Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Nociones de Dinámica Topológica para Acciones de Grupo

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Mariel Guadalupe Gutiérrez Chaveste

DIRECTORES DEL TRABAJO:
Dr. David Maya Escudero
Dr. Félix Capulín Pérez

Toluca, México, Noviembre 2022

UAEM

Índice general

Introducción

Algunas de las ya conocidas propiedades dinámicas, tales como transitividad, transitividad total, débilmente mezclante, fuertemente mezclante, k-transitividad, elasticidad, etc. que se pueden atribuir a sistemas dinámicos discretos conformados por un espacio X y una función continua y biyectiva $f : X \to X$ tienen determinadas implicaciones lógicas entre sí, dichas propiedades pueden ser adaptadas (o mejor dicho, generalizadas) y atribuidas a una acción de un grupo infinito G en un espacio topológico M de Hausdorff (como lo estaremos trabajando en este escrito), entendiendo a este grupo como una generalización del grupo cíclico $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Teniendo en cuenta lo anterior, en esta tesis se estudian principalmente las implicaciones lógicas entre propiedades que se preservan con la generalización a grupos infinitos. Además se presentarán ejemplos de acciones de grupo que permiten visualizar el hecho de que, bajo ciertas características atribuibles al grupo y al espacio topológico, algunas implicaciones lógicas no cuentan con su recíproca.

Del mismo modo, se hará incapié en la influencia que tienen las características que pueda presentar el grupo que actúe en el espacio topológico, es decir, si el grupo es abeliano, cíclo, subgrupo normal, subgrupo de índice finito, etcétera; en el hecho que sean o no heredables a subgrupos o a grupos de los que sea subgrupo las propiedades inicialmente mencionadas. Así mismo, se estudia la posibilidad de que tales propiedades se preserven a productos con las acciones naturalmente inducidas que serán descritas a detalle posteriormente.

Finalmente, se mencionará la definición de una acción caótica y la manera en que esta nueva característica de la acción y del grupo influye en las implicaciones lógicas entre propiedades.

Capítulo 1

Dinámica Aplicada a Acciones de Grupo

1.1. Conceptos Básicos

Como ya se mencionó, las nociones que cimientan este escrito son las de grupo y de espacio topológico. La combinación de ambas nociones y los resultados conocidos producen una teoría en la que se encuentran proposiciones por demás interesantes.

Definición 1.1. Dados un grupo G y un conjunto X, se conoce como una ***acción del grupo*** G ***en*** X, a aquella función $* : G \times X \to X$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $e * x = x$ para cualquier $x \in X$, donde e es el elemento identidad de G;

2. $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$ para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$.

En tal caso, se dice que X es un G-conjunto o que G actúa sobre X. Por simplicidad, se estará usando la notación gx en lugar de $g * x$.

Definición 1.2. Sean H un subgrupo de G y $g \in G$, se definen la ***clase lateral izquierda de*** H ***en*** G como el conjunto $gH = \{gh : h \in H\}$ y la ***clase lateral derecha*** como el conjunto $Hg = \{hg : h \in H\}$.

Definición 1.3. Para un subgrupo H de un grupo G, se define como una ***transversal izquierda de*** H ***en*** G al conjunto $\{g_\alpha \in G : g_\alpha H \cap g'_\alpha H = \emptyset$ si $g_\alpha \neq g'_\alpha$ y $\bigcup g_\alpha H = G\}$.

Análogamente, una ***transversal derecha de*** H ***en*** G es el conjunto $\{g_\alpha \in G : Hg_\alpha \cap Hg'_\alpha = \emptyset$ si $g_\alpha \neq g'_\alpha$ y $\bigcup Hg_\alpha = G\}$.

Definición 1.4. ***El índice del subgrupo*** H ***en el grupo*** G se define como el número de clases laterales izquierdas de H en G y se denota por $[G : H]$.

Definición 1.5. Para una acción del grupo G en el conjunto X y $x \in X$, definimos ***la órbita de*** x como el conjunto $G_x = \{gx : g \in G\}$.

Definición 1.6. Si G es un grupo que actúa sobre X, $x \in X$ y $L \subseteq X$, diremos que x ***es*** G***-invariante***, si $gx = x$ para todo $g \in G$ y, a L le llamaremos G***-invariante***, si $gl \in L$ para cualesquiera $g \in G$ y $l \in L$.

Definición 1.7. Dado un grupo G, un subgrupo H de G será ***normal*** si para todo $g \in G$, $g^{-1}Hg \subseteq H$.

Notación: Para un subconjunto A de un espacio topológico X, $\mathrm{cl}(A)$ y $\mathrm{int}(A)$ denotarán la *cerradura* y el *interior* del conjunto A, respectivamente.

Definición 1.8. Un espacio topológico es ***denso en sí mismo*** si no tiene puntos aislados.

Proposición 1.9. *La propiedad de un espacio topológico M de ser denso en sí mismo, se hereda a subespacios abiertos y no vacíos.*

Demostración. Supongamos que existe un abierto no vacío U de M que no es denso en sí mismo, esto implica que U tiene un punto aislado, digamos, x, es decir, $\{x\}$ es un abierto de U. Por ende $\{x\}$ es un abierto de M, lo cual contradice la hipótesis de M siendo denso en sí mismo. □

Proposición 1.10. *Ser espacio de Hausdorff es una propiedad que se hereda a subespacios.*

Demostración. Sean N un subespacio de M y x, y dos elementos distintos de N y en consecuencia de M, entonces existen U y V dos abiertos ajenos de M tales que $x \in U$ y $y \in V$. De donde $U \cap N$ y $V \cap N$ son dos abiertos ajenos de N tales que $x \in U \cap N$ y $y \in V \cap N$. Así, N es un espacio de Hausdorff. □

Proposición 1.11. *Cada subconjunto abierto no vacío de un espacio topológico T_2 y denso en sí mismo, es infinito.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que existe un abierto denso en sí mismo U de M que es finito. Elegimos $x \in U$ y definimos $F = U - \{x\}$. Notemos que F es finito y con esto F es cerrado en M. Entonces $U \cap (X - F) = \{x\}$ es un abierto de M, en otras palabras, x es un punto aislado de U. Esto es una contradicción. Concluimos que U debe ser infinito. □

Definición 1.12. Decimos que un subconjunto U de un espacio topológico M es ***denso en ninguna parte*** si $\text{int}(\text{cl}(U)) = \emptyset$.

Proposición 1.13. *Si D es un subconjunto abierto, denso en ninguna parte de un espacio topológico M, entonces $D = \emptyset$.*

Demostración. Sabemos que $\text{int}(\text{cl}(D)) = \emptyset$, pero $D = \text{int}(D) \subseteq \text{int}(\text{cl}(D)) = \emptyset$, así $D = \emptyset$. □

Definición 1.14. Un subconjunto A de M es llamado ***exiguo***, ***magro*** o de ***primer categoría***, si A es la unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de M.
Un conjunto ***residual*** o ***genérico*** es aquel subconjunto de M cuyo complemento es exiguo.

Definición 1.15. A un espacio topológico M que satisface que cada intersección numerable de densos abiertos de M es densa en M, se le llama ***espacio de Baire*** o ***espacio de segunda categoría***.

Proposición 1.16. *Los espacios de Baire no son exiguos.*

Demostración. Sea X un espacio de Baire. Si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ con D_n denso en ninguna parte y por ello $\text{cl}(D_n)$ es denso en ninguna parte, entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{cl}(D_n)$ y $\emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X - \text{cl}(D_n))$ con $X - \text{cl}(D_n)$ abierto y denso. Por lo que $\text{cl}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X - \text{cl}(D_n))) = X = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto X no es exiguo. □

Teorema 1.17. *En espacios de Baire, los conjuntos exiguos tienen interior vacío.*

Demostración. Sea D un subconjunto exiguo de un espacio de Baire M. Se tiene que $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ donde cada $E_i \subseteq M$ es denso en ninguna parte. Definiendo a $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{cl}(E_i)$, ocurre que $D \subseteq E$. Ahora, notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\text{cl}(M - \text{cl}(E_i)) = M - \text{int}(\text{cl}(E_i)) = M$. Lo cual implica que $M - E$ es la intersección numerable de los abiertos densos $\{M - \text{cl}(E_i) : i \in \mathbb{N}\}$. Como

M es un espacio de Baire, $M - E$ es denso, es decir, $\mathrm{cl}(M - E) = M$. De la igualdad $\mathrm{cl}(M - E) = M - \mathrm{int}(E)$, obtenemos que $\mathrm{int}(E) = \emptyset$. Por tanto $\mathrm{int}(D) = \emptyset$. $\square$

1.2. Propiedades dinámicas

En el presente documento asumiremos que (M, τ) es un espacio topológico de Hausdorff, G es un grupo infinito y para $g \in G$, la función $\hat{g} : M \to M$ asociada a la acción $*$, dada por $\hat{g}(m) = g * m$ para todo $m \in M$, es un homeomorfismo.

Con las asunciones previas tenemos los siguientes resultados.

Proposición 1.18. *Si U es un subconjunto abierto y no vacío de M, se tiene que $W = \bigcup\{gU : g \in G\}$ es abierto, no vacío y G-invariante. Donde $gU = \{gx : x \in U\}$.*

Demostración. Notemos que para cada $g \in G$, gU, es abierto pues la función $\hat{g}$ es un homeomorfismo, por lo que W es abierto, por ser una unión de abiertos; claramente W es no vacío ya que $U \neq \emptyset$ y $U = eU$. Por último, si $g \in G$ y $w \in W$, existen $u \in U$ y $g' \in G$ tales que $g'u = w$, de donde $gg'u = gw$ con $gg' \in G$, esto implica $gg'u = gw \in W$. Concluimos que W es G-invariante. $\square$

Proposición 1.19. *Si W es un subconjunto G-invariante de M, entonces int(W) y cl(W) son G-invariantes.*

Demostración. Sean $g \in G$ y $w \in \mathrm{cl}(W)$. Veamos que $gw \in \mathrm{cl}(W)$. Sea $D \subseteq M$ abierto tal que $gw \in D$. Entonces $g^{-1}D \subseteq M$ es un abierto tal que $w \in g^{-1}D$, por lo que $g^{-1}D \cap W \neq \emptyset$. Luego, dado $y \in g^{-1}D \cap W$ obtenemos $gy \in D, y \in W$, de donde $gy \in W \cap D$. Así $W \cap D \neq \emptyset$, es decir, $gw \in \mathrm{cl}(W)$ y $\mathrm{cl}(W)$ es G-invariante.

Ahora sean $g \in G$ y $w \in \mathrm{int}(W)$. Veremos que $gw \in \mathrm{int}(W)$. Como $w \in \mathrm{int}(W)$, existe U un subconjunto abierto de M, tal que $w \in U \subseteq W$ y se tiene que gU es un abierto de M que satisface $gw \in gU \subseteq gW = W$. Así $gw \in \mathrm{int}(W)$ y $\mathrm{int}(W)$ es G-invariante. $\square$

Proposición 1.20. *Si D es un subconjunto G-invariante de M, entonces $M - D$ es G-invariante.*

Demostración. Sean $x \in M - D$ y $g \in G$. Notemos que $gx \in M - D$, ya que en caso contrario, $gx \in D$ implica $g^{-1}gx = x \in D$, lo cual contradice la hipótesis. Lo que nos permite concluir que la proposición es verdadera. $\square$

Definición 1.21. Una acción de G sobre M es ***topológicamente transitiva***, si para cualesquiera U, V subconjuntos abiertos y no vacíos de M, existe $g \in G$ tal que $gU \cap V \neq \emptyset$. También diremos simplemente que G es transitivo o que G es transitivo en M.

Teorema 1.22. *Un grupo G es transitivo en un espacio M si y sólo si cada subconjunto abierto, no vacío y G-invariante de M es denso.*

Demostración. Sean $E \subseteq M$ abierto, no vacío y G-invariante y $U \subseteq M$ abierto y no vacío. Del hecho que G es transitivo, existe $g \in G$ tal que $gE \cap U \neq \emptyset$. Como E es G-invariante, $gE = E$. Así E intersecta a todo abierto no vacío de M y por tanto es denso. Esto demuestra la primer parte del resultado.

Ahora, veamos que G es transitivo. Sean $U, V \subseteq M$ abiertos, ajenos y no vacíos. Definamos $W = \bigcup\{gU : g \in G\}$ el cual es abierto, no vacío y G-invariante por la Proposición 1.18; por hipótesis W es denso, lo cual implica $W \cap V \neq \emptyset$, es decir $g'U \cap V \neq \emptyset$ para algún $g' \in G$ y por tanto G es transitivo. $\square$

Teorema 1.23. *Un grupo G es transitivo si y sólo si la intersección de dos subconjuntos abiertos, no vacíos y G-invariantes de M es no vacía.*

Demostración. Supongamos que G es transitivo. Sean $U, V \subseteq M$ abiertos, no vacíos y G-invariantes. Entonces, existe $g \in G$ tal que $gU \cap V \neq \emptyset$. Del hecho que $gU = U$ se sigue que $U \cap V \neq \emptyset$.

Sean $U, V \subseteq M$ abiertos, no vacíos. Definamos $W = \bigcup\{gU : g \in G\} \subseteq M$ y $X = \bigcup\{gV : g \in G\} \subseteq M$, los cuales son abiertos, no vacíos y G-invariantes, esto implica que $W \cap X \neq \emptyset$. Para $z \in W \cap X$, ocurre que $z = g_1u_1 = g_2v_1$ para algunos $g_1, g_2 \in G$, o bien, $g_2^{-1}g_1u_1 = v_1$, así $g_2^{-1}g_1U \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 1.24. *Si cada subconjunto G-invariante de M es denso o denso en ninguna parte, entonces la intersección de dos subconjuntos abiertos, no vacíos y G-invariantes de M es no vacía.*

Demostración. Sean $U, V \subseteq M$ abiertos, no vacíos y G-invariantes. Por hipótesis se tiene que U y V son densos o densos en ninguna parte. Por la Proposición 1.13 ni U ni V son densos en ninguna parte y por tanto son densos. Por lo que $U \cap V \neq \emptyset$. □

Teorema 1.25. *Cada subconjunto abierto, no vacío y G-invariante de M es denso si y sólo si cada subconjunto G-invariante de M es denso o denso en ninguna parte.*

Demostración. Primero, sea $U \subseteq M$ no vacío y G-invariante. Supongamos que U no es denso y sea $V = M - \mathrm{cl}(U)$. Por las Proposiciones 1.19 y 1.20 obtenemos que V es un abierto no vacío y G-invariante, por lo que $\mathrm{cl}(V) = M$, es decir, $M = \mathrm{cl}(M - \mathrm{cl}(U)) = M - \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U))$. Así $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U)) = \emptyset$, esto es, U es denso en ninguna parte.

Finalmente, sea $D \subseteq M$ abierto, no vacío y G-invariante. Por hipótesis tenemos que D es denso o denso en ninguna parte. Como $D = \mathrm{int}(D) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(D))$ se tiene que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(D)) \neq \emptyset$, es decir, D no es denso en ninguna parte. Concluimos que D es denso. □

Proposición 1.26. *Si existe $x \in M$ tal que G_x, la órbita de x, es densa en M, entonces G es transitivo.*

Demostración. Sean $x \in M$ tal que G_x es densa en M y $U, V \subseteq M$ abiertos y no vacíos. Entonces $G_x \cap U \neq \emptyset$ y $G_x \cap V \neq \emptyset$. Consideremos $g_1 x \in G_x \cap U$ y $g_2 x \in G_x \cap V$, de donde $g_1 x = u$ para algún $u \in U$. Más aún, $x = g_1^{-1} u$, esto implica que, $g_2 x = g_2 g_1^{-1} u$. Como $u \in U$, $g_2 g_1^{-1} u = g_2 x \in g_2 g_1^{-1} U$. Así, para $h = g_2 g_1^{-1} \in G$ se tiene que $hU \cap V \neq \emptyset$, es decir, G es transitivo. □

Definición 1.27. Definimos como una acción ***topológica y fuertemente mezclante***, a aquella que satisface que para cualesquiera U, V subconjuntos abiertos y no vacíos de M, el conjunto $\{g \in G : gU \cap V = \emptyset\}$ es finito.

Definición 1.28. Decimos que una acción de un grupo G en un espacio topológico M es ***topológicamente k-transitiva***, para $k \in \mathbb{N}$, si la acción inducida de G sobre el k-ésimo producto cartesiano M^k es topológicamente transitiva.
La 2-transitividad topológica es también llamada ***topológica y débilmente mezclante***.

Definición 1.29. Una acción de un grupo G en un espacio topológico M, se hace llamar ***totalmente transitiva***, si con ella se cumple que cada subgrupo de G con índice finito, es transitivo en M.

Definición 1.30. Se le llama ***elástica***, a aquella acción de un grupo G en el espacio topológico M, si para cada $n \in \mathbb{N}$, cualquier colección finita de abiertos no vacíos de M, digamos $U, V_1, \ldots, V_n$, existe $g \in G$ tal que $gU \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 1.31. *Si G es transitivo y M es un espacio segundo numerable de Baire, entonces existe un punto $x \in M$ de órbita densa en M. Más aún, el conjunto de puntos de órbita densa es un conjunto residual.*

Demostración. Sea $\beta = \{U_i :\in \mathbb{N}\}$ una base numerable de M. Para cada $i \in \mathbb{N}$ definamos $V_i = \bigcup\{gU_i : g \in G\}$ y sea $V = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i$. Se tiene que cada V_i es un abierto G-invariante y como G es transitivo, por el Teorema 1.22 V_i es denso y por ser M un espacio de Baire, V es denso.
Veamos que si $x \in V$, entonces G_x es densa. Tomemos $W \subseteq M$ abierto no vacío y $x \in V$. Del hecho que β es una base para M, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U_k \subseteq W$. Así, existen $g \in G$ y $u \in U_k$ tales que $x = gu$, dicho de otra forma, $g^{-1}x = u \in U_k$ y $g^{-1}x \in W$, es decir, $G_x \cap W \neq \emptyset$ por lo que G_x es densa en M.
Concluimos que existe $v \in M$ de órbita densa en M, más aún, cada $x \in V$ tiene órbita densa en M.

Por último, sea D el conjunto de puntos de órbita densa en M. Veamos que $M - D$ es exiguo. Notemos que $V \subseteq D$, por lo que $M - D \subseteq M - V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(M - V_i)$ con $\text{int}(\text{cl}(M - V_i)) = \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Para $D_i = (M - D) \cap (M - V_i) = M - (D \cup V_i)$, ocurre que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i = M - D$ con $\text{int}(\text{cl}(D_i)) = \text{int}(\text{cl}((M - D) \cap (M - V_i))) \subseteq \text{int}(\text{cl}(M - V_i)) = \emptyset$. Así $M - D$ es exiguo y D es residual. □

Teorema 1.32. *Si G es transitivo y M es denso en sí mismo, entonces para cualesquiera U, V subconjuntos abiertos, no vacíos de M; el conjunto $\{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\}$ es infinito.*

Demostración. Sean $U, V \subseteq M$ abiertos no vacíos y $k \in \mathbb{N}$. Veremos que $D = \{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\}$ tiene cardinal mayor a k.
Notemos que para V, si $x, y \in V$ son tales que $x \neq y$, entonces existen V_1, W_1 abiertos de V ajenos tales que $x \in V_1$, $y \in W_1$. Luego para $x_1 \in W_1$ tal que

$x_1 \neq y$, existen V_2, W_2 abiertos de W_1 ajenos que satisfacen $x_1 \in V_2, y \in W_2$; para $x_2 \in W_2$, se tiene que $x_2 \neq y$, por lo cual existen V_3, W_3 abiertos ajenos de W_2 tales que $x_2 \in V_3, y \in W_3$; repitiendo este procedimiento $k+1$ veces obtenemos $V_1, V_2, \ldots, V_{k+1} \subseteq V$ no vacíos, ajenos a pares.
Ahora observemos lo siguiente:
Sea $U_1 = U$, del hecho que G es transitivo, existe $g_1 \in G$ tal que $g_1 U_1 \cap V_1 \neq \emptyset$. Definiendo ahora $U_2 = U_1 \cap g_1^{-1} V_1$, para el cual existe $g_2 \in G$ de tal manera que $g_2 U_2 \cap V_2 \neq \emptyset$, como $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ocurre que $g_1 \neq g_2$, puesto que en caso contrario, la condición $g_1 U_1 \cap V_1 \neq \emptyset$ implicaría que $g_1(U_1 \cap g_1^{-1} V_1) \cap V_2 = g_1 U_1 \cap V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.
Luego si $U_3 = U_2 \cap g_2^{-1} V_2$, análogamente existe $g_3 \in G$ tal que $g_3 U_3 \cap V_3 \neq \emptyset$ donde $g_3 \neq g_1$ y $g_3 \neq g_2$.
Repitiendo este procedimiento $k+1$ veces, obtenemos $k+1$ elementos distintos $g_1, g_2, \ldots, g_{k+1} \in D$. Concluimos que D es infinito. □

Definición 1.33. Se dice que una acción de G en M es ***no itinerante*** si el conjunto $\{g \in G - \{e\} : gU \cap U \neq \emptyset\}$ es no vacío para cada U abierto no vacío.

Proposición 1.34. *Una acción transitiva en un espacio infinito M es no itinerante si y sólo si M es denso en sí mismo.*

Demostración. Para probar la necesidad notemos que como M es denso en sí mismo, infinito y G es transitivo, por el Teorema 1.32, el conjunto $\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$ es infinito y $\{g \in G - \{e\} : gU \cap U \neq \emptyset\}$ también, por lo que es no vacío y la acción de G en M es no itinerante.
Demostraremos la suficiencia de la proposición notando que si U es un abierto no vacío de M, se tiene que el conjunto $I = \{g \in G - \{e\} : gU \cap U \neq \emptyset\}$ es no vacío. Dado $g \in I$, $gU \cap U \neq \emptyset$, considerando $gx \in gU \cap U$, ocurre que $gx, x \in U$. Si $gx = x$ para todo $g \in I$, U es G-invariante y como G es transitivo, U es denso. Por tanto M es denso en sí mismo. Si $gx \neq x$ para algún $g \in I$, U no es unipuntual y M es denso en sí mismo. □

Proposición 1.35. *Toda acción transitiva de un grupo en un espacio de Hausdorff denso en sí mismo, es no itinerante.*

Demostración. Sea M un espacio de Hausdorff, denso en sí mismo y G un grupo que actúa de manera transitiva en M, se tiene que M es infinito por ser T_2 y denso en sí mismo, por la Proposición 1.34, la acción de G es no itinerante. □

Proposición 1.36. *Sea M un espacio de Hausdorff que tiene al menos dos elementos, ocurre que M es denso en sí mismo si admite una acción débilmente mezclante.*

Demostración. Sean G un grupo que actúa de manera débilmente mezclante en un espacio de Hausdorff M con al menos dos elementos y U un abierto de M, consideremos $\text{int}(M-U)$, si $\text{int}(M-U)=\emptyset$, entonces $M=M-\text{int}(M-U)=\text{cl}(M-(M-U))=\text{cl}(U)$, es decir, U es denso en M y M es denso en sí mismo. Si $\text{int}(M-U)\neq\emptyset$, notemos que $U\cap\text{int}(M-U)=\emptyset$ y como G es débilmente mezclante, existe $g\in G$ tal que $gU\cap\text{int}(M-U)\neq\emptyset$ y $gU\cap U\neq\emptyset$. Sean $gx\in gU\cap\text{int}(M-U)$ y $gy\in gU\cap U$, entonces $x,gy,y\in U$, si $x=y$, entonces $gy=gx$ con $gx\in\text{int}(M-U)$ y $gy\in U$, así $U\cap\text{int}(M-U)\neq\emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto $x\neq y$, U no es unipuntual y M es denso en sí mismo. □

Teorema 1.37. *Si G es elástico en M, entonces para cualesquiera subconjuntos $U,V_1,\ldots,V_k$ abiertos no vacíos de M, el conjunto $\{g\in G : gU\cap V_i\neq\emptyset$ para todo $i\in\{1,\ldots,k\}\}$ es infinito.*

Demostración. Por observaciones anteriores, sabemos que si G es elástico, M es denso en sí mismo. Consideremos $U,V_1,\ldots,V_k$ abiertos no vacíos. Del hecho que G es transitivo, el conjunto $S_{U,U}=\{g\in G : gU\cap U\neq\emptyset\}$ es infinito por el Teorema 1.32.
Sea $S=\{g\in G : gU\cap V_i\neq\emptyset$ para todo $i\in\{1,\ldots,k\}\}$. Supongamos que S es finito, digamos $S=\{h_1,\ldots,h_n\}$. Ahora, si $g\in S_{U,U}$ y $\tilde{U}=gU\cap U$, como G es elástico, existe $h\in G$ tal que $h\tilde{U}\cap V_i\neq\emptyset$ para todo $i\in\{1,\ldots,k\}$. Donde $h\tilde{U}\cap V_i\subseteq hgU\cap hU\cap V_i$, lo cual implica $hgU\cap hU\cap V_i\neq\emptyset$ y $hg,h\in S$. Entonces $hg=h_i$ y $h=h_j$ para algunos $i,j\in\{1,\ldots,k\}$ además $g=h_j^{-1}h_i$. Así, el conjunto $S_{U,U}\subseteq\{h_j^{-1}h_i : i,j\in\{1,2,\ldots,n\}\}$ contiene a lo más n^2 elementos, lo cual es una contradicción. □

Definición 1.38. Un subconjunto A de un espacio topológico M tiene la ***Propiedad de Baire*** si existen dos conjuntos exiguos B,C y un abierto U tal que $A=B\cup(U-C)$.

Teorema 1.39. *Supóngase que M es un espacio topológico y que A es un subconjunto de M que tiene la propiedad de Baire. Entonces existen B,C,U los únicos conjuntos que satisfacen lo siguiente:*

a) *B,C son exiguos, U es abierto y $A=B\cup(U-C)$,* *b)* $B \cap U = \emptyset$ *y* $C \subseteq U$*, y*

c) si B', C' *y* U' *satisfacen las condiciones (a) y (b), entonces* $U' \subseteq U, B \subseteq B'$ *y* $C \subseteq C'$.

Demostración. Definamos $B = \bigcap \mathcal{B}$, $C = \bigcap \mathcal{C}$ y $U = \bigcup \mathcal{U}$ donde las familias $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{U}$ contienen todos los conjuntos $B'_\alpha, C'_\alpha, U'_\alpha$ respectivamente, que satisfacen $A = B'_\alpha \cup (U'_\alpha - C'_\alpha)$ de la definición de propiedad de Baire que tiene A por hipótesis.

Para (a), notemos que U es abierto, $B = \bigcap \mathcal{B} \subseteq B'_\alpha$ y $C = \bigcap \mathcal{C} \subseteq C'_\alpha$ lo que implica que B y C son exiguos.
Ahora, consideremos $x \in A$, supongamos que existe B'_α tal que $x \notin B'_\alpha$, entonces $x \in U'_\alpha - C'_\alpha$, lo que significa, $x \in U'_\alpha$ y $x \notin C'_\alpha$. Por lo que $x \notin C$ y $x \in U - C$, más aún $x \in B \cup (U - C)$. En el caso en que $x \in B'_\alpha$ para todo α, ocurre que $x \in B$ y por tanto $x \in B \cup (U - C)$.
Por otro lado, si $x \in B \cup (U - C)$ y $x \in B$; $x \in B'_\alpha$ para todo α y por tanto $x \in A$. En caso contrario, $x \in U - C$ y en consecuencia $x \in U'_\alpha$ para algún α y $x \notin C'_\beta$ para todo β, esto implica $x \in U'_\alpha - C'_\alpha$, así $x \in A$. Concluimos que $A = B \cup (U - C)$.

Para (b), sea $U' \in \mathcal{U}$, existen $B' \in \mathcal{B}$ y $C' \in \mathcal{C}$ tales que $A = B' \cup (U' - C')$. Nótese que $B' - U' \subseteq B'$, por lo que $B' - U'$ es exiguo y cumple que $A = (B' - U') \cup (U' - C')$, esto implica que $B' - U' \in \mathcal{B}$ y es tal que $U' \cap (B' - U') = \emptyset$. Así $B \cap U = \emptyset$.

Sea $C' \in \mathcal{C}$, existen $U' \in \mathcal{U}, B' \in \mathcal{B}$ y $C' \in \mathcal{C}$ tales que $A = B' \cup (U' - C')$. Observemos que $U' \cap C'$ es exiguo y es tal que $A = B' \cup (U' - (U' \cap U'))$. Por lo que $U' \cap C' \in \mathcal{C}$ cumple $U' \cap C' \subseteq U'$. Así $C \subseteq U$.

Para (c) si B', C', U', son conjuntos que satisfacen (a) y (b), tenemos que $B \subseteq B', C \subseteq C'$ y $U' \subseteq U$ por sus definiciones. □

Teorema 1.40. *Un conjunto* A *tiene la propiedad de Baire si y sólo si, existen dos conjuntos* U *abierto y* P *exiguo, tales que* $A = U \triangle P$.

Demostración. Para la suficiencia, consideremos U, B, C conjuntos que satisfacen el Teorema 1.39 para A y veamos que

$$\begin{aligned} A &= B \cup (U - C) \\ &= B \cup (U \cap (M - C)) \\ &= B \cup (U \cap (M - B) \cap (M - C)) \text{ pues } B \cap C = \emptyset \\ &= B \cup (U \cap (M - (B \cup C))) \\ &= B \cup (U - (B \cup C)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (B \cup \emptyset) \cup (U - (B \cup C)) \\
&= (B \cup (C \cap (M - U))) \cup (U - (B \cup C)) \text{ de } C \subseteq U \\
&= ((B \cap (M - U)) \cup (C \cap (M - U))) \cup (U - (B \cup C)) \text{ ya que } B \cap U = \emptyset \\
&= ((B \cup C) \cap (M - U)) \cup (U - (B \cup C)) \\
&= ((B \cup C) - U) \cup (U - (B \cup C)) \\
&= (B \cup C) \bigtriangleup U \\
&= U \bigtriangleup (B \cup C) \\
&\text{con } B \cup C \text{ exíguo.}
\end{aligned}
$$

Para la necesidad, supongamos que $A = U \bigtriangleup P$ con U abierto y P exiguo, y obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
A &= U \bigtriangleup P \\
&= (U - P) \cup (P - U) \\
&= (P - U) \cup (U - P) \\
&\text{con } P - U \text{ exiguo pues } P - U \subseteq P
\end{aligned}
$$

Concluimos que A tiene la propiedad de Baire. □

Teorema 1.41. *Supongamos que M es un espacio de Baire y A es un subconjunto de M que tiene la propiedad de Baire con $A = B \cup (U - C)$ donde B, C son exiguos y U abierto que satisfacen las hipótesis de Teorema 1.39. Ocurre que A es exiguo si y sólo si $U = \emptyset$.*

Demostración. $\Leftarrow$ Si $U = \emptyset$, entonces $A = B \cup (\emptyset - C) = B \cup \emptyset = B$.

$\Rightarrow$ Por el Teorema 1.40, tenemos que $A = U \bigtriangleup P$ con U abierto y P exiguo, ajenos entre sí.
Por hipótesis A es exiguo, además $A \cup P$ ídem. Por otro lado, $A \bigtriangleup P \subseteq A \cup P$, lo que implica que $A \bigtriangleup P$ es exiguo y nótese que $A \bigtriangleup P = (U \bigtriangleup P) \bigtriangleup P = U \bigtriangleup (P \bigtriangleup P) = U \bigtriangleup \emptyset = U$. Esto implica que U es exiguo y por el Teorema 1.17 $U = \emptyset$.

□

Teorema 1.42. *Un conjunto A tiene la propiedad de Baire si y sólo si existen conjuntos F cerrado y P exiguo tales que $A = F \bigtriangleup P$*

Demostración. $\Rightarrow$ Suponiendo que A tiene la propiedad de Baire, se tiene, por el Teorema 1.40 que existen dos conjuntos U abierto y B exiguo tales que $A = U \bigtriangleup B$, consideremos al conjunto $N = cl(U) - U$, el cual es cerrado y denso en ninguna parte pues

$$\begin{aligned}\text{int}(\text{cl}(N)) =&\text{int}(\text{cl}(\text{cl}(U)-U))\\ =&\text{int}(\text{cl}(U)-U)\\ =&\text{int}(\text{cl}(U)\cap(M-U))\\ =&\text{int}(\text{cl}(U))\cap\text{int}(M-U)\\ =&\text{int}(\text{cl}(U))\cap(M-\text{cl}(U))\\ =&\emptyset\end{aligned}$$

además $P = N \triangle B$ es exiguo por ser subconjunto de $N \cup B$ que es exiguo. Si $F=$cl(U), entonces

$$\begin{aligned}A =& U \triangle B\\ =& (\text{cl}(U)\triangle N)\triangle B \text{ pues } \text{cl}(U)\triangle N = \text{cl}(U)\triangle(\text{cl}(U)-U) = U\\ =&\text{cl}(U)\triangle(N\triangle B)\\ =& F\triangle P \text{ con } F \text{ cerrado y } P \text{ exiguo.}\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Ahora, si $A = F \triangle P$ con F cerrado y P exiguo, consideremos a los conjuntos $U=$int(F) y $N = F - U$, con el último cerrado y denso en ninguna parte por lo siguiente

$$\begin{aligned}\text{int}(\text{cl}(N)) =&\text{int}(\text{cl}(F-U))\\ =&\text{int}(F-U)\\ =&\text{int}(F)\cap\text{int}(M-U)\\ =&\text{int}(F)\cap\text{int}(M-\text{int}(F))\\ =&\emptyset\end{aligned}$$

Además, nótese que $B = N \triangle P$ es exiguo ya que $N \triangle P \subseteq N \cup P$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}A =& F \triangle P\\ =& (U\triangle N)\triangle P \text{ pues } U\triangle N = \text{int}(F)\triangle(F-\text{int}(F)) = F\\ =& U\triangle(N\triangle P)\\ =& U\triangle B \text{ con } U \text{ abierto y } B \text{ exiguo.}\end{aligned}$$

Así, por el Teorema 1.40, A tiene la propiedad de Baire.

□

Lema 1.43. *Si A y B son subconjuntos del espacio M, se tiene que*
$M-(A\triangle B) = (M-A)\triangle B = A\triangle(M-B)$

Demostración. Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} M-(A\triangle B) &= M-((A\cup B)\cap(M-(A\cap B))) \\ &= (M-(A\cup B))\cup(A\cap B) \\ &= ((M-A)\cap(M-B))\cup(A\cap B) \\ &= ((M-A)\cup(A\cap B))\cap((M-B)\cup(A\cap B)) \\ &= (((M-A)\cup A)\cap((M-A)\cup B))\cap(((M-B)\cup A)\cap((M-B)\cup B)) \\ &= ((M-A)\cup B)\cap((M-B)\cup A) \\ &= (M-(A\cap(M-B)))\cap(A\cup(M-B)) \\ &= (A\cup(M-B))-(A\cap(M-B)) \\ &= A\triangle(M-B) \end{aligned}$$

Del hecho que $A\triangle B = B\triangle A$ obtenemos las dos igualdades planteadas en la proposición. □

Definición 1.44. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una ***σ-álgebra*** si cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X - A \in \mathcal{A}$, y
3. $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ implica $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Proposición 1.45. *La clase de los subconjuntos de un espacio topológico, poseedores de la propiedad de Baire es una σ-álgebra.*

Demostración. Para usos posteriores sólo probaremos las propiedades (1) y (2) de la definición de σ-álgebra. Para (1) basta notar que $\emptyset = \emptyset \cup (\emptyset - \emptyset)$ y $M = \emptyset \cup (M - \emptyset)$ donde $\emptyset$ es exiguo y $\emptyset, M$ son abiertos.

Para (2) consideremos a A subconjunto de M con la propiedad de Baire, entonces $A = U \triangle B$ por el Teorema 1.40 y notemos que $M - A = M - (U \triangle B) = (M - U)\triangle B$ por el Lema 1.43 donde $M - U$ es cerrado y B es exiguo, así, por el Teorema 1.42, $M - A$ tiene la propiedad de Baire. □

Teorema 1.46. *Supongamos que G actúa en M y que $A \subseteq M$ es un conjunto G-invariante con la propiedad de Baire, digamos $A = B \cup (U - C)$. Asumiendo que B, U, C satisfacen el Teorema 1.39, tenemos que U es G-invariante.*

Demostración. Sea $g \in G$, ocurre que $A = gA = g(B \cup (U - C)) = gB \cup (gU - gC)$ por ser G-invariante, esto implica que $gU \subseteq U$ y como $g^{-1}A = A = g^{-1}B \cup (g^{-1}U - g^{-1}C)$, entonces $g^{-1}U \subseteq U$ y $U \subseteq gU$. Por tanto U es G-invariante. $\square$

Definición 1.47. Se dice que una acción de G en M es ***topológicamente ergódica*** si cada conjunto G-invariante con la propiedad de Baire, es exiguo o residual.

Proposición 1.48. *Una acción continua en un espacio de Baire es transitiva si y sólo si es topológicamente ergódica.*

Demostración. Para la necesidad supongamos que G actúa de manera continua en un espacio de Baire M y que la acción no es transitiva. Por los Teoremas 1.22, 1.24 y 1.23, existen dos subconjuntos abiertos, ajenos U_1, U_2 no vacíos y G-invariantes. Del hecho que U_1 y U_2 son abiertos, tienen la propiedad de Baire, además no son exiguos por el Teorema 1.41 y como $U_1 \subseteq M - U_2$ y $U_2 \subseteq M - U_1$, tampoco son residuales. Lo que implica que la acción no es topológicamente ergódica.
Para la suficiencia supondremos que la acción no es topológicamente ergódica, por lo que M tiene un subconjunto G-invariante con la propiedad de Baire que no es exiguo ni residual, cuyo complemento también es G-invariante, tiene la propiedad de Baire y no es exiguo ni residual, así M tiene dos subconjuntos G-invariantes ajenos A_1, A_2 ambos con la propiedad de Baire y ninguno exiguo o residual. Del Teorema 1.39 tenemos $A_1 = B_1 \cup (U_1 - C_1)$ y $A_2 = B_2 \cup (U_2 - C_2)$ de los cuales $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$ por el Teorema 1.41. Del hecho que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ tenemos que $U_1 \cap U_2 \subseteq C_1 \cup C_2$, lo que implica que $U_1 \cap U_2$ es exiguo y por el Teorema 1.17, es vacío, así U_1 y U_2 son ajenos, más aún son G-invariantes por el Teorema 1.46, Así, la acción no es transitiva. $\square$

Capítulo 2

Implicaciones entre Propiedades de Acciones de Grupo

Casi todas las implicaciones siguientes son generalizaciones de resultados ya conocidos para flujos o mapas simples, sin embargo, la que afirma que débilmente mezclante implica totalidad transitiva en general no ocurre, pero sí se cumple en grupos abelianos, ver Capítulo 4.

Teorema 2.1. *Cada acción fuertemente mezclante es k-transitiva para todo k.*

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$, U, V subconjuntos abiertos de M^k. Supongamos que la acción de G es fuertemente mezclante, de la definición de espacio producto existen $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_k$ abiertos no vacíos de M tales que $\Pi U_i \subseteq U$ y $\Pi V_i \subseteq V$. Si $A_i = \{g \in G : gU_i \cap V_i = \emptyset\}$ con $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $A = \bigcup A_i$, ocurre que A es finito, ya que la acción es fuertemente mezclante. Así, existe $g \in G - A$ el cual satisface $gU_i \cap V_i \neq \emptyset$ para todo i. Por tanto, del hecho que G es fuertemente mezclante, G es k-transitivo. □

Teorema 2.2. *Cada acción k-transitiva para todo k es elástica.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U, V_1, \ldots, V_n \subseteq M$ abiertos. Sabemos que la acción es n-transitiva por lo que para los abiertos $U \times U \times \cdots \times U$ (n-veces), $V_1 \times \cdots \times V_n$ de M^k, existe $g \in G$ tal que $g(U \times U \times \cdots \times U) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) \neq \emptyset$. Por lo que $gU \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se concluye que la acción es elástica. □

Teorema 2.3. *Cada acción k-transitiva para algún $k \geq 2$ es débilmente mezclante.*

Demostración. Nótese que si $k = 2$, la proposición queda demostrada.
En el caso en que $k > 2$, se tiene que si $U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_k, V_k$ son abiertos básicos, no vacíos de M, existe $g \in G$ tal que $gU_i \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. En particular, $gU_1 \cap V_1 \neq \emptyset$ y $gU_2 \cap V_2 \neq \emptyset$, lo cual demuestra que la acción es débilmente mezclante. $\square$

Teorema 2.4. *Cada acción elástica es totalmente transitiva.*

Demostración. Sean $H \leq G$ de índice finito y sea $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ una transversal izquierda de H en G. Y sean U, V abiertos no vacíos de M, claramente g_iV es abierto para todo i. Del hecho que la acción es elástica, existe $g \in G$ tal que $gU \cap g_iV \neq \emptyset$ para todo i. Notemos que $g = g_jh$ para algún j y para algún $h \in H$, por lo que $g_jhU \cap g_iV \neq \emptyset$ implica que $hU \cap V \neq \emptyset$. Por tanto H es transitivo y la acción es totalmente transitiva. $\square$

Teorema 2.5. *Sea H un subgrupo de índice finito de un grupo transitivo G sobre M. Si $x \in M$ y la órbita G_x es densa en M, entonces*

a) int(cl(H_x)) es H-invariante,

b) $x \in$int(cl(H_x)),

c) cl(int(cl(H_x))) =cl(H_x), y

d) para todo $g \in G$, si int(cl(H_x))$\cap$int(cl(H_{gx})) $\neq \emptyset$, entonces int(cl(H_{gx})) = int(cl(H_x)).

Demostración. Para cada $y \in M$, sea $V_y =$int(cl(H_y)).

a) Se cumple por definición de H-órbita que V_x es H-invariante.

b) Tomemos una transversal izquierda $\{g_1 = e, g_2, \ldots, g_k\}$ de H en G. Notemos que, $z \in G_x$ si y sólo si $z = gx$ para algún $g \in G$ con $g = g_ih$ para algún i, es decir, $z = g_ihx$ si y sólo si $z \in \bigcup g_iH_x$, es decir, $G_x = \bigcup g_iH_x$, de donde $M =$cl$(G_x) = \bigcup$cl$(g_iH_x) = \bigcup g_i$cl(H_x).
Ahora, como M es un espacio de Baire y es la unión finita de los conjuntos $g_i$cl(H_x) que son homeomorfos entre sí, en particular el conjunto $g_1$cl(H_x) =cl(H_x) debe tener interior no vacío ya que $M \neq \emptyset$, es decir, $V_x =$int(cl(H_x)) es no vacío. Como V_x es un subconjunto abierto de cl(H_x), además H_x es denso en cl(H_x), existe $h \in H$ tal que $hx \in V_x$ y por (a) $x \in V_x$.

c) Por (a) y (b) tenemos que $H_x \subseteq V_x$ y $\text{cl}(H_x) \subseteq \text{cl}(V_x)$. Por otro lado $\text{int}(\text{cl}(H_x)) = V_x \subseteq \text{cl}(H_x)$, por ende $\text{cl}(V_x) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(H_x)) = \text{cl}(H_x)$.

d) Sea $g \in G$ tal que $V_x \cap V_{gx} \neq \emptyset$, se tiene que $V_x \cap V_{gx}$ es un abierto no vacío de $\text{cl}(H_x)$. Como H_x es densa en $\text{cl}(H_x)$, $H_x \cap (V_x \cap V_{gx}) \neq \emptyset$. Por lo que existe $h \in H$ tal que $hx \in V_{gx}$, así por (a) $H_x \subseteq V_{gx}$ y $\text{cl}(H_x) \subseteq \text{cl}(V_{gx}) = \text{cl}(H_{gx})$ por (c), de donde $V_x = \text{int}(\text{cl}(H_x)) \subseteq \text{int}(\text{cl}(H_{gx})) = V_{gx}$, es decir, $V_x \subseteq v_{gx}$. Finalmente, como $x \in D$ implica $gx \in D$, $V_x \cap V_{gx} \subseteq \text{cl}(H_{gx})$, con $H_{gx} \subseteq \text{cl}(H_{gx})$ denso, $H_{gx} \cap (V_x \cap V_{gx}) \neq \emptyset$ y para $h \in H$, $hgx \in V_x$ y $H_{gx} \subseteq V_x$, de donde $\text{cl}(H_{gx}) \subseteq \text{cl}(V_x) = \text{cl}(H_x)$, por lo que $V_{gx} = \text{int}(\text{cl}(H_{gx})) \subseteq \text{int}(\text{cl}(H_x)) = V_x$, es decir, $V_{gx} \subseteq V_x$.

□

Teorema 2.6. *Cada acción débilmente mezclante en un espacio de Baire segundo numerable es totalmente transitiva.*

Demostración. Probaremos la contrapositiva de la proposición, suponiendo que la acción no es totalmente transitiva, es decir, G transitivo en M tiene un subgrupo H de índice finito que no es transitivo en M.
Para cada $x \in M$ denotaremos a V_x como el interior de la cerradura de la H-órbita de x, es decir, $V_x = \text{int}(\text{cl}(H_x))$. Sea D el conjunto de puntos z para los cuales G_z es denso en M, el cual es no vacío por el Teorema 1.31.
Sea $x \in D$, como H no es transitivo, $\text{cl}(H_x) \neq M$ por los Teoremas 1.25 y 1.24. Luego, del hecho que $M - \text{cl}(H_x)$ es abierto y no vacío, existe $g \in G$ tal que $gx \in M - \text{cl}(H_x)$.
Si G es débilmente mezclante, existe $h \in G$ tal que $hV_x \cap V_x \neq \emptyset$ y $hV_x \cap V_{gx} \neq \emptyset$ lo que implica, por el Teorema 2.5 (d), $hV_x = V_x$ y $hV_x = V_{gx}$, así $V_x = V_{gx}$ y como $gx \in V_{gx}$, por el Teorema 2.5 (b), $gx \in V_x \subseteq \text{cl}(H_x)$ lo que es una contradicción. Por tanto, la acción no es débilmente mezclante. □

Empleamos el ejemplo de abajo para argumentar que la implicación de los Teoremas 2.4 y 2.6 es propia.

Ejemplo 2.7. Consideremos una rotación irracional R_w en el grupo S^1. El grupo G generado por las iteraciones de la función rotación es totalmente transitivo, pero no es débilmente mezclante ni elástico.
Notemos que el grupo G es cíclico y $G = < R_w >$ donde $w \in S^1$ es tal que $arg(w) \in \mathbb{I}$ y no es múltiplo de π. De este hecho, tenemos que si H es un subgrupo no trivial de G, existe $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $H = < R_{w^n} >$, por

lo que H es infinito y tiene índice n. De este hecho y del hecho que la imagen de la acción de G en S^1 es densa en S^1, la imagen de la acción de H en S^1 ídem. Por lo que podemos concluir que H es transitivo en S^1. Por tanto G es totalmente transitivo en S^1.
Para ver que G no es débilmente mezclante consideremos los abiertos $U_1 = \{z \in S^1 : 0 < arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$, $U_2 = \{z \in S^1 : \pi < arg(z) < \frac{11\pi}{10}\}$, $V_1 = \{z \in S^1 : \frac{\pi}{4} < arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$ y $V_2 = \{z \in S^1 : \frac{\pi}{2} < arg(z) < \frac{3\pi}{5}\}$ y supongamos que existe $R_{w^r} \in G$ tal que $R_{w^r}(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \emptyset$ o $R_{w^r}(U_2 \times V_2) \cap (U_1 \times V_1) \neq \emptyset$.
En el primer caso, se sigue que $R_{w^r}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $R_{w^r}(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, es decir, $R_{w^r}(z_1) \in U_2$ para algún $z_1 \in U_1$ y $R_{w^r}(z_2) \in V_2$ para algún $z_2 \in V_1$, por lo que $0 < rarg(w)arg(z_1) < rarg(w)\frac{\pi}{4}$, $\pi < rarg(w)arg(z_1) < \frac{11\pi}{10}$, así como, $rarg(w)\frac{\pi}{4} < rarg(w)arg(z_2) < rarg(w)\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < rarg(w)arg(z_2) < \frac{3\pi}{5}$, sin embargo, esto implica $rarg(w)arg(z_2) < rarg(w)arg(z_1)$ y $rarg(w)arg(z_1) < rarg(w)arg(z_2)$ lo cual es una contradicción, así G no es débilmente mezclante.
Finalmente, veamos que G no es elástico. Consideremos a los abiertos $U = \{z \in S^1 : \frac{\pi}{8} < arg(z) < \frac{\pi}{4}\}, V_1 = \{z \in S^1 : \frac{5\pi}{8} < arg(z) < \frac{3\pi}{4}\}, V_2 = \{z \in S^1 : \frac{7\pi}{4} < arg(z) < \frac{15\pi}{8}\}$. Si existe $R_{w^m} \in G$ tal que $R_{w^m}(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $R_{w^m}(U) \cap V_2 \neq \emptyset$, podemos elegir $w^m u \in R_{w^m}(U) \cap V_1$ y $w^m u' \in R_{w^m}(U) \cap V_2$, los cuales satisfacen $|arg(w^m u) - arg(w^m u')| = |arg(u) - arg(u')|$. Sin embargo, $|arg(u) - arg(u')| < \frac{\pi}{8}$ y $|arg(w^m u) - arg(w^m u')| > \frac{\pi}{2}$, lo cual es una contradicción y podemos concluir que no existe tal $R_{w^m} \in G$ y G no es elástico.

Teorema 2.8. *Cada acción totalmente transitiva es transitiva.*

Demostración. Supongamos que la acción es totalmente transitiva y tomemos $U, V \subseteq M$ abiertos, no vacíos. Como G es un subgrupo de índice finito de G, entonces es transitivo y existe $g \in G$ tal que $gU \cap V \neq \emptyset$. □

El siguiente ejemplo muestra que el inverso del teorema anterior no se cumple.

Ejemplo 2.9. La acción de multiplicación del grupo $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}$, con la topología usual, es transitiva, pero la acción inducida en el subgrupo $\mathbb{R}^+$, de índice finito 2, no lo es. Por lo que el grupo $\mathbb{R}^*$ no es totalmente transitivo.

Finalmente, veremos que no existe relación entre las nociones de elasticidad, mezclante débil y k-transitividad.

Ejemplo 2.10. Sea G el grupo de todos los homeomorfismos de $\mathbb{R}$ que preservan orientación. G es elástico pero no es débilmente mezclante.
Si $U, V_1, \ldots, V_n \subseteq \mathbb{R}$ son abiertos no vacíos y ajenos con U básico y $V_1, \ldots, V_n$ acotados. Definamos $a = \text{ínf}(\bigcup V_i)$, $b = \sup(\bigcup V_i)$, $c = \text{ínf}(U)$ y $d = \sup(U)$, sabemos que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo que preserva orientación tal que $f((c,d)) = (a,b)$, por tanto $f(U) \cap V_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, es decir, G es elástico.
Ahora, veremos que la acción no es débilmente mezclante, tomando $(1,2) \times (3,4), (\frac{-1}{2}, 0) \times (-5,-4)$ abiertos de $\mathbb{R}^2$ y suponiendo que existe g un homeomorfismo que preserva orientación tal que $(g(1,2) \times g(3,4)) \cap ((\frac{-1}{2}, 0) \times (-5,-4)) \neq \emptyset$, por lo que $g(1,2) \cap (\frac{-1}{2}, 0) \neq \emptyset$ y $g(3,4) \cap (-5,-4) \neq \emptyset$, es decir, $g(x) \in (\frac{-1}{2}, 0)$ para algún $x \in (1,2)$ y $g(y) \in (-5,-4)$ para algún $y \in (3,4)$, o bien, $\frac{-1}{2} < g(x) < 0$, $-5 < g(y) < -4$, $1 < x < 2$ y $3 < y < 4$, esto significa $x < y$ y $g(y) < g(x)$, lo cual es una contradicción. Por tanto no existe tal g y la acción no es débilmente mezclante.

Ejemplo 2.11. En este ejemplo veremos que la propiedad de un grupo de ser débilmente mezclante no necesariamente implica la de ser elástico.
Para $n > 2$ la acción lineal de $SL(n, \mathbb{Z})$ en $\mathbb{R}^n$ es débilmente mezclante, más aún, es $(n-1)$-transitiva, ver [2]. Pero no es elástica, ya que la acción preserva volúmenes.

Ejemplo 2.12. Sea G el grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}$ que actúa en $\mathbb{R}$ con la topología usual. Se tiene que G es elástico y débilmente mezclante, pero no es 3-transitivo.
En el Ejemplo 2.10 el grupo dado es un subgrupo de G, el cual es elástico, por tanto G es elástico según la Proposición 3.11.
Veamos que es débilmente mezclante. Sean U_1, U_2, V_1, V_2 abiertos básicos no vacíos de $\mathbb{R}$ y $a_1 = \text{ínf}(U_1)$, $a_2 = \sup(U_1), b_1 = \text{ínf}(U_2), b_2 = \sup(U_2), c_1 = \text{ínf}(V_1), c_2 = \sup(V_1), d_1 = \text{ínf}(V_2), d_2 = \sup(V_2), a = \text{mín}\{a_1, b_1\}, a' = \text{máx}\{a_2, b_2\}, c = \text{mín}\{c_1, d_1\}, c' = \text{máx}\{c_2, d_2\}$, existe un homeomorfismo que satisface $f((a,a')) = (c,c')$ por lo que $f(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y la acción es débilmente mezclante.
Para ver que G no es 3-transitivo, consideremos los abiertos $U_1 = (0,1), U_2 = (2,3), U_3 = (-3,-2), V_1 = (-5,-4), V_2 = (-7,-6), V_3 = (-9,-8)$ y supongamos que existe $f \in G$ tal que $f(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, f(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ y $f(U_3) \cap V_3 \neq \emptyset$, entonces $f(u_1) \in (-5,-4)$ para algún $u_1 \in (0,1), f(u_2) \in (-7,-6)$ para algún $u_2 \in (2,3)$ y $f(u_3) \in (-9,-8)$ para algún $u_3 \in (-3,-2)$, lo cual es

una contradicción al hecho que f es continua e inyectiva, pues esto implica que es monótona. Concluimos que la acción no es 3-transitiva.

Ejemplo 2.13. En este ejemplo observamos que el recíproco del Teorema 2.1 no necesariamente se cumple, es decir que una acción sea k-transitiva para toda k, no necesariamente implica que sea fuertemente mezclante.
Si G es el grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, tenemos que G es k-transitivo para toda k, sin embargo, no es fuertemente mezclante, ver [1].

Teorema 2.14. *Todo grupo infinito G tiene una acción fuertemente mezclante en un espacio métrico compacto.*

Demostración. Dado un grupo infinito G, consideremos al espacio $M = \{0,1\}^G$ dotado de la topolgía producto, el cual sabemos que es métrico y compacto. La acción natural de G en M se define de la siguiente manera

$$g(f)(x) = f(g^{-1}x)$$

para $g, x \in G$ y $f : G \to \{0,1\} \in M$. Con las hipótesis anteriores tenemos que la acción es fuertemente mezclante, ver [4]. $\square$

Las implicaciones estrictas de los teoremas anteriores se pueden resumir con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Fuertemente Mezclante} \arrow[d] & \\
 & k\text{-transitiva para toda } k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Débilmente Mezclante} \arrow[dr] & & \text{Elástica} \arrow[dl] \\
 & \text{Totalmente Transitiva} \arrow[d] & \\
 & \text{Transitiva} &
\end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Heredabilidad de las Propiedades de Acciones de Grupo

3.1. Heredabilidad bajo semi-conjugación

Definición 3.1. Si G actúa en dos espacios topológicos M_1 y M_2, una función continua $f : M_1 \to M_2$ es llamada una ***semi-conjugación*** si es sobreyectiva y G-equivariante o G-equivalente, es decir, $gf(x) = f(gx)$ para cualesquiera $g \in G$ y $x \in M_1$.

Teorema 3.2. *Si $f : M_1 \to M_2$ es una semi-conjugación, U, V son dos abiertos de M_2 y $g \in G$, ocurre que $gU \cap V \subseteq f(gf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V))$.*

Demostración. Nótese que

$$
\begin{gathered}
f(gf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)) \\
= f(gf^{-1}(U) \cap gg^{-1}f^{-1}(V) \\
= f(g(f^{-1}(U) \cap g^{-1}f^{-1}(V))) \\
= gf(f^{-1}(U) \cap g^{-1}f^{-1}(V)) \\
= g(f(f^{-1}(U)) \cap f(g^{-1}f^{-1}(V))) \\
= g(f(f^{-1}(U)) \cap g^{-1}f(f^{-1}(V))) \\
= gf(f^{-1}(U)) \cap f(f^{-1}(V)).
\end{gathered}
$$

Donde $gU \cap V \subseteq gf(f^{-1}(U)) \cap f(f^{-1}(V))$. $\square$

Teorema 3.3. *Si f es una semi-conjugación y la acción de G en M_1 es fuertemente mezclante, entonces la acción de G en M_2 ídem.*

Demostración. Sea $f : M_1 \to M_2$ una semi-conjugación con G actuando en M_1 de manera fuertemente mezclante, G actuando en M_2 y U, V abiertos no vacíos de M_1, del hecho que G es fuertemente mezclante en M_1, el conjunto $I_1 = \{g \in G : gf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset\}$ es finito. Por otro lado, sea $I_2 = \{h \in G : hU \cap V = \emptyset\}$ y tomemos $g \in I_1$, entonces $gf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, de donde $gU \cap V \subseteq f(gf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)) = \emptyset$. Así $g \in I_2$ y $I_1 \subseteq I_2$.
Ahora, sea $h \in G - I_1$, es decir, $hf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, por lo que $\emptyset \neq f(hf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)) = hU \cap V$. Por tanto $h \in G - I_2$, lo que implica $G - I_1 \subseteq G - I_2$, o bien, $I_2 \subseteq I_1$. Concluimos que $I_2 = I_1$ es finito y la acción en M_2 es fuertemente transitivo. $\square$

Teorema 3.4. *Si f es una semi-conjugación y la acción de G en M_1 es k-transitiva para toda k, entonces la acción de G en M_2 ídem.*

Demostración. Sean $f : M_1 \to M_2$ una semi-conjugación con G k-transitivo para toda $k \in \mathbb{N}$ en M_1 y G actuando en M_2, $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_k$ abiertos de M_2; se tiene que $f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_k), f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_k)$ son abiertos de M_1 para los cuales existe $g \in G$ tal que $gf^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(V_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, de donde $\emptyset \neq f(gf^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(V_i)) = gU_i \cap V_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, así G es k-transitivo en M_2 para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 3.5. *Si f es una semi-conjugación y la acción de G en M_1 es débilmente mezclante, entonces la acción de G en M_2 ídem.*

Demostración. Por el Teorema anterior. $\square$

Teorema 3.6. *Si f es una semi-conjugación y la acción de G en M_1 es elástica, entonces la acción de G en M_2 ídem.*

Demostración. Sean $f : M_1 \to M_2$ una semi-conjugación con G elástico en M_1, G actuando en M_2, $n \in \mathbb{N}$ y una colección finita de abiertos no vacíos de M_2, $U, V_1, \ldots, V_n$, ocurre que $f^{-1}(U), f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_n)$ es una colección finita de abiertos no vacíos de M_1, por lo que existe $g \in G$ tal que $gf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V_i) \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, así $f(gf^{-1}(U)) \cap V_i \neq \emptyset$, o bien, $gU \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y G es elástico en M_2. $\square$

Teorema 3.7. *Si f es una semi-conjugación y la acción de G en M_1 es transitiva, entonces la acción de G en M_2 ídem.*

Demostración. Sean $f : M_1 \to M_2$ una semi-conjugación con G transitivo en M_1, G actuando en M_2 y U, V abiertos no vacíos de M_2, entonces $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos de M_1 y para ellos existe $g \in G$ tal que $gf^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ de donde $gU \cap V \neq \emptyset$ y G es transitivo en M_2. □

Las propiedades de la acción en M_2, en general, no son heredadas por la acción en M_1.

3.2. Heredabilidad de y hacia subgrupos

Teorema 3.8. *Si H es un subgrupo de índice finito de G y H es fuertemente mezclante, entonces G es fuertemente mezclante.*

Demostración. Consideremos una transveral izquierda $\{g_1 = e, g_2, g_3, \ldots, g_l\}$ de H en G, dos conjuntos abiertos no vacíos U, V de M y el conjunto $\{g \in G : gU \cap V = \emptyset\}$ para el cual ocurre que $\{g \in G : gU \cap V = \emptyset\} = \bigcup_i \{g \in g_iH : gU \cap V = \emptyset\} = \bigcup_i \{g_ih : h \in H \text{ y } g_ihU \cap V = \emptyset\} = \bigcup_i g_i\{h \in H : g_ihU \cap V = \emptyset\}$.
Como H es fuertemente mezclante, los conjuntos $\{h \in H : g_ihU \cap V = \emptyset\}$ son finitos, por lo que $\{g \in G : gU \cap V = \emptyset\}$ es finito. Así G es fuertemente mezclante. □

Teorema 3.9. *Si H es un subgrupo de G y H es k-transitivo, entonces G es k-transitivo.*

Demostración. Sean $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_k$ abiertos no vacíos de M. Como H es k-transitivo y $H \subseteq G$, existe $g \in H$ y $g \in G$ tal que $gU_i \cap V_i \neq \emptyset$. Por tanto G es k-transitivo para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Teorema 3.10. *Si H es un subgrupo de G y H es débilmente mezclante, entonces G es débilmente mezclante.*

Demostración. Se sigue del Teorema anterior con $k = 2$. □

Teorema 3.11. *Si H es un subgrupo de G y H es elástico, entonces G es elástico.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y una colección finita de abiertos no vacíos de M, $U, V_1, \ldots, V_n$. Entonces existe $h \in H$ y por ende $h \in G$ tal que $hU \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así G es elástico. □

Teorema 3.12. *Si H es un subgrupo de G y H es totalmente transitivo, entonces G es totalmente transitivo.*

Demostración. Sea I un subgrupo de G de índice finito. Notemos que $I \cap H$ es un subgrupo de índice finito de H, el cual es transitivo, con ello y por el Teorema siguiente I es transitivo. Por tanto G es totalmente transitivo. □

Teorema 3.13. *Si H es un subgrupo de G y H es transitivo, entonces G es transitivo.*

Demostración. Sean U, V abiertos no vacíos de M, para ellos existe $h \in H$, tal que $hU \cap V \neq \emptyset$ donde $h \in G$. Por lo que G es transitivo. □

Ahora analizaremos la situación inversa de los teoremas previos en esta sección.

Teorema 3.14. *Si H es un subgrupo de un grupo fuertemente mezclante G, entonces H es fuertemente mezclante.*

Demostración. Sean U, V abiertos no vacíos de M. Notemos lo siguiente:

$$\{g \in H : gU \cap V = \emptyset\} \subseteq \{g \in G : gU \cap V = \emptyset\}$$

donde el último es finito, por lo que el primero también y H es fuertemente mezclante. □

Teorema 3.15. *Si H es un subgrupo de índice finito de un grupo elástico G, entonces H es elástico.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U, V_1, \ldots, V_n$ abiertos no vacíos de M y una transversal izquierda de H en G, $\{g_1, \ldots, g_m\}$, existe $g \in G$ tal que $gU \cap g_i V_i \neq \emptyset$ para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$ donde $g = g_k h$ para algún $k \in \{1, \ldots, m\}$ y $h \in H$, entonces $g_k hU \cap g_k V_j \neq \emptyset$, así $hU \cap V_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. □

Teorema 3.16. *Si H es un subgrupo de índice finito de un grupo totalmente transitivo G, entonces H es totalmente transitivo.*

Demostración. Si I es un subgrupo de índice finito de H entonces también es un subgrupo de índice finito de G. Por lo que I es transitivo y H es totalmente transitivo. □

Teorema 3.17. *Si G es kl-transitivo en M, entonces cada subgrupo de índice l de G es k-transitivo en M.*

Demostración. Sean una transversal izquierda del subgrupo H de índice l en G, $\{g_1, \ldots, g_l\}$ y $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_k$ abiertos no vacíos de M, observemos que del hecho que G es kl-transitivo, existe $g \in G$ tal que $gU_j \cap g_iV_j \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$ y todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Nótese que $g = g_ih$ para algún g_i y $h \in H$. Por lo que $g_ihU_j \cap g_iV_j \neq \emptyset$ implica $hU_j \cap V_j \neq \emptyset$ y H es k-transitivo. □

Los siguientes ejemplos muestran que la transitividad y el ser débillmente mezclante no son propiedades que se heredan a subgrupos de orden finito.

Ejemplo 3.18. Consideremos como G al grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}$ y H el subgrupo de homeomorfismos que preservan orientación. De ambos sabemos que G es débilmente mezclante y H no lo es por los Ejemplos 2.10 y 2.12.

Ejemplo 3.19. Sea G el grupo $\mathbb{R}^*$ actuando con la multiplicación usual en $\mathbb{R}$ y H el subgrupo de $\mathbb{R}^+$, claramente G es transitivo mientras que H no lo es por el Ejemplo 2.9.

3.3. Heredabilidad Productiva

Para la heredabilidad de propiedades dinánimas hacia el producto supondremos que G y H son grupos infinitos que actuan en los espacios topológicos M y N.

Teorema 3.20. *Si G y H son k-transitivos para toda k, entonces la acción inducida de $G \times H$ en $M \times N$ también lo es.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $U_1^\alpha \times U_1^\beta, \ldots, U_k^\alpha \times U_k^\beta$ y $V_1^\alpha \times V_1^\beta, \ldots, V_k^\alpha \times V_k^\beta$ abiertos básicos no vacíos de $M \times N$, ya que, para todo abierto del espacio producto existe dicha colección cuyo producto es subconjunto de él. Como G y H son k-transitivos, existen $g \in G, h \in H$ tales que $gU_i^\alpha \cap V_i^\alpha \neq \emptyset$ y $hU_i^\beta \cap V_i^\beta \neq \emptyset$, o bien $(g, h) \in G \times H$ es tal que $(g, h)(U_i^\alpha \times U_i^\beta) \cap (V_i^\alpha \times V_i^\beta) \neq \emptyset$. Por tanto $G \times H$ es k-transitivo. □

Teorema 3.21. *El hecho que G y H son ambos débilmente mezclantes, implica que la acción inducida de $G \times H$ en $M \times N$ es débilmente mezclante.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior para $k = 2$. □

Teorema 3.22. *Cuando G y H son elásticos, la acción inducida de $G \times H$ en $M \times N$ es elástica.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U_\alpha \times U_\beta, V_1^\alpha \times V_1^\beta, \ldots, V_n^\alpha \times V_n^\beta$ abiertos básicos y no vacíos de $M \times N$, como G y H son elásticos, existen $g \in G$ y $h \in H$ tales que $gU_\alpha \cap V_i^\alpha \neq \emptyset$ y $hU_\beta \cap V_i^\beta \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que $(g,h) \in G \times H$ es tal que $(g,h)(U_\alpha \times U_\beta) \cap (V_i^\alpha \times V_i^\beta) \neq \emptyset$ y podemos concluir que $G \times H$ es elástico. □

Teorema 3.23. *Si G y H son totalmente transitivos, la acción inducida de $G \times H$ en $M \times N$ es totalmente transitiva.*

Demostración. Si $I \times J$ es un subgrupo de índice finito de $G \times H$, entonces I y J son subgrupos de índice finito de G y H. Por lo que I y J son transitivos. Así por el Teorema 3.24 $I \times J$ es transitivo y $G \times H$ es totalmente transitivo. □

Teorema 3.24. *Siempre que G y H sean transitivos, la acción inducida de $G \times H$ en $M \times N$ también lo será.*

Demostración. Sean $U \times V, W \times X$ abiertos básicos no vacíos de $M \times N$, como G y H son transitivos, existen $g \in G, h \in H$ tales que $gU \cap W \neq \emptyset$ y $h \in V \cap X \neq \emptyset$, es decir, $(g,h)(U \times V) \cap (W \times X) \neq \emptyset$. Por tanto $G \times H$ es transitivo. □

Proposición 3.25. *La propiedad de ser fuertemente mezclante no se hereda al producto de grupos finitos.*

Demostración. Sean $U_1, U_2 \subseteq M, V_1, V_2 \subseteq N$ abiertos no vacíos, tenemos lo siguiente:
$A = \{(g,h) \in G \times H : (g,h)(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = \emptyset\} = \{(g,h) \in G \times H : gU_1 \cap U_2 = \emptyset \text{ o } hV_1 \cap V_2 = \emptyset\} = (\{g \in G : gU_1 \cap U_2 = \emptyset\} \times H) \cup (G \times \{h \in H : hV_1 \cap V_2 = \emptyset\})$.
Como G y H son infinitos, A no es finito, lo que implica que la propiedad no se hereda al producto de grupos finitos. □

Ahora consideremos un grupo G que actúa en dos espacios topológicos M y N con N un espacio de Hausdorff, denso en sí mismo y sea la ***acción diagonal*** de G en $M \times N$, es decir, $g(x,y) = (gx, gy), g \in G, (x,y) \in M \times N$.

Teorema 3.26. *Si G es fuertemente mezclante en M y en N, entonces G es fuertemente mezclante en $M \times N$,*

Demostración. Sean U_1, U_2 abiertos no vacíos de M y V_1, V_2 abiertos no vacíos de N. Por hipótesis, G actúa de manera fuertemente mezclante en M y en N, esto implica que los conjuntos $\{g \in G : gU_1 \cap U_2 = \emptyset\}$ y $\{g \in G : gV_1 \cap V_2 = \emptyset\}$ son finitos. Por ende, el conjunto $\{g \in G : gU_1 \cap U_2 = \emptyset \ o \ gV_1 \cap V_2 = \emptyset\}$ ídem. Así concluimos que la acción diagonal de G en $M \times N$ es fuertemente mezclante. □

Teorema 3.27. *Si G es fuertemente mezclante en M y es k-transitivo en N, G es k-transitivo en $M \times N$.*

Demostración. Sabemos que la acción de G en N es k-transitiva, es decir, G es transitivo en N^k. Del hecho que G es fuertemente mezclante en M, por el Teorema 3.26, G es fuertemente mezclante en M^k. Así, por el Teorema 3.31 G es transitivo en $(M \times N)^k$, es decir, G es k-transitivo en $M \times N$. □

Teorema 3.28. *Si G es fuertemente mezclante en M y es débilmente mezclante en N, entonces G es débilmente mezclante en $M \times N$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 3.27 con $k = 2$. □

Teorema 3.29. *Si G es fuertemente mezclante en M y es elástico en N, ocurre que G es elástico en $M \times N$.*

Demostración. Sean $U, U_1, \ldots, U_k$ abiertos no vacíos de M y $V, V_1, \ldots, V_k$ abiertos no vacíos de N. Sabemos que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, el conjunto $\{g \in G : gU \cap U_i = \emptyset\}$ es finito por lo que $\bigcup_i \{g \in G : gU \cap U_i = \emptyset\}$ también es finito.
Por otro lado, el conjunto $\{g \in G : gV \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i\}$ es infinito por el Teorema 1.37. De donde existe $g \in G$ tal que $gU \cap U_i \neq \emptyset$ y $gV \cap V_i \neq \emptyset$ para toda i, es decir, $g(U \times V) \cap (U_i \times V_i) \neq \emptyset$. Por lo que G es elástico en $M \times N$. □

Teorema 3.30. *Mientras G sea fuertemente mezclante en M y totalmente transitivo en N, G será totalmente transitivo en $M \times N$.*

Demostración. Supóngase que G es totalmente transitivo en N. Sea H un subgrupo de G de índice finito, H es fuertemente mezclante en M por hipótesis y el Teorema 3.14. Además H es totalmente transitivo en N por hipótesis y el Teorema 3.16. De donde H es transitivo en N por el Teorema 2.8. Así, por el Teorema 3.31 H es transitivo en $M \times N$ y G es totalmente transitivo en $M \times N$. $\square$

Teorema 3.31. *Si G es fuertemente mezclante en M y es transitivo en un espacio de Hausdorff denso en sí mismo N, entonces G es transitivo en $M \times N$.*

Demostración. Se tiene que el conjunto $\{g \in G : gU_1 \cap U_2 = \emptyset\}$ es finito y como G es transitivo en N denso en sí mismo. Por el Teorema 1.32, el conjunto $\{g \in G : gV_1 \cap V_2 \neq \emptyset\}$ es infinito. Por lo que existe $g \in G$ tal que $gU_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y $gV_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, o bien, $g(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2 \neq \emptyset)$. Por tanto G es transitivo en $M \times N$. $\square$

Nótese que el Teorema anterior nos proporciona situaciones que muestran que el Teorema 3.8 falla sin la hipótesis en que el subgrupo tiene índice finito pues si suponemos que G es fuertemente mezclante en M. Entonces G^2 no es fuertemente mezclante en M^2, como se demostró anteriormente. Sin embargo, la acción diagonal de G es fuertemente mezclante en M^2 por el Teorema 3.26. Es decir, el subgrupo diagonal $\{(g,g) : g \in G\}$ de G^2 es fuertemente mezclante, pero no lo es G^2.

Capítulo 4

Acciones de Grupos Abelianos y Acciones Caóticas

4.1. Acciones de grupos abelianos

Teorema 4.1. *Si una acción de un grupo abeliano es fuertemente mezclante, esta es k-transitiva para toda $k \in \mathbb{N}$. Ver Teorema 2.1*

Teorema 4.2. *Una acción de un grupo abeliano es k-transitiva si y sólo si es débilmente mezclante.*

Demostración. La primer implicación de esta proposición es clara por definición.
Para la segunda implicación consideremos $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_k$ abiertos no vacíos. Del hecho que la acción es débilmente mezclante, existe $g_2 \in G$ tal que $g_2U_2 \cap U_1 \neq \emptyset$ y $g_2V_2 \cap V_1 \neq \emptyset$. Además, existe $g_3 \in G$ tal que $g_3U_3 \cap (g_2U_2 \cap U_1) \neq \emptyset$ y $g_3V_3 \cap (g_2V_2 \cap V_1) \neq \emptyset$. Siguiendo este razonamiento en un número finito de pasos, obtenemos $g_k \in G$ para el cual $g_kU_k \cap (g_{k-1}U_{k-1} \cap g_{k_2}U_{k-2} \cap \cdots \cap g_2U_2 \cap U_1) \neq \emptyset$ y $g_kV_k \cap (g_{k-1}V_{k-1} \cap g_{k-2}V_{k-2} \cap \cdots \cap g_2V_2 \cap V_1) \neq \emptyset$. Ahora, sean $U = g_kU_k \cap \cdots \cap g_2U_2 \cap U_1 \neq \emptyset$ y $V = g_kU_k \cap \cdots \cap g_2V_2 \cap V_1 \neq \emptyset$, para los cuales existe $g \in G$ tal que $gU \cap V \neq \emptyset$, dicho de otra manera, $g(g_kU_k \cap \cdots \cap g_2U_2 \cap U_1) \cap (g_kU_k \cap \cdots \cap g_2V_2 \cap V_1) \neq \emptyset$. Si $g_1 = e$, tenemos que para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, $gg_iU_i \cap g_iV_i = g_igU_i \cap g_igU_i \cap g_iV_i = g_i(gU_i \cap V_i) \neq \emptyset$. Así, $gU_i \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por tanto, la acción es k-transitiva para toda k. $\square$

Teorema 4.3. *Una acción de un grupo abeliano es débilmente mezclante si y sólo si es elástica.*

Demostración. La suficiencia de esta proposición se obtiene del Teorema 4.2 al obtener que la acción es k-transitiva para toda k y de esto, por el Teorema 2.2 concluimos que la acción débilmente mezclante también es elástica.
Para la necesidad procedemos tomando U_1, U_2, V_1, V_2 abiertos no vacíos de M. Por elasticidad, existe $g_1 \in G$ tal que $g_1 U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y $g_1 U_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. También hay un $g \in G$ de tal manera que $g(U_1 \cap g_1^{-1} U_2) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $g(U_1 \cap g_1^{-1} U_2) \cap (U_1 \cap g_1^{-1} V_2) \neq \emptyset$. Por ello $gU_1 \cap V_1 \neq \emptyset$ y $gg_1^{-1} U_2 \cap g_1^{-1}(gU_2 \cap V_2) \neq \emptyset$, es decir, $gU_2 \cap V_2 \neq \emptyset$. Con esto concluimos que la acción es débilmente mezclante. $\square$

Teorema 4.4. *Si una acción de un grupo abeliano es elástica, entonces será totalmente transitiva.*

Demostración. Consecuencia del Teorema 2.4. $\square$

Teorema 4.5. *Si una acción de grupo abeliano es totalmente transitiva, es transitiva.*

Demostración. Véase Teorema 2.8. $\square$

Las implicaciones lógicas de los teoremas anteriores se pueden resumir con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Fuertemente Mezclante} \arrow[d] & \\
 & \text{Elástica} \arrow[dr] & \\
\text{Débilmente Mezclante} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{k-transitiva para toda k} \arrow[ll] \\
 & \text{Totalmente Transitiva} \arrow[d] & \\
 & \text{Transitiva} &
\end{tikzcd}$$

En los Teoremas 3.14, 3.15, 3.16, 3.17 y los subsecuentes ejemplos obtuvimos que la propiedad de ser débilmente mezclante de un grupo no necesariamente se hereda a subgrupos de índice finito, sin embargo, sí ocurre cuando los grupos son abelianos.

Proposición 4.6. *Si G tiene un subgrupo abeliano A que es débilmente mezclante, entonces todo subgrupo H de índice finito de G es débilmente mezclante.*

Demostración. Del hecho que A es abeliano y débilmente mezclante, por el Teorema 4.3 obtenemos que A es elástico, lo cual implica que G ídem por el Teorema 3.11 y H es elástico por el Teorema 3.15. Así H es débilmente mezclante por el Teorema 4.3. □

4.2. Acciones Caóticas

Definición 4.7. La acción de G en M es ***caótica*** si es transitiva y el conjunto de puntos en M cuya G-órbita es finita, es denso.

Teorema 4.8. *Si una acción caótica es fuertemente mezclante, entonces es k-transitiva para toda k.*

Demostración. Consecuencia del Teorema 2.1. □

Teorema 4.9. *Una acción caótica en un espacio T_2 es k-transitiva para toda k si y sólo si es débilmente mezclante.*

Demostración. Probar la suficiencia es trivial.
Para demostrar la necesidad notemos que como la acción es débilmente mezclante por el Teorema 2.6, también es totalmente transitiva y con esto probemos lo siguiente:
Procederemos por inducción. Supongamos que G es totalmente transitivo, caótico y k-transitivo para algún $k \geq 1$, veamos que G es $(k+1)$-transitivo. Sean $U_1, \ldots, U_{k+1}, V_1, \ldots, V_{k+1}$ abiertos no vacíos de M, por hipótesis de inducción, existe $g \in G$ tal que $gU_i \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, luego, del hecho que G es caótico, para toda $i \leq k$ existe $x_i \in U_i \cap g^{-1}V_i$ tal que G_{x_i} es finita. Ahora, sea $H = \bigcap\{h \in G : hx_i = x_i\} = \{h \in G : hx_i = X_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}\}$, nótese que H tiene índice finito y del hecho que

G es totalmente transitivo, existe $h \in H$ tal que $hU_{k+1} \cap g^{-1}V_{k+1} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, k, k+1\}$. $\square$

Teorema 4.10. *Acciones caóticas en espacios de Baire y segundo numerables son débilmente mezclantes si y sólo si son elásticas.*

Demostración. Por el Teorema 4.9, si la acción es débilmente mezclante, entonces es k-transitiva para toda k y por el Teorema 2.2, es elática.
Por otro lado, si la acción es caótica y elástica se obtiene que es totalmente transitiva, lo que implica que la acción es k-transitiva para toda k, en particular, es débilmente mezclante. $\square$

Teorema 4.11. *Una acción caótica y elástica, es totalmente transitiva y viceversa.*

Demostración. Del Teorema 2.4 tenemos que cuando la acción es elástica, también es totalmente transitiva.
Por otro lado, si la acción es totalmente transitiva, entonces es k transitiva para toda k y por el Teorema 2.2 es elástica. $\square$

Teorema 4.12. *Toda acción caótica y totalmente transitiva es transitiva.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.8. $\square$

Las implicaciones de los teoremas anteriores se representan en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Fuertemente Mezclante} \arrow[dl] & \\
\text{Débilmente Mezclante} \arrow[rr] & & \text{Totalmente Transitiva} \arrow[d] \\
\text{Elástica} \arrow[u] & & \text{k-transitiva para toda k} \arrow[ll] \arrow[dl] \\
 & \text{Transitiva} &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 8. Considérese la acción lineal de $SL(n,\mathbb{Z})$, el grupo lineal especial de matrices cuadradas de tamaño n y entradas enteras, en el toro $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ con $n \geq 2$; esta acción es caótica, débilmente mezclante, pero no fuertemente mezclante.

Demostración. Nótese que $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \{x + \mathbb{Z}^n : x \in \mathbb{R}^n\}$ y la acción se define como $A(x + \mathbb{Z}^n) = (Ax) + \mathbb{Z}^n$ para cada $A \in SL(n,\mathbb{Z})$.
Tenemos que si $H \in SL(n,\mathbb{Z})$ es una matriz hiperbólica, el subgrupo $< H >$ de $SL(n,\mathbb{Z})$ es débilmente mezclante, ver [19] y por el Teorema 3.10, $SL(n,\mathbb{Z})$ ídem. Así, por los Teoremas 2.6 y 2.8, el grupo especial lineal es transitivo.
Sea F el conjunto de puntos de T^n con órbita finita, se tiene lo siguiente: Si $m \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos $D_m = \{(\frac{1}{m})x : x \in \mathbb{Z}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $D_m + \mathbb{Z}^n \subseteq T^n$, de los cuales el último tiene órbita finita, más aún es $SL(n,\mathbb{Z})$-invariante. Sean $A \in SL(n,\mathbb{Z})$ y $(\frac{1}{m})x + \mathbb{Z}^n \in D_m + \mathbb{Z}^n$, claramente $A(\frac{1}{m}x + \mathbb{Z}^n) = \frac{1}{m}Ax + \mathbb{Z}^n$ el cual pertenece a $D_m + \mathbb{Z}^n$, por tanto $D_m + \mathbb{Z}^n$ es $SL(n,\mathbb{Z})$-invariante. Por otro lado, nótese que $D_m + \mathbb{Z}^n = \{(\frac{1}{m})x + \mathbb{Z}^n : x \in \mathbb{Z}^n\} = \{(\frac{1}{m}x_1, \frac{1}{m}x_2, \ldots, \frac{1}{m}x_n) + \mathbb{Z}^n : x_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}\} = \{(\frac{1}{m}x_1, \frac{1}{m}x_2, \ldots, \frac{1}{m}x_n) + \mathbb{Z}^n : x_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_i \leq m-1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}\}$ el cual es finito de cardinal m^n. Así $D_m + \mathbb{Z} \subseteq F$ tiene órbita finita y es $SL(n,\mathbb{Z})$-invariante; esto sucede para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo que $\bigcup_m (D_m + \mathbb{Z}^n) \subseteq F$ es $SL(n,\mathbb{Z})$-invariante.
Recordemos que la topología usualmente dada a T^n está dada a partir de la función $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ definida como $\rho(x) = x + \mathbb{Z}^n$, de tal manera que decimos $U \subseteq T^n$ es un abierto si y sólo si $\rho^{-1}(U)$ es un abierto de la topología producto de $\mathbb{R}^n$. Con ello, observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\rho^{-1}(\textstyle\bigcup_m (D_m + \mathbb{Z}^n)) &= \{x \in \mathbb{R} : \rho(x) \in \textstyle\bigcup_m D_m + \mathbb{Z}^n\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) \in D_m + \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{N}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : x + \mathbb{Z}^n \in D_m + \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{N}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : x \in D_m, m \in \mathbb{N}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : x = \tfrac{1}{m}y, m \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}^n\} \\
&= \{\tfrac{1}{m}y \in \mathbb{R}^n : m \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}^n\} \\
&= \textstyle\bigcup_m \{\tfrac{1}{m}y \in \mathbb{R}^n : y \in \mathbb{Z}^n\} \\
&= \textstyle\bigcup_m D_m \\
&= \mathbb{Q}^n
\end{aligned}$$

el cual es denso. Por lo que $\rho(\rho^{-1}(\bigcup_m D_m + \mathbb{Z}^n)) = \rho(\mathbb{Q}^n) = \mathbb{Q}^n + \mathbb{Z}^n$.

Además, del hecho que ρ es continua y $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, $\rho(\mathbb{Q}^n) = \mathbb{Q}^n + \mathbb{Z}^n$ es denso en T^n y nótese que $\mathbb{Q}^n + \mathbb{Z}^n = (\bigcup_m D_m) + \mathbb{Z}^n \subseteq \bigcup_m (D_m + \mathbb{Z}^n)$. Así $\bigcup_m (D_m + \mathbb{Z}^n)$ es denso y F ídem.
Por lo anterior, $SL(n, \mathbb{Z})$ es transitivo y el conjunto de puntos cuya órbita es finita, es denso, es decir, $SL(n, \mathbb{Z})$ es caótico.
Además, del hecho de ser débilmente mezclante, por el Teorema 4.9, $SL(n, \mathbb{Z})$ es k-transitivo para toda k. Pero, no es fuertemente mezclante. $\square$

Referencias

1. Grant Cairns, Alla Kolganova y Anthony Nielsen, *Topological Transitivity and Mixing Notions for Group Actions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 37, No. 2, 371-397 (2007).

2. Grant Cairns and Anthony Nielsen, *On the dynamics of the linear action of $SL(n, \mathbb{Z})$ on $\mathbb{R}^n$*, Bull. Austral. Math. Soc. 71 (2005), 359 365.

3. Hillel Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory 1 (1967), 1 49.

4. H.B. Keynes and J.B. Robertson, *On ergodicity and mixing in topological transformation groups*, Duke Math. J. 35 (1968), 809 819.

5. A. Crannell, *A chaotic, non-mixing subshift*, Discrete Contin. Dynam. Systems, added vol. I (1998), 195 202.

6. Willard, Stephen. (Lynn H. Loomis). (1970). *General Topology*. Addison-Wesley.

7. Hernández Hernández, Fernando. (2003). *Teoría de Conjuntos*. Sociedad Matemática Mexicana.