



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

GEODÉSICAS Y CURVATURA DEL  
ESPACIO HIPERBÓLICO

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**MATEMÁTICA**

PRESENTA:

**Ana Paola Camacho flores**

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

Dr. José Antonio Martínez Cortez



El Cerrillo, Piedras Blancas, México  
14 de abril de 2023.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Espacio hiperbólico</b>	<b>7</b>
1.1. Modelos del espacio hiperbólico . . . . .	7
1.2. Geometría conforme de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	13
<b>2. Isometrías</b>	<b>40</b>
2.1. Isometrías del espacio hiperbólico . . . . .	40
2.2. Isometrías del espacio hiperbólico: modelo del disco y modelo del semi-espacio. . . . .	44
<b>3. Geodésicas y curvatura</b>	<b>49</b>
3.1. Geodésicas, subespacios hiperbólicos y otros resultados. . . . .	49
3.2. Curvatura del Espacio hiperbólico . . . . .	69
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# Introducción

El estudio de la Geometría no euclidiana se remonta, según los historiadores, al siglo XVII con la aportación de manera accidental del matemático italiano Gerolamo Saccheri (1677-1733), que buscaba mediante el absurdo probar la validez del quinto postulado de Euclides, sin embargo daría inicio al estudio de una visión más amplia en la geometría. Sería dos siglos después que empezaran a tomar más relevancia las geometrías no euclideas con el gran matemático G. F. B. Riemann (1826-1866) el cual consolidó las ideas de sus antecesores, introduciendo conceptos tan abstractos como el de variedad. Desarrollando así una teoría que tiene numerosas aplicaciones dentro de la física, entre las que destacan la teoría de relatividad. Una de estas geometrías no euclidianas recibe el nombre de Bolyai-Lobachevsky o Geometría Hiperbólica, cuya característica principal reside en la posibilidad de hallar una infinidad de rectas paralelas que pasen por un punto fuera de una 'recta'.

Ahora bien, este trabajo está basado en el libro de Ricardo Benedetti y Carlo Petronio [1].

Para entender el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  estudiamos varios modelos de este, cuya construcción los hace difeomorfos entre sí; el primero de ellos, el modelo del hiperboloide, se obtiene dotando al espacio tangente del hiperboloide de dimensión  $n + 1$ , con la forma bilineal simétrica

$$\langle x | y \rangle_{(n,1)} = \sum_{n=1}^n x_i \cdot y_i - x_{n+1} \cdot y_{n+1},$$

posteriormente mediante un pullback se lleva la estructura riemanniana al disco unitario, y esta nueva variedad riemanniana  $\mathbb{D}$  es el modelo del disco, conocido como el disco de Poincaré para dimensión dos, por último con la misma técnica, se da al semi-espacio superior una estructura riemanniana, esta última variedad riemanniana es el modelo del semi-espacio.

Uno de los aspectos a estudiar de la geometría es el grupo de difeomorfismos conformes y de isometrías del espacio en cuestión. En el primer capítulo de este trabajo abordamos la descripción de los modelos y la geometría conforme de  $\mathbb{R}^n$ , dado que tiene una estrecha relación con la del espacio hiperbólico. Se concluye demostrando el teorema de Liouville, sobre como son los difeomorfismos conformes de  $\mathbb{R}^n$  y se describen también para el disco unitario y el semi-espacio superior como subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

En el segundo capítulo se describe el grupo de isometrías para el modelo del hiperboloide, que resulta ser isomorfo al grupo ortogonal del hiperboloide, posteriormente los resultados para el modelo del disco y el semi-espacio nos dicen que las isometrías son restricciones de elementos del grupo de difeomorfismos conformes de  $\mathbb{R}^n$ .

En el tercer capítulo se describen y se dan resultados sobre las geodésicas para cada modelo, así como la función distancia para el modelo del disco y del semi-espacio. Finalmente, se habla brevemente de la frontera de  $\mathbb{H}^n$  y se concluye calculando la curvatura riemanniana del espacio hiperbólico.

# Capítulo 1

## Espacio hiperbólico

En este capítulo se define el modelo del hiperboloide, el modelo del disco y el modelo del semi-espacio para el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ . Posteriormente se dan resultados de los grupos de difeomorfismos conformes del disco unitario  $D^n$ , el semi-espacio  $\Pi^{n,+}$  y  $S^n$  vistos como subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Además se dan de manera explícita dichos difeomorfismos.

### 1.1. Modelos del espacio hiperbólico

**Definición 1.1.** Una *variedad diferenciable* de dimensión  $n$  es un conjunto  $M$  y una familia de funciones inyectivas  $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \mapsto M$  que van de conjuntos abiertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $M$  tales que:

1.  $\cup_\alpha (x_\alpha) = M$ .
2. Para cada par  $\alpha, \beta$ , con  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $x_\alpha^{-1}(W)$  y  $x_\beta^{-1}(W)$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y las funciones  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$  son diferenciables.
3. La familia  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  es maximal relativa a las condiciones (1) y (2).

La pareja  $(U_\alpha, x_\alpha)$  (o simplemente la función  $x_\alpha$ ) con  $p \in x_\alpha(U_\alpha)$  es llamada parametrización (o sistema de coordenadas) de  $M$  en  $p$ ;  $x_\alpha(U_\alpha)$  es entonces llamada vecindad cordenada en  $p$ . Una familia  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  que satisface (1) y (2) es llamada estructura diferenciable de  $M$ .

**Definición 1.2.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ , el conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  es llamado **espacio tangente** de  $M$  en el punto  $p$ , denotado por  $T_pM$ .

**Definición 1.3.** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciales. Una función diferenciable  $f : M \rightarrow N$  se dice que es un **difeomorfismo**, si es biyectiva con inversa diferenciable.

Dos variedades  $M, N$  son difeomorfas  $M \approx N$ , si existe un difeomorfismo entre ellas.

**Definición 1.4.** Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $N$  una variedad Riemanniana con métrica  $g$ , de dimensión  $m$  y  $F : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. El **pullback de la métrica**  $g$  asociada a  $F$ , es la métrica dada de la siguiente manera:

$$F^*(g)(u_p, v_p) = g(dF_p(u_p), dF_p(v_p))$$

para cualesquiera  $u_p, v_p$  en  $T_pM$ , (véase el diagrama siguiente).

$$\begin{array}{ccc} T_pM \times T_pM & \xrightarrow{dF_p \times dF_p} & T_pN \times T_pN \\ & \searrow F^* & \downarrow g \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

### Modelo del hiperboloide.

Consideremos la siguiente forma bilineal de signatura  $(n, 1)$ :

$$\langle x | y \rangle_{(n,1)} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - x_{n+1} \cdot y_{n+1}$$

y sea

$$I_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x | x \rangle_{(n,1)} = -1, x_{n+1} > 0\}$$

la parte "positiva" del hiperboloide asociado a  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{(n,1)}$ .

Ya que  $I_n = F^{-1}(0)$  donde  $F(x) = \langle x | x \rangle_{(n,1)} - 1$  es una función diferenciable y 0 es valor regular de  $F$ , entonces  $I_n$  es una hipersuperficie orientada y diferenciable en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

El espacio tangente a  $I_n$  en  $x \in I_n$  está dado como sigue:

$$T_x I_n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x | y \rangle_{(n,1)} = 0\} = \{x\}^\perp$$

Dado que  $\langle x | x \rangle_{(n,1)} = -1$  entonces la restricción de  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{(n,1)}$  a  $\{x\}^\perp$  es definida positiva, es decir tenemos un producto escalar en  $\{x\}^\perp$ .

Así definimos una métrica naturalmente en  $T_x I_n$  para cada  $x \in I_n$  que es globalmente diferenciable. La variedad  $I_n$  dotada con esa estructura Riemanniana la denotamos  $\mathbb{I}^n$ .

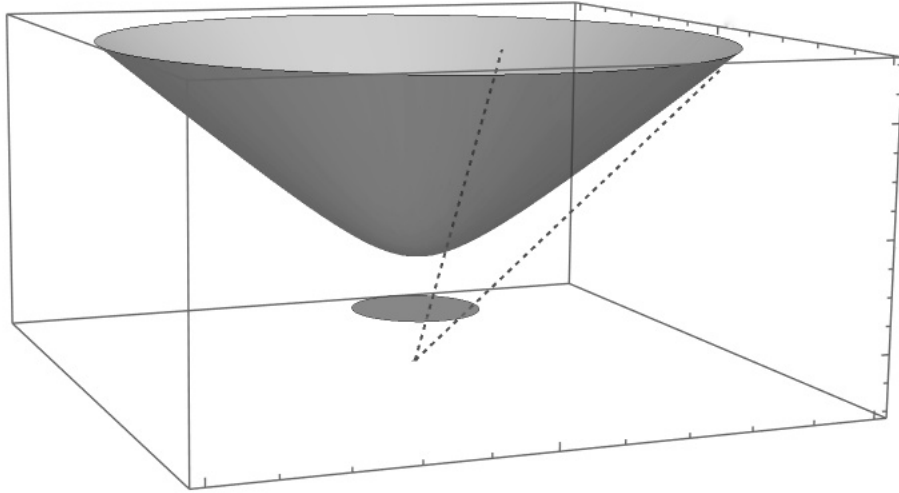
**Modelo del disco.** Para  $x \in \mathbb{I}^n$ , sea  $\pi$  la restricción para  $x \in \mathbb{I}^n$  de la proyección estereográfica con respecto a  $(0, \dots, 0, -1)$  del conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$$

sobre  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  (*i.e*)

$$\pi(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_{n+1}}.$$

De la Definición 1.3. tenemos que el disco unitario de dimensión  $n$ ,  $D^n$ , puede ser dotado de una métrica mediante el pullback asociado a  $\pi^{-1}(x)$ , sabemos que la proyección estereográfica es un difeomorfismo entre  $\mathbb{I}^n$  y  $D^n$ , de igual manera su inversa, que queda definida con la siguiente expresión:



**Figura 1.1.** Caso 2-dimensional de la proyección estereográfica del hiperboloide al disco unitario.

$$\pi^{-1}(\bar{x}) = \left( \frac{2x_i}{1 - \|\bar{x}\|^2}, \frac{\|\bar{x}\|^2 + 1}{1 - \|\bar{x}\|^2} \right) \text{ con } \bar{x} = \pi(x) \text{ y } 1 \leq i \leq n.$$

Por lo que, el pullback de la métrica  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{(n,1)}$  (restringida a  $T_x I_n$ ) asociada a  $\pi^{-1}$ , es el producto definido por:

$$\langle d\pi^{-1}(u), d\pi^{-1}(v) \rangle_{(n,1)} \text{ con } u, v \in T_{\bar{x}} D^n.$$

Definimos  $f_i = \frac{2x_i}{1 - \|\bar{x}\|^2}$  con  $1 \leq i \leq n$  y  $f_{n+1} = \frac{\|\bar{x}\|^2 + 1}{1 - \|\bar{x}\|^2}$

Calculando  $d_{\bar{x}}\pi^{-1}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} &= \frac{2(1 - \|\bar{x}\|^2) - 2x_i(-2x_i)}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2} \\ &= \frac{2 - 2\|\bar{x}\|^2 + 4x_i^2}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2} \\ &= \frac{2(1 + 2x_i^2 - \|\bar{x}\|^2)}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2}. \end{aligned}$$

Si  $i \neq j$ , con  $x_i$  fijo, y  $1 \leq j \leq n$  se tiene:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{-2x_i(-2x_j)}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2} = \frac{4x_i x_j}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2}.$$

Si  $j = n + 1$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} &= \frac{2x_j(1 - \|\bar{x}\|^2) - (\|\bar{x}\|^2 + 1)(-2x_j)}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2} \\ &= \frac{2x_j(1 - \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 + 1)}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2} \\ &= \frac{4x_j}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2}. \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} &= \frac{2(1 + 2x_i^2 - \|\bar{x}\|^2)}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_i} &= \frac{4x_i x_j}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2} \quad j \neq i \quad y \quad 1 \leq j \leq n \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} &= \frac{4x_j}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2}. \end{aligned} \tag{1.1}$$



Ahora, evaluando la matriz de derivadas en el vector  $u = (u_1, \dots, u_n)$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
(1 - \|\bar{x}\|^2)^2 d\pi_{\bar{x}}^{-1}(u) &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} u_i, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_i} u_i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} u_i \right) \\
&= \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right) u_1 + \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_2} \right) u_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \right) u_n \\
&= f_{j,x_1} u_1 + f_{j,x_2} u_2 + \dots + f_{j,x_n} u_n.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle d\pi_{\bar{x}}^{-1}(u) | d\pi_{\bar{x}}^{-1}(v) \rangle_{(n,1)}}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^4} &= \langle f_{j,x_1} u_1 + f_{j,x_2} u_2 + \dots + f_{j,x_n} u_n | \\
&\quad f_{j,x_1} v_1 + f_{j,x_2} v_2 + \dots + f_{j,x_n} v_n \rangle_{(n,1)} \\
&= \langle f_{j,x_1} | f_{j,x_1} \rangle_{(n,1)} u_1 v_1 + \langle f_{j,x_2} | f_{j,x_2} \rangle_{(n,1)} u_2 v_2 + \dots + \\
&\quad \langle f_{j,x_n} | f_{j,x_n} \rangle_{(n,1)} u_n v_n + \langle f_{j,x_i} | f_{j,x_k} \rangle_{(n,1)} u_i v_k
\end{aligned}$$

con  $1 \leq k \leq n$ .

Sustituyendo las derivadas de 1.1 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle f_{j,x_i}, f_{j,x_i} \rangle_{(n,1)} &= 4(1 + 2x_i^2 - \|\bar{x}\|^2)^2 + 16x_i^2 x_j^2 - 16x_i^2 \\
&= 4((1 + 2x_i^2)^2 - 2(1 + 2x_i^2)\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^4) + 16x_i^2 x_j^2 - 16x_i^2 \\
&= 4(1 + 4x_i^2 + 4x_i^4 - 2\|\bar{x}\|^2 - 4x_i^2 \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^4) \\
&\quad + 16x_i^2 x_j^2 - 16x_i^2 \\
&= 4 + 16x_i^2 + 16x_i^4 - 8\|\bar{x}\|^2 - 16x_i \|\bar{x}\|^2 + 4\|\bar{x}\|^4 + \\
&\quad 16x_i^2 x_j^2 - 16x_i^2 \\
&= 4 + 16x_i^4 - 16x_i^2 \|\bar{x}\|^2 + 16x_i^2 x_j^2 - 8\|\bar{x}\|^2 + 4\|\bar{x}\|^4 \\
&= 4 - 16x_i^2 x_j^2 + 16x_i^2 x_j^2 - 8\|\bar{x}\|^2 + 4\|\bar{x}\|^4 \\
&= 4(1 - 2\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^4) \\
&= 4(1 - \|\bar{x}\|^2)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f_{j,x_i}, f_{j,x_k} \rangle &= 2(1 + 2x_i^2 - \|\bar{x}\|^2)(4x_i x_k) + 2(1 + 2x_k^2 - \|\bar{x}\|^2)(4x_i x_k) \\
&= +4x_i x_j 4x_k x_j - 4x_i 4x_k \\
&= 8x_i x_k (1 + 2x_i^2 - \|\bar{x}\|^2 + 1 + 2x_k^2 - \|\bar{x}\|^2) + 16x_i x_j x_k x_j - \\
&\quad 16x_i x_j \\
&= 8x_i x_j (2 - x_j^2) + 16x_i x_k x_j^2 - 16x_i x_j \\
&= 8x_i x_k (2 - 2x_j^2 + 2x_j^2) - 16x_i x_k \\
&= 16x_i x_k - 16x_i x_k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\langle d_{\bar{x}}\pi^{-1}(u), d_{\bar{x}}\pi^{-1}(v) \rangle_{(n,1)} &= \frac{1}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^4} 4(1 - \|\bar{x}\|^2)^2 (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) \\
\langle d_{\bar{x}}\pi^{-1}(u), d_{\bar{x}}\pi^{-1}(v) \rangle &= 4 \frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2}{(1 - \|\bar{x}\|^2)^2}.
\end{aligned}$$

El disco unitario  $D^n$  dotado con la métrica calculada, la denotamos por  $\mathbb{D}^n$ .

### Modelo del semi-espacio.

Consideremos la siguiente función diferenciable:

$$\begin{aligned}
i : \mathbb{D}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
x &\longmapsto 2 \frac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2} - e_n.
\end{aligned}$$

donde  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  y  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ . Esto es un difeomorfismo de  $\mathbb{D}^n$  en  $\Pi^{n,+}$ , con

$$\Pi^{n,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Denotamos por  $\mathbb{I}^n$  al semiespacio dotado con la métrica del pullback asociado a  $i^{-1}$ .

### Modelo proyectivo o modelo de Klein.

Sea  $p$  la restricción a  $\mathbb{I}^n$  de la proyección canónica de  $\mathbb{R}^n$  en el  $n$ -espacio proyectivo real  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ , entonces  $p$  es un difeomorfismo sobre un subconjunto

abierto de  $\mathbb{R}P^n$ .

De la misma manera dotamos a dicho espacio con la métrica dada por  $p^{-1}$  para obtener una estructura Riemanniana.

## 1.2. Geometría conforme de $\mathbb{R}^n$

La geometría conforme permite un cálculo completo de las isometrías de  $\mathbb{H}^n$ , para nuestros modelos en el disco y en el semi-espacio.

Se verá que cualquier isometría con respecto a una estructura hiperbólica en  $\mathbb{D}^n$  y  $\mathbb{P}^{n,+}$  es un automorfismo conforme con respecto a una estructura euclidiana definida por la inmersión en  $\mathbb{R}^n$  e inversamente.

**Definición 1.5.** Sean  $M$  y  $N$  variedades Riemannianas, un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  se dice **conforme** si existe una función diferenciable positiva  $\alpha$  sobre  $M$  tal que

$$\langle d_x f(v) | d_x f(w) \rangle_{f(x)} = \alpha(x) \langle v | w \rangle_x \text{ para toda } x \in M \text{ y } v, w \in T_x M.$$

Notemos que un difeomorfismo conforme preserva ángulos pero no necesariamente distancias.

Esta definición puede ser generalizada para variedades dotadas con una estructura conforme (*i.e*) variedades en las cuales el ángulo entre 2 vectores está definido.

**Proposición 1.1.** Sean  $M_1, M_2, M_3$  variedades Riemannianas y  $f, g$  difeomorfismos conformes tales que  $f : M_1 \rightarrow M_2$  y  $g : M_2 \rightarrow M_3$  entonces  $g \circ f : M_1 \rightarrow M_3$  es un difeomorfismo conforme.

**Demostración:**

Sea  $x \in M_1$ . Por hipótesis:

$$\begin{aligned} \langle d_x f(v_1) | d_x f(w_1) \rangle_{f(x)} &= \alpha(x) \langle v_1, w_1 \rangle_x & v_1, w_1 \in T_x M_1 \\ \langle d_x g(v_2) | d_x g(w_2) \rangle_{g(f(x))} &= \beta(f(x)) \langle v_2, w_2 \rangle_{f(x)} & v_2, w_2 \in T_x M_2 \end{aligned}$$

con  $\alpha(x), \beta(f(x))$  funciones positivas diferenciables y  $d_x f(v_1) = v_2, d_x f(w_1) = w_2$ .

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle d_x(g \circ f)(v_1) | d_x(g \circ f)(w_1) \rangle_{(g \circ f)(x)} &= \langle d_y g(f(v_1)) | dg_y(f(w_1)) \rangle_{(g \circ f)(x)} \\
&= \langle d_y g(v_2) | dg_y(f(w_2)) \rangle_{(g \circ f)(x)} \\
&= \beta(f(x)) \langle v_2 | w_2 \rangle_{f(x)} \\
&= \beta(f(x)) \langle d_x f(v_1) | d_x f(w_1) \rangle_{f(x)} \\
&= \beta(f(x)) \alpha(x) \langle v_1 | w_1 \rangle_x
\end{aligned}$$

Dado que  $\beta(f(x))\alpha(x)$  es una función diferenciable positiva y la composición de difeomorfismos es un difeomorfismo la proposición queda demostrada. ■

Denotaremos como  $Conf(M, N)$  al conjunto (y grupo) de difeomorfismos conformes de  $M$  en  $N$  y  $Conf(M)$  cuando  $M = N$ . Si se preserva la orientación usaremos como anteriormente el símbolo  $+$ .

**Definición 1.6.** Llamamos *inversión* con respecto a la esfera  $M(x_0, \alpha)$  de centro  $x_0$  y radio  $\sqrt{\alpha}$  a la función

$$i_{x_0, \alpha} : x \mapsto \alpha \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2} + x_0.$$

Debemos pensar a  $i_{x_0, \alpha}$  como una función de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo y también como una función de  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  en sí mismo, donde  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$  es la compactación por un punto de  $\mathbb{R}^n$  e  $i_{x_0, \alpha}$  intercambia  $\infty$  y  $x_0$ .

En toda la sección,  $S^n$  será dotada con una estructura natural conforme y  $\mathbb{R}^n = S^n \setminus \{\infty\}$  hereda de  $S^n$  su propia estructura conforme; cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  será dotado con una estructura conforme inducida por  $\mathbb{R}^n$ .

Notemos que la definición de  $i_{x_0, \alpha}$  tiene sentido también para  $\alpha < 0$  ya que en este caso  $i_{x_0, \alpha}$  es la composición de la inversión con respecto a  $M(x_0, -\alpha)$  con la simetría centrada en  $x_0$ .

Dirémos que dos hiperplanos  $H_1$  y  $H_2$  en  $\mathbb{R}^n$  son *ortogonales* si  $H_1^\perp$  y  $H_2^\perp$  son ortogonales, en el mismo sentido diremos que esferas que se intersectan son ortogonales si para cualquier punto de su intersección los dos hiperplanos tangentes son ortogonales, esto es, si  $x_0$  y  $x_1$  son centros de las esferas, para cada punto  $x$  de la intersección  $\langle x - x_0 | x - x_1 \rangle = 0$ .

Con esta notación tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.** La composición  $i_{x_0, \alpha} \circ i_{x_0, \beta}$  es la homotecia centrada en  $x_0$  de radio  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

**Demostración:**

Observemos que si  $T$  es la traslación  $x \mapsto x + x_0$ , entonces

$$i_{x_0, \alpha} = T \circ i_{0, \alpha} \circ T^{-1} \text{ y } i_{0, \alpha} = \alpha \cdot i_{0, 1},$$

así podremos asumir  $x_0 = 0$  y  $\alpha = 1$ .

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (i_{0, \alpha} \circ i_{0, \beta})(x) &= \alpha \frac{\frac{\beta x}{\|x\|^2}}{\left\| \frac{\beta x}{\|x\|^2} \right\|^2} \\ &= \alpha \frac{\frac{\beta x}{\|x\|^2}}{\frac{\beta^2}{\|x\|^2} \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2} \\ &= \frac{\alpha \frac{\beta x}{\|x\|^2}}{\frac{\beta^2}{\|x\|^2}} = \frac{\alpha x}{\beta}. \end{aligned}$$

■

Ahora, suponiendo que  $\alpha = 1$  tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.** *La inversión  $i_{x_0, \alpha}$  es una involución de clase  $C^\infty$ .*

**Proposición 1.4.** *Toda inversión restringida a la esfera  $M(x_0, \alpha)$  es la identidad, es decir,  $i_{x_0, \alpha}|_{M(x_0, \alpha)} = id$ .*

**Demostración:**

Dada  $x \in M(x_0, \alpha)$  se tiene que

$$i_{x_0, \alpha} = \alpha \frac{x - x_0}{\alpha} + x_0 = x.$$

Por lo que se concluye la proposición. ■

**Proposición 1.5.** *La inversión  $i_{x_0, \alpha}$  es una función conforme.*

**Demostración:**

Ya que las homotecias y translaciones son conformes, entonces podemos reducir el cálculo para  $i_{0,1}$ .

Supongamos que  $i(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ . Calculando su diferencial tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\|x\|^2 - 2x_i^2}{\|x\|^4} \quad \text{con } 1 \leq i \leq n,$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{-2x_i x_j}{\|x\|^4} \quad \text{con } i \neq j.$$

Se sigue que,

$$di_{0,1} = \frac{1}{\|x\|^4} \begin{pmatrix} \|x\|^2 - 2x_1^2 & -2x_1x_2 & -2x_1x_3 & \dots & -2x_1x_n \\ -2x_2x_1 & \|x\|^2 - 2x_2^2 & -2x_2x_3 & \dots & -2x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2x_nx_1 & 2x_nx_2 & 2x_nx_3 & \dots & \|x\|^2 - 2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Si  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y  $P_x$  la matriz anterior, entonces

$$P_x(y) = (\|x\|^2 y_1 - 2x_1 \langle x, y \rangle, \|x\|^2 y_2 - 2x_2 \langle x, y \rangle, \dots, \|x\|^2 y_n - 2x_n \langle x, y \rangle).$$

Ahora, si  $y = x + x'$  donde  $x \in x'^{\perp}$

$$\begin{aligned} P_x(y) &= (\|x\|^2 y_1 - 2x_1 \langle x, x + x' \rangle, \|x\|^2 y_2 - 2x_2 \langle x, x + x' \rangle, \dots, \\ &\quad \|x\|^2 y_n - 2x_n \langle x, x + x' \rangle) \\ &= (\|x\|^2 y_1 - 2x_1 \|x\|^2, \|x\|^2 y_2 - 2x_2 \|x\|^2, \dots, \|x\|^2 y_n - 2x_n \|x\|^2) \\ &= \|x\|^2 (y_1 - 2x_1, y_2 - 2x_2, \dots, y_n - 2x_n) \\ &= \|x\|^2 (y - 2x) \\ &= \|x\|^2 (x + x' - 2x) \\ &= \|x\|^2 (x' - x). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$d_x(y) = \frac{1}{\|x\|^2} P_x(y)$$

donde  $P_x(y)$  es la reflexión paralela a  $x$ . Por último, si pensamos a  $i_{1,0}$  definida en la esfera de Riemann, esta también es conforme en 0. Por tanto la inversión  $i_{1,0}$  es conforme. ■

**Proposición 1.6.** Consideremos  $M(x_0, \alpha)$  y  $M(x_1, \beta)$  con  $x_1 \neq x_0$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $M(x_1, \beta)$  es  $i_{x_0, \alpha}$  - invariante,
- ii)  $M(x_0, \alpha)$  es  $i_{x_1, \beta}$  - invariante,
- iii)  $\|x_1 - x_0\|^2 = \alpha + \beta$ ,
- iv)  $M(x_1, \beta)$  y  $M(x_0, \alpha)$  son esferas ortogonales.

**Demostración:**

Primero mostraremos que i) implica iii). Supongamos que  $x_0 = 0$  y  $\alpha = 1$ . Ya que la intersección de  $M(x_1, \beta)$  con la recta  $\mathbb{R}x_1$  (es decir la recta  $\gamma x_1$  tal que  $\gamma \in \mathbb{R}$ ) consiste en los puntos  $(1 \pm \sqrt{\beta}/\|x_1\|)x_1$  y por tanto  $i_{0,1}$  debe intercambiar estos. Entonces,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\sqrt{\beta}}{\|x_1\|}\right) x_1 &= i_{(0,1)} \left( \left(1 + \frac{\sqrt{\beta}}{\|x_1\|}\right) x_1 \right) \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{\beta}}{\|x_1\|}\right) x_1}{\|x_1\|^2 \left(1 + \frac{\sqrt{\beta}}{\|x_1\|}\right)^2} \\ &= \frac{x_1}{\|x_1\|^2 \left(1 + \frac{\sqrt{\beta}}{\|x_1\|}\right)}. \end{aligned}$$

Así tenemos que,

$$\left(1 - \frac{\sqrt{\beta}}{\|x_1\|}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{\beta}}{\|x_1\|}\right) \|x_1\|^2 = 1$$

de donde,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\beta}{\|x_1\|^2}\right) \|x_1\|^2 &= 1 \\ \|x_1\|^2 - \beta &= 1 \\ \|x_1\|^2 &= 1 + \beta. \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que iii) implica i). Como anteriormente consideremos a  $x_0 = 0$  y  $\alpha = 1$ . Sea  $x \in M(x_1, \beta)$  entonces,

$$\begin{aligned}
 \|x_1\|^2 - 1 &= \beta \\
 \|x_1\|^2 - 1 &= \|x - x_1\|^2 \\
 \|x_1\|^2 - 1 &= \|x\|^2 - 2\langle x|x_1 \rangle + \|x_1\|^2 \\
 2\langle x|x_1 \rangle &= \|x\|^2 + 1.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \|i_{0,1}(x) - x_1\|^2 &= \left\| \frac{x}{\|x\|^2} - x_1 \right\|^2 \\
 &= \left\| \frac{x}{\|x\|^2} \right\|^2 - \frac{2\langle x|x_1 \rangle}{\|x\|^2} + \|x_1\|^2 \\
 &= \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x|x_1 \rangle}{\|x\|^2} + \beta + 1 \\
 &= \frac{1 + \|x\|^2 - 2\langle x|x_1 \rangle}{\|x\|^2} + \beta \\
 &= \frac{2\langle x|x_1 \rangle - 2\langle x|x_1 \rangle}{\|x\|^2} + \beta \text{ por (1.3)} \\
 &= \beta.
 \end{aligned}$$

Por tanto, al conservarse el radio y el centro, concluimos que la esfera  $M(x_0, \beta)$  es invariante bajo la inversión dada.

Luego, análogamente se prueba que ii) implica iii).

A continuación probamos que iii) implica iv). Para esto, dado que  $\alpha, \beta > 0$  se tiene que las siguientes equivalencias son ciertas

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta &< \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}, \\
 \alpha + \beta &< (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2,
 \end{aligned}$$

y por hipótesis

$$\|x_1 - x_0\| < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta},$$

esto último quiere decir que las 2 esferas se intersectan.



Más aún, si  $x$  está en la intersección se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_0\|^2 = \alpha + \beta &\Leftrightarrow \|x_1 - x\|^2 + \|x_0 - x\|^2 = \|x_1 - x_0\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|x_1\|^2 - 2\langle x_1|x \rangle + \|x\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\langle x_0|x \rangle \\
&\quad + \|x\|^2 = \|x_1\|^2 - 2\langle x_1|x_0 \rangle + \|x_0\|^2 \\
&\Leftrightarrow -2\langle x_1|x \rangle + 2\langle x|x \rangle - 2\langle x_0|x \rangle = -2\langle x_1|x_0 \rangle \\
&\Leftrightarrow -\langle x_1|x \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x_0|x \rangle + \langle x_1|x_0 \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle x_1 - x|x_0 - x \rangle = 0.
\end{aligned}$$

■

**Proposición 1.7.** Consideremos  $i = i_{x_0, \alpha}$ ,  $H$  un hiperplano y  $M$  una esfera, se tiene que las siguientes afirmaciones son ciertas:

- i) Si  $x_0 \in H$  entonces  $i(H) = H$ ,
- ii) Si  $x_0 \notin H$  entonces  $i(H)$  es una esfera y  $x_0 \in i(H)$ ,
- iii) Si  $x_0 \in M$  entonces  $i(M)$  es un hiperplano y  $x_0 \notin i(M)$
- iv) Si  $x_0 \notin M$  entonces  $i(M)$  es una esfera y  $x_0 \notin i(M)$ ,
- v)  $i$  opera biyectivamente en el conjunto de todas las bolas abiertas y todos los semiespacios abiertos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración:**

Ya que las propiedades que consideramos son invariantes bajo homotecias y traslaciones, consideremos  $i = i_{0,1}$ .

- i) Dado que la imagen de cada vector queda contenida en el plano que lleva su misma dirección, entonces un plano que pasa por el origen queda invariante bajo la inversión.
- ii) Sea  $H = h + h^\perp$  con  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   
considerando  $c = \frac{h}{2\|h\|^2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4\|h\|^2}$ , para  $x \neq 0$  se tienen las siguientes

equivalencias,

$$\begin{aligned}
i(x) \in M(c, \gamma) &\Leftrightarrow \|i(x) - c\|^2 = \gamma \\
&\Leftrightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{h}{2\|h\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{4\|h\|^2} \\
&\Leftrightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|^2} \right\|^2 - \left\langle \frac{x}{\|x\|^2} \middle| \frac{h}{\|h\|^2} \right\rangle + \left\| \frac{h}{2\|h\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{4\|x\|^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{1}{\|x\|^2\|h\|^2} \langle x|h \rangle + \frac{1}{4\|h\|^2} = \frac{1}{4\|h\|^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{1}{\|x\|^2\|h\|^2} \langle x|h \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\|h\|^2 - \langle x|h \rangle}{\|x\|^2\|h\|^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \|h\|^2 - \langle x|h \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle h - x|h \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in H.
\end{aligned}$$

Más aún  $i(\infty) = 0 \in M(c, \gamma)$ , por tanto  $i(H) = M(c, \gamma)$ .

- iii) Sea  $M = M(c, \gamma)$ . Ya que  $0 \in M$  entonces  $\gamma = \|c\|^2$   
Si tomamos  $h = \frac{c}{2\|c\|^2}$  y  $H = h + h^\perp$  por ii) tenemos que  
 $i(H) = M$ , entonces  $i(M) = H$ .
- iv) Sea  $M = M(c, \gamma)$  ya que  $0 \notin M$  entonces  $\|c\|^2 \neq \gamma$ .

Así tenemos que,

$$\begin{aligned}
i(x) \in M(c, \gamma) &\Leftrightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|^2} - c \right\|^2 = \gamma \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x|c \rangle}{\|x\|^2} + \|c\|^2 - \gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow \|c\|^2 \|x\|^2 - \gamma \|x\|^2 - 2\langle x|c \rangle + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\|c\|^2 - \gamma) \|x\|^2 - 2\langle x|c \rangle + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(\|c\|^2 - \gamma) \|x\|^2 - 2\langle x|c \rangle + 1}{\|c\|^2 - \gamma} = 0 \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 - \frac{2\langle x|c \rangle}{\|c\|^2 - \gamma} + \frac{1}{\|c\|^2 - \gamma} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\| x - \frac{c}{\|c\|^2 - \gamma} \right\|^2 = \frac{\|c\|^2}{(\|c\|^2 - \gamma)^2} - \frac{1}{\|c\|^2 - \gamma} \\
&\Leftrightarrow x \in M \left( \frac{c}{\|c\|^2 - \gamma}, \frac{\gamma}{\|c\|^2 - \gamma} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$i(M(c, \gamma)) = i^{-1}(M(c, \gamma)) = M \left( \frac{c}{\|c\|^2 - \gamma}, \frac{\gamma}{\|c\|^2 - \gamma} \right),$$

y por iii) no contiene a 0.

- v) Si  $A$  es una bola abierta o un semi-espacio abierto entonces  $\partial A$  es una esfera o un hiperplano y por i)-iv) pasa lo mismo con  $i(\partial A)$ . Por la Proposición 1.6,  $i(A)$  es conexo y su frontera es  $i(\partial A)$ , lo cual implica que esta es una bola o un semi-espacio. ■

Para analizar el conjunto de difeomorfismos conformes en superficies es decir con  $n = 2$ , consideremos lo siguiente, Una superficie Riemanniana  $M$  conexa y orientada admite una estructura compleja, además

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow M$$

es una transformación holomorfa con  $f'(z) \neq 0$  si y sólo si esta preserva la orientación y su derivada preserva ángulos. Para la siguiente proposición

recordemos algunos conceptos. Dada una función compleja  $f = u + iv$  que admite derivadas parciales, se pueden definir los operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),$$

llamados Derivadas de Wirtinger, donde

$$\partial_x = \partial_x u + i\partial_x v,$$

$$\partial_y = \partial_y u + i\partial_y v.$$

Con lo anterior se obtienen las siguientes expresiones

$$\partial_x = \partial_z + \partial_{\bar{z}},$$

$$\partial_y = i\partial_z - i\partial_{\bar{z}}.$$

Y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos una expresión para la derivada como sigue

$$f'(z) = \partial_x,$$

por lo que

$$f'(z) = \partial_z + \partial_{\bar{z}}.$$

**Definición 1.7.** Diremos que una función es **anti-holomorfa** si  $\bar{f}$  es holomorfa. O equivalentemente  $f$  es anti-holomorfa si  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ .

**Proposición 1.8.** Si  $M$  y  $N$  son superficies Riemannianas conexas orientadas (dotadas naturalmente con una estructura compleja), el conjunto de todos los difeomorfismos conformes de  $M$  en  $N$  es el conjunto de todos los holomorfismos y todos los anti-holomorfismos de  $M$  y  $N$ .

**Demostración:**

Sea  $f : M \rightarrow N$  conforme. Ya que las funciones constantes son las únicas holomofas y anti-holomofas a la vez, y estas son condiciones cerradas,

por conexidad, es suficiente probar que  $f$  es localmente holomorfa o anti-holomorfa; asumiremos que  $M$  y  $N$  son dominios de  $\mathbb{C}$ . Por conformalidad se tiene que

$$\begin{aligned} |df|^2 &= \alpha |dz|^2 \\ \left| \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right|^2 &= \alpha |dz|^2 \\ \left( \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) |dz|^2 + 2\Re \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \right) (dz)^2 \right] &= \alpha |dz|^2 \end{aligned}$$

Donde  $\Re(z)$  representa la parte real de un complejo. Ya que

$$2\Re \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \right) (dz)^2 \right]$$

no es un múltiplo de  $|dz|^2$ , debe ser cero, por tanto  $\frac{\partial f}{\partial z} \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \right) = 0$ .

Se sigue que para cada punto  $z_0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$  o  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$  (pero no ambos pues  $d_{z_0}f \neq 0$ ). Entonces

$$M = \left\{ z_0 \in M \mid \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0 \right\} \cup \left\{ z_0 \in M \mid \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \right\}$$

Ya que ambos conjuntos son cerrados y disjuntos, uno de ellos debe ser vacío, por lo que  $f$  es holomorfa o anti-holomorfa en  $M$ . Además, por lo anterior se muestra que si  $f : M \rightarrow N$  es holomorfa o anti-holomorfa entonces es conforme. ■

Consideremos la esfera de Riemann  $S^2 = \mathbb{C}\mathbb{R}^1$ , identificados con el conjunto  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Definimos dos clases de funciones de  $\mathbb{C}\mathbb{R}^1$  en sí mismo:

- homografías

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

- anti-homografías

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

donde  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{C})$ .

Para un conjunto de transformaciones  $F$ , consideramos los siguientes conjuntos:

$$c(F) = \{\bar{f} : \bar{f}(z) = \overline{f(z)}, f \in F\} \text{ y} \\ -F = \{-f : f \in F\}.$$

Para el siguiente teorema utilizaremos algunos resultados de variable compleja que enunciamos a continuación.

**Teorema 1.1.** [5, p.151] (*Gran Teorema de Picard*) Sea  $f$  una función holomorfa en una vecindad agujerada  $V$  de  $z_0$ , donde este punto es una singularidad esencial. Entonces  $f$  toma en  $V$  cualquier valor en el plano complejo, salvo una excepción. En dicha vecindad, cualquiera de estos valores son tomados un número infinito de veces.

**Teorema 1.2.** [5, p.121] (*Teorema de Liouville*). Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  entera y acotada entonces  $f$  es constante.

**Teorema 1.3.** El grupo  $Conf^+(S^2)$  consiste en todas las homografías y el grupo  $Conf(S^2)$  en todas la homografías y anti-homografías.

Para  $M = \mathbb{R}^2, D^2, \Pi^{2,+}$  tenemos

$$Conf^+(M) = \{f|_M : f \in Conf^+(S^2), f(M) = M\},$$

$$Conf(M) = \{f|_M : f \in Conf(S^2), f(M) = M\}.$$

En particular,

$$Conf^+(\mathbb{C}) = \{(z \mapsto az + b) : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\},$$

$$Conf(\mathbb{C}) = Conf^+(\mathbb{C}) \cup c(Conf^+(\mathbb{C})),$$

$$Conf^+(D^2) = \left\{ (z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} : \theta \in \mathbb{R}, a \in D^2) \right\},$$

$$Conf(D^2) = Conf^+(D^2) \cup c(Conf^+(D^2)),$$

$$Conf^+(\Pi^{2,+}) = \left\{ (z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{R})) \right\},$$

$$Conf(\Pi^{2,+}) = Conf^+(\Pi^{2,+}) \cup -c(Conf^+(\Pi^{2,+})).$$

**Demostración:**

Por la proposición 1.8 debemos determinar el conjunto de holomorfismos y anti-holomorfismos de estas superficies complejas.

Empezaremos con los holomorfismos en todos los casos.

Para el caso de las funciones complejas. Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un holomorfismo entonces  $f$  no puede tener una singularidad esencial en  $\infty$ , si la tuviese por el Gran Teorema de Picard no sería inyectiva. Así  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  no tiene una singularidad esencial en el 0. Entonces se tienen dos casos:

1) Si  $g(z)$  tiene una singularidad removible en 0 entonces

$\lim_{z \rightarrow 0} zg(z) = 0$ , por el Teorema de Liouville  $f$  es constante. Esto no puede ser porque  $f$  es inyectiva.

2) Si  $g(z)$  tiene un polo en 0 de orden  $m$ , entonces se tiene que  $g(z)z^k = h(z)^k$  para  $h(z) \neq 0$  holomorfa de donde

$$g(z) = \frac{h(z)^k}{z^k}.$$

Como 0 es polo de orden  $m$ . La expansión de Laurent para  $g$  en 0 es

$$g(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k$$

entonces

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^m a_{-k} z^k.$$

Por otro lado, la expansión de Taylor para  $f$  en 0 es

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

y por unicidad, la serie es finita de modo que  $f(z)$  es un polinomio, más aún por biyectividad  $f(z) = az + b$ .

Para el caso de las funciones definidas en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  el conjunto de homografías es un grupo de holomorfismos de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  e inversamente ya que las homografías operan transitivamente, dado un holomorfismo  $f$  podemos encontrar  $\phi$  tal que  $(\phi \circ f)(\infty) = \infty$  entonces  $(\phi \circ f)$  es un holomorfismo de  $\mathbb{C}$  y por lo tanto es una homografía, lo cual implica que  $f$  es homografía.

Por el Lema de Schwarz [5, Teorema 2.30, pag. 97] el grupo de holomorfismos de  $D^2$  que mantienen fijo al origen está dado por rotaciones, ya que las rotaciones operan transitivamente la prueba es análoga a la justificación anterior. La determinación de el grupo para  $Conf^+(\Pi^{2,+})$  se sigue de que  $Conf^+(D^2)$  mediante la transformación de Cayley  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  mapea  $\Pi^{2,+}$  en  $D^2$ , además de que dicha transformación es holomorfa y su inversa también.

Ahora, dada  $M \in \{\mathbb{C}, D^2, \Pi^{2,+}\}$  nos queda probar que

$$Conf^+(M) = \{f|_M : f \in Conf^+(S^2), f(M) = M\}.$$

Si  $f$  es una homografía y  $f(M) = M$  entonces la restricción de  $f$  en  $M$  es un holomorfismo de  $M$ , y al contrario la determinación de  $Conf^+(M)$ , en los tres casos, sus elementos se extienden a homografías.

El caso de las anti-homografías es análogo, basta decir que ahora  $\bar{f}$  es holomorfa. ■

Complementando, el grupo  $Conf^+(D^2)$  se representa usualmente de la siguiente manera.

Definimos

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$SU(1, 1) = \left\{ A \in SL(2, \mathbb{C}) : \bar{A}^t J A = J \right\}.$$

Entonces

$$SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\},$$

$$Conf^+(D^2) = \left\{ \left( z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(1, 1) \right\} \cong \frac{SU(1, 1)}{\{\pm I\}}.$$

Donde  $I$  es la identidad.

**Proposición 1.9.** *Si  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  lo identificamos con  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  entonces  $Conf(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$  consiste en todas y sólo de todas las transformaciones de la forma*

$$z \mapsto \lambda Ai(z) + v$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $A \in O(2)$ ,  $i$  es la identidad o una inversión y  $v \in \mathbb{R}^2$ .



**Demostración:**

Ya que la conjugación es un elemento de  $O(2)$  consideramos la anti-homografía

$$f : z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Probaremos que  $f$  se puede escribir como  $\lambda Ai + v$ .

Si  $c = 0$  entonces

$$f = a\bar{z} + b,$$

por lo que la proposición es cierta.

Si  $c \neq 0$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{\bar{z} + \frac{d}{c}} &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(\bar{z} + \frac{d}{c})} \\ &= \frac{ac(\bar{z} + \frac{d}{c}) + bc - ad}{c^2(\bar{z} + \frac{d}{c})} \\ &= \frac{ac\bar{z} + ad + bc - ad}{c^2\bar{z} + cd} \\ &= \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}. \end{aligned}$$

Haciendo

$$\frac{bc - ad}{c^2} = \lambda u$$

con  $\lambda > 0$  y  $|u| = 1$  se tiene que  $u \in O(2)$ . Ahora, definiendo  $i$  como la inversión con respecto a la esfera con centro en  $-\overline{\left(\frac{d}{c}\right)}$  y radio 1, tenemos que

$$i(z) = -\overline{\left(\frac{d}{c}\right)} + \frac{z + \overline{\left(\frac{d}{c}\right)}}{\left|z + \overline{\left(\frac{d}{c}\right)}\right|^2} = -\overline{\left(\frac{d}{c}\right)} + \frac{1}{\bar{z} + \frac{d}{c}}.$$

Por tanto

$$\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \lambda u i(z) + \lambda u \overline{\left(\frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c}.$$

Un calculo similar prueba que cualquier transformación de la forma  $\lambda Ai + v$  es una homografía o una anti-homografía. ■

**Teorema 1.4.** (1)  $Conf(D^2)$  consiste únicamente en las transformaciones de la forma  $x \mapsto Ai(x)$  donde  $i$  es la identidad o una inversión y  $A \in O(2)$ .

(2)  $Conf(\Pi^{2,+})$  consiste únicamente en las transformaciones de la forma

$$x \mapsto \lambda \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i(x) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $u \in O(1) = \{\pm 1\}$ ,  $i$  es la identidad o una inversión con respecto a la esfera ortogonal a  $\mathbb{R} \times \{0\}$  y  $b \in \mathbb{R}$ .

**Demostración:**

(1) Por la Proposición 1.5 y la Proposición 1.6 cada transformación  $Ai$  pertenece a  $Conf(D^2)$ . Y por el contrario, como las transformaciones de la forma  $Ai$  forman un grupo, por el Teorema 1.3 ya que la conjugación y las rotaciones pertenecen a  $O(2)$  tenemos que checar unicamente que para  $\alpha \in D^2$  la función  $z \mapsto \frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$  se puede escribir como  $Ai$ .

Ya que la esfera con centro  $\frac{1}{\alpha}$  y radio  $\sqrt{\frac{1}{|\alpha|^2} - 1}$  es ortogonal a  $\partial D^2$  (véase la figura 1.2.)

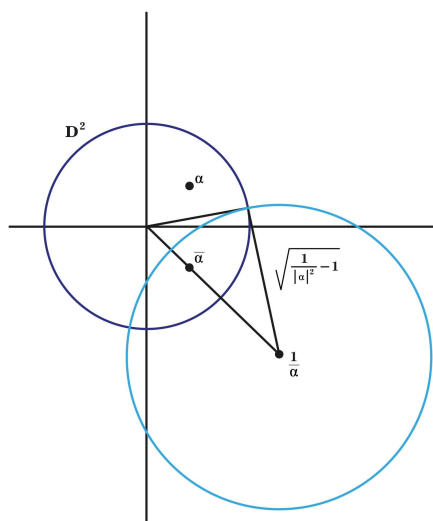


Figura 1.2.

Denotando como  $i$  la inversión con respecto a aquella esfera se tiene que

$$\begin{aligned}
 i(z) &= \frac{1}{\alpha} + \left( \frac{1}{|\alpha|^2} - 1 \right) \left( \frac{z - \frac{1}{\alpha}}{\left\| z - \frac{1}{\alpha} \right\|^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \left( \frac{1}{|\alpha|^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{\bar{z} - \frac{1}{\bar{\alpha}}} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \left( \frac{1 - |\alpha|^2}{|\alpha|^2} \right) \left( \frac{1}{\frac{\bar{z}\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha}}} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \left( \frac{1 - |\alpha|^2}{\alpha} \right) \left( \frac{1}{\bar{z}\bar{\alpha} - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\bar{z}\bar{\alpha} - 1 + 1 - |\alpha|^2}{\bar{z}\bar{\alpha} - 1} \right) \\
 &= -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \left( \frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \bar{z}\bar{\alpha}} \right).
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\bar{z}} = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}i(z).$$

(2) Ya que  $i(z)$  es conforme y por la Proposición 1.7, cualquier transformación de la forma descrita pertenece a  $Conf(\Pi^2, +)$ .

Por el contrario, el conjunto de todas la transformaciones descritas forman un grupo y como  $-\bar{z}$  se puede ver como  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , por el Teorema 1.3 solo tenemos que checar que para  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{R})$  la transformación

$$-\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

se puede escribir como se requiere.

Si  $c = 0$ , tenemos que  $-a\bar{z}+b$  es de la forma requerida y la proposición es cierta.

Si  $c \neq 0$  definimos

$$\mu = -\frac{bc - ad}{c^2} = \frac{1}{c^2} > 0$$

y consideramos la inversión  $i$  con respecto a la esfera con centro  $-\frac{d}{c}$  y radio 1, que es ortogonal a  $\mathbb{R} \times \{0\}$  ya que su centro se encuentra en esta recta; por lo tanto se puede ver que

$$-\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \mu i(z) + \frac{d}{c} - \frac{a}{c}.$$

■

**Proposición 1.10.** *Ya que las traslaciones, homotecias y elementos de  $SO(n)$  preservan la orientación, mientras que elementos de  $O(n) \setminus SO(n)$  e inversiones con respecto a esferas revierten la orientación, tenemos lo siguiente:*

1. *Las transformaciones de la forma  $Ai \in Conf(D^2)$  preservan la orientación si y sólo si*

$$[A \in SO(2), i = \text{identidad}] \text{ o } [A \in O(2) \setminus SO(2), i = \text{inversión}].$$

2. *Las transformaciones de la forma*

$$\left( \lambda \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

*como antes, preservan la orientación si y sólo si*

$$[u = 1, i = \text{identidad}] \text{ o } [u = -1, i = \text{inversión}].$$

Ahora probaremos los siguientes resultados para el segundo caso, es decir para  $n \geq 3$ .

Para la siguiente prueba recordemos que la  $n$ -ésima derivada de

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n,$$

$d^n f$  es una forma bilineal (ver [2, pp. 58-63]).

**Teorema 1.5.** *(Liouville) Sean  $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 3$  un difeomorfismo conforme, entonces tiene la forma*

$$x \mapsto \lambda Ai(x) + b.$$

*donde  $\lambda > 0$ ,  $A \in O(n)$ ,  $i$  es la identidad o una inversión y  $b \in \mathbb{R}$ .*

**Demostración:**

Sea  $a_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, a_n = (0, 0, \dots, 1)$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $(x_1, \dots, x_n)$  las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^n$  relativas a esta base. Sea  $e_1, \dots, e_n$  un campo vectorial paralelo diferenciable en  $U$ , tal que para cada punto de  $U$ ,  $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ . Si  $\lambda$  es el coeficiente de conformalidad de  $f$ , podemos escribir

$$\langle df(e_i) | df(e_k) \rangle = \lambda^2 \delta_{ik} \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Sea  $d^2 f$  la segunda derivada de  $f$ , dado que es una forma bilineal y considerando la base canónica tenemos que

$$d^2 f(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Tomando los índices  $i, j, k$  distintos y derivando (\*) tenemos que

$$\begin{aligned} \langle d^2 f(e_i, e_j) | df(e_k) \rangle + \langle df(e_i) | d^2 f(e_k, e_j) \rangle &= 0, \\ \langle d^2 f(e_j, e_k) | df(e_i) \rangle + \langle df(e_j) | d^2 f(e_i, e_k) \rangle &= 0, \\ \langle d^2 f(e_k, e_i) | df(e_j) \rangle + \langle df(e_k) | d^2 f(e_j, e_i) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras igualdades y restando la última obtenemos

$$\langle d^2 f(e_k, e_j), df(e_i) \rangle = 0$$

con  $i, j, k$  distintos entre sí.

Fijando  $k, j$  y dejando variar  $i$  en los  $(n - 2)$  índices restantes, concluimos que  $d^2 f(e_k | e_j)$  pertenece al plano generado por  $df(e_j)$  y  $df(e_k)$ . Por tanto

$$d^2 f(e_k, e_j) = \mu df(e_k) + \nu df(e_j).$$

Ya que

$$\langle df(e_k) | df(e_k) \rangle = \langle df(e_j) | df(e_j) \rangle = \lambda^2.$$

Derivando  $\langle df(e_k) | df(e_k) \rangle$  en dirección del vector  $e_j$

$$2 \langle d^2 f(e_k), df(e_k) \rangle = 2d\lambda(e_j).$$

Ahora, derivamos  $\langle df(e_j) | df(e_j) \rangle$  respecto a la dirección del vector  $e_k$

$$2 \langle d^2 f(e_k), df(e_k) \rangle = 2d\lambda(e_k).$$

Entonces

$$\mu = \frac{\langle d^2 f(e_k, e_j) | df(e_k) \rangle}{\lambda^2} = \frac{\lambda d\lambda(e_j)}{\lambda^2} = \frac{d\lambda(e_j)}{\lambda},$$

$$v = \frac{\langle d^2 f(e_j, e_k) | df(e_j) \rangle}{\lambda^2} = \frac{\lambda d\lambda(e_j)}{\lambda^2} = \frac{d\lambda(e_k)}{\lambda}.$$

Sustituyendo

$$d^2 f(e_k, e_j) = \frac{1}{\lambda} (df(e_k) d\lambda(e_j) + df(e_j) d\lambda(e_k)).$$

Denotaremos  $\rho = \frac{1}{\lambda}$ . Ahora calculamos la segunda derivada  $d^2(\rho f)$ . Dado que  $d(\rho f) = d\rho f + \rho df$  obtenemos:

$$\begin{aligned} d^2(\rho f)(e_k, e_j) &= d^2\rho(e_k, e_j)f + \rho d^2 f(e_k, e_j) + d\rho(e_k)df(e_j) + d\rho(e_j)df(e_k) \\ &= d^2\rho(e_k, e_j)f + \frac{1}{\lambda} d^2 f(e_k, e_j) - \\ &\quad \frac{1}{\lambda^2} (d\lambda(e_k)df(e_j) + d\lambda(e_j)df(e_k)) \\ &= d^2\rho(e_k, e_j)f. \end{aligned}$$

**Afirmación.**  $d^2\rho(e_k, e_j) = 0$  para  $k \neq j$ .

Para probar la afirmación se calculará la tercera derivada  $d^3(\rho f)$ , al igual que la segunda derivada en este caso se trata de una forma trilineal simétrica,

$$d^3(\rho f) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n,$$

tal que en la base canónica

$$d^3(\rho f)(a_i, a_j, a_k) = \frac{\partial^3(\rho f)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}.$$

Usando el cálculo anterior tenemos que:

$$d^3(\rho f)(e_k, e_j, e_i) = d^3\rho(e_k, e_j, e_i)f + d^2\rho(e_k, e_j)df(e_i).$$

En la expresión anterior, el primer miembro y la primera parte del segundo miembro son simétricos en los tres índices  $i, j, k$ . Por tanto, lo mismo pasa para la segunda parte del segundo miembro, es decir,

$$d^2\rho(e_k, e_j)df(e_i) = d^2\rho(e_k, e_i)df(e_j).$$

Dado que  $df(e_i)$  y  $df(e_j)$  son linealmente independientes e  $i, j, k$  son distintos y arbitrarios, obtenemos que la afirmación es cierta.

Ahora, observemos que fijando  $p \in U$ , podemos elegir los campos vectoriales  $e_1, \dots, e_n$  de tal manera que forman una base ortonormal en  $p$ . Por tanto la relación  $d^2\rho(e_k, e_j) = 0$  es válida para  $p$  en cualquier base ortonormal en  $p$ , y como este es arbitrario lo mismo pasa en todo  $U$ . Ya que  $d^2\rho$  es una forma bilineal simétrica y

$$0 = d^2\rho\left(\frac{e_j + e_k}{\sqrt{2}}, \frac{e_j - e_k}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(d^2\rho(e_j, e_j) - d^2\rho(e_k, e_k)),$$

obtenemos

$$d^2\rho(e_j, e_j) = d^2\rho(e_k, e_k)$$

para todo  $j \neq k$ .

En resumen, para cada  $p \in U$  y para cualquier base ortonormal  $e_1, \dots, e_n$  en  $p$ , tenemos que  $d^2\rho(e_j, e_k) = \sigma\delta_{jk}$ . Tomando en particular la base canónica

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} = \sigma\delta_{ij}.$$

Calculando la derivada en ambos lados de la igualdad se tiene que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i} = \frac{\partial^3\rho}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^3\rho}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Como  $i$  es arbitrario concluimos que  $\sigma = cte$ .

Primero consideraremos el caso en el que  $\sigma = cte. \neq 0$  y mostraremos que

$$\rho = \frac{\sigma}{2} \sum x_i^2 + \sigma \sum b_i x_i + c$$

con  $b_i$  y  $c$  constantes.

Para probar lo anterior, como  $\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2} = \sigma$  integrando obtenemos

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_i} = \sigma x_i + \sigma b_i,$$

donde  $b_i$  es una función que no depende de  $x_i$ , ahora, como  $\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ ,  $b_i$  tampoco depende de  $x_j$ ,  $j \neq i$ . Por tanto  $b_i$  es una constante y

$$\rho = \frac{1}{2}\sigma x_i^2 + \sigma b_i x_i + \phi_i$$

donde  $\phi_i$  no depende de  $x_i$ .

Además

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j},$$

con  $i \neq j$ , entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \sigma x_j + \sigma b_j$$

donde  $b_j$  no depende de  $x_j$ .

Integrando

$$\phi_i = \frac{1}{2} \sigma x_j^2 + \sigma b_j x_j + \phi_{ij},$$

donde  $\phi_{ij}$  no depende de  $x_j$  y  $x_i$  pues  $\phi_i$  no depende de  $x_i$ .

Por inducción se tiene la afirmación

$$\rho = \frac{\sigma}{2} \sum x_i^2 + \sigma \sum b_i x_i + c.$$

Por tanto, si  $\sigma \neq 0$  podemos escribir

$$\rho = \frac{\sigma}{2} \sum x_i^2 + \sigma \sum b_i x_i + c$$

de la siguiente forma

$$\frac{1}{\lambda} = \rho = a_1 |p - p_0|^2 + k_1,$$

con  $a_1 = \frac{\sigma}{2}$  y  $k_1 = cte$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ .

La prueba estará completa para el caso  $\sigma \neq 0$  si mostramos que  $k_1 = 0$ .

Porque considerando la inversión  $g : U \mapsto \mathbb{R}^n$ :

$$g(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} + p_0,$$

y tomando la composición  $h = g \circ f^{-1}$ , tenemos que  $h$  es una transformación conforme cuyo coeficiente de conformalidad es

$$a_1 |p - p_0|^2 \frac{1}{|p - p_0|^2} = a_1.$$

Por tanto,  $h$  es una isometría seguida de una homotecia, así  $f = h^{-1} \circ g$  es una inversión seguida de una homotecia y de una isometría.



Ahora, para probar que  $k_1 = 0$ . Observemos que aplicando a  $f^{-1}$  el argumento anterior obtenemos

$$\lambda = a_2|f(p) - q_0|^2 + k_2$$

con  $a_2$  y  $k_2$  constantes, entonces

$$(a_1|p - p_0|^2 + k_1)(a_2|f(p) - q_0|^2 + k_2) = 1.$$

Esto muestra que la imagen de la esfera de centro en  $p_0$  bajo  $f$  es otra esfera de centro  $q_0$ . Ya que  $f$  preserva ángulos, la imagen del radio de la esfera de centro  $p_0$  es justamente el radio de la esfera de centro  $q_0$ .

Sea  $p(s)$ ,  $0 \leq s \leq s_0$ , un segmento del radio de la primera esfera contenida en  $U$ , donde  $s$  es la longitud de arco, y sea  $f \circ p(s)$  su imagen. La longitud de la imagen del segmento está dado por

$$\int_0^{s_0} \left| df \left( \frac{dp}{ds} \right) ds \right| ds = \int_0^{s_0} \frac{ds}{a_1|p(s) - p_0|^2 + k_1} = |f(p(s_0)) - f(p(0))|.$$

Si  $k_1 \neq 0$ ,  $|f(p(s_0)) - f(p(0))|$  es una función trascendente de  $|p(s_0) - p_0|$ . Por otro lado,

$$(a_1|p - p_0|^2 + k_1)(a_2|f_p - q_0|^2 + k_2) = 1.$$

implicaría que es una función algebraica, esto es una contradicción. Por tanto  $k_1 = 0$ .

Para el caso cuando  $\sigma = 0$ . En esta situación,

$$\rho = \frac{1}{\lambda} = \sum a_i x_i + c_1 = A_1(x) + c_1$$

con  $c_1 = cte.$ , donde  $\sum a_i x_i + c_1 = A_1(x)$  y  $x = x_1, \dots, x_n$ . De manera similar, aplicando el argumento inicial a  $f^{-1}$  obtenemos

$$(A_1(x) + c_1)(A_2(f(x)) + c_2) = 1.$$

Esto último muestra que un hiperplano paralelo a  $A_1 = 0$  es llevado mediante  $f$  a un hiperplano paralelo a  $A_2 = 0$ . Dado que  $f$  preserva ángulos, una línea perpendicular al hiperplano  $A_1 = 0$  es llevada a una línea perpendicular al hiperplano  $A_2 = 0$ . Considerando un segmento  $p(s)$ ,  $0 \leq s \leq s_0$ , tal que una línea parametrizada por longitud de arco  $s$ , obtenemos de manera análoga

$$|f(p(s_0)) - f(p(0))| = \sum_0^{s_0} \frac{ds}{A_1(p(s)) + c_1}.$$

La expresión anterior genera una contradicción, excepto si  $A_1(p(s))$  fuera 0. Concluimos que  $\sigma = 0$  y  $\lambda$  es constante. En este caso, la longitud de los vectores tangentes son multiplicados por la constante  $\lambda$  y  $f$  es una isometría, seguida de una homotecia.

Finalmente,  $\sigma = 0$  y así queda demostrado el Teorema de Liouville. ■

Complementando, para  $D^2$  en  $\mathbb{C}$  cualquier holomorfismo inyectivo, es un difeomorfismo conforme en su rango, y hay muchas funciones holomorfas que son inyectivas en el disco; por ejemplo si  $p \in \mathbb{C}[x]$ ,  $p'(0) \neq 0$  y  $\epsilon > 0$  es suficientemente pequeña, entonces la función  $z \mapsto p(\epsilon z)$  es inyectiva en el disco. Más aún, el Teorema de representación conforme de Riemann implica que cada dominio en  $\mathbb{C}$  simplemente conexo es equivalente de manera conforme a  $D^2$ , mientras que el teorema anterior implica que para  $n \geq 3$  sólo las bolas abiertas y subespacios abiertos son equivalentemente conformes a  $D^n$ . En los siguientes resultados veremos que apesar de estas diferencias la determinación de los grupos para  $n \geq 3$  puede ser generalizado palabra a palabra como el teorema para  $n = 2$ .

**Corolario 1.1.** *El grupo  $Conf(S^n)$  consiste en todas y sólo de todas las funciones de la forma*

$$x \mapsto \lambda Ai(x) + b$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $A \in O(n)$  e  $i$  es la identidad o una inversión con respecto a un esfera y  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Si  $M$  y  $N$  son dominios de  $S^n$  entonces

$$Conf(M, N) = \{f|_M : f \in Conf(S^n), f(M) = N\}.$$

### **Demostración:**

Las funciones de la forma  $\lambda Ai + b$  constituyen un grupo de difeomorfismos conformes operando transitivamente en  $S^n$  y contiene el grupo de isotropía de  $\infty$  (esto es,  $Conf(\mathbb{R}^n)$ ), y por lo tanto este grupo es  $Conf(S^n)$ .

La segunda afirmación es consecuencia de del Teorema anterior. ■

**Teorema 1.6.** *Dado  $n \geq 2$ , las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) *El grupo  $Conf(D^n)$  consiste en todas y sólo todas las funciones de la forma*

$$x \mapsto Ai(x),$$

donde  $A \in O(n)$  e  $i$  es o la identidad o una inversión con respecto a una esfera ortogonal a  $\partial D^n$ .

(2) El grupo  $Conf(\Pi^{n,+})$  consiste en todas y sólo todas las funciones de la forma

$$x \mapsto \lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i(x) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $A \in O(n-1)$ ,  $i$  es la identidad o una inversión con respecto a una esfera ortogonal a  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  y  $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

**Demostración:**

(1) Por las proposiciones 1.5 y 1.6 respectivamente  $i$  es conforme y mantiene invariante esferas ortogonales con respecto a la que se está invirtiendo, el conjunto de todos los difeomorfismos de la forma requerida es un grupo de difeomorfismos conformes de  $D^n$ .

Y por el contrario, sea  $f \in Conf(D^n)$ , asumamos primero que  $f = \lambda A + b$  ya que la bola con centro en  $b$  y radio  $\lambda$  debe ser  $D^n$ , se sigue que  $b = 0$  y  $\lambda = 1$ , por tanto  $f$  tiene la forma requerida.

Si  $f = \lambda A i + b$  con  $i = i_{x_0, r}$  entonces  $x_0 \notin \overline{D^n}$  de otro modo tendríamos que  $\infty \in \overline{F(D^n)} = \overline{D^n}$  lo cual es falso.

Ahora, consideremos la inversión  $j$  con respecto a la esfera centrada en  $x_0$  con radio  $\sqrt{\|x_0\|^2 - 1}$  la cual es ortogonal a  $\partial D^n$ , entonces  $f \circ j \in Conf(D^n)$  y tiene la forma  $\lambda' A' + b'$ , la conclusión se sigue de la primera parte.

(2) Ya que  $i(x)$  es conforme y deja invariantes planos en los cuales está contenido el centro de la esfera en cuestión, el conjunto de todas las funciones de la forma requerida es un grupo de difeomorfismos conformes en  $\Pi^{n,+}$ .

Y por el contrario, sea  $f \in Conf(\Pi^{n,+})$ . Asumimos primero que  $f = \lambda A + b$ ; ya que  $0$  pertenece a la frontera de  $\Pi^{n,+}$ , lo mismo debe pasar para  $f(0) = b$ , por lo que la última coordenada de  $b$  debe ser  $0$ , así  $A = \lambda^{-1}(f - b) \in Conf(\Pi^{n,+})$ .

Ahora, si para algún  $j < n$  el elemento  $a_{nj}$  en la  $n$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de  $A$  no se anula, la imagen bajo  $A$  del  $j$ -ésimo elemento  $e_j$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  no pertenece a la frontera de  $\Pi^{n,+}$  mientras que  $e_j$  si se encuentra en la frontera, lo cuál es una contradicción.

Ya que lo mismo pasa con  $A^{-1} = A^t$ ,  $A$  debería ser de la forma  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$  con  $B \in O(n-1)$  y  $w = 1$ , y por lo tanto  $f$  tiene la forma requerida.

Por último, considerando a  $f$  de la siguiente forma  $f = \lambda A i + b$  donde  $i$  es una inversión con respecto a una esfera centrada en un punto  $x_0$ , ya que

$f(x_0) = \infty$  pertenece a la frontera de  $\Pi^{n,+}$ , del mismo modo se mantiene para  $x_0$ , es decir,  $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  por lo que para cada esfera centrada en  $x_0$ , es ortogonal a  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . La conclusión de sigue del hecho de que  $f \circ i \in \text{Conf}(\Pi^{n,+})$  tiene la forma  $\lambda'A' + b'$ . ■

**Proposición 1.11.** *Para  $n \geq 2$  los difeomorfismos conformes que preservan la orientación son exactamente igual que el caso general, en particular,*

(1)  $Ai \in \text{Conf}(D^n)$  preserva la orientación si y sólo si

$$[A \in SO(n), i = id] \text{ o } [A \notin SO(n), i \neq id].$$

(2)  $\lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Conf}(\Pi^{n,+})$  preserva la orientación si y sólo si

$$[A \in SO(n-1), i = id] \text{ o } [A \notin SO(n-1), i \neq id].$$

**Lema 1.1.** *Dado  $n \geq 2$ . Si  $\phi \in \text{Conf}(S^n)$  no es la identidad y existe una subvariedad  $N$  de  $S^n$  de codimensión 1, tal que  $\phi$  es la identidad sobre  $N$ , entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

(a)  $N$  está contenida en una esfera, y  $\phi$  es la inversión con respecto a esa esfera.

(b)  $N$  está contenida en un hiperplano y  $\phi$  es la reflexión con respecto a este hiperplano.

### Demostración:

Para  $S^n$  tenemos dos posibilidades.

(1)  $\phi = \lambda A + b$ .

(2)  $\phi = \lambda Ai + b$ , donde  $i$  es una inversión.

(1) Sea  $x \in N$ , con  $x \neq \infty$ , ya que  $d_x \phi|_{T_x N} = id$  se tiene que  $\lambda = 1$ .

Consecuentemente  $\phi$  es una isometría de  $\mathbb{R}^n$ . Ahora, dada  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  una base ortonormal de  $T_x N$  la podemos completar con un vector  $v_n$  para obtener una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $d_x \phi(v_n) = -v_n$ , entonces la reflexión con respecto a  $T_x N$  es una isometría de  $\mathbb{R}^n$  la cual coincide con  $\phi$  en  $x$ , y también en la derivada en  $x$ , por lo tanto por la Proposición 2.1, coincide con  $\phi$ . Ya que  $\phi$  es la identidad sólo en  $T_x N$ , se tiene que  $N \subseteq T_x N$ . Además, si  $d_x \phi(v_n) = v_n$  entonces  $\phi$  es la identidad y esto es una contradicción con la hipótesis. Por tanto queda demostrado (b).

(2) Consideremos  $i = i_{x_0, \alpha}$ . Para  $x \in N$  y  $v \in T_x N$  tenemos

$$\|v\| = \|d_x \phi(v)\| = \frac{\lambda \alpha}{\|x - x_0\|^2} \|v\|.$$

Entonces,

$$\|x - x_0\|^2 = \lambda\alpha.$$

Sea  $\beta = \lambda\alpha$  tenemos que  $N \subseteq M(x_0, \beta)$ . Más aún,  $\phi \circ i_{x_0, \beta}$  es de tipo 1 y es la identidad en  $N$ ; por lo que debe ser necesariamente la identidad, de otro modo podría estar contenida en un hiperplano lo cual es una contradicción ya que la intersección de una esfera y un hiperplano tiene codimensión al menos 2. ■

# Capítulo 2

## Isometrías

En este capítulo se muestra que los grupos de difeomorfismos conformes para el disco unitario y el semi-espacio son iguales a los grupos de isometrías del modelo del disco y el modelo del semi-espacio respectivamente. Además se calculan las funciones que inducen las métricas en dichos modelos.

### 2.1. Isometrías del espacio hiperbólico

**Definición 2.1.** Sean  $M$  y  $N$  variedades Riemannianas, un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  se le llama **isometría** si cumple lo siguiente:

$$\langle u|v \rangle_x = \langle df_x(u)|df_x(v) \rangle_{f(x)} \quad \text{para toda } x \in M \text{ y } u, v \in T_x M .$$

**Definición 2.2.** Una variedad riemanniana  $M$  es **localmente isométrica** a una variedad riemanniana  $N$  si para todo punto  $x \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  en  $M$  y una isometría  $f : U \rightarrow f(U) \subset N$ .

Para  $M$  una variedad Riemanniana, denotamos por  $\mathcal{I}(M)$  al conjunto de todos los difeomorfismos que son isometrías de  $M$  en sí mismo (Isometrías de  $M$ ). Si suponemos a  $M$  orientada, denotamos por  $\mathcal{I}^+(M)$  (i.e) al conjunto de isometrías de  $M$  que preservan la orientación.

$\mathcal{I}(M)$  y  $\mathcal{I}^+(M)$  forman grupos con la operación composición.

Con los siguientes resultados se determinarán  $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$  y  $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ .

**Proposición 2.1.** Sean  $M$  y  $N$  variedades Riemannianas de la misma dimensión, supongamos que  $M$  es conexa y sean

$$\phi_1 : M \rightarrow \phi_1(M) \subseteq N, \quad \phi_2 : M \rightarrow \phi_2(M) \subseteq N,$$

isometrías locales en sus rangos. Si para algún  $y \in M$  tenemos  $\phi_1(y) = \phi_2(y)$  y  $d_y\phi_1 = d_y\phi_2$  entonces  $\phi_1 = \phi_2$ .

**Demostración:**

Sea

$$S = \{x \in M : \phi_1(x) = \phi_2(x), d_x\phi_1 = d_x\phi_2\}$$

el cual es cerrado. Como  $y \in S$  entonces  $S \neq \emptyset$ , para probar que es el total demostraremos que es abierto. Sea  $x \in S$ , ya que  $M$  y  $N$  son de la misma dimensión los rangos de  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son abiertos en  $N$ . Así, podemos encontrar una vecindad abierta  $V$  de  $\phi_1(x) = \phi_2(x)$  y dos abiertos  $U_1$  y  $U_2$  de  $x$  tales que  $\phi_i : U_i \rightarrow V$   $i = 1, 2$ . sea suprayectiva.

Sea  $U \subseteq U_1$  una vecindad normal de  $x$  y  $p : W \subset T_x M \rightarrow U$  la restricción correspondiente de la transformación exponencial  $\exp(x)$ .

Notemos que

$$f = \left(\phi_2|_{U_2}\right)^{-1} \circ \left(\phi_1|_{U_1}\right)$$

es una isometría de  $U_1$  en  $U_2$ . Además,  $f(x) = x$  y  $d_x f = I$ . Si  $\gamma$  es una geodésica en  $U$  que empieza en  $x$  entonces  $f \circ \gamma$  es una geodésica que empieza en  $x$  con vector tangente

$$(f \circ \gamma)'_{(0)} = d_x f(\gamma'(0)) = \gamma'(0)$$

y por lo tanto  $f \circ \gamma = \gamma$  lo cual implica que  $f \circ p = p$  y finalmente  $f|_U = id$ . Así  $\phi_1|_U = \phi_2|_U$  y  $U \subset S$ , de esta manera demostramos que  $S$  es abierto. Como  $M$  es conexo hemos demostrado que  $S = M$ . ■

Sea  $V$  espacio vectorial real de dimensión  $n$ , y sea  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  una forma bilineal no degenerada sobre  $V$ .

Consideremos una base  $v_1, \dots, v_n$  para  $V$  tal que:

$$\langle v_i | v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \leq p \\ -1 & \text{si } i = j > p \end{cases} \quad (2.1)$$

Si  $q = n - p$  la pareja  $(p, q)$  depende solo de  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , es llamada *signatura*. Sea  $GL(V)$  el grupo general lineal de  $V$ , tenemos que:

$$O(V, \langle \cdot | \cdot \rangle) = \{A \in GL(V) : \langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle \text{ para toda } x, y \in V\}.$$

Dicho grupo es llamado Grupo Ortogonal de orden  $n$ . Si consideramos  $V = W \oplus W'$  y  $p : V \rightarrow W$  la proyección asociada, podemos llamar reflexión a la función lineal

$$\begin{aligned}\rho : V &\rightarrow V \\ \rho(v) &= 2p(v) - v.\end{aligned}$$

Notemos que  $\rho$  está en  $O(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  si y sólo si  $W' = W^\perp$ , donde la ortogonalidad es con respecto a  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . En este caso decimos que  $\rho$  es la reflexión con respecto a  $W$  o paralelo a  $W^\perp$ . Desde ahora llamaremos *reflexiones* solamente aquellas con respecto al hiperplano  $W$  (*i.e* paralelas al vector  $v$  para el cual  $\langle v | v \rangle \neq 0$ ).

**Proposición 2.2.** *El grupo  $O(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  es generado por reflexiones.*

**Demostración:**

Hagamos la prueba por inducción sobre la dimensión de  $V$ .

Para  $n = 1$  es claro.

Supongamos que la proposición es cierta para  $n = k$ .

Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$  y sea  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  una forma bilineal no degenerada para  $V$ .

Sea  $A \in O(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  y elegimos  $v \in V$  tal que  $\langle v | v \rangle \neq 0$ .

Podemos asumir  $\langle Av - v | Av - v \rangle \neq 0$ , de otro modo  $\langle -Av - v | -Av - v \rangle \neq 0$ , y reemplazamos  $A$  por  $-A$ .

Sea  $\rho$  una reflexión paralela a  $Av - v$ ; ya que

$$v = \frac{1}{2}(Av + v) - \frac{1}{2}(Av - v) \text{ y } \langle Av + v | Av - v \rangle = 0$$

tenemos que,

$$\rho(v) = \frac{1}{2}(Av + v) + \frac{1}{2}(Av - v) = Av \text{ y } (\rho \circ A)(v) = v,$$

así,  $(\rho \circ A)|_{v^\perp} \in O(v^\perp, \langle \cdot | \cdot \rangle|_{v^\perp \times v^\perp})$ . Dado que cualquier reflexión en  $v^\perp$  se extiende a una reflexión en  $V$  la hipótesis de inducción implica que  $A$  es producto de reflexiones. ■

Si  $V = \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  la forma bilineal estandar en la signatura  $(n,1)$  e  $I_n$  el hiperboloide. Denotamos por  $O(I_n)$  al subgrupo de  $O(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  que



mantiene invariante a  $I_n$  y

$$SO(I_n) = O(I_n) \cap SL(n+1, \mathbb{R}).$$

Notemos que  $O(I_n)$  y  $SO(I_n)$  son subgrupos cerrados en el sentido topológico de  $GL(n+1, \mathbb{R})$  y por lo tanto existe una estructura de Grupo de Lie para ellos.

**Proposición 2.3.** *El grupo  $O(I_n)$  es generado por reflexiones contenidas en él.*

**Demostración:**

Notemos que cualquier reflexión paralela al vector  $v$  con  $\langle v|v \rangle \neq 0$  mantiene  $I_n \cup (-I_n)$  invariante e intercambia las dos partes de este si  $\langle v|v \rangle < 0$ . Sea  $A \in O(I_n)$ , por la proposición anterior lo expresamos como producto de reflexiones,  $A = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$ .

Sea  $\rho_i$  paralela al vector  $x_i$ ; si  $\langle x_i|x_i \rangle < 0$ , podemos construir una base ortogonal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que contenga a  $x_i$ , digamos  $\{x_i, w_1, \dots, w_n\}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la propiedad de que  $\langle w_j|w_j \rangle > 0 \forall j$ . Entonces  $\rho_i$  está dado por  $-(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n)$  donde  $\sigma_j$  es la reflexión paralela a  $w_j$ .

De esta manera,  $A = \pm(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_h)$  donde todas las  $\tau_k$  son reflexiones y pertenecen a  $O(I_n)$ , así el resultado queda probado. ■

**Teorema 2.1.** *El grupo  $\mathcal{I}(\mathbb{I}^n)$  es la restricción a  $\mathbb{I}^n$  de elementos de  $O(I_n)$  de donde  $\mathcal{I}(\mathbb{I}^n) \cong O(I_n)$ , en particular  $\mathcal{I}(\mathbb{I}^n)$  es generado por reflexiones. Similarmente  $\mathcal{I}^+(\mathbb{I}^n) \cong SO(I_n)$ .*

**Demostración:**

Sean  $f \in \mathcal{I}(\mathbb{I}^n)$  y  $x \in \mathbb{I}^n$  arbitrario, ya que  $d_x f$  es una isometría de  $x^\perp$  en  $f(x)^\perp$  y  $\langle x|x \rangle = \langle f(x)|f(x) \rangle = -1$ , la función

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}x \oplus x^\perp &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ \lambda x + v &\longmapsto \lambda f(x) + d_x f(v) \end{aligned}$$

es un elemento de  $O(I_n)$ .

Como la restricción de  $A$  en  $\mathbb{I}^n$  es una isometría y  $f(x) = Ax$ ,  $d_x f = A|_{T_x \mathbb{I}^n}$  entonces por la Proposición 2.1,  $f$  es la restricción de  $A$  en  $\mathbb{I}^n$ .

Se sigue que

$$\mathcal{I}(\mathbb{I}^n) = \{A|_{\mathbb{I}^n} : A \in O(I_n)\}.$$

Ya que el espacio generado por  $I_n$  es  $\mathbb{R}^{n+1}$ , la función que

$$A \mapsto A|_{\mathbb{I}_n}$$

es inyectiva y por tanto es el isomorfismo que buscamos ya que  $A \in O(I_n)$  y  $A|_{\mathbb{I}_n} \in \mathcal{I}(\mathbb{I}_n)$ . Para el caso cuando se preserva la orientación, se sigue del caso general. ■

**Teorema 2.2.** *Los siguientes grupos son generados por reflexiones:*

1.  $\mathcal{I}(S^n) = \{A|_{S^n} : A \in O(n+1)\}$ ,
2.  $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto Ax + b : A \in O(n), b \in \mathbb{R}\}$ .

**Demostración:**

Las contenciones  $\supseteq$  son claras. Para las faltantes, en el primer caso, se tiene de manera análoga al teorema anterior y para el segundo caso consideremos que la traslación por el vector  $b$  es el producto de reflexiones con respecto a  $b^\perp$  y  $b/2 + b^\perp$ . ■

## 2.2. Isometrías del espacio hiperbólico: modelo del disco y modelo del semi-espacio.

**Teorema 2.3.** *Consideremos el modelo del disco del espacio hiperbólico  $\mathbb{D}^n$ , se tiene que las siguientes igualdades son ciertas*

$$\mathcal{I}(\mathbb{D}^n) = \text{Conf}(D^n) \text{ y } \mathcal{I}^+(\mathbb{D}^n) = \text{Conf}^+(D^n),$$

*en particular estos grupos operan transitivamente en  $\mathbb{D}^n$ .*

**Demostración:**

Empezamos por probar que la restricción de la proyección estereográfica  $\rho : \mathbb{I}^n \rightarrow D^n$  es conforme.

Denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(n,1)}$  la forma bilineal estandar en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ :

Ya que  $\rho(x, t) = \frac{x}{1+t}$  entonces tenemos que

$$d_{(x,t)}\rho(y, s) = \frac{y}{1+t} - \frac{sx}{(1+t)^2},$$

para  $(x, t) \in \mathbb{I}^n$ ,  $(y, s), (z, r) \in T_{(x,t)}\mathbb{I}^n$ . Además, notemos que

$$\begin{aligned}\langle x|x \rangle &= t^2 - 1, \\ \langle x|y \rangle &= ts, \\ \langle x|z \rangle &= rt.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle d_{(x,t)}(y, s) | d_{(x,t)}(z, r) \rangle &= \left\langle \frac{y}{1+t} - \frac{sx}{(1+t)^2} \middle| \frac{z}{1+t} - \frac{rx}{(1+t)^2} \right\rangle \\ &= \frac{\langle y|z \rangle}{(1+t)^2} - \frac{2rst}{(1+t)^3} + \frac{rs(t^2 - 1)}{(1+t)^4} \\ &= \frac{1}{(1+t)^2} (\langle y|z \rangle - rs) \\ &= \frac{\langle (y, s) | (z, r) \rangle_{(n,1)}}{(1+t)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto  $\rho$  es conforme.

Sea  $\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{D}^n)$ , ya que por definición  $\rho$  es una isometría, tenemos que

$$\rho^{-1} \circ \phi \circ \rho \in \mathcal{I}(\mathbb{I}^n) \subseteq \text{Conf}(\mathbb{I}^n),$$

además,  $\rho$  es conforme de  $\mathbb{I}^n$  a  $D^n$ , así, obtenemos  $\phi \in \text{Conf}(D^n)$  por lo que la contención de ida está probada.

Por el contrario usando el Teorema 1.6 debemos probar que todos los elementos de  $O(n)$  y todas las inversiones con respecto a esferas ortogonales a  $\partial D^n$  pertenecen a  $\mathcal{I}(\mathbb{D}^n)$ .

Para los elementos del grupo ortogonal notemos que si  $A \in O(n)$ , entonces

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(I_n) = \mathcal{I}(\mathbb{I}^n)$$

así

$$\rho \circ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \rho^{-1} = A \in \mathcal{I}(\mathbb{D}^n).$$

Para el segundo hecho, observemos que  $\rho^{-1}$  está dado por

$$\rho^{-1} : x \mapsto \frac{1}{1 - \|x\|^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 + \|x\|^2 \end{pmatrix}.$$

Si  $(y, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\langle (y, t) | (y, t) \rangle_{(n,1)} = 1$  entonces el conjunto

$$N = \{x \in D^n : \langle \rho^{-1}(x) | (y, t) \rangle_{(n,1)} = 0\},$$

está dado por la siguiente ecuación

$$2\langle x | y \rangle = (1 + \|x\|^2)(\sqrt{\|y\|^2 - 1}).$$

Dado  $w = \frac{y}{\sqrt{\|y\|^2 - 1}}$  tenemos que

$$2\langle x | w \rangle = 1 + \|x\|^2 \text{ si y sólo si } \|x - w\|^2 = \|w\|^2 - 1.$$

Por tanto  $N$  es la intersección de  $D^n$  con la esfera  $S_w$  de centro  $w$  y radio  $\sqrt{\|w\|^2 - 1}$  la cual es ortogonal a  $\partial D^n$ .

Si  $\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{I}^n)$  es la reflexión paralela a  $(y, t)$  entonces  $\rho \circ \phi \circ \rho^{-1}$  es un difeomorfismo conforme de  $D^n$  diferente de la identidad, pero en el conjunto  $N$  sí es la identidad, esto último ya que al aplicar la reflexión paralela a  $(y, t)$  todos los vectores en  $N$  son ortogonales a  $(y, t)$  y quedarían en la misma posición. Por los teoremas 1.4 y 1.6,  $\phi$  se extiende a un difeomorfismo de  $S^n$ , más aún, como  $N$  es subvariedad de  $D^n$  y está contenida en una esfera aplicamos el Lema 1.1, así  $\rho \circ \phi \circ \rho^{-1}$  es la inversión con respecto a  $S_w$  y por lo tanto pertenece a  $\mathcal{I}(\mathbb{D}^n)$ . Por último, dado  $w \notin D^n$  es posible encontrar  $(y, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\langle (y, t) | (y, t) \rangle_{(n,1)} = 1$  y  $w = \frac{y}{t}$ .

El caso donde se preserva la orientación es consecuencia directa de lo anterior.

■

**Teorema 2.4.** *Consideremos el modelo del semi-espacio para el espacio hiperbólico,  $\mathbb{I}^{n,+}$ , se tienen las siguientes igualdades:*

$$\mathcal{I}(\mathbb{I}^{n,+}) = \text{Conf}(\mathbb{I}^{n,+}) \text{ y } \mathcal{I}^+(\mathbb{I}^{n,+}) = \text{Conf}^+(\mathbb{I}^{n,+})$$

### Demostración:

Sabemos que  $i : D^n \rightarrow \mathbb{I}^{n,+}$ , usada en la primera parte como difeomorfismo entre el  $D^n$  y  $\mathbb{I}^{n,+}$ , es la inversión con respecto a la esfera  $(0, 0, \dots, -1)$  y radio  $\sqrt{2}$  es conforme, por lo tanto el resultado se sigue del teorema anterior.

■

Usando los últimos dos teoremas es posible calcular las métricas para ambos modelos. Como  $\mathbb{D}^n$  y  $\mathbb{I}^{n,+}$  son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , el haz tangente queda identificado con  $\mathbb{D}^n \times \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{I}^{n,+} \times \mathbb{R}^n$  respectivamente.

**Teorema 2.5.** Para  $x \in \mathbb{D}^n$ ,  $(y, t) \in \mathbb{I}^n$  fijos y  $v \in \mathbb{R}^n$  las funciones que inducen las métricas para ambos modelos están dadas por

$$\begin{aligned} ds_x^2 &: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ ds_x^2(v) &= \left( \frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \|v\|^2, \\ ds_{(y,t)}^2 &: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ ds_{(y,t)}^2(v) &= \frac{\|v\|^2}{t^2}, \end{aligned}$$

respectivamente.

**Demostración:**

Calculando la derivada de la función  $p : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  en el punto  $(0, \dots, 0, 1)$  tenemos que

$$d_{(0,1)}p(r, s) = \frac{y}{1 + 1} = \frac{y}{2}$$

en  $\mathbb{R}^n \times \{0\} = T_{(0,1)}\mathbb{I}^n$ , y la restricción de  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{(n,1)}$  a  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  es el producto escalar estandar, así

$$ds_0^2(v) = 4\|v\|^2.$$

Para  $x \in \mathbb{D}^n$ , consideremos la inversión con respecto a la esfera de centro  $c = \frac{x}{\|x\|^2}$  y radio al cuadrado  $r^2 = \frac{1}{\|x\|^2} - 1$ , ortogonal a  $\partial\mathbb{D}^n$ , la cual es una isometría de  $\mathbb{D}^n$ , además

$$\begin{aligned} d_{c,r^2}(0) &= \left( \frac{1}{\|x\|^2} - 1 \right) \frac{0 - \frac{x}{\|x\|^2}}{\left\| 0 - \frac{x}{\|x\|^2} \right\|^2} \\ &= \frac{x}{\|x\|^2} \left( \frac{1}{\|x\|^2} - 1 \right) \frac{-x\|x\|^2}{\|x\|^2} + \frac{x}{\|x\|^2} \\ &= x. \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} i_{x_0, \alpha} &= T \circ i_{(0, \alpha)} \circ T^{-1}, \\ d_x i_{(1,0)} &= \frac{1}{\|x\|^2} P_x y \end{aligned}$$

donde  $T(x) = x + x_0$  y  $P_x y$  es una reflexión.

Así la derivada de la inversión  $i_{(c,r^2)}$  en 0 es  $(1 - \|x\|^2)$  veces un operador ortogonal, y esto implica que

$$ds_x^2 = \left( \frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \|v\|^2.$$

Para  $\mathbb{P}^{n,+}$  la derivada de la inversión  $i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n,+}$  en el punto 0 es dos veces un operador ortogonal, por lo que

$$ds_{(0,1)}^2(v) = \|v\|^2.$$

Ya que las traslaciones horizontales son isometrías, notemos que la derivada en  $(0, 1)$  del coeficiente de dilatación  $t > 0$  es  $t$  veces la identidad, por tanto

$$ds_{(y,t)}^2(v) = \frac{\|v\|^2}{t^2}.$$

■

**Corolario 2.1.** *Para cualquier punto de  $\mathbb{D}^n$  o  $\mathbb{P}^{n,+}$  la métrica hiperbólica es un múltiplo positivo de algún punto euclidiano.*

Por el corolario anterior la noción de difeomorfismo conforme en  $\mathbb{D}^n$  y  $\mathbb{P}^{n,+}$  es la misma si consideramos la métrica Euclidiana y una Métrica hiperbólica. Por los teoremas 1.9 y 1.10 tenemos que los difeomorfismos conformes de  $\mathbb{D}^n$  y  $\mathbb{P}^{n,+}$  con respecto a la métrica hiperbólica son isometrías. Este hecho no depende de una representación concreta de  $\mathbb{H}^n$  sólo de la métrica, entonces tenemos la afirmación siguiente:

*Una condición suficiente para que un difeomorfismo preserve distancias es que preserve ángulos.*

El regreso es válido para toda variedad Riemanniana. Lo podemos interpretar intuitivamente en que una unidad de medida intrínsecamente definida en  $\mathbb{H}^n$  no puede ser cambiada. Más adelante se probará este hecho.

# Capítulo 3

## Geodésicas y curvatura

En este último capítulo concluimos describiendo las geodésicas de los modelos, dando una clasificación algebraica y geométrica de ellas. Se definen y describen los subespacios hiperbólicos y finalmente se calcula la curvatura seccional del espacio hiperbólico.

### 3.1. Geodésicas, subespacios hiperbólicos y otros resultados.

Empezamos con el modelo del hiperboloide.

**Proposición 3.1.** Sean  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{H}^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in T_x \mathbb{H}^n$ , tales que  $\langle y|y \rangle_{(n,1)} = 1$ , la geodésica que empieza en  $x$  con velocidad  $y$  está dada por

$$t \mapsto \cosh(t)x + \sinh(t)y.$$

En particular, este conjunto está dado por la intersección de  $\mathbb{H}^n$  con el subespacio lineal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  generado por  $x$  y  $y$ .

#### Demostración:

Sea  $W$  el plano generado por  $x$  y  $y$ , y sea  $\omega$  la geodésica maximal -es decir que no está contenida en otra- que inicia en  $x$  con velocidad  $y$ .

Sea  $\phi \in O(I_n)$  definido por  $\phi|_W = id$  y  $\phi|_{W^\perp} = -id$ . Ya que  $\phi(x) = x$  y  $d_x \phi(y) = y$ ,  $\omega$  es  $\phi$ -invariante, y por lo tanto  $\omega \subseteq W \cap \mathbb{H}^n$ .

Para la otra implicación consideremos  $W$  como  $rx + sy = 0$  con  $r, s \in \mathbb{R}$ . Si

este se intersecta con  $\mathbb{H}^n$  entonces

$$\begin{aligned} -1 &= (rx_1 + sy_1)^2 + \cdots + (rx_n + sy_n)^2 - (rx_{n+1} + sy_{n+1})^2 \\ -1 &= r^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2) + 2sr \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1} \right) \\ &\quad + s^2(y_1^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2) + \\ -1 &= s^2 - r^2. \end{aligned}$$

Lo cual quiere decir que  $s$  y  $r$  pertenecen a una hipérbola, por lo que  $r = \cosh(t)$  y  $s = \sinh(t)$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,

$$t \mapsto \cosh(t)x + \sinh(t)y$$

da una parametrización de  $W \cap \mathbb{H}^n$ ; evaluando en 0 coincide con  $\omega$  y también su derivada, por tanto coincide con  $\omega$ .  $\blacksquare$

Por el resultado anterior sabemos que cada geodésica en  $\mathbb{H}^n$  está definida en todo  $\mathbb{R}$  y por el Teorema de Hopf-Rinow ver [3, p.147], se tienen los siguientes corolarios.

**Corolario 3.1.** *La variedad Riemanniana  $\mathbb{H}^n$  es completa.*

**Corolario 3.2.** *Existe una y sólo una geodésica que pasa a través de dos puntos diferentes de  $\mathbb{H}^n$ .*

**Proposición 3.2.** *Si  $x \in S^n$ ,  $y \in T_x S^n$ , tales que  $\langle y|y \rangle = 1$  entonces la geodésica que empieza en  $x$  con velocidad  $y$  está dada por*

$$t \mapsto \cos(t)x + \sin(t)y,$$

con  $t \in \mathbb{R}$ . En particular este conjunto está dado por la intersección de  $S^n$  con el subespacio lineal  $\mathbb{R}^{n+1}$  generado por  $x$  y  $y$ .

La prueba es análoga a la dada para el caso del hiperboloide. Para los siguientes resultados introduciremos la siguiente definición.

**Definición 3.1.** *Diremos que un subconjunto  $N$  de  $\mathbb{H}^n$  es un **subespacio hiperbólico** si para todo par de puntos, la geodésica que pasa por dicho par queda contenida en el subconjunto.*

Por ende puntos y geodésicas completas son subespacios hiperbólicos. De manera que la Proposición 3.1 implica el siguiente corolario.



**Corolario 3.3.** *Sea  $N \subset \mathbb{I}^n$ , este es un subespacio hiperbólico si y sólo si es la intersección de  $\mathbb{I}^n$  con un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En particular los subespacios hiperbólicos son subvariedades de  $\mathbb{I}^n$ , y por tanto sus dimensiones están bien definidas.*

**Definición 3.2.** *Diremos que un subespacio afín  $Y \subset \mathbb{R}^n$  es **vertical** si este tiene la forma  $Y' + \mathbb{R}e_n$  donde  $Y'$  es un subespacio afín de  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  y  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ .*

Desde ahora consideraremos esferas en  $\mathbb{R}^n$  de dimensión menor que  $n - 1$ ; que son la intersección de una esfera de dimensión  $n - 1$  con un subespacio afín que pasa a través de su centro; si se habla de una inversión con respecto a una esfera se seguirá haciendo referencia a la esfera con máxima dimensión.

**Definición 3.3.** *Sean  $M_1$  y  $M_2$  esferas o subespacios afines en  $\mathbb{R}^n$  con  $m_1$  y  $m_2$  sus respectivas dimensiones. Diremos que  $M_1$  y  $M_2$  son **ortogonales**, si para cada  $x \in M_1 \cap M_2$  el subespacio lineal  $W = T_x M_1 \cap T_x M_2$  tiene dimensión  $\max\{0, m_1 + m_2 - n\}$  y los complementos ortogonales de  $W$  en  $T_x M_1$  y  $T_x M_2$  son ortogonales entre sí.*

**Proposición 3.3.** 1. *Sea  $N \subset \mathbb{D}^n$ , este es un subespacio hiperbólico si y sólo si es la intersección de  $\mathbb{D}^n$  con un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$  o con una esfera ortogonal a  $\partial\mathbb{D}^n$ . En particular las geodésicas son obtenidas por parametrización de diámetros de  $\mathbb{D}^n$  y círculos ortogonales a  $\partial\mathbb{D}^n$ .*

2. *Sea  $N \subset \mathbb{I}^{n,+}$  este es un subespacio hiperbólico si y sólo si es la intersección de  $\mathbb{I}^{n,+}$ , con un subespacio afín vertical o con una esfera ortogonal a  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . En particular las geodésicas son obtenidas por la parametrización de líneas verticales y círculos ortogonales a  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ .*

### **Demostración:**

Notemos que la imagen bajo la proyección estereográfica  $p : \mathbb{I}^n \mapsto \mathbb{D}^n$  de un subespacio lineal  $W$  que pasa por el punto  $(0, \dots, 0, 1)$  es la intersección de  $\mathbb{D}^n$  con un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto los subespacios hiperbólicos de  $\mathbb{D}^n$  que pasan por  $0$ , son la intersección de  $\mathbb{D}^n$  con un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $x \in \mathbb{D}^n$  la inversión  $i$  con respecto a la esfera de centro  $\frac{x}{\|x\|^2}$  y radio

$\sqrt{\frac{1}{\|x\|^2} - 1}$  es una isometría de  $\mathbb{D}^n$  y este manda 0 en  $x$ ; lo cual implica que manda el conjunto de subespacios que pasan través 0 al conjunto de todos los subespacios hiperbólicos que pasan a través de  $x$ .

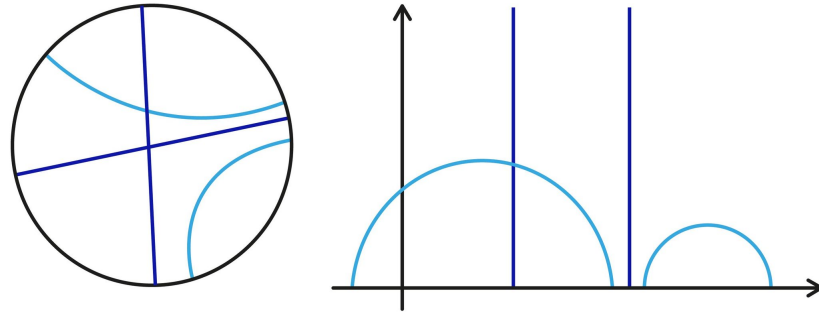
Ahora, si  $Y$  es un subespacio lineal de dimensión  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ , tenemos dos posibilidades:

(i) Si  $x \in Y$  entonces el centro de la esfera respecto a la que se está invirtiendo también estaría contenido en  $Y$ , por tanto  $i(Y) = Y$ .

(ii) Para  $x \notin Y$  consideremos el subespacio  $X$  generado por  $Y$  y  $x$ , así  $X$  por la misma razón es invariante bajo  $i$  por tanto  $i(Y) \subset X$ . Ya que  $Y$  es un hiperplano en  $X$ , entonces  $i(Y)$  es una esfera en  $X$ , por tanto  $i(Y)$  es una esfera de dimensión  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ . Ya que  $i$  es conforme y  $Y$  es ortogonal a  $\partial\mathbb{D}^n$  (dado que es un subespacio lineal) entonces  $i(Y)$  también es ortogonal a  $\partial\mathbb{D}^n$ .

Por el mismo argumento  $i$  manda subespacios lineales y esferas ortogonales a  $\partial\mathbb{D}^n$  que pasan a través de  $x$ , en subespacios lineales, por tanto (1) queda probado.

(2) Para el semi-espacio tenemos que es consecuencia del primero; Ya que la función  $i : \mathbb{D}^n \mapsto \mathbb{H}^{n,+}$  usada en la primera sección, es una inversión la cual por el mismo argumento manda el conjunto de esferas y subespacios afines en el mismo, y dado que es conforme, se concluye el resultado deseado. ■



**Figura 3.1.** Caso 2-dimensional de las geodésicas en el modelo del disco y el modelo del semi-espacio.

**Corolario 3.4.** *Un subespacio hiperbólico de dimensión  $p$  en  $\mathbb{H}^n$  es isométricamente difeomorfo a  $\mathbb{H}^p$ .*

**Demostración:**

Consideremos el modelo del disco y asumamos que el subespacio hiperbóli-

co contiene a 0. Por la proposición anterior es un disco de dimensión  $p$ , y por el Teorema 1.11 este hereda la misma métrica como la de  $\mathbb{D}^p$ . ■

En el siguiente resultado se calcularán las distancias hiperbólicas para el modelo del disco y el modelo del semi-espacio.

**Corolario 3.5.** 1. *Dados  $x, y \in \mathbb{D}^n$  tenemos que*

$$d(x, y) = 2 \operatorname{arctanh} \left( \frac{\|x - y\|}{(1 - 2\langle x|y \rangle + \|x\|^2\|y\|^2)^{1/2}} \right).$$

2. *Dados  $(x, t), (y, s) \in \mathbb{P}^{n,+}$  tenemos que*

$$d((x, t), (y, s)) = 2 \operatorname{arctanh} \left( \frac{\|x - y\|^2 + (t - s)^2}{\|x - y\|^2 + (t + s)^2} \right)^{1/2}.$$

**Demostración:**

(1) Sea  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|v\| = 1$ . Consideremos el diámetro determinado por  $v$  parametrizado como sigue

$$\gamma : t \mapsto \tanh(t/2)v$$

con  $t \in \mathbb{R}$ .

Entonces, por el Teorema 2.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{v}{2 \cosh^2 \left( \frac{t}{2} \right)} \\ &= \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t}{2} \right) \\ &= \frac{v}{2} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} ds_{\gamma(t)}^2(\gamma'(t)) &= \left( \frac{2}{1 - \|\tanh(t/2)v\|^2} \right)^2 \left\| \frac{v}{2} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \right\|^2 \\ &= \left( \frac{2}{1 - \tanh^2(t/2)} \right)^2 \frac{1}{4} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Se sigue que para  $x \in \mathbb{D}^n$  fijo

$$d(0, x) = 2\operatorname{arctanh}\|x\|.$$

Ahora, sean  $y \in \mathbb{D}^n$  y la inversión  $i$  con respecto a la esfera centrada en  $\frac{x}{\|x\|^2}$

y con radio  $\sqrt{\frac{1}{\|x\|^2} - 1}$  está dada por

$$\begin{aligned} i(z) &= \frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^2} \frac{z - \frac{x}{\|x\|^2}}{\left\|z - \frac{x}{\|x\|^2}\right\|^2} + \frac{x}{\|x\|^2} \\ &= \frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^2} \frac{\frac{\|x\|^2 z - x}{\|x\|^2}}{\left\|\frac{\|x\|^2 z - x}{\|x\|^2}\right\|^2} + \frac{x}{\|x\|^2} \\ &= \frac{(1 - \|x\|^2)\|x\|^4}{\|x\|^4} \frac{\|x\|^2 z - x}{\|\|x\|^2 z - x\|^2} + \frac{x}{\|x\|^2} \\ &= (1 - \|x\|^2) \frac{z\|x\|^2 - x}{\|z\|x\|^2 - x\|^2} + \frac{x}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

Ya que  $i(x) = 0$  tenemos que

$$d(x, y) = d(0, i(y)) = 2\operatorname{arctanh}\|i(y)\|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} i(y) &= (1 - \|x\|^2) \frac{\|x\|^2 y - x}{\|\|x\|^2 y - x\|^2} + \frac{x}{\|x\|^2} \\ &= \frac{(1 - \|x\|^2)(\|x\|^2 y - x)}{\langle y\|x\|^2 - x\|y\|x\|^2 - x \rangle} + \frac{x}{\|x\|^2} \\ &= \frac{(1 - \|x\|^2)(y\|x\|^2 - x)}{\|x\|^4\|y\|^2 - 2\|x\|^2\langle x|y \rangle + \|x\|^2} + \frac{x}{\|x\|^2} \\ &= \frac{(1 - \|x\|^2)(y\|x\|^2 - x)}{\|x\|^2(\|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle x|y \rangle + 1)} + \frac{x}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

Haciendo  $C = \|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle x|y \rangle + 1$

$$i(y) = \frac{(1 - \|x\|^2)(y\|x\|^2 - x) + xC}{\|x\|^2 C}.$$

Ahora, calculando la norma al cuadrado

$$\begin{aligned}
\|i(y)\|^2 &= \frac{1}{\|x\|^4 C^2} [(1 - \|x\|^2)^2 \|y\| \|x\|^2 - \|x\|^2 + \\
&\quad 2(1 - \|x\|^2) C \langle y \|x\|^2 - x | x \rangle + C^2 \|x\|^2] \\
&= \frac{1}{\|x\|^4 C^2} [(1 - \|x\|^2)^2 C \|x\|^2 + 2(1 - \|x\|^2) C \|x\|^2 \langle x | y \rangle \\
&\quad - 2(1 - \|x\|^2) C \|x\|^2 + C^2 \|x\|^2] \\
&= \frac{\|x\|^2 C}{\|x\|^4 C^2} [(1 - \|x\|^2)^2 + 2(1 - \|x\|^2) \langle x | y \rangle - 2(1 - \|x\|^2) + C] \\
&= \frac{1}{\|x\|^2 C} [(1 - \|x\|^2)^2 + 2(1 - \|x\|^2) \langle x | y \rangle \\
&\quad - 2(1 - \|x\|^2) + \|x\|^2 \|y\|^2 - 2 \langle x | y \rangle + 1] \\
&= \frac{1}{\|x\|^2 C} [1 - 2\|x\|^2 + \|x\|^4 + 2 \langle x | y \rangle - 2\|x\|^2 \langle x | y \rangle \\
&\quad - 2 + 2\|x\|^2 + \|x\|^2 \|y\|^2 - 2 \langle x | y \rangle + 1] \\
&= \frac{1}{\|x\|^2 C} [\|x\|^2 (\|x\|^2 - 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2)] \\
&= \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2 - 2 \langle x | y \rangle + 1} (\|x\|^2 - 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$d(x, y) = 2 \operatorname{arctanh} \left( \frac{\|x - y\|}{(1 - 2 \langle x | y \rangle + \|x\|^2 \|y\|^2)^{1/2}} \right).$$

(2) Consideremos la inversión de la definición del modelo del semi espacio, que relaciona ambos modelos y está dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
i : \mathbb{D}^n &\longmapsto \mathbb{R}^n \\
x &\longmapsto 2 \frac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2} - e_n.
\end{aligned}$$

Al ser  $i$ , una isometría entre ambos modelos, la distancia entre dos puntos en el modelo del semi espacio queda determinada por

$$d_{\mathbb{H}^n, +} = d_{\mathbb{D}^n}(i^{-1}(x, t), i^{-1}(y, s)).$$

Donde  $(x, t), (y, s) \in \mathbb{P}^{n,+}$ .

Como las inversiones son involuciones

$$d_{\mathbb{P}^{n,+}} = d_{\mathbb{D}^n}(i(x, t), i(y, s)).$$

Para cada punto tenemos que

$$i((x, t)) = 2 \frac{(x, t+1)}{\|x\|^2 + (t+1)^2} - e_n$$

$$i((y, s)) = 2 \frac{(y, s+1)}{\|y\|^2 + (s+1)^2} - e_n.$$

Así,

$$\begin{aligned} & \|i(x, t) - i(y, s)\|^2 \\ = & \left\| \frac{2(x, t+1)}{\|x\|^2 + (t+1)^2} - e_n - \frac{2(y, s+1)}{\|y\|^2 + (s+1)^2} + e_n \right\|^2 \\ = & \frac{4(\|x\|^2 + (t+1)^2)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)^2} - 2 \left[ \frac{4(\langle x|y \rangle + st + t + s + 1)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \right] \\ & + \frac{4(\|y\|^2 + (s+1)^2)}{(\|y\|^2 + (s+1)^2)^2} \\ = & \frac{4}{\|x\|^2 + (t+1)^2} - 2 \left[ \frac{4(\langle x|y \rangle + st + t + s + 1)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \right] \\ & + \frac{4}{\|y\|^2 + (s+1)^2} \\ = & \frac{4(\|y\|^2 + (s+1)^2) - 2[4(\langle x|y \rangle + st + t + s + 1)] + 4(\|x\|^2 + (t+1)^2)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \\ = & \frac{4(\|y\|^2 + \|x\|^2 + s^2 + 2s + 1 - 2st - 2t - 2s - 2 + t^2 + 2t + 1 - 2\langle x|y \rangle)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \\ = & \frac{4(\|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x|y \rangle + t^2 - 2st + s^2)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \\ = & \frac{4(\|x - y\|^2 + (t - s)^2)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
& -2\langle i((x, t)), i((y, s)) \rangle \\
= & -2 \left\langle \frac{2(x, t+1)}{\|x\|^2 + (t+1)^2} - e_n \mid \frac{2(y, s+1)}{\|y\|^2 + (s+1)^2} - e_n \right\rangle \\
= & -2 \left[ 4 \frac{\langle x|y \rangle + (t+1)(s+1)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \right. \\
& \left. - 2 \frac{t+1}{\|x\|^2 + (t+1)^2} - 2 \frac{s+1}{\|y\|^2 + (s+1)^2} + 1 \right] \\
= & -2 \left[ \frac{4(\langle x|y \rangle + (t+1)(s+1)) - 2(\|y\|^2 + (s+1)^2)(t+1)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \right. \\
& \left. - 2(\|x\|^2 + (t+1)^2)(s+1) + 1 \right] \\
= & -2 \left[ \frac{4\langle x|y \rangle + 4(t+1)(s+1) - 2\|y\|^2(t+1) - 2(s+1)^2(t+1)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \right. \\
& \left. - 2\|x\|^2(s+1) - 2(t+1)^2(s+1) + 1 \right].
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
& \|i(x, t)\|^2 \|i(y, s)\|^2 \\
= & \left[ 4 \frac{(\|x\|^2 + (t+1)^2)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)^2} - 4 \frac{(t+1)}{\|x\|^2 + (t+1)^2} + 1 \right] \\
& \left[ 4 \frac{(\|y\|^2 + (s+1)^2)}{(\|y\|^2 + (s+1)^2)^2} - 4 \frac{(s+1)}{\|y\|^2 + (s+1)^2} + 1 \right] \\
= & \left[ \frac{4}{\|x\|^2 + (t+1)^2} - 4 \frac{(t+1)}{\|x\|^2 + (t+1)^2} + 1 \right] \\
& \left[ \frac{4}{\|y\|^2 + (s+1)^2} - 4 \frac{(s+1)}{\|y\|^2 + (s+1)^2} + 1 \right] \\
= & \left[ \frac{4 - 4(t+1)}{\|x\|^2 + (t+1)^2} + 1 \right] \left[ \frac{4 - 4(s+1)}{\|y\|^2 + (s+1)^2} + 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[4 - 4(t+1)][4 - 4(s+1)]}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} + \frac{4 - 4(t+1)}{\|x\|^2 + (t+1)^2} + \\
&\quad \frac{4 - 4(s+1)}{\|y\|^2 + (s+1)^2} + 1 \\
&= \frac{[4 - 4(t+1)][4 - 4(s+1)] + (\|y\|^2 + (s+1)^2)(4 - 4(t+1)) + (\|x\|^2 + (t+1)^2)(4 - 4(s+1))}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} + 1 \\
&= \frac{16 - 16(s+1) - 16(t+1) + 16(t+1)(s+1) + 4\|y\|^2 - 4\|y\|^2(t+1) + 4(s+1)^2 - 4(s+1)^2(t+1) + 4\|x\|^2 - 4\|x\|^2(s+1) + 4(t+1)^2 - 4(t+1)^2(s+1)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} + 1.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&1 - 2\langle i(x, t) | i(y, s) \rangle + \|i(x, t)\|^2 \|i(y, s)\|^2 \\
&= 1 + \frac{-8\langle x | y \rangle + 8(t+1)(s+1) + 16 - 16(s+1) - 16(t+1) + 4\|y\|^2}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \\
&\quad \frac{+4(s+1)^2 + 4\|x\|^2 + 4(t+1)^2}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} - 2 + 1 \\
&= 1 + 4 \left[ \frac{\|x\|^2 - 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 + 2ts + 2t + 2s + 2 + 4 - 4s - 4 - 4t - 4 + s^2 + 2s + 1 + t^2 + 2t + 1}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} \right] - 2 + 1 \\
&= 1 + 4 \frac{(\|x - y\|^2 + t^2 + 2ts + s^2)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)} - 2 + 1 \\
&= \frac{4(\|x - y\|^2 + (t+s)^2)}{(\|x\|^2 + (t+1)^2)(\|y\|^2 + (s+1)^2)}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$2 \operatorname{arctanh} \left( \frac{\|i(x, t) - i(y, s)\|}{1 - 2\langle i(x, t) | i(y, s) \rangle + \|i(x, t)\|^2 \|i(y, s)\|^2} \right)^{1/2}$$



$$2\operatorname{arctanh} \left( \frac{4(\|x - y\|^2 + (t - s)^2)}{(\|x\|^2 + (t + 1)^2)(\|y\|^2 + (s + 1)^2)} \right)^{1/2}$$

$$2\operatorname{arctanh} \left( \frac{\|x - y\|^2 + (t - s)^2}{\|x - y\|^2 + (t + s)^2} \right)^{1/2}.$$

Por tanto queda demostrado el teorema. ■

Para el caso  $n = 2$  otra manera de ver la distancia es la siguiente. Sean  $w = a + ib, z = c + id$  con  $w, z \in \mathbb{D}^2$ . Entonces,

$$2\operatorname{arctanh} \left( \frac{\|z - w\|}{(1 - 2\langle z|w \rangle + |z|^2|w|^2)^{1/2}} \right)$$

$$= 2\operatorname{arctanh} \left( \frac{\|z - w\|}{(1 - 2ac - 2bd + (ac)^2 + (bd)^2 + (bc)^2 + (ad)^2)^{1/2}} \right).$$

Sumando y restando  $2abcd$  en el numerador de la expresión anterior y simplificando tenemos que

$$2\operatorname{arctanh} \left( \frac{\|z - w\|}{(1 - 2\langle z|w \rangle + |z|^2|w|^2)^{1/2}} \right)$$

$$= 2\operatorname{arctanh} \left( \frac{\|z - w\|}{(1 - (ac + bd))^2 + (bc - ad)^2)^{1/2}} \right)$$

$$= 2\operatorname{arctanh} \left( \frac{\|z - w\|}{\|1 - w\bar{z}\|} \right).$$

Notemos que la fórmula en el teorema anterior, es una generalización de este último caso.

Ahora hablaremos un poco acerca de la frontera del espacio hiperbólico, anteriormente denotamos  $\partial\mathbb{D}^n$  como la frontera de  $D^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , es decir  $S^{n-1}$  y similarmente  $\partial\Pi^{n,+}$  como la frontera de  $\Pi^{n,+}$  en  $S^n$ , es decir  $(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ . Para definir dicha frontera consideramos el conjunto  $S$  de todos los rayos geodésicos (cerrados) en  $\mathbb{H}^n$  parametrizados por longitud de arco en  $[0, \infty)$ , y definimos una relación de equivalencia  $R$  en  $S$  de la siguiente manera:

$$\gamma_1 R \gamma_2 \text{ si y sólo si } \sup_{t \geq 0} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < \infty.$$

Sea  $\partial\mathbb{H}^n = S/R$  y  $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ . Definimos una topología en  $\overline{\mathbb{H}^n}$  de tal forma que  $\mathbb{H}^n$  es abierto y hereda la misma topología, y una vecindad de  $p \in \partial\mathbb{H}^n$  es obtenida como sigue:

Elegimos  $\gamma$  en la clase de  $p$  y sean  $x$  su punto inicial,  $V$  una vecindad de  $\gamma'(0)$  en la esfera unidad de  $T_x\mathbb{H}^n$  y sea  $r > 0$ ; entonces se tiene el siguiente conjunto

$$U(\gamma, V, r) = \{\gamma_1(t) : \gamma_1 \in S, \gamma_1(0) = x, \gamma_1'(0) \in V, t > r\} \cup \{\langle \gamma_1 \rangle_R : \gamma_1 \in S, \gamma_1(0) = x, \gamma_1'(0) \in V\}.$$

**Proposición 3.4.** *La frontera  $\partial\mathbb{H}^n$  del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , es homeomorfa a  $S^{n-1}$  y  $\overline{\mathbb{H}^n}$  es homeomorfo a  $\overline{D^n}$ . Más aún, considerando el modelo del disco  $\mathbb{D}^n$  del espacio hiperbólico,  $\overline{\mathbb{D}^n}$  está canónicamente identificado con la cerradura de  $D^n$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .*

#### Demostración:

Probaremos la segunda afirmación, ya que esta implica la primera. Dado un rayo geodésico, ya que este puede ser un arco en un diámetro o en un círculo, este determina un único punto en  $\partial D^n$ . Además, dos rayos geodésicos se relacionan si y sólo si determinan el mismo punto en  $\partial D^n$ . Entonces  $\overline{\mathbb{D}^n}$  está canónicamente identificado con  $\overline{D^n}$ , y esta identificación es un homeomorfismo con respecto a la topología anteriormente definida. ■

Ya que la inversión que va de  $\mathbb{D}^n$  en  $\mathbb{P}^{n,+}$  lleva  $\partial\mathbb{D}^n$  en  $(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ , esta es la frontera de  $\mathbb{P}^{n,+}$ .

Observemos que  $\partial D^n$  y  $(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$  son dos modelos para la esfera  $S^{n-1}$  y por tanto en el modelo de disco y el semi-espacio podemos heredar la frontera de  $\mathbb{H}^n$  con la estructura conforme de  $S^{n-1}$ .

Nos referiremos a los puntos de  $\partial\mathbb{H}^n$  como los puntos al infinito de  $\mathbb{H}^n$ . Si  $p$  es un punto al infinito en  $\mathbb{H}^n$  diremos que una geodésica pasa a través de  $p$  si  $p$  es la clase de equivalencia de  $\gamma|_{[0,\infty)}$  o  $\gamma|_{(-\infty,0]}$ ; equivalentemente, diremos que  $p$  es el punto final de  $\gamma$ . Todas las geodésicas tienen exactamente dos puntos finales y viceversa, dados  $p, q \in \partial\mathbb{H}^n$ , con  $p \neq q$ , existe una y sólo una geodésica con puntos finales  $p$  y  $q$ .

Un subespacio hiperbólico  $N$  puede ser completado a una subvariedad cerrada de  $\overline{\mathbb{H}^n}$  agregando todos los puntos finales de las geodésicas que contiene; estos puntos serán llamados puntos al infinito de  $N$ .

**Definición 3.4.** Diremos que dos geodésicas en  $\mathbb{H}^n$  son **incidentes** si tienen un punto en común en  $\mathbb{H}^n$ .

**Definición 3.5.** Dos geodésicas son **asintóticamente paralelas** si tienen en común un punto final.

**Definición 3.6.** Decimos que dos geodésicas son **ultra-paralelas** si no se intersectan en  $\overline{\mathbb{H}^n}$ .

**Proposición 3.5.** Sean  $N, M \subset \mathbb{H}^n$  subespacios hiperbólicos.

(a) Si  $N$  y  $M$  se intersectan en  $\partial\mathbb{H}^n$  pero no en  $\mathbb{H}^n$  entonces tienen exactamente un punto en común en el infinito y no existe una geodésica ortogonal a ambos espacios.

(b) Si  $N$  y  $M$  no se intersectan en todo  $\overline{\mathbb{H}^n}$  entonces existe una geodésica  $\gamma$  ortogonal a ambos espacios, y la distancia entre ellos es igual a la longitud del arco de  $\gamma$  comprendido entre  $N$  y  $M$ .

**Demostración:**

(a) Supongamos que  $N$  y  $M$  tienen dos puntos al infinito  $p$  y  $q$  en común, así, por ser espacio hiperbólicos, ambos espacios contienen la geodésica que tiene como puntos finales  $p$  y  $q$ , por lo tanto se intersectan en más puntos de  $\mathbb{H}^n$  lo cuál es una contradicción. En el modelo del semi-espacio asumimos que el punto en común de  $N$  y  $M$  es  $\infty$  es decir,  $N$  y  $M$  son subespacios afines verticales;  $N = N_1 \times \mathbb{R}_+$ ,  $M = M_1 \times \mathbb{R}_+$ . Finalmente, una geodésica ortogonal a  $N$  es un círculo centrado en un punto  $a$  de  $N_1$ ; pero  $N_1 \cap M_1 = \emptyset$ , por tanto no puede haber una geodésica que sea ortogonal a ambos.

(b) Notemos que  $N$  y  $M$  tienen distancia positiva, de otro modo tendrían un punto en común en algún sitio. Sea  $\delta$  su distancia, y sean  $\{a_n\}, \{b_n\}$  sucesiones en  $N$  y  $M$  respectivamente, tales que  $d(a_n, b_n) \rightarrow \delta$ . Asumimos que estas sucesiones convergen en  $\overline{\mathbb{H}^n}$ , si uno de los límites es un punto al infinito  $p$ , la condición en la distancia implica que el otro límite es  $p$  también. Se sigue que  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{H}^n$  y  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{H}^n$ , tomando la convergencia con respecto a la distancia hiperbólica; se sigue en particular que  $d(a, b) = \delta$ .

Sea  $\gamma$  la geodésica que pasa a través de  $a$  y  $b$ ; observemos que el arco de  $\gamma$  que está entre  $N$  y  $M$  es justamente el arco que va de  $a$  a  $b$  y por tanto tiene longitud  $\delta$ .

Supongamos que  $\gamma$  no es ortogonal a  $N$  en  $a$ . Elegimos el modelo del disco, como localmente la distancia hiperbólica es aproximadamente un múltiplo de

la distancia euclidiana, por lo que podemos encontrar  $a'$  en  $\gamma$  cercano a  $a$  de tal forma que la distancia a  $N$  sea estrictamente menor a la distancia hacia  $a$ , de hecho podemos pensar incluso que  $a'$  está en  $M$ , lo cuál implica que la distancia de  $N$  a  $M$  es estrictamente menor que  $\delta$ , contradiciendo nuestra hipótesis, por tanto  $\gamma$  debe ser ortogonal. ■

**Proposición 3.6.** (1) *Todas las isometrías de  $\mathbb{H}^n$  se extienden a homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{H}^n}$  y por lo tanto tienen algún punto fijo en  $\overline{\mathbb{H}^n}$ .*

(2) *Los grupos  $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$  y  $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$  operan transitivamente sobre  $\partial\mathbb{H}^n$  y sobre el conjunto*

$$\{(x, v) : x \in \mathbb{H}^n, v \in T_x\mathbb{H}^n, ds_x^2(v) = 1\}$$

donde la acción está definida por

$$f(x, v) = (f(x), d_x f(v)).$$

(3) *Un elemento de  $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$  está únicamente determinado por su traza en  $\partial\mathbb{H}^n$ .*

(4) *Si  $M$  es el modelo del disco o el modelo del semi-espacio la restricción a la frontera es un isomorfismo de  $\mathcal{I}(M)$  sobre  $Conf(\partial M)$ .*

### **Demostración:**

(1) Es suficiente considerar el modelo del disco  $\mathbb{D}^n$ , donde este hecho se sigue de la explícita determinación de las isometrías.

Lo segundo es consecuencia de la Proposición 3.4 y del Teorema del punto fijo de Brouwer, ver [4, p. 90].

(2) Consideremos el modelo del disco, la primera afirmación se deriva de que la frontera es invariante bajo ese tipo de inversiones. Para la segunda afirmación, notemos que por el Teorema 2.3,  $\mathcal{I}^+(\mathbb{D}^n)$  opera transitivamente sobre  $\mathbb{D}^n$  y al ser isometría los vectores tangentes bajo la acción del grupo vuelven a estar en la esfera unitaria.

(3) Una vez más, si consideramos el modelo del disco, podemos notar que los elementos de  $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$  al ser isometrías restringen su acción a la frontera a rotaciones cuyo movimiento determinará a la isometría que esté actuando.

(4) Para  $N \in \{D^n, \Pi^{n,+}\}$ , por el Teorema 2.3, debemos notar que la restricción a la frontera en  $Conf(N)$ , determinado explícitamente en el Teorema 1.6, será un isomorfismo sobre  $Conf(S^n)$ , este último fué calculado en el Corolario 1.1. ■

**Proposición 3.7.** *Si  $\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$  existen las siguientes posibilidades, ajenas entre si:*

1.  $\phi$  tiene algún punto fijo en  $\mathbb{H}^n$ ,
2.  $\phi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{H}^n$ , y tiene exactamente un punto fijo, que es un punto en el infinito,
3.  $\phi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{H}^n$ , y tiene exactamente dos puntos fijos en el infinito.

**Demostración:**

Sólo debemos checar que si  $\phi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{H}^n$  entonces a lo más tiene dos puntos fijos en el infinito.

En el modelo del semi-espacio asumamos que  $\phi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{P}^{n,+}$  y que el 0 e  $\infty$  sí lo son.

Entonces  $\phi$  puede ser escrita como

$$\phi : (y, t) \longmapsto \lambda(Ay, t).$$

Ya que  $\phi(0, 1) \neq (0, 1)$  tenemos que  $\lambda \neq 1$ , esto implica que  $\phi$  fija solamente 0 e  $\infty$ . ■

**Definición 3.7.** De acuerdo con la proposición anterior, dada  $\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$  diremos que es:

- 1) **Elíptica**, si tiene algún punto fijo en  $\mathbb{H}^n$ ,
- 2) **Parabólica**, si tiene un punto fijo en  $\partial\mathbb{H}^n$ ,
- 3) **Hiperbólica**, si tiene dos puntos fijos en el infinito.

**Observación 3.1.** Si  $\phi$  es una isometría del tipo hiperbólico entonces existe una y sólo una geodésica  $\phi$ -invariante cuyos puntos finales son los puntos fijos al infinito de  $\phi$ .

Ahora, para  $n = 2$  se dará una clasificación geométrica y algebraica de las isometrías. Ya que en  $\mathbb{H}^2$  las nociones de longitud, ángulos y geodésicas están definidas los conceptos de bisectriz y mediatriz también.

Denotamos por  $[a, b]$  al segmento con puntos finales  $a, b$ , y  $(a, b, c)$  al ángulo comprendido entre  $[a, b]$  y  $[b, c]$ .

**Proposición 3.8.** Sea  $\phi \in \mathcal{I}^+ \setminus \{id\}$ , sea  $x$  un punto no fijo de  $\phi$ , sea  $l_1$  la bisectriz del ángulo  $[x, \phi(x), \phi^2(x)]$  y  $l_2$  a la mediatriz del segmento  $[\phi(x), \phi^2(x)]$ . Entonces se tienen las siguientes proposiciones:

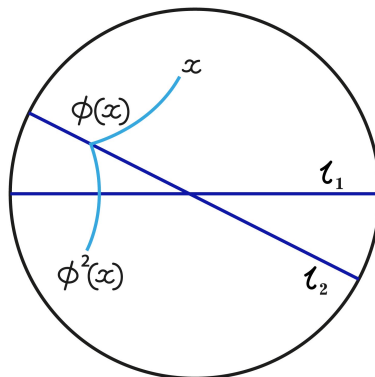
- 1) Si  $l_1$  y  $l_2$  son incidentes, entonces  $\phi$  es elíptica,
- 2) Si  $l_1$  y  $l_2$  son asintóticamente paralelas, entonces  $\phi$  es parabólica,
- 3) Si  $l_1$  y  $l_2$  son ultra-paralelas entonces  $\phi$  es hiperbólica.

**Demostración:**

Observemos primero que si  $\phi$  es elíptica entonces tiene un único punto fijo, de otra manera podría ser la reflexión con respecto a una geodésica, lo cual no está en  $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^2)$ . Más aún la posición relativa de  $l_1$  a  $l_2$  es invariante bajo la acción de  $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ , por lo que podemos elegir puntos de  $\phi$  de una manera conveniente.

Consideremos los siguientes tres casos, cuyas pruebas estarán gráficamente expuestas.

- 1) Elegimos  $0 \in \mathbb{D}^n$  como punto fijo y se tiene la situación que se muestra en la figura siguiente, de donde se concluye que  $\phi$  es elíptica:



**Figura 3.2.**

- 2) Ahora, eligiendo  $\infty \in \mathbb{P}^{2,+}$  como punto fijo se obtiene que  $\phi$  es parabólica, véase la siguiente figura:

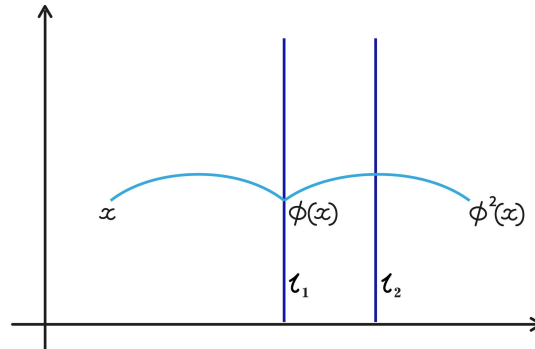


Figura 3.3.

- 3) Finalmente si elegimos  $0, \infty \in \mathbb{P}^{2,+}$  como puntos fijos, se concluye que  $\phi$  es hiperbólica como se muestra en la siguiente imagen:

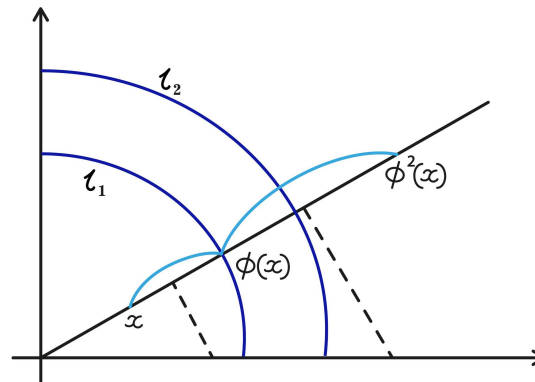


Figura 3.4.

Cualquier isometría, según el Teorema 1.3 que preserva la orientación de  $\mathbb{P}^{2,+}$  está representada por una matriz  $2 \times 2$  de entradas reales con determinante uno, además dos matrices  $A$  y  $B$  representan la misma isometría si y sólo si  $A = \pm B$ . Denotamos por  $tr(A)$  a la traza de una matriz  $A$ .

**Proposición 3.9.** Sea  $\phi \in \mathcal{I}^+(\mathbb{P}^{2,+}) \setminus \{id\}$  representada por una matriz  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ ; las siguientes afirmaciones son ciertas:

- 1) Si  $|tr(A)| < 2$ , entonces  $\phi$  es elíptica,
- 2) Si  $|tr(A)| = 2$ , entonces  $\phi$  parabólica,
- 3) Si  $|tr(A)| > 2$ , entonces  $\phi$  hiperbólica.

**Demostración:**

Supongamos que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  es la matriz asociada a la transformación  $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Consideremos las siguientes dos situaciones:

I) Si  $c = 0$  entonces  $\infty$  es un punto fijo, además

$$\phi(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a^2z + ab}{ad} = a^2z + ab \text{ y } tr(A) = a + \frac{1}{a}.$$

Notemos que si  $a = \pm 1$  entonces  $b \neq 0$ , de otro modo  $\phi = id$ . De donde se sigue que

- $tr(A) = \pm 2$  si y sólo si  $a = \pm 1$  si y sólo si  $\phi$  es parabólica, pues sólo fija  $\infty$ .
- $tr(A) > 2$  si y sólo si  $a \neq \pm 1$  si y sólo si  $\phi$  es hiperbólica, pues fija  $\infty$  y  $\frac{ab}{1 - a^2} \in \mathbb{R}$ .

II) Si  $c \neq 0$  entonces

$$\phi(z) = z \text{ si y sólo si } cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Calculando el discriminante

$$\delta = (d - a)^2 + 4bc = tr(A)^2 - 4.$$

Por lo que, si  $\delta \geq 0$  entonces  $tr(A) \geq 2$  de lo que resultan los casos parabólico e hiperbólico y si  $\delta < 0$  se tiene que  $tr(A) < 2$  por lo que la ecuación tiene solución compleja, es decir tiene solución en  $\mathbb{P}^{2,+}$  por tanto es elíptica. ■

Para  $n = 3$ , por el Teorema 2.4 y la Proposición 3.6, la restricción a la frontera de una isometría que preserva la orientación en  $\mathbb{H}^3$  es un difeomorfismo conforme de  $S^2$  e inversamente, cada elemento de  $Conf^+(S^2)$  puede ser extendido de manera única a un elemento de  $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^3)$ .

Más aún, por el Teorema 1.3, se tiene que

$$Conf^+(S^2) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^3) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\}.$$



**Proposición 3.10.** *Sea  $\phi \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^3) \setminus \{id\}$  representado por una matriz  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ . Se tienen las siguientes afirmaciones:*

- 1) *Si  $tr(A) \in \mathbb{R}$ ,  $|tr(A)| < 2$ , entonces  $\phi$  es elíptica,*
- 2) *Si  $tr(A) = \pm 2$  entonces  $\phi$  es parabólica,*
- 3) *Si  $tr(A) \notin \mathbb{R}$  o  $tr(A) \in \mathbb{R}$ ,  $|tr(A)| > 2$  entonces  $\phi$  es hiperbólica.*

**Demostración:**

Supongamos que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , con  $ad - bc = 1$ . Ya que la ecuación

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

tiene alguna solución en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,  $A$  tiene algún punto fijo en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Más aún, se tiene que

- i)  $SL(2, \mathbb{C})$  actúa transitivamente en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .
- ii)  $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$  para toda  $B \in SL(2, \mathbb{C})$ .

Para esto, basta probar que  $tr(AB) = tr(BA)$  pues,

$$tr(BAB^{-1}) = tr(B^{-1}BA) = tr(A).$$

Entonces, supongamos que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , así

$$\begin{aligned} tr(AB) &= aa' + bc' + cb' + dd' \\ &= a'a + b'c + c'b + d'd \\ &= tr(BA) \end{aligned}$$

- iii)  $\phi$  y  $\psi^{-1}\phi\psi$  son del mismo tipo para todo  $\psi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ .

En efecto, ya que si  $\phi$  fija algún punto  $z$  entonces

$$\begin{aligned} \phi(z) &= z \\ (\psi^{-1} \circ \phi)(z) &= \psi^{-1}(z) \\ (\psi^{-1} \circ \phi \circ \psi)(z) &= z, \end{aligned}$$

es decir, fijan los mismos puntos.

Con las afirmaciones anteriores podemos asumir que  $A$  fija  $\infty$ , es decir,  $c = 0$ ,  $d = \frac{1}{a}$  y  $\text{tr}(A) = a + \frac{1}{a}$ , por lo que  $A(z) = a^2z + ab$ . La isometría  $\phi$  de  $\mathbb{P}^{3,+}$  que extiende a  $A$  está dada por

$$\phi(z, t) = (a^2z + ab, |a|^2t).$$

Como en la proposición anterior, si  $a = \pm 1$  entonces  $b \neq 0$ , por tanto

- i)  $\phi$  es elíptica si y sólo si  $|a| = 1, a \neq \pm 1$ ,
- ii)  $\phi$  es parabólica si y sólo si  $a = \pm 1$ ,
- iii)  $\phi$  es hiperbólica si y sólo si  $|a| \neq 1$ .

■

Introducimos ahora el concepto de horoesfera.

**Definición 3.8.** Dado  $p \in \partial\mathbb{H}^n$  diremos que una hipersuperficie cerrada  $N$  es una **horoesfera** centrada en  $p$ , si  $N$  es ortogonal a todas las geodésicas con punto final  $p$ .

**Proposición 3.11.** Dado  $p \in \partial\mathbb{H}^n$ ,  $\mathbb{H}^n$  es unión disjunta de las horoesferas centradas en  $p$ . Estas horoesferas heredan de  $\mathbb{H}^n$  la estructura Riemanniana de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

### Demostración:

Ya que tomar horoesferas a partir de un punto  $p$ , resulta invariante bajo isometrías, asumimos en el modelo del semi-espacio que  $p = \infty$ . Ya que geodésicas con punto final  $\infty$  están dadas por líneas verticales  $\{x_0\} \times \mathbb{R}^+$ , horoesferas centradas en  $\infty$  son hiperplanos horizontales  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t_0\}$ . Por esto último  $\mathbb{H}^n$  es unión disjunta de horoesferas centradas en  $p = \infty$ . Ahora, por el cálculo de las métricas, específicamente para  $\mathbb{P}^{n,+}$ , se tiene que cualquier punto en el interior del modelo del semi-espacio, es un múltiplo positivo de otro punto con la métrica Riemanniana estándar de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . ■

**Observación 3.2.** Una horoesfera en  $\mathbb{H}^n$  hereda la estructura Riemanniana de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , pero no la estructura del espacio métrico, es decir, la distancia de  $\mathbb{H}^n$  restringida a horoesferas no es euclidiana. La razón de esto es que si

integrarnos la métrica para obtener la distancia restringida a la horoesfera, usamos geodésicas las cuales no están contenidas en la horoesfera, y por tanto si llevamos a cabo las dos operaciones en orden inverso tendremos un resultado distinto.

Acorde con la caracterización anterior, una horoesfera centrada en  $p \in \partial\mathbb{H}^n$  divide a  $\mathbb{H}^n$  en dos regiones conexas homeomorfas a  $n$ -bolas, llamaremos a la que se encuentra en  $\partial\mathbb{H}^n$ , una horobola centrada en  $p$ .

**Proposición 3.12.** *Una bola hiperbólica en  $\mathbb{D}^n$  (o  $\mathbb{P}^{n,+}$ ) es una bola euclidiana con diferente centro y radio, cuya cerradura es compacta en  $\mathbb{D}^n$  (o  $\mathbb{P}^{n,+}$ ).*

**Demostración:**

Por el Corolario 3.5, una bola de radio  $r$  centrada en  $0 \in \mathbb{D}^n$  es una bola euclidiana de centro 0 y radio  $\tanh(r/2) < 1$ , pues  $r = d(0, x) = 2\operatorname{arctanh}(\|x\|)$  con  $x \in \mathbb{D}^n$  y por lo tanto su cerradura es compacta en  $\mathbb{D}^n$ , recordemos que la distancia hiperbólica induce la topología estandar en  $D^n$ .

Ya que las inversiones con respecto a esferas ortogonales a  $\partial\mathbb{D}^n$  y elementos de  $O(n)$  son homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{D}^n}$  y mandan bolas en bolas, lo anterior se mantiene para cada bola en  $\mathbb{D}^n$ . Más aún, la función usada en la definición de  $\mathbb{P}^{n,+}$  es también una inversión, por tanto la proposición queda probada.

■

## 3.2. Curvatura del Espacio hiperbólico

Iniciamos dando un resultado importante acerca de los triángulos hiperbólicos en  $\mathbb{H}^2$ .

**Teorema 3.1.** *Sea  $\Delta$  un triángulo hiperbólico en  $\mathbb{H}^2$ , es decir, formado por las geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  con ángulos interiores,  $\alpha, \beta, \gamma$  entonces*

$$A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Donde  $A$  es el área hiperbólica del triángulo.

**Demostración:**

Consideremos el modelo del semi-plano y recordemos que el área hiperbólica está definida por

$$A(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Tomando  $u = \frac{1}{y}$  y  $v = 0$ , tenemos que  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ . Aplicando el Teorema de Green podemos reducir la integral doble a una integral de línea como sigue:

$$\int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\partial \Delta} \frac{dx}{y}.$$

Sea  $l$  uno de los lados de  $\partial \Delta$  y cambiando a coordenadas polares tenemos que:

$$\int_l \frac{dx}{y} = \int_{\psi}^{\phi} \frac{d(\cos \theta)}{\rho \operatorname{sen} \theta} = - \int_{\psi}^{\phi} d\theta = \psi - \phi.$$

Considerando todos los lados

$$A(\Delta) = \sum_{i=1}^3 (\psi_i - \phi_i)$$

Observemos que esta cantidad al ser multiplicada por  $-1$  se interpreta como el cambio de dirección tangente cuando se recorren los lados del triángulo. Además, el cambio de dirección tangente en cada vértice es  $\pi - \alpha$ ,  $\pi - \beta$  y  $\pi - \gamma$ , respectivamente.

Y finalmente, si se recorre toda la frontera del triángulo el cambio de dirección tangente es  $2\pi$ . Por tanto:

$$2\pi = [3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)] - \sum_{i=1}^3 (\psi_i - \phi_i).$$

De donde

$$A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad \blacksquare$$

Con este resultado podemos ver que si los ángulos del triángulo son más pequeños el área incrementa, de tal forma que si los ángulos son idénticamente 0, el área sería  $\pi$ , en este caso tendríamos que los tres vértices del triángulo son puntos al infinito.

Para finalizar este trabajo analizaremos la curvatura del espacio hiperbólico.

**Definición 3.9.** Sean  $M$  una variedad riemanniana y  $p \in M$ . La **curvatura seccional** para un subespacio  $V$  del espacio tangente a  $M$  en  $p$ ,  $T_p M$ , de dimensión 2, se define como:

$$k(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2},$$

donde  $x, y \in V$  son dos vectores linealmente independientes y  $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ .

**Teorema 3.2.** *El espacio hiperbólico tiene curvatura seccional -1.*

**Demostración:**

Consideremos la métrica del modelo del semi-espacio para  $\mathbb{H}^n$  como:

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2},$$

donde  $F$  es una función diferenciable y positiva.

Denotemos por  $g^{ij} = F^2 \delta_{ij}$  como la matriz inversa de  $g_{ij}$ ,  $\log F = f$  y  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$ .

Así, tenemos que  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -\delta_{ik} \frac{2}{F^3} F_j = -2 \frac{\delta_{ik}}{F^2} f_j$ .

Calculemos los símbolos de Christoffel, coeficientes de la conexión Riemanniana.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_m \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right) g^{mk} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) F^2 \\ &= -\delta_{jk} f_i - \delta_{ki} f_j + \delta_{ij} f_k. \end{aligned}$$

Si los tres índices son distintos entonces  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Para dos índices iguales tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^i &= -f_j \\ \Gamma_{ii}^j &= f_j \\ \Gamma_{ij}^j &= -f_i \\ \Gamma_{ii}^i &= -f_i. \end{aligned}$$

Ahora calculemos los coeficientes de la curvatura

$$R_{ijij} = \sum_l R_{ijil} g_{lj} = R_{ijji} g_{jj} = R_{ijji} \frac{1}{F^2}.$$

Así, se tiene que

$$R_{ijij} = \frac{1}{F^2} \left( \sum_l \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{ji}^j \right).$$

Como  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ii}^j = f_{jj}$  y  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{ji}^j = -f_{ii}$ .

Se sigue que

$$\begin{aligned} F^2 R_{ijij} &= \sum_{\substack{l \\ l \neq i, l \neq j}} \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j + \Gamma_{ii}^i \Gamma_{ji}^j + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^j - \Gamma_{ji}^i \Gamma_{ii}^j - \Gamma_{ji}^j \Gamma_{ij}^j + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{ji}^j \\ &= - \sum_{\substack{l \\ l \neq i, l \neq j}} f_l f_l + f_i^2 - f_j^2 + f_j^2 - f_i^2 + f_{jj} + f_{ii} \\ &= - \sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}. \end{aligned}$$

Dado que  $\Gamma_{ij}^l = 0$  para  $i, j, k$  diferentes a pares se tiene que  $R_{ijkl} = 0$  si los cuatro índices son distintos entre sí. Con tres índices distintos tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} F^2 R_{ijk}^i &= \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^i - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^i - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^i \\ &= \Gamma_{ik}^i \Gamma_{ji}^i - \Gamma_{jk}^j \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{jk}^k \Gamma_{ik}^i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^i - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^i \\ &= f_k f_j - (-f_k)(-f_j) - (-f_j)(-f_k) - f_{kj} \\ &= -f_k f_j - f_{kj}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2 R_{ijk}^j &= \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^j \\ &= \Gamma_{ik}^i \Gamma_{ji}^j + \Gamma_{ik}^k \Gamma_{jk}^j - \Gamma_{jk}^j \Gamma_{ij}^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^j \\ &= f_k f_i + (-f_i)(-f_k) - (-f_k)(-f_i) + f_{ki} \\ &= f_i f_k + f_{ki}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^2 R_{ijk}^k &= \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^k + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^k - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^k \\
&= \Gamma_{ik}^k \Gamma_{jk}^k - \Gamma_{jk}^k \Gamma_{ik}^k \\
&= (-f_i)(-f_j) - (-f_j)(-f_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, la curvatura seccional con respecto al plano generado por  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  y  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  es

$$K_{ij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij}F^4 = \left( -\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj} \right) F^2.$$

Ahora, para el caso  $F^2 = x_n^2$  el cuál implica que  $f = \log x_n$ . Si  $i \neq n, j \neq n$  se sigue que

$$K_{ij} = -\frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1.$$

Si  $i = n$  y  $j \neq n$ ,

$$K_{in} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn}) F^2 = -\frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1.$$

Por tanto, por [3, Corolario 3.5, pag. 96], obtenemos que la curvatura seccional de  $\mathbb{H}^n$  es constante, igual a -1. ■

Utilizando la prueba anterior podemos determinar la curvatura seccional de  $\mathbb{R}^n$  y  $S^n$ .

**Teorema 3.3.** *La curvatura seccional de  $\mathbb{R}^n$  y  $S^n$  es 0 y 1, respectivamente.*

**Demostración:**

Para  $\mathbb{R}^n$  con la métrica usual  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , notemos que  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} = 0$  entonces

$\Gamma_{ij}^k = 0$  por tanto  $R_{ijij} = 0$  con lo cual concluimos que  $k_{ij} = 0$ .

Para  $S^n$ , primero calcularemos su métrica.

Consideremos  $\pi : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$  dada por

$$\pi(\bar{x}) = \left( \frac{x'_i}{1 - x'_{n+1}} \right) \text{ con } 1 \leq i \leq n, \quad \bar{x} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}) \in S^n.$$

y su inversa  $\pi^{-1} : \mathbb{R}^n \mapsto S^n$

$$\pi^{-1}(x) = \left( \frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right); \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Así, la métrica queda definida como

$$\langle d_x \pi^{-1}(u) | d_x \pi^{-1}(v) \rangle; \quad \text{con } u, v \in \mathbb{R}^n,$$

ya que  $\pi^{-1}$  es un difeomorfismo entre ambos espacios.

Calculando la derivada de  $\pi^{-1}$ , tenemos que para  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{2(\|x\|^2 + 1) - (2x_i)(2x_i)}{(\|x\|^2 + 1)^2} = \frac{2(\|x\|^2 - 2x_i^2 + 1)}{(\|x\|^2 + 1)^2},$$

para  $i \neq j$  y  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = -\frac{(-2x_i)(2x_j)}{(\|x\|^2 + 1)^2} = \frac{4x_i x_j}{(\|x\|^2 + 1)^2}.$$

Además,

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} = \frac{(2x_i)(\|x\|^2 + 1) - (\|x\|^2 - 1)(2x_i)}{(\|x\|^2 + 1)^2} = \frac{4x_i}{(\|x\|^2 + 1)^2}.$$

Por otro lado, si  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  se tiene que

$$\begin{aligned} (\|x\|^2 + 1)^2 d\pi_x^{-1}(u) &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} u_i, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_i} u_i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_i} u_i \right) \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) u_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) u_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right) u_n \\ &= f_{j,x_1} u_1 + f_{j,x_2} u_2 + \dots + f_{j,x_n} u_n. \end{aligned}$$

Luego, el producto queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &(\|x\| + 1)^4 \langle d\pi_x^{-1}(u) | d\pi_x^{-1}(v) \rangle \\ &= \langle f_{j,x_1}, f_{j,x_1} \rangle u_1 v_1 + \dots + \langle f_{j,x_n}, f_{j,x_n} \rangle u_n v_n + \\ &\quad \langle f_{j,x_i}, f_{j,x_k} \rangle u_i v_k, \end{aligned}$$



con  $i \neq k$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Además,

$$\begin{aligned}
\langle f_{j,x_i} | f_{j,x_i} \rangle &= 4(\|x\|^2 - 2x_i^2 + 1)^2 \\
&= +16x_i^2x_j^2 + 16x_i^2 \\
&= 4(\|x\|^4 + 2\|x\|^2(-2x_1^2 + 1) + (-2x_i^2 + 1)^2) + \\
&= 16x_i^2x_j^2 + 16x_i^2 \\
&= 4(\|x\|^4 - 4x_i^2\|x\|^2 + 2\|x\|^2 + 4x_i^4 - 4x_i^2 + 1) + \\
&\quad 16x_i^2x_j^2 + 16x_i^2 \\
&= 4\|x\|^4 - 16x_i^2\|x\|^2 + 8\|x\|^2 + 16x_i^4 - 16x_i^2 + 4 \\
&\quad + 16x_i^2x_j^2 + 16x_i^2 \\
&= 4\|x\|^4 + 8\|x\|^2 + 4 \\
&= 4(\|x\|^2 + 1)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f_{j,x_i}, f_{j,x_k} \rangle &= 2(\|x\|^2 - 2x_i + 1)(-4x_ix_k) + 2(\|x\|^2 - 2x_k^2 + 1)(-4x_ix_k) \\
&\quad + 4(x_ix_j)(4x_kx_j) + 16x_ix_k \\
&= (-8x_ix_k)(\|x\|^2 - 2x_i^2 + 1 + \|x\|^2 - 2x_k^2 + 1) + \\
&\quad 16x_j^2x_ix_k + 16x_ix_k \\
&= (-8x_ix_k)(2x_j^2 + 2) + 16x_j^2x_ix_k + 16x_ix_k \\
&= -16x_ix_kx_j^2 - 16x_ix_k + 16x_j^2x_ix_k + 16x_ix_k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\langle d_x\pi^{-1}(u), d_x\pi^{-1}(v) \rangle &= \frac{1}{(\|x\|^2 + 1)^4} 4(\|x\|^2 + 1)^2 (u_1v_1 + \dots + u_nv_n) \\
&\quad 4 \sum_i dx_i^2 \\
&= \frac{4 \sum_i dx_i^2}{(\|x\|^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\langle d_x\pi^{-1}(e_i), d_x\pi^{-1}(e_j) \rangle = \frac{4\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + 1)^2}.$$

Considerando la métrica  $g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + 1)^2}$  para  $S^n$ , calculamos la curvatura seccional.

Veamos la métrica como el caso anterior

$$g_{ij} = F^2 \delta_{ij},$$

con  $F = \frac{(\|x\|^2 + 1)}{2}$  y  $f = \log F = \log(\|x\|^2 + 1) - \log(2)$ , de manera que

$$f_l = \frac{2x_l}{\|x\|^2 + 1} \text{ y } f_u = \frac{2(\|x\|^2 + 1) - 4x_l^2}{(\|x\|^2 + 1)^2}.$$

Como antes la curvatura seccional está dada por

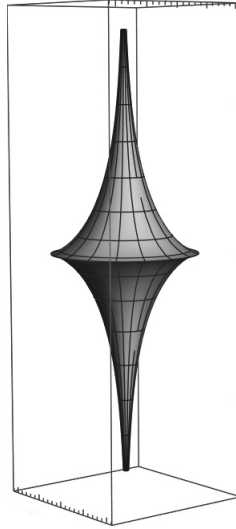
$$K_{ij} = \left( - \sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj} \right) F^2,$$

sustituyendo se tiene que

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \left( - \sum_l \frac{4x_l^2}{(\|x\|^2 + 1)^2} + \frac{4x_i^2}{(\|x\|^2 + 1)^2} + \frac{4x_j^2}{(\|x\|^2 + 1)^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{2(\|x\|^2 + 1) - 4x_i^2}{(\|x\|^2 + 1)^2} + \frac{2(\|x\|^2 + 1) - 4x_j^2}{(\|x\|^2 + 1)^2} \right) \frac{(\|x\|^2 + 1)^2}{4} \\ &= \left( - \sum_l \frac{4x_l^2}{(\|x\|^2 + 1)^2} + \frac{4\|x\|^2 + 4}{(\|x\|^2 + 1)^2} \right) \frac{(\|x\|^2 + 1)^2}{4} \\ &= \frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^2} \frac{(\|x\|^2 + 1)^2}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

El resultado se concluye utilizando [3, Corolario 3.5, pag. 96]. ■

La pseudoesfera (ver figura 3.5.) es una superficie que tiene curvatura Gaussiana constante negativa. Se trata de una superficie de revolución, y se obtiene rotando la curva llamada tractriz alrededor de su asíntota.



**Figura 3.5.**

Si vemos a la pseudoesfera como subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  podemos calcular su curvatura de la siguiente manera.

Consideramos una superficie de revolución de manera general dada por

$$x(u, v) = (\phi(v) \cos(u), \phi(v) \sin(u), \psi(v))$$

con  $0 < u < 2\pi$ ,  $a < v < b$  y  $\psi(v) \neq 0$ .

Entonces su curvatura Gaussiana queda definida como:

$$K = -\frac{\phi''}{\phi}.$$

Ahora, la pseudoesfera tiene como parametrización la siguiente expresión

$$x(u, v) = (\operatorname{sech}(v) \cos(u), \operatorname{sech}(v) \sin(u), v - \tanh(v)).$$

Entonces,

$$\phi(v) = \operatorname{sech}(v),$$

$$\phi'(v) = 1 - (1 - \tanh^2(v)) = -\tanh^2(v),$$

$$\phi''(v) = -(\operatorname{sech}(v) \tanh(v)) \tanh(v) - \operatorname{sech}(v) (1 - \tanh^2(v)) = -\operatorname{sech}(v).$$

Por tanto,

$$K = \frac{-\operatorname{sech}(v)}{\operatorname{sech}(v)} = -1.$$

Lo que falla en esta superficie es la singularidad que presenta, que hace que no sea una superficie completa, sólo es isométrica de manera local al plano hiperbólico; aunque de manera general el Teorema de Hilbert [3, 5-11, pag. 446], advierte que no existe en  $\mathbb{R}^3$  una superficie regular y completa de curvatura gaussiana constante negativa.

# Bibliografía

- [1] R. Benedetti y C. Petronio, Lectures on Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag: USA, (1992).
- [2] H. Cartan, Differential calculus, Kershaw publishing company LTD: England, (1971).
- [3] M. P. Do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser: USA, (1992).
- [4] V. Guillemin y A. Pollack, Topología diferencial, Sociedad Matemática Mexicana, serie textos, no. 20: México, (2003).
- [5] A. Lascurain, Curso básico de variable compleja, Prensas de Ciencias: México, (2013).