 = \frac{1}{4}(\Omega^2 - 2\rho_0)^2 - \rho_0^2. \quad (5.13)$$

Esta expresión da la tasa de crecimiento espacial ImK que alcanza su valor máximo en:

$$\Omega \equiv \Omega_m = \sqrt{2\rho_0} = \sqrt{2}|q_0|, \quad (5.14)$$

y la tasa de crecimiento correspondiente se convierte en :

$$ImK = \rho_0 = |q_0|^2. \quad (5.15)$$

Si se escriben las variables en términos de los parámetros originales, la frecuencia que muestra la tasa máxima de crecimiento está dada por:

$$\omega_m = \frac{\sqrt{2}E_0\pi n_2}{(-\lambda k'')^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.16)$$

y la correspondiente tasa de crecimiento espacial γ_g está dada por:

$$\gamma_g = \frac{\pi n_2 |E_0|^2}{\lambda}. \quad (5.17)$$

Si ω_m^{-1} corresponde aproximadamente al ancho de pulso de un solitón con amplitud E_0 , se puede ver una relación entre la formación de un solitón y la inestabilidad modulacional. La inestabilidad modulacional de las ondas de luz en una fibra ha sido sugerida por varios teóricos como un medio para producir una fuente de luz sintonizable, como un mecanismo para el deterioro de la capacidad de transmisión coherente y una fuente de modulación de fase cruzada[10].

Se reconoce que los espacios entre las bandas laterales y la frecuencia portadora se vuelven más amplios a medida que aumenta la intensidad de la onda. Esto se debe a que, según (5.16), la frecuencia de banda lateral ω_m , que da el máximo crecimiento, aumenta en proporción a $|E|^2$ [10].

5.1. Modelación matemática de pulsos no lineales con inestabilidad modulacional según la NLSE no autónoma.

Iniciando con una descripción de la dinámica de la envolvente de onda $q(Z, T)$ en el marco de siguiente modelo NLSE no autónomo:

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{D(Z)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + R(Z) |q|^2 q = 0 \quad . \quad (5.18)$$

De donde la dinámica de la envolvente de onda $q(Z, T)$ con dispersión $D(Z) > 0$ y no linealidad $R(Z) > 0$ variando a lo largo de la distancia de propagación[9,10,12]. Para estudiar la inestabilidad de la modulación de autofase, se sigue el método descrito por Akira Hasegawa para el caso canónico $D(Z) = R(Z) = 1$. Basados en la representación:

$$q(Z, T) = \sqrt{\rho(Z, T)} e^{[i\sigma(Z, T)]} \quad , \quad (5.19)$$

De donde tenemos que,

$$e^{[i\sigma]} = (\cos(\sigma) + i \operatorname{sen}(\sigma)) \quad ,$$

y sacando el valor absoluto de un número complejo (tomando en cuenta $\rho = \rho(Z, T)$, $\sigma = \sigma(Z, T)$, $q = q(Z, T)$):

$$\begin{aligned}
 |q| &= \left| \rho^{\frac{1}{2}} \cos(\sigma) + i \rho^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(\sigma) \right| \\
 &= \sqrt{\left(\rho^{\frac{1}{2}} \cos(\sigma) \right)^2 + \left(\rho^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(\sigma) \right)^2} \\
 &= \sqrt{\rho \cos^2(\sigma) + \rho \operatorname{sen}^2(\sigma)} \\
 &= \sqrt{\rho (\cos^2(\sigma) + \operatorname{sen}^2(\sigma))} \quad .
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$|q| = \sqrt{\rho} \quad , \quad (5.20)$$

$$|q|^2 = \rho \quad . \quad (5.21)$$

Luego se obtienen las derivadas parciales de (5.19) respecto de Z

$$\frac{\partial q}{\partial Z} = \frac{1}{2} \rho^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial Z} e^{i\sigma} + e^{i\sigma} \cdot i \frac{\partial \sigma}{\partial Z} \rho^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

$$\frac{\partial q}{\partial Z} = e^{i\sigma} \left(\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial Z} + i \frac{\partial \sigma}{\partial Z} \rho^{\frac{1}{2}} \right) \quad , \quad (5.22)$$

y respecto de T:

$$\frac{\partial q}{\partial T} = \frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T} e^{i\sigma} + \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\sigma} \cdot i \frac{\partial \sigma}{\partial T} \quad ,$$

$$\frac{\partial q}{\partial T} = e^{i\sigma} \left(\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial T} + i \frac{\partial \sigma}{\partial T} \rho^{\frac{1}{2}} \right) \quad . \quad (5.23)$$

Luego se obtiene la segunda derivada parcial de (5.23) respecto de T:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} &= e^{i\sigma} \left(-\frac{1}{4} \rho^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) + \frac{i}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) + i \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial T} + i \rho^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \cdot i \frac{\partial \sigma}{\partial T} e^{i\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} &= e^{i\sigma} \left[-\frac{1}{4} \rho^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) + i \left(\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) + \frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right] \\ &\quad + e^{i\sigma} \left[i \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) + i^2 \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

con $i^2 = -1$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} = e^{i\sigma} \left[\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) - \frac{1}{4} \rho^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 + i \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) + i \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) - \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \right] .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} &= e^{i\sigma} \left[\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) - \frac{1}{4} \rho^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + i \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) + i \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) - \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \right] . \end{aligned} \tag{5.24}$$

Sustituyendo (5.19),(2.21),(5.22) y (5.24) en la ecuación (5.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \quad i e^{i\sigma} \left(\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) + i \left(\frac{\partial \sigma}{\partial Z} \right) \rho^{\frac{1}{2}} \right) + R(Z) \cdot \rho \cdot \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\sigma} \\ & \quad + \frac{D(Z)}{2} e^{i\sigma} \left[\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) - \frac{1}{4} \rho^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + i \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) - \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 + i \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \quad \frac{i e^{i\sigma}}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) - e^{i\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial Z} \right) \rho^{\frac{1}{2}} + R(Z) \rho^{\frac{3}{2}} e^{i\sigma} \\ & \quad + D(Z) e^{i\sigma} \cdot \frac{1}{4} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) - D(Z) e^{i\sigma} \frac{1}{8} \rho^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 \\ & \quad + i D(Z) e^{i\sigma} \frac{1}{2} \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) - D(Z) \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 + i D(Z) e^{i\sigma} \frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) = 0 \quad , \end{aligned}$$

Juntando los términos multiplicados por i :

$$\Rightarrow i e^{i\sigma} \left[\frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) + D(Z) \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) + D(Z) \frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right] +$$

$$e^{i\sigma} \left[- \left(\frac{\partial \sigma}{\partial Z} \right) \rho^{\frac{1}{2}} + R(Z) \rho^{\frac{3}{2}} + D(Z) \frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{4} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) \right.$$

$$\left. - D(Z) \frac{\rho^{-\frac{3}{2}}}{8} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 - D(Z) \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow i e^{i\sigma} \left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) + D(Z) \left(\frac{\sqrt{\rho}}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right) \right] +$$

$$e^{i\sigma} \left[R(Z) \rho \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial Z} \right) + D(Z) \left(\frac{1}{4\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{8\sqrt{\rho}\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 - \frac{\sqrt{\rho}}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \right) \right] = 0 \quad ,$$

Despejando $e^{i\sigma}$ de esta última :

$$\Rightarrow i \left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) + D(Z) \left(\frac{\sqrt{\rho}}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right) \right] +$$

$$\left[R(Z) \rho \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial Z} \right) + D(Z) \left(\frac{1}{4\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right) \right. \right. \quad (5.25)$$

$$\left. \left. - \frac{1}{8\sqrt{\rho}\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^2 - \frac{\sqrt{\rho}}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \right) \right] = 0 \quad ,$$

Luego separando la parte real de la parte imaginaria se obtienen dos ecuaciones :

$$i \left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) + D(Z) \left(\frac{\sqrt{\rho}}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right) \right] = 0 \quad , \quad (5.26)$$

y

$$\begin{aligned}
R(Z)\rho\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right) + D(Z)\left(\frac{1}{4\sqrt{\rho}}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial T^2}\right)\right. \\
\left. - \frac{1}{8\sqrt{\rho}\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)^2 - \frac{\sqrt{\rho}}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)^2\right) = 0 .
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Despejamos a i y multiplicamos por $2\sqrt{\rho}$ en (5.26) y multiplicamos por $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ en (5.27) :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial Z}\right) + D(Z)\left(\rho\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial T^2}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)\right) = 0 , \tag{5.28}$$

y

$$R(Z)\rho - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right) + D(Z)\left(\frac{1}{4\rho}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial T^2}\right) - \frac{1}{8\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)^2\right) = 0 , \tag{5.29}$$

y considere una pequeña modulación $\varepsilon \ll 1$ para la intensidad de $\rho(Z, T)$ y para la fase $\sigma(Z, T)$ con la frecuencia de banda lateral dada por :

$$\rho(Z, T) = \rho_0(Z) + \varepsilon Re\{\rho_1(Z)e^{(-i\Omega T)}\} , \tag{5.30}$$

$$\sigma(Z, T) = \sigma_0(Z) + \varepsilon Re\{\sigma_1(Z)e^{(-i\Omega T)}\} , \tag{5.31}$$

Se calculan las primeras derivadas parciales de (5.30) y (5.31) respecto a Z y a T :

$$\begin{aligned}
\rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial Z} &= \frac{\partial\rho_0}{\partial Z} + \varepsilon Re\left\{\frac{\partial\rho_1}{\partial Z}e^{(-i\Omega T)}\right\} \\
\rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial T} &= \varepsilon Re\{\rho_1(-i\Omega)e^{(-i\Omega T)}\} \\
\rightarrow \frac{\partial\sigma}{\partial Z} &= \frac{\partial\sigma_0}{\partial Z} + \varepsilon Re\left\{\frac{\partial\rho_1}{\partial Z}e^{(-i\Omega T)}\right\} \\
\rightarrow \frac{\partial\sigma}{\partial T} &= \varepsilon Re\{\sigma_1(-i\Omega)e^{(-i\Omega T)}\} ,
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Se calculan $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)^2$ y $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)^2$:

$$\begin{aligned} \rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)^2 &= \varepsilon^2 \operatorname{Re} \left\{ (\rho_1(-i\Omega)e^{-i\Omega T})^2 \right\} \\ \rightarrow \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)^2 &= \varepsilon^2 \operatorname{Re} \left\{ (\sigma_1(-i\Omega)e^{-i\Omega T})^2 \right\} , \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ahora se calculan las segundas derivadas parciales de (5.30) y (5.31) respecto a T:

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} &= \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \rho_1(-\Omega^2)e^{-i\Omega T} \right\} \\ \rightarrow \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} &= \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \sigma_1(-\Omega^2)e^{-i\Omega T} \right\} , \end{aligned} \quad (5.34)$$

Sustituyendo (5.30), (5.32), (5.33) y (5.34) en las ecuaciones (5.28) y (5.29) se obtienen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} + \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} e^{-i\Omega T} \right\} + D(Z) \left[\varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \rho_1(-i\Omega)e^{-i\Omega T} \right\} \right. \\ \left. \cdot \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \sigma_1(-i\Omega)e^{-i\Omega T} \right\} (\rho_0 + \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 e^{-i\Omega T} \right\}) \right. \\ \left. (\varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \sigma_1(-\Omega^2)e^{-i\Omega T} \right\}) \right] = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} + \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} e^{-i\Omega T} \right\} + \\ D(Z) \varepsilon^2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 \sigma_1 (-i\Omega)^2 (e^{-i\Omega T})^2 \right\} + \\ D(Z) \rho_0 \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \sigma_1 (-\Omega^2) e^{-i\Omega T} \right\} + \\ D(Z) \varepsilon^2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 \sigma_1 (-\Omega^2) (e^{-i\Omega T})^2 \right\} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} + \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} e^{-i\Omega T} \right\} + \\ 2D(Z) \varepsilon^2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 \sigma_1 (-\Omega^2) (e^{-i\Omega T})^2 \right\} + \\ D(Z) \rho_0 \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \sigma_1 (-\Omega^2) e^{-i\Omega T} \right\} = 0 , \end{aligned} \quad (5.35)$$

y

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R(Z) (\rho_0 + \varepsilon \operatorname{Re} \{ \rho_1 e^{-i\Omega T} \}) - \frac{\partial \sigma_0}{\partial Z} - \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} e^{-i\Omega T} \right\} \\
+ D(Z) \left[\left[\frac{1}{4\rho_0} \varepsilon \operatorname{Re} \{ \rho_1 (-\Omega^2) e^{-i\Omega T} \} \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{1}{8\rho_0^2} \cdot \varepsilon^2 \operatorname{Re} \{ (\rho_1 (-i\Omega) e^{-i\Omega T})^2 \} \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \operatorname{Re} \{ (\sigma_1 (-i\Omega) e^{-i\Omega T})^2 \} \right] \right] = 0
\end{aligned}
\tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R(Z) \rho_0 + R(Z) \varepsilon \operatorname{Re} \{ \rho_1 e^{-i\Omega T} \} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial Z} \\
- \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} e^{-i\Omega T} \right\} + \frac{D(Z)}{4\rho_0} \varepsilon \operatorname{Re} \{ \rho_1 (-\Omega^2) e^{-i\Omega T} \} \\
- \frac{D(Z)}{8\rho_0^2} \cdot \varepsilon^2 \operatorname{Re} \{ (\rho_1 (-i\Omega) e^{-i\Omega T})^2 \} \\
- \frac{D(Z)}{2} \varepsilon^2 \operatorname{Re} \{ (\sigma_1 (-i\Omega) e^{-i\Omega T})^2 \} = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

Se juntan los términos que multiplican a ε y a ε^2 en las ecuaciones (5.35) y (5.36):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_0}{\partial Z} + \varepsilon \left[\operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} e^{-i\Omega T} \right\} + D(Z) \rho_0 \operatorname{Re} \{ \sigma_1 (-\Omega^2) e^{-i\Omega T} \} \right] + \\
\varepsilon^2 \left[2D(Z) \operatorname{Re} \{ \rho_1 \sigma_1 (-\Omega^2) (e^{-i\Omega T})^2 \} \right] = 0 \quad ,
\end{aligned}
\tag{5.37}$$

y

$$\begin{aligned}
& \left[R(Z)\rho_0 - \frac{\partial\sigma_0}{\partial Z} \right] + \varepsilon \left[R(Z) \operatorname{Re} \{ \rho_1 e^{(-i\Omega T)} \} \right. \\
& \left. - \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial\rho_1}{\partial Z} e^{(-i\Omega T)} \right\} + \frac{D(Z)}{4\rho_0} \operatorname{Re} \{ \rho_1 (-\Omega^2) e^{(-i\Omega T)} \} \right] \\
& - \varepsilon^2 \left[\frac{D(Z)}{8\rho_0^2} \operatorname{Re} \{ (\rho_1 (-i\Omega) e^{(-i\Omega T)})^2 \} \right. \\
& \left. - \frac{D(Z)}{2} \operatorname{Re} \{ (\sigma_1 (-i\Omega) e^{(-i\Omega T)})^2 \} \right] = 0 \quad , \tag{5.38}
\end{aligned}$$

En términos de orden cero para ε de (5.37), se tiene:

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial Z} = 0, \quad \text{o bien} \quad \rho_0 = \text{constante}. \tag{5.39}$$

Y en términos de orden cero para ε de (5.38), se tiene:

$$\begin{aligned}
& R(Z)\rho_0 - \frac{\partial\sigma_0}{\partial Z} = 0 \quad , \quad , \\
\Rightarrow \frac{\partial\sigma_0}{\partial Z} = R(Z)\rho_0 \quad \text{o} \quad \sigma_0 = \rho_0 \int_0^Z R(Z) dZ \quad . \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Para términos de primer orden para ε de (5.37) se tiene:

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{\partial\rho_1}{\partial Z} + D(Z)\rho_0\sigma_1(-\Omega^2) = 0 \quad , \\
& \tag{5.41} \\
& \frac{d\rho_1}{dZ} - \Omega^2\rho_0 D(Z)\sigma_1(Z) = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Para términos de primer orden para ε de (5.38) se tiene:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow R(Z)\rho_1 - \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} + \frac{D(Z)}{4\rho_0}\rho_1(-\Omega^2) = 0 \\
&\Rightarrow R(Z)\rho_1 - \frac{d\rho_1}{dZ} - \frac{D(Z)}{4\rho_0}\rho_1\Omega^2 = 0 \\
&\Rightarrow -R(Z)\rho_1 + \frac{d\rho_1}{dZ} + \frac{D(Z)}{4\rho_0}\rho_1\Omega^2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{d\rho_1}{dZ} - \rho_1 \left\{ R(Z) - \frac{D(Z)}{4\rho_0}\Omega^2 \right\} = 0 \\
&\frac{d\sigma_1}{dZ} - \rho_1(Z) \left\{ R(Z) - \frac{\Omega^2 D(Z)}{4\rho_0} \right\} = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{5.42}$$

y describe un régimen de oscilación y otra exponencial. Las ecuaciones (5.41) y (5.42) representan el sistema obtenido por Akira Hasegawa en el límite $D(Z) = R(Z) = 1$. Para ilustrar la inestabilidad, Hasegawa representó las amplitudes de Fourier en las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
\rho_1(Z) &= Re \{ \rho_1 e^{(iKZ)} \} \\
&= \rho_1 + \cos(KZ) \quad ,
\end{aligned} \tag{5.43}$$

y

$$\begin{aligned}
\sigma_1(Z) &= Re \{ \sigma_1 e^{(iKZ)} \} \\
&= \sigma_1 + \cos(KZ) \quad ,
\end{aligned} \tag{5.44}$$

y obtuvieron la siguiente relación de dispersión para el número de onda K y la frecuencia Ω :

$$\begin{aligned}
K^2 &= \frac{1}{4} (\Omega^2 - 2\rho_0^2)^2 - \rho_0^2 \\
&= \Omega^2 \rho_0 \left(\frac{\Omega^2}{4\rho_0} - 1 \right) \quad .
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Esta expresión muestra que la región de inestabilidad está dada por $K^2 < 0$, y la tasa de crecimiento espacial alcanza su valor máximo a:

$$\Omega_m = \sqrt{2\rho_0} . \quad (5.46)$$

Recuérdese que la relación de dispersión es la relación $G(\Omega, K) = 0$ que existe entre las variables Ω y K a través de las derivadas parciales de la ecuación que describe a un sistema dispersivo.

Cuando $K^2 < 0$, es decir, K es un número imaginario las ecuaciones (5.30) y (5.31) muestran que la intensidad $\rho(Z, T)$ y la fase $\sigma(Z, T)$ crecen exponencialmente.

En la Figura 5.1 se muestran los gráficos del coeficiente de amplificación $G(\Omega) = 2\text{Im}(K)$,

$$G(\Omega) = |\Omega| \sqrt{4\rho_0 - \Omega^2} ,$$

donde el número de ondas K se defina por la Ec.(5.45). Las curvas de color describen la dependencia del $G(\Omega)$ de la intensidad de la onda continua (cw) ρ_0 . La Figura 5.1 muestra que la intensidad y la anchura del región de la IM (que se ilustra por el coeficiente $G(\Omega)$) son proporcionales directamente a la intensidad de la onda cw. También, el máximo del $G(\Omega)$ se desplace hacia las frecuencias más altas, de acuerdo a la Ec.(5.14).

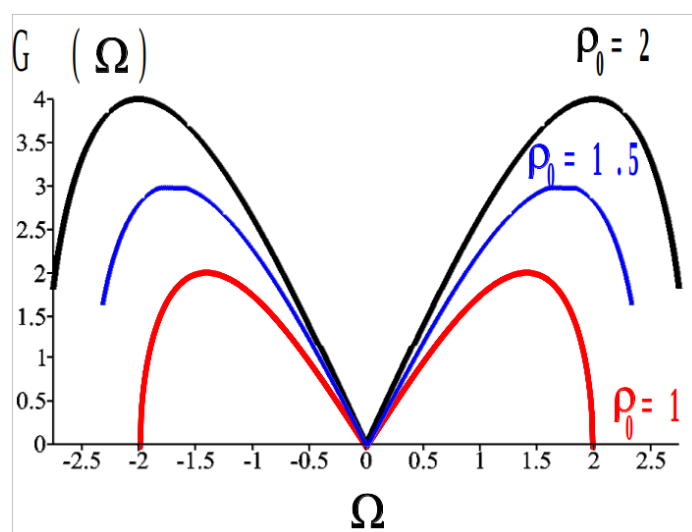


Figura 5.1: a dependencia del coeficiente de la inestabilidad de modulación $G(\Omega)$ de la intensidad de la onda continua (cw) ρ_0 . Las curvas de colores rojo, azul y negro corresponden a ρ_0 igual a 1, 1.5 y 2, respectivamente.

En un sistema no autónomo con dispersión variable y no linealidad, para encontrar las relaciones de dispersión, se necesita aplicar la representación más general :

$$\begin{aligned}\rho_1(Z) &= \text{Re} \left\{ \rho_1 + e^{i \int_0^Z K(Z) dZ} \right\} \\ &= \rho_1 + \cos \left(\int_0^Z K(Z) dZ \right) ,\end{aligned}\tag{5.47}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma_1(Z) &= \text{Re} \left\{ \sigma_1 + e^{i \int_0^Z K(Z) dZ} \right\} \\ &= \sigma_1 + \cos \left(\int_0^Z K(Z) dZ \right) ,\end{aligned}\tag{5.48}$$

transformando el sistema de ecuaciones (5.41) y (5.42) en la ecuación no autónoma de segundo orden de la ecuación (5.41):

$$\frac{d^2 \rho_1}{dZ^2} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dZ} \sigma_1(Z) - \Omega^2 \rho_0 \frac{d\sigma_1}{dZ} D(Z) = 0 ,\tag{5.49}$$

y usando la ecuación (5.42) derivamos la ecuación de segundo orden con coeficientes variables:

$$\frac{d^2 \rho_1}{dZ^2} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dZ} \frac{d\rho_1}{dZ} + \Omega^2 \rho_0 D(Z) \rho_1 \left\{ \frac{\Omega^2 D(Z)}{4\rho_0} - R(Z) \right\} = 0 .\tag{5.50}$$

Esta ecuación es del siguiente tipo conocido :

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + 2\beta(X) k_0(X) \frac{dY}{dX} + k_0^2(X) Y = 0 ,\tag{5.51}$$

y concluyendo que la relación de dispersión (que da el potencial similar a una oscilación $U(X, Y) = \frac{k_0^2(X) Y^2}{2}$ está determinada por:

$$K^2 = \Omega^2 \rho_0 D(Z) \left\{ \frac{\Omega^2 D(Z)}{4\rho_0} - R(Z) \right\} . \quad (5.52)$$

Cabe destacar que las regiones de inestabilidad de la automodulación varían en proporción directa a la raíz cuadrada de la no linealidad ($\sim \sqrt{R(Z)}$) y en proporción inversa a la raíz cuadrada de la dispersión ($\sim \frac{-1}{\sqrt{D(Z)}}$) de acuerdo con la relación :

$$|\Omega| < 2\sqrt{\frac{\rho_0 R(Z)}{D(Z)}} . \quad (5.53)$$

5.2. Estudio de las regiones de inestabilidad modulaciones en NLSE no autónomo con coeficientes variables.

Cuando se aplica una pequeña modulación a una señal de entrada, se puede inducir inestabilidad modulacional si la frecuencia de la banda lateral Ω cae dentro de $\Omega < 2\Omega_m$. Esto se denomina inestabilidad modulacional inducida. Si hacemos uso de esta inestabilidad modulacional inducida, es posible generar un tren de pulsos tipo solitón con una frecuencia de repetición determinada por la inversa de la frecuencia de modulación de entrada Ω [10].

Un método simple para generar experimentalmente inestabilidad modulacional inducida es inyectar dos ondas de luz continuas con diferentes longitudes de onda en una fibra. En ausencia de pérdida de fibra, la solución de (5.1) es repetitiva y, por tanto, este tren de pulsos modulados recupera la forma original de la onda continua a una distancia de unos 2km.

Por lo tanto, para producir el tren de pulsos deseado por este método, se debe retirar el tren de pulsos a una distancia adecuada. La inestabilidad de modulación inducida tiene una aplicación importante en la generación de un tren de pulsos rápido con el ciclo de trabajo deseado simplemente proporcionando dos ondas de luz en una fibra. Sin embargo, debe reconocerse que se requiere una onda de bomba de onda continua de banda ancha para

suprimir la dispersión de Brillouin inducida [10].

La inestabilidad de modulación inducida también se puede utilizar para construir un conmutador de fibra óptica ultrarrápida con una ganancia muy grande aprovechando el hecho de que una modulación inicial extremadamente pequeña puede crecer hasta el nivel de la amplitud de la bomba a lo largo de una distancia de fibra bastante corta[10].

La inestabilidad modulacional inducida fue demostrada por primera vez por Akira Hasegawa en 1984. Se demostró que Señal óptica de onda continua (cw) combinada con una modulación de amplitud aplicada externamente con amplitud α y período T_M se puede utilizar para producir un tren de pulsos ópticos similares a solitones [18].

$$q(T, Z = 0) = 1 + \alpha \sin\left(\frac{2\pi T}{T_M}\right) , \quad (5.54)$$

se puede utilizar para producir un tren de pulsos ópticos similares a solitones. Hasegawa llama al proceso total como la inestabilidad modulacional inducida [18] tomando en cuenta que la modulación externa induce el IM si la banda lateral de la frecuencia Ω cae dentro de la región de inestabilidad.

Para demostrar la inestabilidad modulacional inducida, Hasegawa resolvió el NLSE canónico (5.18) ($D(Z) = R(Z) = 1$) numéricamente con diferentes profundidades y longitudes de onda de modulación de la onda (cw). Hasegawa enfatizó especialmente que la solución del NLSE (5.18) ($D(Z) = R(Z) = 1$) es periódica, por lo tanto, el tren de pulsos generado recupera la forma original en analogía cerrada con el famoso problema FPU. El escenario total de la IM inducido demuestra, el flujo de energía desde el centro del modelo de Fourier en los modos laterales con distribución triangular en escala logarítmica y en segundo lugar, la reconstrucción completa de la señal inicial y su espectro, y el retorno perfecto al estado inicial [5].

Es un hecho que en el caso de la dispersión lentamente decreciente, la no linealidad permanece por ser prácticamente constante $R(Z) = 1$. Comparando dos dinámicas físicamente diferentes del IM inducido en dos fibras ópticas diferentes con dispersión coeficientes dados al disminuir exponencialmente $\beta < 0$ y aumentar $\beta > 0$ funciones:

$$D(Z) = e^{(\beta Z)} \quad . \quad (5.55)$$

En la fibra de dispersión decreciente, $\beta < 0$, observamos la considerable compresión de las estructuras en forma de ondas rebeldes y el crecimiento de la transferencia de energía a los modelos de Fourier de orden superior. Variando la fuerza de la dispersión que disminuye $\beta < 0$ a lo largo de la distancia de propagación, hemos observado el efecto similar al observado previamente en las obras [22, 31].

En particular, los picos de IM de alta intensidad se forman y se dividen periódicamente en dos picos de alta intensidad y gran ola como estructura. Este escenario fue llamado como inestabilidad modulacional de orden superior en el trabajo [22], e independientemente, como el efecto de “cuantización” [31] cuando tres, cuatro y más divisiones se hayan observado en observado en experimentos informáticos [31]. Debería ser enfatizado que en fibras que dispersión decreciente, la energía espectral no vuelve a su modelo fundamental de Fourier.

En la Figura 5.2 se demuestra la dinámica del coeficiente de amplificación:

$$G(\Omega, Z) = 2Im[K(Z)] \quad ,$$

$$G(\Omega, Z) = |\Omega|D(Z) \frac{\sqrt{4\rho_0 R(Z)}}{D(Z) - \Omega^2} \quad ,$$

donde el número de ondas K se define por Ec. (5.52), dependiendo de la forma del coeficiente de dispersión $D(Z)$.

La Figura 5.2(a) muestra el caso de la dispersión lentamente decreciente, Ec.(5.55), y la no linealidad permanece constante $R(Z) = 1$. Elegimos los siguientes parámetros del modelo: $\beta = -0,1$, $R(Z) = 1$, $\rho_0 = 1$. Se puede ver que el región espectral de la IM se aumenta desplazando lentamente hacia las frecuencias más altas, pero el máximo del $G(\Omega)$ se deja prácticamente sin aumento. La fórmula para $G_{max}(\Omega)$ se puede obtener por hacer la diferencia $\frac{dG(\Omega)}{d\Omega}$.

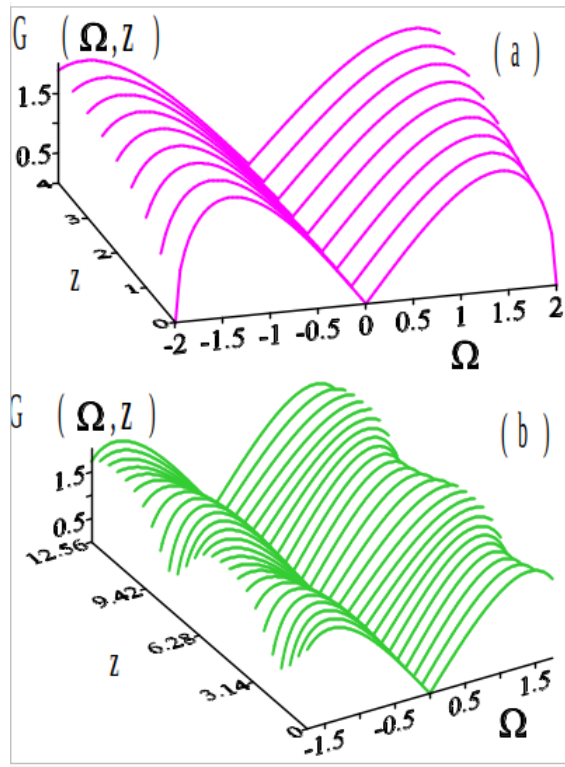


Figura 5.2: La dependencia del coeficiente de la inestabilidad de modulación $G(\Omega)$ de la forma del coeficiente de la dispersión $D(Z)$. (a) $D(Z) = e^{(-0,1Z)}$; (b) $D(z) = 1 + 0,25\text{sen}(Z)$. $R(Z) = 1, \rho_0 = 1$.

Por el contrario, pero en completa conformidad con los resultados dados por las relaciones de dispersión (5.55,5.56), en la fibra que aumenta la dispersión, $\beta > 0$, nosotros observamos el efecto opuesto en el dominio espectral, a saber, el efecto del truncamiento de la transferencia de energía en los modelos espectrales de orden superior. Darse cuenta del proceso de transferencia de energía implica solo unos pocos modelos y no es reversible, este proceso conduce a la pérdida completa de la recurrencia periódica de FPU [5].

El siguiente ejemplo (Fig. 5.2 (b)) presenta la dinámica del coeficiente de la inestabilidad de modulación $G(\Omega)$ dependiente del coeficiente de la dispersión $D(Z)$ que se varia periódicamente:

$$D(Z) = 1 + 0,25\text{sen}(Z). \quad (5.56)$$

Las fibras ópticas de espesor variable se producen en instalaciones que utilizan un cambio periódico en la temperatura de enfriamiento del vidrio. En este caso se observa el cambio periódico del región de IM y el máximo del coeficiente $G(\Omega)$ que se aumentan o desminuyen de acuerdo al valor periódico de la dispersión $D(Z)$ variable.

Capítulo 6

Conclusiones

Mediante éste trabajo se pudo dar un panorama general de como surgió y en que consiste la inestabilidad modulacional en sistemas no lineales descritos por la ecuación no lineal de Schrödinger no autónoma, analizando las soluciones en forma de solitones.

Así mismo se estudiaron los antecedentes de la inestabilidad modulacional y la relación con el efecto de recurrencia FPU que es un proceso de transferencia de energía reversible inesperado entre modelos espectrales excitados en una cadena de osciladores no lineales acoplados en los que el sistema vuelve a su estado inicial

Se estudiaron las soluciones solitónicas de la ecuación no lineal de Schrödinger NLSE que dieron lugar a la modelación matemática de pulsos no lineales con inestabilidad modulacional según la ecuación no lineal de Schrödinger no autónoma. Surge en varios temas relacionados con la física, esta ecuación se utiliza para modelar diferentes fenómenos con aplicaciones a diferentes campos tales como: física de semiconductores, condensación de Bose-Einstein, física de plasma, dinámica biomolecular, ondas en el agua y óptica no lineal por mencionar algunos.

El objetivo de este trabajo fue estudiar la inestabilidad modulacional (IM) inducida en el marco del modelo de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) no autónomo y que posee la característica de ser no integrable. Generalizando el algoritmo de la IM dado por Akira Hasegawa [18], y aplicando a sistemas no autónomos con dispersión y no linealidades variables.

De acuerdo a los cálculos obtenidos para estudiar las regiones de inestabilidad modulacional inducida en la NLSE no autónoma con las relaciones de dispersión dependiendo del número de ondas K y con la frecuencia de perturbación Ω

De acuerdo a los resultados obtenidos de la figura 5.1 que muestra la relación de la intensidad y la anchura de la región de inestabilidad modulacional, estas curvas que se observan describen la dependencia del coeficiente de amplificación $G(\Omega)$ de la intensidad de la onda continua en valores de ρ_0 .

En los valores de $\rho_0 = 1$, tenemos un número de onda $K=2$ con una frecuencia de perturbación Ω que va de $[-2$ a $0]$ y de $[0$ a $2]$, que mientras que para $\rho_0 = 1,5$ el número de ondas K aumenta a $K= 3$, como su máxima intensidad, así como en $\rho_0 = 2$, $k = 4$ que la tasa de crecimiento espacial alcanza su valor máximo en $\Omega_m = 2\sqrt{\rho}$.

Finalmente, demostramos las siguientes propiedades de la IM para dos tipos de dispersión $D(Z)$, en donde se demuestra la dinámica del coeficiente de amplitud $G(\Omega)$ en la figura 5.2, de donde los tipos de dispersión que son:

$$a) D(Z) = e^{\beta Z}$$

$$b) D(Z) = 1 + 0,25\text{sen}(Z)$$

Para el tipo a) se observa que la frecuencia de perturbación Ω es más grande $(-2,0),(0,2)$ mientras que en el tipo b) es de $(-1.5,0),(0,1.5)$, con una distancia de propagación más elevada en el caso de b), y que en ambos casos la relación de dispersión $G(\Omega, Z)$ es la misma.

El proceso para el surgimiento de la inestabilidad modulacional, con la condición de la dispersión anómala de la velocidad del grupo, ya que esta condición asume una no linealidad de Kerr. El efecto Kerr óptico es la respuesta no lineal de los medios ópticos a las ondas electromagnéticas aplicadas

El estudio de este efecto es uno de los temas básicos en óptica cuántica y no lineal, ya que es fundamental para la realización de muchos procesos ópticos no lineales. La teoría sobre inestabilidad modulacional comenzó casi de manera simultánea, y paralelamente, en los campos de hidrodinámica y electromecánica (óptica no lineal).

Los solitones tienen propiedades muy inusuales de onda y de partícula al mismo tiempo (conservan su forma cuando se propagan e incluso después de chocar entre sí). La descripción de los procesos físicos subyacentes a este fenómeno inusual requiere del uso de ecuaciones no lineales específicas. Por lo tanto, los solitones dieron lugar al desarrollo de toda una dirección física matemática aplicada, dedicada a las muchas y variadas manifestaciones de estos procesos no lineales.

En lo que concierne a la estabilidad de estas ondas no lineales fue de suma importancia investigarlo y analizarlo debido a que se obtuvieron criterios específicos donde se observa un tren de ondas periódicas que retornan a su estado inicial desde una onda robusta y viceversa simulando el fenómeno de recurrencia de FPU o “deja vu” en procesos no lineales.

En este trabajo se buscó encontrar una extensión de lo ya estudiado por otros investigadores, lo cual genera satisfacción al saber que siempre se pueden aportar ideas a futuras generaciones interesadas en temas afines.

Referencias

1. E. Fermi, J.R. Pasta, and S. Ulam, in *Collected papers of Enrico Fermi*, E. Segre (ed.). University of Chicago Press, Chicago, 2 (1965) 978
2. M.A. Porter, N.J. Zabusky, B. Hu and D.K. Campbell, Fermi, Pasta, Ulam and the Birth of Experimental Mathematics: A numerical experiment that Enrico Fermi, John Pasta, and Stanislaw Ulam reported 54 years ago continues to inspire discovery, *American Scientist*, 97 (2009) 214-221.
3. N.J. Zabusky, Fermi–Pasta–Ulam, solitons and the fabric of nonlinear and computational science: History, synergetics, and visiometrics, *Chaos* 15 (2005) 015102.
4. T. Dauxois, M. Peyrard and S. Ruffo, The Fermi–Pasta–Ulam numerical experiment: history and pedagogical perspectives *Eur. J. Phys.* 26 (2005) 1–9.
5. G.V. Simaey, P. Emplit, M. Haelerman, Experimental demonstration of the Fermi-Pasta-Ulam recurrence in a modulationally unstable optical wave, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 033902.
6. D. Pierangeli, M. Flammini, L. Zhang, G. Marcucci, A.J. Agranat, P.G. Grinevich, P.M. Santini, C. Conti, and E. DelRe, Observation of Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou Recurrence and Its Exact Dynamics, *Phys. Rev. X* 8 (2018) 041017.
7. N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 240.
8. M. A. Agüero, V.N. Serkin, *Introducción to la Teoría de Solitones*. (2021).
9. N.N. Akhmediev, A. Ankiewicz, *Solitons. Nonlinear pulses and beams*, Charman and Hall, London. (1997).
10. A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

11. E.M. Dianov, P.V. Mamyshev, A.M. Prokhorov, V.N. Serkin, *Nonlinear Effects in Optical Fibers*, Harwood Academic Publ., New York. (1989).
12. G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 3rd ed., Academic Press, San Diego, (2001).
13. J.R. Taylor, *Optical solitons - theory and experiment*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1992).
14. Ch. Finot, F. Feng, Y. Chembo., S. Wabnitz, Gain sideband splitting in dispersion oscillating Fibers, *Optical Fiber*
15. N.F. Piliptetskii, A.R. Rustamov, Observation Of Self-focusing Of Light In Liquid JETP Letters. 2 (2) (1965) 55–56.
16. V.I. Bespalov, V.I. Talanov, Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids, *JETP Lett.* 3 (1966) 307–310.
17. T.B. Benjamin, J.E. Feir, The disintegration of wavetrains on deep water. Part 1: theory, *J. Fluid Mech.* 27 (1967) 417–430. *Technology* 20 (2014) 513–519.
18. A. Hasegawa, Generation of a train of soliton pulses by unduced modulational instability in optical fibers, *Opt. Lett.* 9(1984) 288-290
19. V.N. Serkin, A. Hasegawa, Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 4502–4505.
20. V.N. Serkin, A. Hasegawa, Exactly integrable nonlinear Schrödinger equation models with varying dispersion, nonlinearity and gain: application for soliton dispersion and nonlinear management, *IEEE J. Select. Top. Quant. Electron.* 8 (2002) 418–431.
21. V.N. Serkin, A. Hasegawa, T.L. Belyaeva, Nonautonomous solitons in external potentials, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 074102.
22. K.H. Han, H.J. Shin, Nonautonomous integrable nonlinear Schrödinger equations with generalized external potentials, *J Phys. A Math. Theor.* 42 (2009) 335202.
23. H. Luo, D. Zhao, X. He, Exactly controllable transmission of nonautonomous optical solitons, *Phys. Rev. A* 79 (2009) 063802.

24. D. Zhao, X.G. He, H.G. Luo, Transformation from the nonautonomous to standard NLS equations, *Eur. Phys. J. D* 53 (2009) 213.
25. V.N. Serkin, A. Hasegawa, T.L. Belyaeva, Solitary waves in nonautonomous nonlinear and dispersive systems: nonautonomous solitons, *J. Modern Optics* 57 (2010) 1456–1472.
26. T.L. Belyaeva, V.N. Serkin, Nonautonomous Solitons: Applications from Nonlinear Optics to BEC and Hydrodynamics, in: H.E. Schulz (Ed.), *Hydrodynamics - Advanced Topics*, InTech, Rijeka, Croatia, (2011).
27. J. A. Krumhansl, “Unity in the science of physics,” *Physics Today*, 44, 33, (1991).
28. P. L. Christiansen, M. P. Sorensen, A. C. Scott, “Nonlinear science at the dawn of the 21st century,” *Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin.
29. A. Hasegawa, F. Tappert, “Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion,” *Appl. Phys. Lett.*, (1973) 23, 142, 171.
30. L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. P. Gordon, “Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical Fibers,” *Phys. Rev. Lett.* 45, 1095, (1980).
31. A. Hasegawa, Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Oxford University Press, (1995).
32. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 3rd ed., Academic Press, (2001).
33. A. H. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics*, Wiley-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, Weinheim
34. K. Tai, A. Hasegawa, A. Tomita, Observation of modulational instability in optical fiber
35. N.N. Akhmediev, Déjà vu in optics, *Nature* 413 (2001) 267–268.
36. A. Schneider, *The Confabulating Mind: How the Brain Creates Reality*, Oxford University Press, New York, (2008).
37. Alwin. Scott *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Taylor and Francis Group (2005)

38. V.E Zakharov and L.A. Ostrovsky Modulational Instability: The Beginning Elsevier, Physica D 238, (2009) 540-548
39. Björn Sandstede Handbook of Dynamical Systems, VOLUME 2 ELSEVIER SCIENCE B.V, (2002) 983-990
40. Hans.F. Weinberger. A first course in Partial Differential Equations with complex variables and transform methods. Dover Publications, Inc. (1995) 298-345
41. Richard Fitzpatrick Oscillations and Waves Professor of Physics The University of Texas at Austin