UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE HUMANIDADES

LICENCIATURA EN FILOSOFÍA

TESIS

Estudio Filosófico de la Incompletitud Aritmética de Gödel

Que para obtener el título de:

Licenciado en Filosofía

Presenta:

José Antonio González Vásquez

Asesor:

Dr. Fidel Salatiel Zequeira Torres

Toluca, Estado de México, 2023

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los teoremas de Kurt Gödel son el tema que dirige la siguiente investigación. Estos teoremas son de gran importancia en las matemáticas, la filosofía de las matemáticas y los fundamentos matemáticos, tres áreas de conocimiento que pueden parecer la misma asignatura, pero cada una desarrolla un papel en la problemática que suscita la resolución de Gödel: la prueba de razonamiento heurístico riguroso y lógica que comprende las siguientes dos conclusiones:

> En primer lugar demostró que es imposible presentar una prueba metamatemática de la consistencia de un sistema lo bastante comprensivo como para contener toda la aritmética, [...] La segunda importante conclusión de Gödel es aún más sorprendente y revolucionaria, porque demuestra la existencia de una fundamental limitación en la potencia del método axiomático. Gödel demostró que los Principia [mathematica de Bertrand Russell], o cualquier otro sistema dentro del cual pueda desarrollarse la aritmética, es esencialmente incompleto (Nagel & Newman, 2007, p. 30).

Estas conclusiones son importantes tanto para la matemática como en la filosofía, llegando a ser interrogantes existenciales o investigaciones sobre la capacidad intelectiva. Esto anterior, según lo observado en Gödel, sucede por comprender que la aritmética en el sentido formalista que busca David Hilbert, no alcanza a abarcar en sentido completo su complejidad, sino que su existencia completa se intuye fuera del formalismo, como objetos reales de las ideas que no se encuentran en la experiencia empírica ni dentro de la mente, pues, estas no capta nuevas ideas en sí mismas sino en la observación externa, esto siendo en las matemáticas mediante el conocimiento y la experiencia matemática (intuición matemática), cosa que no podría realizar la mente si sólo dependiera de sí misma o de la experiencia sensible.

Se considera importante la revisión histórica de las matemáticas y la filosofía de las matemáticas para poder otorgar sentido a lo que se plantea en la paradigmática resolución que se da entre el formalismo de David Hilbert y la prueba de incompletitud aritmética de Gödel.

El objetivo de la investigación es esclarecer, no del todo por ser cuestiones matemáticas y filosóficas hasta el momento irresolubles, cuáles son los problemas de la matemática que incumben a la filosofía y viceversa, en un estudio que llega hasta Kurt Gödel y su filosofía realista platónica de las matemáticas, por ser esta la más potente hasta ahora o la que más reclama razonabilidad formal y filosófica entre corrientes matemáticas actuales. En concreto, se busca saber a qué refiere la incompletitud aritmética y por lo tanto matemática de los teoremas de Kurt Gödel, no en el ámbito lógico y matemático sino en el filosófico de las matemáticas, cuestión que obliga a esta investigación a dar una rápida e interesante panorámica lógica y matemática, sin profundizar en estas partes.

La importancia de esta investigación se localiza en el avistamiento y comprensión del platonismo matemático y el realismo de los objetos matemáticos cognoscentes de la realidad; esto según Gödel. Lo anterior nos ayuda a comprender de qué manera los contrastes idealistas y materialistas se encuentran expuestos a una frágil crítica y toma de postura si no se observan desde la rigurosidad filosófica que da el conocimiento de estas ciencias formales en las que se puede entender el pensamiento, el método y la comprensión de los objetos de los cuales se sirve la ciencia, pero que son dilemas e interrogantes filosóficos donde la humanidad ha colocado los cimientos de la realidad.

La metodología utilizada para la revisión de la temática y la colocación de la investigación en el texto es de carácter cualitativo; a pesar de tener esquemas matemáticos y tablas de lógica formal, estas no se refieren a otra cosa más que a su observación y discernimiento. La revisión histórica de las posturas filosóficas mediante sus cualidades es una de las principales herramientas para comprender de qué trata la fundamentación de las matemáticas y cómo se relaciona con la visión matemática de Gödel y su prueba que descubre la incompletitud formal de la aritmética.

El contenido parte de la biografía de Gödel, continúa con la revisión histórica de las matemáticas y cómo se relacionan los contextos de las épocas con el desarrollo matemático, filosófico y heurístico, en consonancia con las grandes escuelas, pensadores y filósofos de los cuales surgen las interrogantes que dieron origen al estudio riguroso de las matemáticas. En otro momento y capítulo, se asienta la duda sobre los *fundamentos matemáticos*, que como estudio se condensan y formalizan en varias corrientes filosóficas que buscan el fundamento último del área de estudio. Con el conocimiento de la axiomatización empieza el recorrido que da pie al futuro de la materia matemática y su concreción en el formalismo de David Hilbert, hasta la recaída del área en la incompletitud aritmética de Gödel. Al final se puede entender la filosofía de las matemáticas desde la postura de Gödel.

CAPÍTULO 1: BIOGRAFÍA

1.1 Contexto de Gödel

Existe poca información de la vida personal del lógico Kurt Gödel en comparación con la de otros estudiosos o académicos reconocidos y afamados por los resultados de sus investigaciones en matemáticas, física o cualquier otra área del conocimiento con popularidad. Tal vez no sea el motivo principal del desconocimiento sobre la vivencia de Gödel, pero la aclaración sobre el desinterés que tiene la academia en los temas de lógica y los fundamentos matemáticos toma un lugar importante y aclaratorio sobre el desconocimiento del lógico y filósofo Kurt Gödel, lo que lo coloca como un personaje antagónico dentro de la historia de las matemáticas, del que todo se desconoce si no se está empapado del tema.

El trabajo de Kurt Gödel ha cambiado la historia de las matemáticas desde su aparición, sin obtener la atención suficiente o la relevancia necesaria en su momento. El motivo es que la lógica no es un área en competencia para el premio Novel o siquiera un campo visible o reconocido (Alonso, 2007, p. 9), deduciendo así el porqué de su anonimato. A pesar de lo anterior, influyó de manera innegable en todos los estudios alrededor del área matemática, añadió un nombre imborrable o más que importante a la lógica y la matemática a la edad de veinticinco años. Lo anterior acontece en el siglo XX, entrando la segunda guerra mundial que decidirá parte de la vida del lógico y la de sus contemporáneos.

Es notable en el trabajo de Gödel la inherencia filosófica, a pesar de la formalidad y rigurosidad lógica. Es inmediata la intención de la filosofía implícita en el carácter de los teoremas, demostrando una sensibilidad de conocimiento interrogativo, lo que algunos interpretaron como un tipo de nueva filosofía natural, por el equilibrio entre los signos lógicos y las ocupaciones filosóficas (Alonso, 2007, p. 13), dependientes ambas para el descubrimiento de sus resultados de la completitud en lógica elemental y la existencia de proposiciones indecidibles en aritmética. Sus dos teoremas cambiaron el rumbo de las matemáticas, pero también sus reflexiones cortas como filósofo natural, en escritos de opinión, son importantes avistamientos de su pensamiento.

La fama de Gödel es, también, discreta por la forma en que surge, no como un avance inmediato para la ciencia o las cualidades matemáticas, sino como una realidad incómoda, que comprueba la incompletitud e inconsistencia de las matemáticas, un área que se proponía por algunos como perfecta y que comprobaría cualquier problema. Gödel no resuelve los problemas matemáticos propuestos en su tiempo, resuelve algo con implicaciones de mayor profundidad, lo que ayudó al cambio de paradigma en todos los estándares del conocimiento positivista. Es así como se abre la puerta de la estructura matemática y se vislumbra el suelo sinuoso sobre el que estaba edificada toda su construcción de la época y anteriores.

1.2 Vida de Gödel

Kurt Gödel nació en Brün, Moravia, cuando la ciudad pertenecía al Imperio Austrohúngaro, en 1906. La familia, el entorno y el pensamiento de Gödel no se vieron afectados por la situación de la Gran guerra que atravesaba la región antes de añadirse a Checoslovaquia (Alonso, 2007, p. 34). El seno familiar de Gödel era propedéutico para la academia y la prosperidad intelectual, con una situación económica plena y una familia educada, con características laicas en conversación, formación y convivencia. La situación neutra fue un poco corrompida por la convivencia de un padre católico y una madre luterana baptista, lo que hizo de Gödel un creyente de la religión por parte materna.

El carácter de Gödel fue, en su niñez, el de un infante curioso y ansioso. A la edad de cinco años se le detectaron episodios de ansiedad y problemas nerviosos que lo acompañaron en algunas etapas de su vida, con una temporada de calma extendida en parte de su infancia, donde cesaron dichos problemas, pero dio inicio su carácter exigente y tendiente a la frustración (Alonso, 2007, p. 35). En cuanto a la curiosidad que presentaba, era algo especial y característica, pues mostraba una mente despejada y descubridora, que pudo ser la de un niño común, pero, en su casa se le nombraba *Herr Warum* (señor Por qué), haciendo de lo que podría ser una característica esencial en los niños, una cualidad atribuida a Gödel.

El joven Gödel siempre mostró entendimiento y agilidad para los conocimientos académicos, pero con enfoques que analíticamente tienen rasgos comunes y que, a través del tiempo, desarrolló en gran manera. Con talento en idiomas, lengua, matemáticas e historia se forma con mayor ánimo en las matemáticas, con la capacidad de comprender conocimientos universitarios del tema. Su primera intención de estudios universitarios, durante su juventud, fue la física, animado por lecturas comparativas entre las biografías de Goethe y su filosofía natural y la de Newton, declara su postura a favor del último. En el caso de la física, observa ambigüedades en la materia que decantan a Gödel por las matemáticas y después la lógica.

Los estudios universitarios del joven Gödel dan inicio en 1924, cuando llega a Viena y se instala junto a su hermano en un céntrico apartamento de la ciudad, comenzando su educación en física. En 1926 cambia a matemáticas, y para 1928 se decide por el estudio de la lógica. A través de dicho tiempo, fue alumno de académicos reconocidos como Gomperz en historia de la filosofía, Schlick en filosofía de la ciencia, Furtwängler en teoría de números y Carnap en fundamentos filosóficos de las matemáticas; al mismo tiempo durante la última cátedra mencionada, Gödel encuentra las obras de Frege y Hilbert, que fueron el centro de sus estudios y la base y desarrollo del aporte único que hizo contraste a la misma obra de Hilbert.

Gödel es descrito hasta ahora como un estudioso de carácter pasivo, pero no fue así. Como miembro de la comunidad académica vienesa fue muy activo y de reconocidos conocimientos que lo posicionaron como un conversador culto y espontáneo, al grado de ser llamado a los foros intelectuales del momento, con los que convivió, pero de los cuales distó su propia visión y postura sobre los problemas que presentaban; como en el Círculo de Viena, donde fue un integrante a partir de 1926, siendo amigo de Hans Hahn y Schlick (fundador), donde las nuevas investigaciones que se desarrollaron fueron de gran curiosidad para Kurt, pero, aun siendo miembro oficial en 1929, nunca adoptó la filosofía que ahí se desarrolló.

Como joven prodigio y una promesa académica, el lógico propuso expectativas para muchos intelectuales de su círculo, dentro y fuera de la academia. Sus contribuciones originales le ganaron el reconocimiento con la autoría de los teoremas que aportaron a la lógica y las matemáticas la sensatez necesaria para una revisión rigurosa, siendo también hallazgos únicos y revolucionarios. Ese periodo de realización fue llevado a cabo a lo largo de diez años, antes de su exilio a Estados Unidos, en 1939. Esa temporada, también, es sustancial por ser el momento en que contrae matrimonio, hecho que influye en algunas de sus relaciones personales y sociales.

En 1929 muere el padre de Gödel, por lo que la madre decide mudarse a Viena, donde residen sus hijos, consiguiendo un departamento cómodo para vivir junto a ellos. La situación se torna hostil al conocer la relación de Gödel con Adele Porkert, una mujer que vivía frente al que era el departamento de los hermanos Gödel. La desaprobación de la madre hacia la relación con Adele podría deberse a la aventajada edad de Adele o, también, podría deberse a su trabajo nocturno en un bar de los que abundaban en la época. La disconformidad de la madre hacia la relación que sostenía Gödel hace que la pareja mantenga un perfil bajo y su convivencia oculta, hasta su boda en 1938.

La nazificación de Viena en la época, hará que Gödel y Adele busquen una identidad estable de acuerdo con el régimen, para que Gödel conserve su puesto como profesor privado, y la vida pública de la época no lo juzgue o ponga en riesgo como había sucedido con su amigo, el filósofo y físico fundador del círculo de Viena, Moritz Schlick, que fue asesinado por un estudiante partidario del nazismo tras la anexión de Austria y Alemania, hecho que desarrolla una crisis depresiva en el lógico al punto de ser internado, en contra de su voluntad, en una institución de tratamiento de enfermedades mentales. El lógico sale de su internamiento sin influencia del episodio o algún efecto posterior, siempre con ayuda de Adele, que estuvo para él sin el compromiso de la maternidad, al no tener hijos en ningún momento.

El exilio de Gödel no fue de carácter político u hostil, más bien un tanto personal, parecido a una objeción de conciencia, al ser apto para el servicio militar pero no poder y querer participar de ello en 1939, una época conflictiva y de basta carga política e ideológica, sumada a su enfermedad y ansiedad que lo hacína no apto para hacer hacer frente a tal situación. Con lo anterior, también se reconoce su apartidismo y ausencia de la vida política de la época; como una persona partidaria de la paz y la democracia, buscó salir de la problemática del país, consiguiendo refugio en Princeton, donde impartió cursos y conferencias. Logró su cometido poniéndose en contacto con un matemático estadounidense de nombre Oswald Veblen.

En 1940, Gödel fija residencia en Princeton donde vive hasta su muerte en 1978. Como lógico, matemático y filósofo es reconocido por sus teoremas de incompletitud, que ampliaron el panorama de las matemáticas y sus fundamentos, dando la noticia de que las teorizaciones de David Hilbert fueron el resultado de una ciencia temprana con ambiciones desmedidas y autoritarias, como su frase "*Wir müssen wissen, wirb werden wissen* (Tenemos que conocer y lo haremos)" (Alonso citando a Hilbert, 2007, p. 39).

CAPÍTULO 2: SOBRE LA NECESIDAD DE FUNDAMENTAR LAS MATEMÁTICAS

De manera formal, la fundamentación de las matemáticas o *fundamentos matemáticos* comienza con Gottlob Frege y el *logicismo*, la corriente pionera del estudio enfocado en la naturaleza o base de la matemática, argumentando que la lógica era anterior a esta, pues los números naturales debían tener una construcción lógica. Varios matemáticos, filósofos y lógicos se adentraron en el problema con este inicio formal siguiendo el cuestionamiento planteado desde Frege y sus *Fundamentos de la aritmética*, publicado en 1884. Pero, desde Grecia clásica, la parte cultural, física y cosmogónica de los números ya había concebido crisis en las concepciones matemáticas. Como menciona Carlos M. Madrid Casado (2017):

> […] la naturaleza del conocimiento matemático no es nueva. Es bimilenaria. Así la primera crisis de los fundamentos se produjo en la antigua Grecia, cuando la aritmética pitagórica se resquebrajó. Los pitagóricos pensaban que todos los números eran *racionales*, como casaba su cosmovisión, pero pronto descubrieron que también había números *irracionales* (p. 111-112).

Como lo anterior, ocurrieron varias crisis de fundamentos numéricos hasta elaborar los cimientos de la geometría euclídea. Tiempo después, estudiosos del tema trataron de axiomatizar la práctica matemática o, tal vez, buscar con más profundidad lo que pudiera ser una base concreta e infranqueable para esta herramienta. Al hacerlo iluminaron las debilidades e interrogantes que provocaron su inestabilidad o falta de fundamentos. Pero con el avance logicista uno de los problemas que la lógica y la teoría de conjuntos –el conjunto base de las matemáticas, como propone Frege– de la época (mediados del XIX) podía tratar era el infinito. Y así, divididos en logicistas, intuicionistas y formalistas empieza este estudio.

2.1 Gottlob Frege

La lógica se intuyó por Frege como anterior a la matemática, por lo que el lógico decía que las matemáticas son un árbol con raíz en el logicismo. Mencionaba que la matemática descansa en los números naturales y estos se construyen con base en la lógica (Madrid Casado, 2017, p. 115). Frege creó así la lógica matemática, considerando que la aritmética es una parte de la lógica, y definió los números naturales en clases o conjuntos; las nociones aritméticas tenían que ser analizadas en términos puramente lógicos, pero Frege partía siempre de un principio, el principio de comprensión, principio que sería acusado por Russell como contradictorio, por lo que toda la matemática volvía a tambalearse.

2.2 Bertrand Russell

Russell también tropezó con paradojas dentro de su sistema, y más bien fue el comienzo de un enfrentamiento contra la proliferación de paradojas que se suscitan cuando estudiaba las clases que no son miembros de sí mismas, comenzando con un vicio lógico al que pondría fin con un axioma casi de forma ortopédica, que marcaba: *X* pertenece a *Y*, mientras y siempre que *Y* sea de valores mayores que los de *X* (Madrid Casado, 2017, p. 119). Russell y Whitehead en los *Principia mathematica* pasaron a deducir la matemática de la lógica, pues a su entender no se podía trazar una separación entre estas, pero su lógica fue denunciada por Hilbert como poco razonable, también fue puesta en evidencia como una lógica de conjuntos, o lo que sería una teoría de conjuntos; así quedó falsada.

2.3 David Hilbert

El estudioso de las matemáticas David Hilbert se preocupó por los fundamentos matemáticos y durante sus últimos años de investigación, profundizó en el tema de forma exclusiva (Madrid Casado, 2017, p. 111) junto a dos asistentes, Paul Bernays y Wilhelm Ackerman. Como es claro, antes de Hilbert había fundamentos o concepciones particulares, dadas por el contexto, como la cosmovisión pitagórica antigua. Así, los fundamentos y crisis en los mismos fueron evolucionando, concretando un estudio consciente y disciplinario. Hilbert hizo frente a las concepciones matemáticas antagónicas creando un hilo conductor en los *fundamentos matemáticos*.

Para dar fin a la guerra fría que mantenían formalistas e intuicionistas, Hilbert da continuidad a la postura que había presentado en el III Congreso internacional de Matemáticos, celebrado en 1904 en Heidelberg, Alemania, donde la observación sobre la crisis de los fundamentos dada por Hilbert se decanta hacia el formalismo, lo que causó críticas por parte de los intuicionistas. Esta situación mueve los ánimos de Hilbert, que para en 1922 se dedica a las bases de la matemática y con eso estudia la solución en cuestión como escuela formalista, con objetos del pensamiento matemático que son únicamente símbolos con una problema fundamental que trata de la consistencia o no contrariedad.

2.3.1 Lógica de Primer Orden

Para la empresa de Hilbert se necesitó formalizar la aritmética, la lógica y la teoría de conjuntos dejando de lado las paradojas difundidas en las definiciones y lenguaje no formal existente en el área, por lo que la matemática realizada sería "dentro de un nuevo sistema formal expresado mediante el nuevo lenguaje simbólico: 0 (el número cero), s (la función sucesor), $\neg$ (no), $\vee$ (o), $\wedge$ (y), $\rightarrow$ (implicación), $\exists$ (cuantificador existencial), $\forall$ (cuantificador universal), $=$ (igualdad), χ (variable), etc." (Madrid Casado, 2017, p. 149). Todo el sistema creado por Hilbert y Ackerman fue algo nuevo, funcional y concreto, reconocido como *lógica de primer orden*, demostrada por Gödel como completa en su tesis doctoral.

2.4 Kurt Gödel

Gödel realiza su tesis doctoral, que es presentada el 6 de febrero de 1930; fue tomada como indicativo de veracidad sobre el programa de Hilbert. Los axiomas buscados por Hilbert eran un conjunto de bases, las cuales derivan de procedimientos aritméticos con una validación que puede ser verificable algorítmicamente. Sólo faltaba hallar los axiomas[1] que permitieran demostrar las verdades aritméticas (Madrid Casado, 2017, p. 57-58). Lamentablemente, fue imposible gracias al *Teorema de incompletitud de Gödel*. Tiempo después de la presentación de la tesis doctoral de Gödel, un artículo suyo es publicado con el nombre *La completitud de los axiomas del cálculo lógico de primer orden*, el teorema demostrado por Gödel en su artículo fue nombrado el *Teorema de completitud de Gödel*.

[1] Para Aristóteles los axiomas son las bases incuestionables que fundamentan la ciencia, son el principio general del que se derivan demás argumentos, no por poseer una verdad absoluta, sino más bien como interpreta Boecio, para quien son nociones comunes. En matemáticas y lógica, Ferdinand Gonseth los admira como enunciados indemostrables pero necesarios.

Para entender el problema fundamental de Gödel, hay que tener en cuenta que la lógica es un estudio del razonamiento; razonamiento en el lenguaje. Con el tiempo, se acuerdan dos principios, la semántica (verdad/corrección) y la sintáctica (demostración/completitud), así que se tienen dos soluciones: se puede hacer matemáticas con un lenguaje de poca expresividad que su resultado sea una lógica correcta y completa, o bien formalizar razonamientos matemáticos en un lenguaje de expresividad, que en el más atinado de los casos sólo es correcto, pero incompleto, dónde sólo se pueden demostrar verdades, pero siempre habrá enunciados cuya verdad no se pueda demostrar (Madrid Casado, 2017, p. 154-155).

2.5 Positivismo Lógico

El contexto de los anteriores filósofos, matemáticos y lógicos se encuentra homogéneo de lo que se considera la continuación del *positivismo,* llamado *positivismo lógico,* con un nombre real y personajes selectos en un círculo académico nombrado Círculo de Viena, que inicia en 1929 y es donde brota la idea neopositivista de la superación de la metafísica con una visión científica del mundo, aprovechando los últimos hallazgos de la lógica de Frege y Russell, pero sobre todo basados del *Tractatus logico philosophicus* de Wittgenstein. Este empirismo lógico fue un nuevo intento de superar la ambigüedad de las anteriores ideas científicas y filosóficas, mediante el rigor de la lógica, la filosofía análitica, el juicio sintético y el lenguaje.

Este cuestionamiento sobre la metafísica se encuentra en Kant, al afirmar acerca de la cientificidad de la matemática pero cuestionar la posibilidad de la cientificidad de la metafísica. El Círculo de Viena remarca la metafísica como exterior a la experiencia y por lo tanto imposible como conocimiento científico o comprobable. Aún de lo anterior los positivistas lógicos siempre se encontraron incompletos ante la incongruencia de la adquisición del conocimiento en un constante debate epistémico entre la necesidad de la metafísica y su tesis antimetafísica liderada por Moritz Schlick y Carnap, pero con una base wittgenstaniana donde también se mencionaba lo siguiente en palabras de Schlick:

> “la imposibilidad en principio es imposibilidad lógica que no difiere de la imposibilidad empírica en grado, sino en su propia esencialidad. Lo que es empíricamente imposible sigue siendo concebible, pero lo que es lógicamente imposible es contradictorio y, por ende, no puede ser pensado” (Lluís Blasco citando a Moritz Schlick, 1998, p. 304)

Esta contradicción constante de la ciencia que busca saberes esenciales tuvo que sobrepasar la antimetafísica hasta en los más arraigados como Carnap, para poder llegar a generalizaciones en diversas ciencias, no porque alguna ciencia en general lo propusiera sino, más bien, porque se tuvo que admitir la necesidad fundamental de metafísica en la epistemología, cosa evidente al momento de la disolución del Círculo de Viena por el regimen nazi. El neopositivismo propuso la lógica y la matemática como sistemas *decidibles, completos y consistentes*, pero la comprobación de Gödel sobre la incompletitud de la aritmética, en 1923, regresó a las matemáticas por el camino de la metafísica. Como es mencionado, no fue por Gödel el regreso de la metafísica en la filosofía y las ciencias, pero con la disolución del Círculo de Viena varios autores, como Gödel en lógica y aritmética, cada uno en su área académica demostraron la imposibilidad de erradicar la metafísica del ámbito del conocimiento.

2.6 La Historia de Inherencia Filosófica y Matemática

Las matemáticas tienen dos interrogantes básicas e inherentes para su comprensión que, para ser resueltas, entran a discusión desde su planteamiento, y son: ¿desde cuándo existen las matemáticas? –o, ¿desde cuándo se utilizan las matemáticas?, que será una pregunta más sensata, por cuestiones que se irán descubriendo en el texto– y, ¿qué son las matemáticas? Ninguna de las preguntas obtiene una respuesta que no sea multifactorial, histórica y más que nada filosófica, que suman un conjunto de interrogantes, añadiendo una pregunta fundamental destacando el carácter de las matemáticas: ¿las matemáticas son una cuestión de objetos físicos u objetos mentales? Lo anterior, de a poco arraigará su importancia filosófica.

Se entiende de manera sencilla el cuantificar, como contar objetos o eliminarlos de un registro representativo, y se comprende de forma común a qué se refiere la palabra “matemáticas” por su utilidad. Es así como podemos rastrear su historia basada en la práctica, desde sus usos rudimentarios en las civilizaciones antiguas, como el calendario y el comercio, hasta su teorización, como la expresividad matemática en las cuestiones cosmológicas particulares –como la cosmología pitagórica–. Menciona Ruiz, citando a Struik “Una ciencia cultivada durante siglos por un oficio especial, cuya tarea no sólo es aplicarlo sino también instruir en sus secretos, desarrolla tendencias hacia la abstracción” (2003, p. 8).

Si bien se pueden rastrear las matemáticas desde tiempos muy remotos, hay referencias fidedignas de algunas, como las tablillas de arcilla de los babilonios (periodo antiguo, 2500 a.C.), que cuentan con registros de su sistema numérico, la aritmética conocida como acadiana y la geometría que, todavía no era tal cual una especialidad o campo de estudio, era más bien resultado de problemas prácticos en su entorno. Los anteriores conocimientos y problemas surgen de la medición de las tierras de cultivo, la necesidad del comercio y las épocas del año, que darán paso a la geometría como campo de estudio (inicios de la ciencia), por lo que "Para unos, la Matemática fue el pórtico y la llave de la Ciencia; para otros, además, el alfabeto de la Filosofía" (Madrid Casado, 2009, p. 1).

Ya practicada la labor matemática por las civilizaciones babilónica, egipcia y griega, una circunstancia paradigmática las encontró en una ciudad comerciante de Jonia, donde no sólo se intercambiaron los productos de sus tierras, también de las mentes y su cultura. El conocimiento tuvo lugar en tal intercambio en la ciudad jónica de Mileto, lo que transformó su contexto y los dibujó como ciudad cosmopolita, neutralizando pensamientos místicos y religiosos de la región para dar paso al conocimiento y la comprensión de nuevas ideas y culturas provenientes de los comerciantes. Fue ahí, que, como parte de Grecia, Jonia y en especial Mileto darían forma y consistencia a la ciencia, las matemáticas y la filosofía.

No esperó el contexto clásico (600 a.C. al 300 a.C.) y helenístico (300 a.C. al 600 d.C.) de Grecia para que sucediera el particular paradigma científico (en términos actuales) de la época. La escuela o visión jónica de la realidad eran esencialmente personajes aislados tratando por su cuenta la naturaleza de las cosas, mediante conocimientos que se compartían gracias al comercio y los viajes. Uno de los representantes más importante de la época fue Tales de Mileto (624 a.C. al 546 a.C.), considerado parte de los Siete sabios de Grecia y el primer *filósofo natural* de la Escuela de Mileto (fundada en el VI a.C.), que tendría como discípulos a Anaximandro y Anaxímenes, reconocidos por sus planteamientos físicos y cosmológicos.

Durante las guerras médicas (449 a.C. al 449 a.C.) –un ambiente difícil para la investigación científica y filosófica–, surge la Escuela pitagórica en Crotona –que mantenía un ambiente más adecuado para el estudio–, la cual fungía como secta científica, religiosa y política de postura aristocrática y conservadora, donde hombres y mujeres en igualdad de derechos operaban las actividades mencionadas a la manera de monjes –sin celibato–, que en el desarrollo de sus avances y descubrimientos tenían, por voto, que seguir el estudio sin tener autoría propia de tales conocimientos y pronunciarlos como obra de la escuela pitagórica (Ruíz, 2003, p. 31). Pitágoras de Samos fue quien fundó la escuela pitagórica.

Todas las referencias que se tienen de Pitágoras y la escuela pitagórica son gracias a textos varios de diversas autorías, como Heródoto o Platón, de los cuales el último mencionado tiene un peso significativo en los círculos matemáticos actuales, influenciado por los pitagóricos, que consideraban las matemáticas como abstractas y generadoras de la realidad. La mezcla que se daba entre misticismo y ciencia fue la raíz de los aspectos abstractos y lógicos de tales saberes matemáticos. Así, la comunión entre práctica, empiria, mística y lógica en Pitágoras fundaría indirectamente el idealismo Platónico, postura filosófica reconocida a la actualidad, de la cual se aprecian sus objetivos metafísicos y racionales en un abstracto *mundo de las ideas*.

En la pequeña ilustración elaborada se observa lo que hasta ahora conocemos como inicios de la matemática y vislumbramos el trayecto de las posturas de pensamiento que daban cabida a tal práctica y teoría, generadoras de problemas sustancialmente filosóficos que proporcionaron orden y lógica a los mencionados entredichos, siendo pórtico de la filosofía platónica, prestando al entendimiento que "Desde la noche de los tiempos, las Ciencias Formales, esto es, la Lógica y especialmente la Matemática, han sido las piedras de toque de toda filosofía que se precie" (Madrid Casado, 2009, p.1). A lo que, interrogantes filosóficas y matemáticas iluminarán la actualidad del campo de estudio matemático y filosófico.

2.7 Universalidad y Contingencia

Dos preguntas matemáticas y filosóficas son las que atañen la actualidad matemática y el comienzo del estudio en forma de *fundamentos matemáticos* –en el último cuarto del siglo XIX–. Son constituyentes en la empresa investigativa sobre el problema fundamental del origen y destino de la actividad en cuestión, pero más importante aún es la problemática existencial, acerca del razonamiento humano que traerán de fondo las respuestas, "…la vieja disputa sobre la universalidad (necesidad) o particularidad (contingencia) de la matemática ¿Construyen las ciencias matemáticas verdades universales, o su supuesta validez descansa en un mero convenio? ¿Es la Matemática descubrimiento o invención?" (Madrid Casado, 2009, p. 1).

Aun cuando la lógica simbólica es la herramienta metódica y rigurosa que da inicio a la fundamentación de la matemática, los problemas filosóficos forman parte esencial de su estudio. Lógicos y matemáticos han dado cuenta que el diálogo entre encadenamientos históricos y posturas filosóficas son inherentes del tema, tanto es así que los problemas más importantes de las matemáticas descansan en los conceptos de *universalidad* y *contingencia* que son cuestionamientos canónicos de la filosofía y han dado a través de la historia diversidad de argumentos. Para observar las corrientes filosóficas más importantes de las matemáticas en la actualidad se debe tener conocimiento de tales conceptos.

La discusión comienza en Platón, cuando propone que lo *universal* se encuentra en *acto* y está separado de las cosas singulares. Aristóteles se pronunciará después, mencionando que no existe lo universal en sentido platónico, que más bien hay *entidades*, refiriéndose al *qué-es* de cada cosa con todas sus partes integrantes (cualidades y cantidades) ya no en acto sino en *potencia* (Aristóteles, 2014, p. 277). El despliegue de ambos filósofos ha dejado lugar a más saberes desde su conocimiento, por lo que Mauricio Beuchot (1981) extiende un libro que recorre su transcurso, donde en primera instancia entiende lo universal como ideas abstractas, nociones generales o entidades no físicas, enumerando de la siguiente manera:

> […] el término 'universal' se usa aplicado a diferentes niveles de la realidad, adquiriendo en cada uno diferente significado. Se distinguen cinco planos en que es usado: (*i*) el de los símbolos lingüísticos, (*ii*) el de las entidades mentales subjetivas, (*iii*) el de los significados objetivos, (*iv*) el de las realidades fenoménicas, y (*v*) el de las entidades trascendentes. Es decir, algunos filósofos, ubicándose en el nivel (*i*), han sostenido que los universales son palabras orales o escritas, con lo cual, de alguna manera, los reducen al nivel (*iv*), de cosas empíricas y físicas, a las que también los han reducido otros pensadores, sin considerarlas como entidades lingüísticas sino meramente fenoménicas, o reductibles a ellas. Otros, ubicándose en el nivel (*ii*), han sostenido que son significados de las expresiones dotadas de una existencia que no se puede reducir a la de las cosas fenoménicas ni a la de las cosas inmateriales. Otros, en fin, ubicándose en el nivel (*v*), han sostenido que existen como Ideas subsistentes, con una existencia superior –no sólo es distinta– que la de las cosas de este mundo (pp. 16-17).

La discusión sobre el concepto de universalidad es más extensa y anterior que las *modalidades* de *contingencia*, *necesidad*, *posibilidad* o *imposibilidad* de las que también debe tenerse conocimiento para comprender la ramificación y discusión de las corrientes filosóficas de las matemáticas. Dichas modalidades dan origen a la *lógica modal*, que surge en el medievo cuando la lógica da cuenta que hay distintas formas en que una proposición puede ser falsa o verdadera (Alchourrón, 1995, p. 290). *Contingencia* es uno de los cuatro *modos* (necesidad, posibilidad, imposibilidad y contingencia) de la lógica modal y es base para comprender la fundamentación matemática y para entenderla primero hay que reconocer lo *necesario*.

> Se llama necesario a aquello sin lo cual, por ser con causa, no se puede vivir (por ejemplo, la respiración y la alimentación son necesarias para el animal, ya que sin ellas es imposible que exista), y también aquellas cosas sin las cuales el bien no puede existir o producirse, o el mal no puede suprimirse o desaparecer (por ejemplo, el beberse la medicina es necesario para no estar enfermo, y el viajar a Egina para cobrar el dinero). [...] Además, lo que no puede ser de otro modo que como es, decimos que es necesario que sea así. En efecto, de lo impuesto violentamente se dice que es necesario hacerlo o padecerlo cuando, a causa de la violencia ejercida, no se puede seguir la inclinación propia, como que la necesidad es precisamente aquello por lo cual no se puede actuar de otro modo (Aristóteles, 2014, p. 187).

La referencia anterior a lo necesario es más pragmática que lógica, es una descripción poco compleja de la disposición que tiene el concepto a ser antes elemental que matemático, para comprender de manera práctica su antítesis inseparable que es lo contingente. No es la intención practicar y aprender lógica para el cometido del texto, puesto que el enfoque está en la filosofía y el análisis de los problemas expuestos, así que su argumentación filosófica es suficiente para el análisis encausado. Una vez presentada la necesidad, desembocamos en el modo de contingencia, un concepto complejo que no ha podido ser puesto en argumentos filosóficos concretos, ha sido, más bien, ocupado como símbolo lógico, un *operador monádico*.

> Para Aristóteles, lo contingente, se contrapone a lo necesario [...] El sentido de ‘Es contingente’ es discutido. Algunos consideran que ‘Es contingente que p’ es lo mismo que ‘Es posible que p’; otros estiman que ‘Es contingente que p’ es equivalente a la conjunción: ‘Es posible que p’ y ‘Es posible que no p’. En la literatura lógica clásica es frecuente definir la contingencia como la posibilidad de que algo sea y la posibilidad de que algo no sea. Si el término ‘algo’ se refiere a una proposición, la definición corresponde efectivamente a la lógica; si ‘algo’ designa un objeto, corresponde a la ontología. La referencia no aparece siempre clara en la mencionada literatura, pero es obvio que cuando se habla de proposiciones contingentes, su análisis entra siempre dentro de la lógica modal. [...] Las definiciones medievales de ‘contingente’ pueden resumirse en la tesis de Santo Tomás, según el cual (como hemos visto antes a propósito del sentido lógico) lo

> contingente es aquello que puede ser y puede no ser. En este sentido el ens contingens se contrapone al ens necessarium. Metafísicamente, el ente contingente ha sido considerado como aquel que no es en sí, sino en otro (Ferrater Mora, 1979).

Los problemas de contingencia y universalidad (necesidad) abren la puerta al dilema que mueve el piso matemático: qué tipo de verdad ofrecen las matemáticas según sea el caso, si las matemáticas son contingentes, necesarias, particulares o universales, ¿cuál es la naturaleza matemática? Cosa ya argumentada por Aristóteles en su *Metafísica* pero no agotada a su actualidad con distintas posturas a la del filósofo, siendo planteamiento y desarrollo de la materia matemática contemporánea en sus fundamentos. Aun de haber otros operadores monádicos, lo necesario y lo contingente son el trasfondo de lo que quisiera ser aclarado en términos filosóficos, lógicos y matemáticos. El dilema desde la óptica de Benacerraf es descrita por Madrid Casado (2009) de la siguiente manera:

> En 1973, el lógico Paul Benacerraf planteó un curioso dilema filosófico que ha venido centrando todas las disputas sobre el estatuto de las matemáticas de entonces acá. En su artículo «Mathematical Truth», el Dilema de Benacerraf cobró carta de naturaleza. La meta que persigue Benacerraf es mostrar la contradicción que existe entre qué es la verdad y cómo se llega a ella en matemáticas. Benacerraf comienza haciendo dos suposiciones bastante plausibles. Por un lado, asume que (A) para que las proposiciones matemáticas sean verdaderas, han de existir los objetos matemáticos a que refieren, y, por otro lado, que (B) para conocer un objeto, ha de interactuarse causalmente con él. A continuación, razonando a partir de (A) y (B), va a deducir esta paradoja: o bien las matemáticas no son universales; o bien, siendo universales, no podemos conocerlas. En efecto, si las verdades matemáticas son universales, los objetos matemáticos no pueden ser contingentes (aplicando A) y, por tanto, al no ser espaciotemporales ni emitir o absorber energía, es imposible que lleguemos a conocerlos (aplicando B); pero, si aceptamos su conocimiento, la matemática pierde su rango de universalidad, ya que nosotros sólo conocemos cosas u objetos contingentes. En cuatro palabras: si la Matemática es universal, nos queda demasiado lejos; y, si nos cae cerca, es que no es universal (p. 3).

Se vuelve a este dilema de forma constante en el estudio de los fundamentos matemáticos que abordan en su labor técnica cuestiones de fondo filosófico e incluso existencial por su menesterosa racionalidad. Un dilema tan antiguo y a la vez de tanta actualidad que deja interrogarnos por la posibilidad de tener el conocimiento universal desde una perspectiva de contingencia, en conceptos filosóficos, y en terminos más tecnicos o actuales la pregunta que interroga si una visión subjetiva o contingente puede observar lo objetivo o necesario (Madrid Casado, 2009, p. 3). Este dilema es trasfondo de las que son conocidas en materia académica a la actualidad como corrientes filosóficas de las matemáticas.

2.8 Corrientes Filosóficas de la Matemáticas

2.8.1 Platonismo

Platón y su filosofía son los iniciadores de la praxis matemática como se conoce hoy en día por los matemáticos profesionales, tal formación matemática hace que todos los especialistas de sus áreas prácticas sean platónicos a la hora de ejercer, sean o no partidarios del platonismo matemático. Curiosamente, el primer platónico fue Pitágoras –como mencionamos anteriormente sobre el origen de la filosofía platónica–, que tenía la creencia de que el universo es un cosmos en armonía numérica con números racionales, aun de conocer en secreto los números irracionales y las proporciones inconmensurables, expulsando de la escuela pitagórica a los que se atrevieron a divulgar la información, acto que Platón reprobó y números que enseñó en su Academia.

En el *Timeo* de Platón, argumenta con Sócrates el postulado pitagórico de la existencia real y la autonomía de los números como armonizadores de las cosas, combinado con el *mundo de las ideas* – los universales–. Idea a la que los continuadores de la Academia dieron seguimiento, según sus propias instrumentalizaciones filosóficas o matemáticas. San Agustín, coloca las Ideas y los números en el omnisciente, a la vez que menciona a la infinitud numérica como en *acto* (contrario de en *potencia*) en el intelecto divino; Kurt Gödel, equiparaba la realidad de los conjuntos matemáticos con los cuerpos físicos; el grupo Nicolás Bourbaki, creía en dicha realidad matemática y el filósofo Edmund Husserl fundó la *Fenomenología* basado en el platonismo matemático.

Madrid Casado (2009, p. 6) hace un ejercicio para entender la geometría de Husserl y explicar el platonismo de forma general, a pesar de ser una visión basada en el propio sistema filosófico de Husserl. El ejercicio es, imaginar una línea recta trazada con gis sobre un pizarrón, donde Husserl nos muestra que tenemos puestos anteojos geométricos, idealizando la visión de la mancha de tiza como una línea geométrica sin cualidades y cantidades, objetivada como *recta geométrica*. Esta idealización es de gran ayuda para llevar la praxis matemática a los objetos empíricos. Lo anterior, Miguel García Baró lo llama *platonizar*, apartar los fenómenos mentales y no mentales de la *esencia* (según Casado).

2.8.2 Logicismo

El logicismo da inicio con Gottlob Frege, un profesor de *análisis real y complejo* de la Universidad de Jena. El programa logicista tiene base en *Fundamentos de la aritmética* de Frege, publicado en 1884, donde sostiene que los conceptos matemáticos son anteriormente lógicos porque en términos de *realismo* son leyes *naturales*. La matemática sería, a entender fregeano, una rama de la lógica. No tardó mucho para que se notaran las paradojas del programa fregeano, como lo mostró en una carta a Frege un joven lógico llamado Bertrand Russell, quien le advirtió que se podía deducir una contradicción en su sistema a partir de su ley V. Frege contesta la carta dándole la razón y admitiendo que las matemáticas seguían sin fundamento.

El programa logicista no termina con Frege; Russell y Whitehead –su colaborador– le dan continuación, montando una obra que, en palabras de Madrid Casado (2009), es “una especie de megalógica” (p. 11) con sus propias paradojas, de nombre *Principia mathematica* que el propio Russell redujo para Carnap en treinta y cinco páginas, de donde Carnap deduce que “las verdades de la matemática son analíticas, porque sólo dependen del correcto uso de reglas lógicas. Los conceptos matemáticos pueden deducirse de conceptos lógicos mediante definición, y los teoremas matemáticos pueden deducirse de axiomas lógicos mediante deducción” (Madrid Casado, 2009, p. 11). El logicismo continuó, ahora con una *lógica de segundo orden* con Boolos.

2.8.3 Intuicionismo

En 1912 el matemático Jan Brouwer inaugura el curso *Intuicionismo y formalismo* en la Universidad de Amsterdam, que es el punto de partida del intuicionismo o como también se le conoce *neointuicionismo*, ya considerados anteriormente a Kant y Poincaré como intuicionistas. Madrid Casado (2009) cita a Kant dentro de lo que es su intuicionismo cuando dice “El número no es, pues, otra cosa que la unidad de síntesis de lo diverso de una intuición homogénea en general, unidad obtenida al producir yo el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición” (p. 14) lo que concluye que la aritmética y la geometría no derivan de conceptos sino de intuiciones, como el *tiempo* de Kant, una clásica sucesión aritmética de *intuición pura*: {1, 2, 3, 4…}

Egbertus Jan Brower influenciado por la filosofía de Poincaré descubre su neointuicionismo que, en palabras del matemático Madrid Casado (2009), sostiene “Frente al platonismo y al logicismo, que defienden que las verdades matemáticas se descubren, el intuicionismo brouweriano mantiene que son, en realidad, inventadas. La exactitud de las matemáticas subyace en el intelecto humano” (p. 15), por lo que las matemáticas son en realidad una actividad de la mente que no dependen del lenguaje, una actividad, más que lógica, creativa, como asegura Poincaré: la lógica es tautológica porque el silogismo no añade nada, la matemática según la lógica formal sólo puede ser $A=A$.

2.8.4 Formalismo

El *nominalismo* frente a lo universal es el análogo del formalismo ante las demás filosofías matemáticas. Para el formalismo las matemáticas se reducen a signos en papel, vacíos, que sólo son normas de un juego que dan oportunidad de ordenar los mismos signos. El primer formalismo tiene de fondo la geometría desarrollada con axiomática y deducción, y después, el segundo formalismo se dedica a la aritmética, como el logicismo, el intuicionismo. El nombre que resalta en la primera y la segunda postura formalista es el de David Hilbert, un entusiasta de los *infinitos cantorianos*[2] que se propuso completar la meta formalista y salvar a las matemáticas de sus propios enemigos como el intuicionismo, mediante el concepto de *prueba matemática*, perfeccionar la *teoría de la demostración* –una rama de la lógica–.

Hilbert instaló el programa formalista con el que pretendió eliminar los problemas fundamentales (eliminar la fundamentación y cambiarla por una demostración formal) de la

[2] Los conjuntos infinitos de Georg Cantor se deben a la *función biyectiva* o relación biyectiva, su aporte que logrará relacionar conjuntos infinitos y jerarquizarlos. Dos conjuntos tienen la misma cardinalidad (tamaño) si hay manera de relacionarlos de forma biyectiva, lo que refiere a que se puedan crear parejas de elementos del conjunto A con elementos del conjunto B, cubriendo la totalidad de elementos en ambos conjuntos (ningún elemento puede tener más de una pareja). Mientras que los conjuntos finitos son incapaces de relacionarse biyectivamente con alguno de sus subconjuntos, los conjuntos infinitos se pueden definir como aquellos que tienen la capacidad de establecer una biyección con alguno de sus subconjuntos. Un ejemplo es el *conjunto de números enteros* (Z) en relación biyectiva con el *conjunto de números naturales* (N) que tienen la misma cardinalidad; ejemplo, $Z = \{...-2, -1, 0, 1, 2,...\}$, $N = \{0, 1, 2, 3, 4,...\}$ (el cero no es parte de los naturales, pero en este caso es añadido de forma axiomática para la función), biyección = {0,0; 1,-1; 2,1; 3,-2; 4,2;...}. Cantor logra establecer una biyección entre N y Q mediante una cuadro que organiza los números y los relaciona de forma lógica en zigzag, así puede establecer su biyección; también deduce que los conjuntos de *naturales pares*, Z, N y los Q (racionales) tienen la misma cardinalidad, a esa cardinalidad infinita la nombra *álef sub cero* (ℵo). Cantor descubre que el conjunto de *números reales* (R) no puede relacionarse biyectivamente con el conjunto N a pesar de ambos ser infinitos, por lo que el infinito de R resulta mayor al infinito de ℵo. Esto revela que existen varios infinitos y una jerarquía de cardinalidad entre ellos.

matemática mediante la *teoría de la prueba* que busca la *consistencia* de las matemáticas mediante un proceso en el que a algunas fórmulas finitistas no ambiguas se les nombra axiomas, probadas de la siguiente manera: "si A y $A \rightarrow B$ han sido probadas, entonces B está probada; a partir de aquí, la Matemática" (Madrid Casado, 2009, p. 18). En 1930, cuando David Hilbert daba su famosa conferencia donde aseguraba con la frase "debemos saber y sabremos" que la matemática encontraba su lugar. Al mismo tiempo el formalista von Neumann descubre a un joven Gödel presentando sus *teoremas de incompletitud*, que volverán a tambalear el suelo matemático.

2.9 La Axiomática

Hasta ahora es notoria la necesidad de fundamentar las matemáticas y examinar las interrogantes que traen consigo de manera natural, ya sea en la práctica o la teoría. La matemática para algunos puede ser una ciencia de la cual no se sabe nada realmente, sólo se intuye su existencia y su labor, pues no está del todo claro su origen y función, más bien se utiliza de manera, más o menos adecuada según su utilidad momentánea, que para el caso es una aproximación a los problemas reales que quiere abarcar el matemático en su labor. En esa interrogante sobre el origen de la matemática, que deja al descubierto cómo su fundamento está colocado sobre supuestos, dados a conveniencia, poco uniformes o concretos surge la pregunta, ¿sobre qué está edificada la práctica matemática?

> Bertrand Russell, filósofo, matemático y uno de los intelectuales más influyentes del siglo XX, alguna vez dijo en su ensayo 'Mathematics and the metaphysicians', citado por Newman: 'Las matemáticas podrían definirse como aquello en lo que nunca sabemos de lo que estamos hablando, ni si lo que decimos es verdad', refiriéndose a la concepción moderna de la matemática. Además, Karl Boyer afirma que: 'Uno de los hallazgos culturales decisivos del siglo XIX fue el descubrimiento de que la matemática no es una ciencia natural, sino una creación intelectual del hombre, en 1901 en el International Montthly'. Sin embargo para llegar a esta conclusión, hubo necesidad de comprender el verdadero sentido de la axiomática y su influencia en el progreso de la ciencia (Contreras Oré con citas de Russell, Newman y Boyer, 2017, p. 112).

Es una pluralidad de respuestas las que se observan sobre las matemáticas, bajo supuestos que no están del todo estudiados, como es visto en la cita anterior a Contreras Oré, donde se encuentra una postura radical, en cuanto a decisión o desconocimiento del amplio horizonte matemático de filosofías y posturas, esto cuando Karl Boyer hace una atrevida afirmación sobre el origen y residencia de la matemática en el intelecto humano, cosa que perfectamente puede ser refutada por Gödel y muchos matemáticos, pero es entendible que exista esta postura de tintes intuicionistas, pues aún se desconoce el fundamento y origen último de la matemática, así que existen y conviven en la teoría y práctica matemática muchas posturas, ya sean radicales o más justas en cuanto a dicho fundamento último o primordial de las matemáticas. Pero lo que sí es obviado, es que la práctica matemática descansa en la axiomática.

La palabra "*axioma*" proviene del verbo en griego clásico ἀξιόω (pronunciado en español: axióo), que de manera general o en una traducción literal significa "valor", pero en otras interpretaciones puede significar: estimar digno (de algún premio o castigo), estimar apropiado, opinar que, creer que; y en forma de sustantivo puede significar: dignidad u honor. En prosa ática puede ser sinónimo del sustantivo del verbo griego clásico α'ίτημα (pronunciado en español: a'ítima), que puede significar: exigencia o postulado. Aristóteles nombra αξίωμα (pronunciado en español: axioma), a la afirmación que se adopta como premisa de un razonamiento, y en su *Analíticos Posteriores*, lo utiliza como la afirmación que enuncia algún principio evidente en una ciencia (Torretti, 1993, p. 89-90).

En el siglo IV a.C. en Grecia existía una práctica donde se trataba de argumentar cuestiones matemáticas a partir de premisas que sólo eran válidas en esa argumentación, las premisas indemostrables dadas solían llamarse "axiomas", "hipótesis" o "postulados". Esta práctica de la matemática griega era cuestionada por Platón, por tratarse –para su rigor– de un ejercicio engañoso que contrastaba con la búsqueda de la verdad o de un principio incuestionable que no fuese hipotético, sino razonable, donde Platón encontraba el lugar de la filosofía.

Para Aristóteles no existe un único principio, que sea común a todo, pero sí admite que todas las ciencias deben edificarse sobre principios comunes y otros propios, que se acrediten por sí mismos por lo que no requieren demostración, por ser evidentes. Con conocimiento de lo anterior, para establecer una ciencia habría que descubrir primero sus principios. Una vez conocidos sus principios, se prosigue el trabajo científico que consiste en definir y deducir. La ciencia aristotélica se expresa en dos afirmaciones ordenadas: primero en *axiomas* incuestionables y después en *teoremas* demostrados por inferencia deductiva a partir de los axiomas. Estas afirmaciones emplean dos tipos de términos: los primeros llamados *primitivos*[3] y los segundos llamados *derivados*, que se definen mediante los primitivos.

Esta idealización del trabajo científico que describe Aristóteles, es lo que podría ser una ciencia en su estado perfecto y encaja de manera adecuada en la construcción de una ciencia formal como las matemáticas. Algunos filósofos y científicos creyeron que esa ciencia ideal se había realizado en los *Elementos* de Euclides, una obra que fue posterior a Aristóteles, pero también, otros están de acuerdo en que esta obra, no satisface el rigor aristotélico puesto que, "Los *Elementos* empiezan con aseveraciones que no se demuestran y exigencias que no se justifican" (Torretti, 1993, p. 91), a pesar de esto, es el intento de sistema axiomático más cercano a la idea aristotélica de ciencia que fascinó a cientificos y filosofos. El siglo XVII, es caracterizado por su renovado interés en desarrollar grandes sistemas axiomáticos, de los cuales ninguno llega a verse tan cercano al plan ideal aristotélico, como casi lo habrían logrado los *Elementos* de Euclides. Roberto Torretti (1993) explica que:

> [...] los más grandes adoptan el método axiomático: Galileo en el breve tratado 'De motu locali' en que funda la cinemática moderna, Newton en la obra maestra en que sienta las bases de la nueva dinámica y explica, con ella, los movimientos visibles de los astros. Pero estos físicos en agudo contraste con sus contemporáneos metafísicos no pretenden que sus axiomas sean verdades evidentes por sí mismas. Galileo confía establecer su verdad cuando se vea que las conclusiones deducidas de ellos concuerdan exactamente con la experiencia. También Newton ha debido pensar así, por más que dijera que no inventaba hipótesis (p. 92).

Al ningún sistema axiomático –dentro de estos el de Galileo y el de Newton– poder alcanzar el rigor imperfecto de los *Elementos* de Euclides, se consideró una difícil tarea, pero en 1882, Pasch en sus *Lecciones de geometría moderna*, considera que el método axiomático de la geometría para ajustarse a las consideraciones aristotélicas tiene que dejar de lado los diagramas, la intuición y la experiencia empírica para cambiar por el rigor de la deducción. Tiempo después, se desarrolla otro sistema que satisface –en consideraciones de Pasch– la axiomatización de la geometría Euclidiana, este es la geometría de David Hilbert.

---

[3] Un ejemplo de términos primitivos, son los utilizados por David Hilbert, que son tres: la línea, el punto y el espacio, que son ideas carentes de todo accidente o realidad, no tienen tamaño, dimensión, color, etc. sólo existen en la idea, pero son la base de la construcción geométrica.

La axiomatización definitiva –según los estándares de Pasch– de la geometría se logra con el primer formalismo de David Hilbert. Esto hace evidente que ya no era una ciencia descriptiva del espacio, sino un sistema deductivo lógico, esta axiomatización definitiva de la geometría elemental se encuentra en la obra de Hilbert *Grundlagen der geometrie*, finalizada en 1899. Esta forma de geometría derriba la teoría geométrica de Kant y su visión filosófica de la misma, pero en esta Hilbert encuentra la base filosófica para el formalismo de la aritmética (con eso, la fundamentación o formalización de las matemáticas) y da por terminado su trabajo en la geometría. Hilbert en el diálogo geométrico de la época y con la *Crítica de la razón pura* de Kant, concluye que a pesar de haber formalizado la geometría, no puede separar el origen empírico de esta. Lo anterior se hace notorio en una cita de Hilbert, que trae Torrez Alcaraz (2009) como la caída en cuenta de Hilbert sobre el origen de la geometría en lo empírico, y dice: "Los axiomas [de la geometría] corresponden a observaciones [...]. Estos simples hechos de la experiencia son de tan frecuente observación y por lo tanto tan conocidos, que el físico no necesita comprobarlos en el laboratorio" (p. 65).

La axiomática, según Alberto Dou (Contreras Oré referenciando a Dou, 2016, p. 116), se divide en dos tipos: la axiomática material y la axiomática formal. La *axiomática material* es la manera clásica de observar la geometría como una ciencia que estudia el espacio que es parte de la realidad, por lo que sus axiomas son una descripción del mundo del cual tienen experiencia. La *axiomática formal* se obtiene gracias al plan formalista de David Hilbert, que para superar los problemas de la geometría elimina todo contenido de sus axiomas, que pasan a ser sólo símbolos y reglas formales de deducción; esta forma de axiomatización contiene elementos primitivos que carecen de cualquier contenido y se convierten en sólo piezas de un juego sin sentido material o empírico, a lo que axiomas y teoremas se convierten en, según Contreras Oré (2016), "esqueletos de derivación lógica, que pueden ser rellenados por variables y carecen evidentemente de sentido de verdad o falsedad. Parece que Russell, se refiere a esta concepción como Matemática" (p. 116).

Para entender mejor el panorama de la axiomática, es necesario observar el diálogo que mantiene Hilbert –en su etapa geométrica– con la axiomática de Euclides y la visión de la geometría en la *Crítica de la razón pura* de Kant.

2.9.1 La Geometría de Euclides

En el III a.C. Euclides junto a sus discípulos escribieron los *Elementos*, que son libros donde se organizan sus conocimientos sobre geometría con un método lógico. Este método parte de algunas suposiciones intuitivas utilizando lógica para deducir demás hipótesis, pues no era suficiente la intuición de la certeza, se necesitaba comprobar sus hipótesis. Estos Elementos de Euclides serían la base de las matemáticas modernas.

Tabla 1

Elementos de Euclides

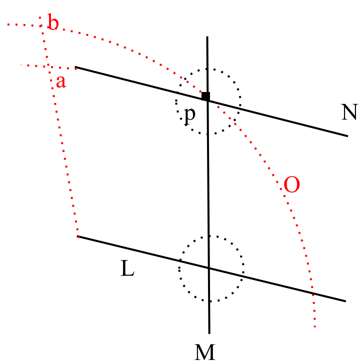
(algunas) Definiciones	Nociones comunes	Axiomas (o Postulados)
Un punto es lo que no tiene partes.	Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí.	1. Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta.
Una línea es una longitud sin anchura.	Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.	2. Las líneas rectas pueden extenderse indefinidamente.
Una línea recta es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.	Si a cosas iguales se restan cosas iguales, los restos son iguales.	3. Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.
Si dos rectas se cortan de modo que los ángulos adyacentes son iguales, los ángulos se llaman rectos y las líneas se llaman perpendiculares.	Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.	4. Todos los ángulos rectos son iguales.
Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, nunca se cruzan.	El total es mayor que una parte.	5. Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado.

Nota. Los *Elementos* de Euclides aparte de lo anterior, contiene teoremas, construcciones y demostraciones. Esta tabla fue construida con la información de https://www.matem.unam.mx/~max/GEA16/N1.pdf.

Figura 1

Proposición I: 31 de los Teoremas de los Elementos de Euclides

Se puede construir una recta paralela a una recta dada por un punto dado.



Construcción. Dada una recta L y un punto p, trazar una recta M que pase por p y cruce a L. Trazar por P una recta N que cruce a M formando un ángulo igual al que L forma con M.

Afirmación: N es paralela a L.

Demostración. Supongamos que L y N no fueran paralelas y se cruzaran en un punto a. Sea b un punto en L más allá de a. Considerar la recta O que pasa por b y p. Entonces O cruza a M formando ángulos que suman menos de dos rectos.

Entonces por I: 5 la recta O debe cruzar a la recta L del otro lado de M, así que L y O se cruzarían en dos puntos, lo que contradice al Axioma 1

Nota. La proposición I: 5 que enlaza de manera lógica la proposición actual, enuncia que "Si un triángulo tiene dos lados iguales, entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales". Esta figura es una adecuación y cita el texto de la original que se encuentra en https://www.matem.unam.mx/~max/GEA16/N1.pdf.

La visión de Hilbert y su ayudante Bernays, califican la axiomática geométrica de Euclides como como *material* (*inhaltliche*), porque posee contenido, pues se considera que en ella se tiene apreciación de un sistema de objetos preestablecidos, utiliza diagramas que son, en ese sentido, contenido; a la vez que la teoría tiene lugar en las pruebas, donde las definiciones contienen ideas que no se utilizan en algunas demostraciones. Por lo anterior es más emparejable con Hilbert la geometría kantiana sobre Euclides, que se encuentra en la *Crítica de la razón pura*, con su *filosofía constructiva* o *constructivista* de las matemáticas que contiene un fundamento epistemológico para conocer las matemáticas en general, donde para el formalismo de Hilbert tiene más sentido su estudio, aún de mantener amplia distancia.

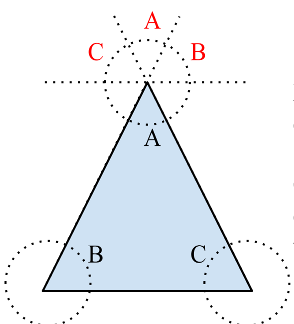
2.9.2 La Geometría de Kant

Las ideas de Kant sobre la geometría fueron importantes en el debate matemático entre el siglo XIX y XX, no porque ahora no lo sean, pero hasta ese momento gozaban de popularidad en la época. En la *Crítica de la razón pura*, Kant se apoya en dos razonamientos: la idea de que geometría y aritmética descansan en las formas puras de la intuición, lo que las colocaría según el filósofo como juicios sintéticos a priori; el segundo razonamiento es que los objetos matemáticos se pueden construir, este argumento tiene base en su teoría de esquemas para los conceptos del entendimiento. Kant, con estas herramientas, busca fundamentar el razonamiento que se encuentra en los Elementos de Euclides, paradigmáticos de la demostración matemática hasta el XIX (Torres Alcaraz, 2009, p.38).

Figura 2

Proposición I: 32 de los Teoremas de los Elementos de Euclides

En cualquier triángulo, la suma de los tres ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos.



Demostración. Dado el triángulo ABC, por la proposición 31 del libro I podemos construir una paralela al lado BC que pase por el punto A.

Como los ángulos que forma una recta con dos rectas paralelas son iguales y como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, los ángulos internos del triángulo suman lo mismo que los ángulos de un lado de una recta.

Nota. La proposición I: 31 que enlaza de manera lógica la proposición actual, enuncia que "se puede construir una recta paralela a una recta dada por un punto dado", tal proposición contiene una *construcción*, una *afirmación* y su *demostración.* Esta figura es una adecuación y cita el texto de la original que se encuentra en https://www.matem.unam.mx/~max/GEA16/N1.pdf.

Kant entiende la demostración geométrica general en *Elementos* de Euclides, donde da forma a su teoría de esquemas. En la *Crítica de la razón pura*, utiliza la proposición 32 del libro I (I:32) [Figura 2] de *Elementos* de Euclides para ilustrar su explicación; el diagrama o figura es la base para organizar su argumento nombrado *construcción de conceptos*, que es común a todas las matemáticas. Kant reconoce ahí que:

> 'El conocimiento filosófico es un conocimiento racional derivado de conceptos; el conocimiento matemático es un conocimiento obtenido por la construcción de los conceptos', y añade: 'el conocimiento filosófico sólo considera lo particular en lo universal; las matemáticas, lo universal en lo particular, e incluso en lo singular, pero sólo a priori y por medio de la razón' (Torres Alcaraz citando a Kant, 2009, p. 41).

Según lo anterior, los diagramas de las proposiciones son construcciones de conceptos, el ejemplo de la proposición I:32 refleja los conceptos de *triángulo, línea recta* y *ángulo* en un diseño o diagrama que se ha adoptado por conveniencia o practicidad, pudiendo variar. Sobre el diagrama construido, entonces, se hace el desarrollo del razonamiento último que es general. Hablando de I:32, se habla de ángulos y rectas propias, en lugar de hablar de cualquier ángulo, recta o triángulo; por lo que se está considerando lo universal en lo singular. Kant entiende que construir un concepto es penetrar la intuición a priori correspondiente al concepto, para lo que el diagrama es de ayuda en su estudio y construcción desde su existencia en la proposición (enunciado), porque en esta ya se habla de *ángulos internos* y *ángulos externos* sin que en los *Elementos* se encuentre su definición precisa o particular, por lo que el diagrama es parte de la demostración.

Estos razonamientos diagramáticos son, por la observación en el diagrama, lo que Kant nombra esencial de la demostración matemática, sin lo que no podría ser posible la matemática; en cambio piensa que si cuestionamos al filósofo la misma interrogante, nunca observará el diagrama I:32, pero tendrá en cuenta los conceptos (recta, ángulo, punto, etc.), pues el filósofo conoce por conceptos, no por construcción de conceptos[4] ya que considera lo particular en lo universal, lo que lo califica como analizador y clarificador de conceptos, pero con la incapacidad de observar sus propiedades.

A diferencia del filósofo, el geómetra (anterior al siglo XIX) primero representa los conceptos con ayuda de construcciones y después razona los diagramas que resulten de tales construcciones, de esa manera descubre propiedades de los objetos que no se encuentran en los conceptos. El diagrama y las construcciones para Kant son una cadena de inferencias guiadas por la intuición, donde el geómetra obtiene un resultado evidente y universal del problema. Para Kant, esa concretud del método en la matemática para con los conceptos, los coloca en los juicios sintéticos a priori. Según el filósofo:

> [...] 'la geometría es sintética porque sus resultados se obtienen realizando construcciones. La geometría es a priori porque de los objetos construidos sólo considera aquello que se sigue de las condiciones universales de la construcción; es por ello que el geómetra puede afirmar la validez del resultado para todas las intuiciones correspondientes al concepto' (Torres Alcaraz citando a

[4] Deleuze y Guattari en su libro "¿Qué es la filosofía?" argumentan diferente, iniciando con "...la Filosofía es el arte de formar, de inventar y de fabricar conceptos".

Kant, 2009, p. 43).

Torrez Alcaraz (2009, p. 43), también menciona que las anteriores afirmaciones kantianas tienen al día de hoy escaso valor. Y con otra opinión en algunas observaciones acerca de la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía kantiana, Gödel revela que Kant puede ser revisitado, y que fue de su interés en algún momento.También se entiende del mismo documento que a diferencia de como suele pensarse, la teoría de la relatividad no invalidó del todo el panorama de las ideas kantianas, argumento extendido sobre la idea de que las geometrías no euclidianas quitan la base a priori de la geometría euclídea entendida en Kant. El problema que Gödel observa en Kant es que sólo se puede hacer relaciones entre apariencias por la imposibilidad de conocer las cosas en sí mismas.

La manera en que se puede lograr producir una demostración de la proposición I:32 es mediante construcción de objetos dados de la intuición que ilustren los conceptos que se tratan. Para Kant, lo anterior se logra mediante esquemas que son razonamientos para ejecutar procedimientos con reglas generales que sirven para la construcción de los objetos. Por lo que con base en algunos esquemas definidos el geómetra construye conceptos y en el examen de los objetos construidos observa sus propiedades. Los esquemas enlazan conceptos por medio de las representaciones; en este ejercicio el geómetra no ha utilizado ningún elemento empírico, sólo lo que es común a las figuras de la misma naturaleza, por lo que una conclusión para una de ellas puede estar afirmando lo mismo para todas. Es así que la matemática parte de lo singular a lo general.

En 1861, Weierstrass presentó un ejemplo de función continua que no se diferencia en ningún punto: lo que es una curva continua que en ninguna parte tiene tangente. Esta problemática contradijo la idea intuitiva de que existen puntos donde todas las funciones continuas son diferenciables; cosa que era propuesta por los diagramas. El caso no fue aislado, comenzaron a referirse más casos de manera cotidiana en el quehacer matemático del siglo XIX, lo que provocó la ruptura de la geometría con los diagramas en las pruebas matemáticas.

En 1882 Pasch instauró como norma, fijar los argumentos matemáticos sólo en axiomas y lógica; su argumento trata sobre si la lógica es deductiva, entonces no debe tener referencia del significado de los conceptos geométricos o las figuras, por lo que sólo podrían reconocerse las pruebas en que los pasos estén apoyados en proposiciones anteriores y definiciones. Pasch vio en el método deductivo, el método base de las matemáticas y no sólo una parte de ellas.

En el siglo XIX, se hizo común que los matemáticos expresaran sus dudas sobre la idea de Kant, de la naturaleza del apriorismo matemático y en 1817 Gauss expresó en una carta, a Olbers, que había llegado a la idea de la imposibilidad de poder probar la *necesidad* de su geometría, lo que adjudicaba a la corta comprensión humana, algo dado por la naturaleza humana como un condicionante de la imposibilidad de tal entendimiento; por lo que mencionaba que tal vez en otra vida pudieran tener otros panoramas sobre la naturaleza del espacio. Lo anterior, para Gauss, pone a la geometría (ya no a priori) en diferente nivel que la aritmética (a priori), en el nivel de la mecánica.

Hacia 1920, Hilbert observó las nociones ideales como regulativas (antes observado en kant), lo que se convierte en el fundamento epistemológico de su programa formalista, ahora con una visión empírica del origen de la geometría, pero con un segundo formalismo donde concentra su carácter por concebir a la aritmética a priori en su conocimiento.

CAPÍTULO 3: EL PROGRAMA FORMALISTA DE DAVID HILBERT

David Hilbert fue un matemático que, muy aparte de ser reconocido en el campo académico, es de importancia para el entendimiento de los teoremas de Gödel. No existe Gödel sin Hilbert. El programa formalista de Hilbert es la razón de existencia de los teoremas de Gödel, pero es el joven lógico quien tiene el mérito de la sensatez sobre la incompletitud formal de las matemáticas. El papel de Hilbert es, entonces, el de un optimista con intención contraria a la incompletitud aritmética, quien pone el pedestal para la puesta a prueba de su programa. El programa de David Hilbert es en consecuencia obra de la genialidad de un matemático optimista que sienta las bases para formalizar las matemáticas.

Hilbert fue un universalista matemático, lo que apunta a que su conocimiento se ampliaba a todos los campos de las matemáticas, también es reconocido como un personaje erudito con contribuciones en todas las áreas correspondientes, incluyendo la física, pero el fervor que se le tiene es a partir de la creación de una nueva metodología práctica para el desarrollo de la matemática y sobre todo su comprensión. Su gran entusiasmo agregó adeptos a su cátedra y *escuela*.

Para la revisión del programa formalista de Hilbert se debe tener en cuenta su desarrollo en dos etapas, la geométrica y la aritmética. En esta última es donde busca eliminar los fundamentos y reemplazarlos por la demostración formal en el área aritmética. En la primera etapa Hilbert observa los fundamentos de la geometría y concluye que las teorías matemáticas en su forma axiomática no revelan verdades específicas de los objetos sino que tejen una red de relaciones lógicas entre definiciones implícitas de los axiomas. Lo anterior quiere decir que, la geometría es un sistema deductivo de hipótesis, dependiente de las relaciones entre objetos espaciales que parten de axiomas. A pesar de lo anterior, Hilbert considera que la geometría de Euclides posee contenido, cosa que lo hace estudiar la geometría desde otros puntos de vista paradigmáticos. Hilbert concluye en una geometría axiomática sin contenido, fuera de lo empírico, reconocida por cumplir los estándares de Pasch, esta geometría de Hilbert consta según Torretti (1993) de lo siguiente:

> Tres de los primitivos de Hilbert son predicados monádicos: ξ es un *punto*, η es una *recta*, ζ es un *plano*. Uno es un predicado triádico: ξ está entre η y ζ (conforme a los axiomas, los tres sujetos ξ, η y ζ tienen que ser *puntos* situados en una misma *recta*). Los cuatro restantes son predicados diádicos: dos expresan relaciones de incidencia: de un *punto* en una *recta*, de un *punto* en un *plano*; los otros dos expresan relaciones de *congruencia*, entre *segmentos* y entre *ángulos* (un *segmento* se define como un par de *puntos*, entendiéndose que todos los *puntos* que hay *entre* ellos están dentro del *segmento*; también se da una definición de *ángulo*) (p. 95).

Hilbert perfecciona el método axiomático como lo había propuesto Pasch, con el afán de rigor que impulsaba su investigación, la independencia de ciertos axiomas y la prueba de consistencia relativa de su teoría. Esta misma pretensión de perfeccionamiento en la axiomática, promovió el desarrollo de lenguajes artificiales estrictos y de sintaxis más básica o sencilla para expresar las matemáticas. Hilbert, después de su primer programa formalista, tiene sus diferencias con la geometría en la cual observó una inseparabilidad de su origen empírico, por lo que se vuelca después en la aritmética, donde observa un panorama formalista de las matemáticas y su fundamentación en los lenguajes o formales, pone atención a la aritmética axiomatizada por Peano y vislumbra ahí un camino para probar la consistencia absoluta de cualquier teoría que tratase de la aritmética.

3.1 Formalismo Aritmético de Hilbert

En su segunda etapa, que es la etapa aritmética, Hilbert parte de que cualquier teoría axiomática se puede hacer tan simple que ya no necesite, tal vez, un entramado de relaciones lógicas entre los *conceptos*, por lo que este método es reemplazado por esquemas de relación entre *signos*. Idea que necesita de bastante rigor en formalización, una mecanización estricta de cualquier método deductivo matemático y hace que la semántica pierda valor y la sintaxis sea esencial, como un juego combinatorio de inferencia lógica para fórmulas, con reglas estrictas.

El hilo conductor que guía a Hilbert es la inferencia matemática, un método conocido en lógica que parte de premisas que implican una conclusión; esto indica una confianza puesta en que los problemas matemáticos ya infieren su solución, entonces toda investigación matemática es inferida por las hipótesis o premisas hacia las verdades matemáticas, por lo que, “para Hilbert, todo problema determinado en matemáticas admite una respuesta, bien mediante una prueba rigurosa de su solución o bien con la demostración de la imposibilidad de la misma” (Bombal Gordón, 2013, p. 2).

Hilbert es, entonces, un enlazador de problemas que no tienen linealidad u orden por *naturaleza,*[5] pero sí relación existente entre *objetos matemáticos*[6] a los que el matemático da *estructura*. Tal cosa ya no es fruto del azar sino de un sistema que fue elaborado por Hilbert y dio origen a las *estructuras algebraicas*. Se liberan entonces los objetos de sus conceptualizaciones contingentes, obviando la naturaleza de los objetos, para dar una demostración esencial. Eliminando tales especificidades se visualiza una matemática unida e indivisible, un organismo de partes en conexión que demuestra la unidad de las matemáticas en comparación con las demás ciencias.

3.1.1 La Competencia Hacia los Fundamentos

David Hilbert a partir de 1918 se dedica a los fundamentos de la aritmética, pero no está solo en tal empresa investigativa, lo acompaña Paul Bernays y después Wilhelm Ackermann. Las discusiones de otros colegas que no compartían el panorama de Hilbert se hacen presentes en el contexto, partidarios de otras filosofías matemáticas le causan una especie de prurito intelectual que con argumentos discute en conferencias y personalmente, avivando la materia, sólo para descubrir que esas discusiones académicas entre logicistas, formalistas e intuicionistas se reconocerán oficialmente como *la crisis de los fundamentos* (Corry, 2002, p. 27). No sólo estaba Hilbert en la empresa de fundamentar las matemáticas, también las otras corrientes.

Es en la crisis de los fundamentos cuando Brouwer advierte a la comunidad matemática de las paradojas de la teoría de conjuntos y propone que las matemáticas sólo tengan argumentos *constructivos*[7] de los cuales se conozca el procedimiento y no sólo se infiera su demostración por

[5] En su “Metafísica”, Aristóteles (2014) expresa que “Se llama naturaleza, en un sentido, a la generación de las cosas que crecen y en otro sentido, lo primero a partir de lo cual comienza a crecer lo que crece, siendo aquello inmanente; además, aquello de donde se origina primeramente el movimiento que se da en cada una de las cosas que son por naturaleza y que corresponde a cada una de éstas en tanto que es tal [...] siendo aquello algo informe e incapaz de cambiar de su propia potencia” (p. 184-185).

[6] Los objetos matemáticos son abstracciones que se estudian de la matemática, ejemplos pueden ser figuras geométricas, conjuntos, números, funciones. Su naturaleza siempre ha estado a debate en la filosofía de las matemáticas.

[7] La Enciclopedia de Filosofía de Stanford indica que hay un cambio del “existe” de las matemáticas clásicas, por el “podemos construir” del constructivismo, reinterpretando el *cuantificador universal*. También los conectores lógicos y cuantificadores se interpretan como instrucciones para construir una prueba del enunciado que comprometa las expresiones lógicas (Bridges, 1997).

el procedimiento de *reducción al absurdo*[8] y se aluda a infinitos cantorianos. Lo anterior se puede interpretar como una afrenta personal hacia Hilbert, defensor de los cardinales cantorianos y con un logro de "la demostración de existencia de una base *finita* para cualquier sistema dado de invariantes de orden arbitrario" (Corry, 2002, p. 28) demostrada por reducción al absurdo. A la vez que su alumno más destacado, Hermann Weyl, se convence del intuicionismo.

El formalismo de Hilbert y sus colaboradores es una axiomatización lógica de la matemática que parte de formalizar con una cantidad finita de axiomas, utilizando los conceptos y demostraciones aritméticas de Russell. Por lo anterior, la *demostración* se vuelve objeto de estudio, lo que ayuda a probar la consistencia aritmética por medios finitistas (Corry, 2002, p. 29). En algún caso esta postura del formalismo pudiera interpretarse como un símil del intuicionismo si se toma en cuenta que el finitismo estricto o ahora conocido *ultraintuicionismo* también participa del constructivismo en el objetivo de que los conceptos matemáticos deben ser accesibles al ser construcciones.

3.2 Constructivismo

El constructivismo es una corriente en la que los matemáticos, cuando afirman algo –que no es un axioma–, tienen que comprobar antes su veracidad (sin reducción al absurdo). Como ejemplo, los constructivistas afirman una disyunción $P \vee Q$ (p o q) –si los enunciados P y Q son sintácticamente correctos en lenguaje formal o informal– cuando se cumple uno de los enunciados y para el caso se puede decidir cuál se cumple, puesto que la disyunción implica que P o que Q. Entonces pueden afirmar que $P \vee Q$ cuando construyen una prueba de P o una de Q. Los constructivistas rechazan cualquier interpretación existencial o ideal, así que sus cuantificadores y conectores no se interpretan de manera clásica sino de manera natural:

En lógica el símbolo ∃ es el cuantificador existencial que se interpreta como "existe" o "hay", por lo que la proposición $\exists x \in B$ se puede leer como: hay una (existe) x que pertenece a B (Shapiro & Kouri Kissel, 2000).

[8] *Reductio ad absurdum* o *prueba indirecta* es un método de demostración lógico donde se tienen un conjunto de afirmaciones verdaderas que implican una conclusión verdadera (P) y para demostrar su veracidad se niega dicha conclusión (¬P) por lo que se deduce (⊢) de ello una contradicción (⊥), lo que a la vez deduce su veracidad. En lógica simbólica se puede expresar: $(\neg P \vdash \bot) \vdash P$.

Tabla 2

Interpretación constructivista de conectores y cuantificadores lógicos

Conector o cuantificador	Interpretación constructivista
$\vee$ (o)	Para probar $P \vee Q$ debemos tener una prueba de P o tener una prueba de Q.
$\wedge$ (y)	Para probar $P \wedge Q$ debemos tener tanto una prueba de P como una prueba de Q.
$\rightarrow$(implica)	Una prueba de $P \rightarrow Q$ es un algoritmo que convierte cualquier prueba de P en una prueba de Q.
$\neg$ (negación)	Para probar $\neg P$ debemos demostrar que P implica $0=1$.
$\exists$ (existe)	Para probar $\exists x P(x)$ debemos construir un objeto x y probar que $P(x)$ se cumple.
$\forall$ (para cada/todos)	Una prueba de $\forall x \in S P(x)$ es un algoritmo que, aplicado a cualquier objeto x ya los datos que prueban que $x \in S$, prueba que $P(x)$ se cumple.

Nota. Esta tabla es una adaptación de BHK (interpretación de Brouwer, Heyting y Kolmogorov) que se encuentra en Bridges, D., Palmgren, E., & Ishihara, H. (2018). *Constructive mathematics*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Retrieved 2023, from https://plato.stanford.edu/entries/mathematics-constructive/#Bib

3.3 Finitismo

Finitistas y constructivistas se entrelazan en sus filosofías matemáticas, pero hay una cuestión que separa a ambos y es esencial para definirlos, incluso en el concepto. Los constructivistas están dispuestos al infinito en potencia, lo que se describe mejor como la probabilidad de que sus algoritmos tengan tendencia hacia una continuidad pero se prediga un probable término en el futuro, entonces se acepta que puede ser constructivo. El finitismo estricto no considera resultados a los resultados indefinidos o inacabados; aunque acorta la posibilidad de los resultados y de las matemáticas, para algunos es una corriente filosófica matemática, que más que nada es una herramienta computacional finita, no tan útil para una situación real.

El finitismo en Hilbert se encuentra de una manera distinta, como menciona Jean Paul Van Bendegem (2002) en *Finitismo en Geometría* el finitismo de Hilbert "puede verse como una forma de finitismo en el metanivel (por ejemplo, aunque las teorías matemáticas pueden hablar de estructuras infinitas, las pruebas en tales teorías deben tener una longitud finita)". Con tendencias matemáticas parecidas, ya sea por el tiempo y la congenialidad de las matemáticas en el contexto, el programa de Hilbert debía iniciar de la idea y bases conocidas, incluso bases del intuicionismo y el logicismo, y es así que Hilbert y su colega Bernays distinguen su trabajo a dos niveles:

> [...] primero, un nivel de discurso matemático cuyos teoremas son demostrables por métodos constructivos que no requieren la intervención de argumentos con infinitos cantorianos. El segundo nivel es el que se obtiene al adherir a aquel, una serie de elementos 'ideales', tal y como en la geometría proyectiva se agregan puntos, líneas y planos ideales en el infinito, o como la teoría de los números Kummer agregó números ideales para aprobar sus teoremas de factorización única. Así como en esta disciplina no es relevante preguntarse por el significado de la existencia de estos elementos ideales, sino que con ayuda se prueban teoremas, así mismo proponía Hilbert considerar sus elementos ideales en la aritmética (Corry, 2002, p. 29).

La idea de Hilbert de usar el método finitista por su incuestionabilidad y después añadir elementos ideales sin perder consistencia fue el reto a cumplir. Para lo anterior, se debe ver la aritmética como elementos vacíos, sin significado, que sólo operan con reglas formales para una vez con forma agregar la axiomatización, que sería el medio para dirigir las matemáticas en totalidad. Es así que el intento de probar la aritmética por medios finitistas se reconoce como el programa formalista de Hilbert, acompañado de Paul Bernays y Wilhelm Ackermann; cosa que en 1930, cuando se logra el primer objetivo del programa, que era axiomatizar la lógica, la teoría de conjuntos y la aritmética, se ve finalizada su intención por Gödel, al echar abajo el segundo objetivo que era demostrar la consistencia y completitud de las axiomatizaciones logradas.

3.4 Madurez del Programa Formalista

Hilbert en su empresa formalista presentó un punto fuerte, que es acudir a la inmediatez vivencial de las inferencias y operaciones lógicas, eso que es anterior a estas pero con representación dada de forma inmediata como objetos separados de la lógica, presentes en cualquier situación común. La seguridad de sus fundamentos (demostraciones), entonces, tiene que descansar en la infalibilidad de dichos objetos intuitivos por naturaleza e irreductibles. Así, los *signos* son el objeto de la *teoría de números,*[9] y lo que presuponen sin carga semántica, vacíos. Hilbert al querer dejar la filosofía detrás en sus matemáticas, no asegura si trata algún tipo de intuición filosófica, sólo busca librar de toda carga el signo.

En este caso los signos son 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1 que pueden llamarse números, y ser nombrados (abreviados) 1, 2, 3, 4 lo que implica que 2+3=3+2 no sea una fórmula sino una manera de representar que 2+3 es el mismo signo que 3+2 entonces se deduce que es una ecuación que comunica abreviaciones de un mismo signo. Sucede igual con las letras a+b=b+a pero con la diferencia de que a+b no es la abreviación del signo b+a porque a+b no es nombre o abreviación, es esquema de un nombre. Necesitarían pertenecer a un signo definido (Fernández de Castro, 2020, p. 41). Hilbert hace una prueba: "Hipótesis: b>a, entonces b=a+t, y debemos demostrar que a+a+t=a+t+a y, por lo tanto, que a+t=t+a. Esto puede reiterarse hasta que los sumandos de cada lado de la ecuación coincidan" (Fernández de Castro cita a Hilbert, 2020, p. 41).

De tal hipótesis se puede concluir que es una demostración por descenso infinito, esta demostración trata de una sucesión de números naturales, o sus subconjuntos, que demuestran su finitud descendiendo desde su infinitud hasta su principio, en tanto se sigue el principio de buen orden de los números naturales, así generando una contradicción. Puesto que, se considera una infinitud de números naturales en ascenso ordenado, pero una finitud en descenso ordenado. De alguna manera esta demostración se considera demostración como reducción al absurdo, lo que Hilbert negará de dicha demostración, ya que sería contradictorio de su promesa de sistema sin reducción al absurdo.

Hilbert admite que su programa formalista finitario es compatible con la interpretación BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) y en su versión más rígida con las restricciones del finitismo de Kronecker, que aseveran la inadmisión del infinito y cualquier otro tipo de números que no sean los naturales, únicamente permitiendo operaciones constructivas en número finito. Este matemático finitista estricto, afirmó que "Dios ha creado los números naturales, el resto es trabajo del hombre" (Solaeche Galera citando a Kronecker, 1995, p. 117), asumió a Cantor como

[9] Teoría de números es una disciplina de las matemáticas puras que analiza el carácter de los números enteros o *dominios enteros*.

un corruptor de jóvenes estudiantes, por su teoría matemática de los infinitos y con su cargo de editor en el Journal de Crelle detuvo sus publicaciones.

En una respuesta a Poincaré, Hilbert y Bernays explican la prueba de inducción en dos partes: *la prueba de principio de inducción completa* que comprobará la consistencia pero requerirá a *la forma de inducción de contenido* que sólo se establece con algo completo y concreto ya dado, sin el concepto generalizado de número entero ni usar variables en forma esencial. Entonces no habrá circularidad. La inducción sólo dependerá de la intuición del signo. Con el tiempo encontrarán que no se puede edificar todos los números sobre la intuición de signos inamovibles, por su incapacidad de escribir numerales o abreviaturas para un número infinito de números (Fernández de Castro, 2020, p. 42).

Partiendo de lo anterior se agregan elementos ideales para completar la teoría, con números imaginarios queda satisfecha el álgebra y la añadidura de enunciados ideales a los enunciados finitos hace que se conserven las reglas de la lógica aristotélica, pero para esto se necesita una prueba finitaria de consistencia que los admita como vacios, sin significado, únicamente sintácticos. De manera que la metamatemática al modo de Krockener se convierte en prueba infalible de cualquier teoría axiomática. Así, su intención finitista se transforma en un programa axiomatizador, que para su perfección debe de cuidar cualquier error de forma axiomatizándolo.

A través de varios intentos finitarios, Hilbert recae en reducciones al absurdo y muchas formas de finitismo, siempre explorando una multiplicidad de caminos lógicos y matemáticos. Hizo grandes aportes a la matemática y la lógica y aunque el formalismo actual diste mucho del programa de Hilbert, sus aportes son fundamentales para el desarrollo del área. A pesar de su forzada distancia con la filosofía, es interesante revisar su pensamiento, puesto que en notas, escritos y comentarios se esclarece lo que quiso parecer la filosofía formalista, que quedó perturbada por no poder realizar su meta. Pero, como siempre, en la ciencia no hay fallos, sólo herramientas para futuros análisis, así que el pensamiento de Hilbert y su formalismo es un gran avance.

3.5 El Pensamiento de Hilbert

El ideal de Hilbert se resume en hacer demostrable (fundamentar) la matemática partiendo de probar que se puede eliminar todo *significado* o interpretación de las expresiones y símbolos matemáticos, esto es que el *signo* en su estado más puro o ideal resuelva la inestabilidad de la edificación matemática. No se sabe la realidad del pensamiento de Hilbert, pero se consideran para esta intención sus escritos, las interpretaciones de sus comentaristas y las consecuencias de su sistema. Ya que, aunque el matemático lo ignorara, todas estas acciones en su sistema tenían implicaciones filosóficas en el mismo, cosa que revelan sus textos, aunque no lo haya expresado de manera literal en su trabajo formal.

Consideraba que la naturaleza matemática es de dos tipos, descriptiva o ideal. La ideal corresponde a lo trascendente y complementario de la razón formal. La descriptiva pertenece a la empiria y se origina en la intuición, que es la base de la matemática y desconocedora de los axiomas ya que sólo observa lo inmediato y anterior al pensamiento. No sorprenderá que la descripción corresponda al finitismo. Esta matemática puede equiparse con nociones ideales y tratantes de objetos ficticios, siempre sujetos a la no contradicción. La única manera de darle forma a la parte ideal es axiomatizándola, por lo tanto, los errores matemáticos son fruto del descuido en la axiomatización, pero no de su parte descriptiva. El gran ejemplo de lo anterior es la teoría transfinita de Cantor.

Los enunciados ideales no son verdades materiales, por lo que la teoría transfinita que se trata con Cantor no se puede justificar por intuición, sólo podría tener finalidad en la demostración de no contradicción que sería realizable mediante axiomática, la cual no tiene por labor las relaciones entre axiomas y objetos, pues el carácter o naturaleza de dichos objetos es irrelevante en tal caso. La matemática no tiene acceso a lo que está fuera de lo sensible. Por lo que Hilbert describe a la matemática como la ciencia de lo posible, o lo que no tiene contradicción, o lo que es igual, una teoría axiomática. Entonces el problema esencial del fundamento de las matemáticas es encontrar una axiomatización que demuestre que no tiene posible contradicción, pero le resulta imposible la tarea.

Como prueba, Hilbert se propone la tarea de buscar la no contradicción de la matemática clásica[10] y la forma en que lo propone es la siguiente:

1. Axiomatizar la matemática clásica.

2. Demostrar la consistencia de dicho sistema axiomático (Torres Alacaraz, 1989, p. 36).

La primera tarea es cubierta por Fraenkel y Zermelo en 1922, con una teoría de conjuntos, pero faltaba el problema de la consistencia, así que Hilbert observa que el problema de la consistencia es la llave del fundamento de las matemáticas. Ahora se propone resolver el problema de la consistencia.

Algo parece razonable, y es que no todo se define con lógica, tampoco la matemática. Existe algo detrás de la lógica que la representa. Hilbert se refiere en alemán a *vorstellung*. Husserl, sin ninguna conexión con Hilbert, sólo estudiando el problema de la *representación*, acude al concepto alemán que interpreta como "intuición" o "presentación", o "intención" o "representación funcional" [traducidas al español] (Xolocotzi Yáñez, 2019, p. 160) anterior a todo pensamiento. En Hilbert los signos concretos son claros e inmediatos a la experiencia, irreductibles y que no necesitan reducción, por lo que en eso debe basarse la intuición del signo y posterior al signo las demostraciones de consistencia. Allí no hay contradicciones. Hilbert tal vez se refiere a la representación funcional, pues no es ideal , sólo funcional.

Para Hilbert dar concreción formalista a las matemáticas clásicas es algo que logrará con una demostración finitista de consistencia; la axiomatización se ve incompetente para tal objetivo porque, el axioma es una definición obtusa de un objeto, lo que no tiene cabida en la teoría finitista, esta sólo tiene asimilación de construcciones dadas, que por lo mismo son definibles y sólo pueden ser aplicadas por formalización. Para bien de la empresa formalista, no puede negarse la formalización, es involuntaria, sirve para dar exactitud y forma a los métodos deductivos en la investigación matemática (Torres Alcaraz, 1989, p. 37). Entonces, para formalizar la matemática clásica, Torres Alacaraz (1989) menciona los requisitos de von Neumann:

[10] En los Fundamentos de las matemáticas, las matemáticas clásicas son lo que refiere a la perspectiva común de estas, que tienen como base la lógica clásica y la teoría de conjuntos de Fraenkel y Zermelo.

1. Enumerar todos los símbolos lógicos y matemáticos de la teoría. Estos símbolos, llamados *primitivos*, deberían incluir a los símbolos $\rightarrow$ y $\neg$ que representan, respectivamente, a la implicación y la negación.
2. Caracterizar sin ambigüedad todas las combinaciones de símbolos primitivos que representan enunciados de la matemática clásica. A estas se les llama *fórmulas*.
3. Suministrar un procedimiento que permita construir en forma sucesiva todas las fórmulas que correspondan a enunciados *verdaderos* de la matemática clásica. A este procedimiento de derivación formal se le llama *prueba* y a las fórmulas con él construidas *teoremas*. Esto último se logra definiendo la noción de prueba cómo sigue:

   3.1. Ciertas fórmulas, caracterizadas efectivamente y sin ambigüedad son llamadas axiomas.

   3.2. Ciertas reglas, caracterizadas efectivamente y sin ambigüedad son llamadas r*eglas de derivación*. Estas indican cómo se pasa de un grupo de fórmulas llamadas *hipótesis* a otra fórmula llamada *conclusión*. Se dice que la conclusión se *infiere* de su hipótesis.

   3.3. Una *prueba* o *derivación* es una sucesión finita de fórmulas, cada una de las cuales es un axioma o se infiere de otras fórmulas que le preceden en la sucesión por la aplicación de alguna regla de inferencia. A la última fórmula de una prueba se le llama *teorema* (p. 38).

No es un gran problema para los formalistas, ya que los logicistas han hecho toda esa labor completamente. Russell y Whitehead en *Principia Mathematica* ya han dejado una gran labor de evidencia de la representación formal de la matemática clásica que logran con una cantidad reducida de símbolos primitivos y reglas de inferencia. Hilbert debe, entonces, cambiar el propósito del *Principia Mathematica*, vaciando de significado los símbolos y haciendo que sus fórmulas carezcan de significado. La ciencia matemática en lugar de expresarse en lenguaje ordinario tendría un repertorio de fórmulas y una estructura de signos con reglas exactas y precisas, sin ambigüedades en su entendimiento y expresión. Los axiomas serían fórmulas ya sin expresión, únicamente formales, y las inferencias materiales pasarían a ser las reglas para su encadenación (Torres Alacaraz, 1989, p. 39).

El programa formalista o formalizador, por lo tanto, hace de las demostraciones matemáticas objetos intuitivos, inmediatos a la experiencia, sin que se puedan o deban interpretar de alguna manera. Y, aún de que las matemáticas clásicas no tengan finalidades finitistas, su realización mediante la formalización de Hilbert de carácter constructivista aborda esa perspectiva desde un carácter finitista y objeto de discusión finitista. Así, la matemática clásica puede ser *completa*, y el formalismo como la axiomatización debe ser obvio, porque de lo contrario no cumpliría su finalidad. La formalización de Hilbert para ser un sistema consistente tiene base en el signo, que es intuitivo o obvio, por lo que los axiomas, las fórmulas y las derivaciones formales deben serlo de igual manera, lo que coloca a la creación de Hilbert en una nueva disciplina nombrada *metamatemática*, esta se encarga de lo que corresponde a la intuición matemática que, se puede representar en formalismos, y se encargará de hacer que los axiomas no sean contradictorios.

La metamatemática tiene como motor el análisis sintáctico de los sistemas formales y considera la finalidad de darle carácter a la clase de sus teoremas. En el caso de Hilbert, se pretende demostrar que algunas fórmulas no son teoremas, lo que compete a la consistencia, y resolver un método para arbitrar si una fórmula dada es un teorema, lo que corresponde a el *problema de la decisión*. Para Hilbert la metamatemática es una *sintáctica*, ya que la verdad o falsedad de sus enunciados sólo obedece a la forma de la expresión y no al significado. La metamatemática sólo puede ejercer razonamientos finitistas, porque su razón de ser es la de justificar elementos transfinitos de las matemáticas clásicas, por lo que no es razonable que se utilicen estos mismos para su misma justificación; la metamatemática debe, entonces, ser pura.

El programa de Hilbert se resume así:

1. Formalizar la Matemática Clásica.
2. Demostrar que la formalización es (semánticamente) completa.
3. Demostrar con métodos finitistas que la formalización es consistente (Torres Alcaraz, 1989, p. 41).

El programa de demostración de Hilbert exige encontrar un conjunto de axiomas que den paso a demostrar todas las verdades de la aritmética con un método de razonamientos donde sean examinables con un algoritmo. Las verdades de la aritmética a las que se refiere Hilbert son las propiedades de las que habla la aritmética, esta rama de las matemáticas que trata los números naturales, sus productos y sus conceptos. La teoría de la aritmética está construida de conceptos como "número primo", "número par", "número perfecto", etc. y afirmaciones, o también llamadas proposiciones o enunciados, como "'1 + 1 = 2', '2 es par', '5 es primo', 'Todo número divisible por 4 es par' o 'La suma de dos números impares da como resultado un número par'" (Piñeiro, 2012, p. 74). Los axiomas que buscaba Hilbert eran un conjunto de verdades que pudieran ser la base para deducir, ya con condiciones de los razonamientos, todas las afirmaciones aritméticas verdaderas.

La examinación de la validez de los razonamientos que demuestran su verdad, se refiere a un sistema programable en una máquina que cumpla esa labor, lo que es un algoritmo. Ese ordenador debe poder determinar con una cantidad finita de instrucciones si una demostración matemática tiene validez o no la tiene. El proceso sería, introducir la demostración en la máquina para que la procese y en un tiempo finito la máquina daría por válido el razonamiento o marcaría error. Para que una máquina pudiera detectar el error tendría que tener instrucciones concretas, un programa que contenga una sucesión de enunciados, que pudieran ser un axioma o deducciones por enunciados anteriores mediante reglas lógicas. Estas reglas lógicas son anteriores a la aritmética, son generalidades reglamentarias que tienen valor en todas las matemáticas, por tal motivo los enunciados que las contienen son nombrados *enunciados universalmente válidos* o *axiomas lógicos*.

Lo esencial en la prueba de consistencia es que, debe ser construida mediante procesos finitistas, esto, más que requisito del programa formalista de Hilbert es debido a la menesterosa existencia finita que da la capacidad de tiempo para realizar cálculos humanos en un tiempo finito y la capacidad finita de memoria en las máquinas. Pero, el requisito principal es la consistencia y su prueba, que se nombra *prueba absoluta de consistencia*. Una prueba absoluta de consistencia de la aritmética, si pudiera construirse, demostraría mediante un proceso *metamatemático* finitista, "que dos fórmulas contradictorias, tales como '0 = 0' y su negación formal '¬(0 = 0)', no pueden derivarse de los axiomas (o fórmulas iniciales) mediante reglas explícitamente enunciadas" (Nagel & Newman, 2007, p. 17).

"Existe un número potencialmente infinito de enunciados universalmente válidos" (Piñeiro, 2012, p. 83) que no podrían caber en un ordenador, sería absurdo, cosa que haría del programa de Hilbert irrealizable, pero por alguna suerte Kurt Gödel en su tesis doctoral demostró que si la cantidad de reglas lógicas puede ser infinita, cualquier razonamiento puede llevarse a cabo usando sólo doce de ellas. Esta demostración que hizo Gödel haría que cualquier ordenador cargado con estas doce reglas pudiera verificar la corrección de las demostraciones. Las doce reglas lógicas se enlistan a continuación:

Tabla 3

Reglas lógicas del teorema de completitud de Gödel

En lo que sigue. $P \Rightarrow Q$ es una abreviatura de *Si P entonces Q* y $\forall x\ P(x)$ es una abreviatura de *Todo x cumple la propiedad P*.

1. Si vale el enunciado *Q*, entonces, cualquiera que sea *P*, vale el enunciado.

2. Si vale $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ y también vale $P \Rightarrow Q$ entonces vale $P \Rightarrow R$.

3. Si vale *no·Q* $\Rightarrow$ *no-P* entonces también vale $P \Rightarrow Q$.

4. Si vale $\forall x\ P(x)$ entonces vale $P(n)$, donde n es un número cualquiera.

5. Si vale $\forall x[(P(x) \Rightarrow Q(x)]$ entonces vale $P \Rightarrow [\forall x\ Q(x)]$, siempre que *x* no aparezca en *P*.

6. Cualquiera que sea el número *x*, vale que $x = x$.

7. Cualesquiera que sean los números *x* e *y*, vale que si $x = y$ entonces $y = x$.

8. Cualesquiera que sean los números *x, y, z* vale que si $x = y$ e $y = z$ entonces $x = z$.

9. Si $x = y$ entonces puede reemplazarse *x* por y en cualquier expresión numérica.

10. Si $x = y$ entonces puede reemplazarse *x* por y en cualquier enunciado.

11. Si vale *P* y vale $P \Rightarrow Q$ entonces vale *Q*.

12. Si vale $P(x)$ para un *x* genérico entonces vale $\forall x\ P(x)$.

Nota. Las diez primeras reglas son enunciados universalmente válidos, las últimas dos son reglas de inferencia. Esta tabla es una adaptación de la original que se encuentra en Piñeiro, G. E. (2012). Gödel: dos teoremas que revolucionaron las matemáticas. RBA. p. 85.

Este trabajo de Gödel fue nombrado como *Teorema de completitud*, publicado en 1930, y aseguró la base para el programa de Hilbert, que trató de verificar mecánicamente las demostraciones aritméticas. Lo que le sucedió fue encontrar un conjunto de axiomas, que con base en estas doce reglas lógicas, permitiera demostrar todas las verdades aritméticas. En ese mismo año se logra el primer objetivo del programa de Hilbert, axiomatizar la lógica, la teoría de conjuntos y la aritmética, pero su segundo objetivo que era demostrar la consistencia y completitud de las axiomatizaciones logradas se vio coartado por el mismo Kurt Gödel.

El programa era una forma de examinación matemática mediante lógica, con la finalidad de justificación. La filosofía que podría decirse de Hilbert era hacer filosofía con matemáticas, o una filosofía matemática. Lo que él trató de evitar era hacer otra filosofía de las matemáticas que buscara justificar a los matemáticos, que hasta el momento no tenían una justificación o base que dieran firmeza al edificio matemático. Por lo que Hilbert, mediante la *teoría de la demostración*, eliminaría para siempre el problema de *la fundamentación de las matemáticas*. Un programa razonable, pero que se verá truncado por los teoremas de Kurt Gödel.

CAPÍTULO 4: KURT GÖDEL

Gödel es una figura importante en la filosofía de las matemáticas, por demostrar en 1931 "que todo sistema formal que contenga un poco de aritmética es necesariamente incompleto y que es imposible probar su consistencia con sus propios medios" (Peña Páez cita a Gödel, 2021, p. 2), poniendo fin al programa formalista de Hilbert y ampliando el panorama de la filosofía de las matemáticas hasta el momento, convirtiendo al logicismo, intuicionismo y formalismo, de entonces, en posiciones tradicionales que distaban de atender la realidad del formalismo matemático. El intento de Hilbert, de eliminar la necesidad de fundamentos en la matemática, mediante axiomatización y reglas de inferencia, se vio trocado por la demostración donde se advierte que un sistema formal redundante, como el que buscaba, no puede ser completo.

Las principales conclusiones de Gödel son dos. En primer lugar, Gödel demuestra que es imposible tener una prueba matemática de un sistema lo bastante comprensiva como para contener toda la aritmética. En segundo lugar, demuestra que el sistema axiomático está limitado; demostró que los Principia Mathematica de Russell, o cualquier otro sistema dentro del que se pueda desarrollar aritmética, son esencialmente incompletos. "En otras palabras: dado cualquier conjunto consistente de axiomas aritméticos, existen proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden ser derivadas de dicho conjunto" (Nagel & Newman, 2007, p. 30).

Para entender a Gödel se debe contemplar algunos conceptos metateóricos que son importantes a la hora de querer comprender su visión sobre los sistemas formales. Para Gödel, todo sistema formal debería tener las propiedades metateóricas de completitud, consistencia y decibilidad. Peña Páez (2021) citando a Gödel las menciona de la siguiente manera:

> Consistencia: cuando un cálculo no es contradictorio, es decir, 'cuando no es el caso que una de sus fórmulas y su negación sean demostrables en él' (Gödel).
> Completitud: cuando cada una de las fórmulas del sistema o su negación es demostrable en él.
>
> Decidibilidad: cuando al aplicar, en un número finito de pasos, un procedimiento algorítmico (mecánico), se puede decidir o determinar 'si cada una de las fórmulas aceptables es o no demostrable en él' (Gödel) (p. 3).

Gödel demostró que los sistemas formales cerrados no son completos y que de los sistemas de los cuales se puede afirmar que son consistentes no se puede derivar una regla que asegure su consistencia. Lo anterior, hace que la teoría de conjuntos y la aritmética deban distanciarse de la lógica, por ser formalmente incompletos. Es por lo anterior que, no es posible derivar la matemática de la lógica, tanto en los teoremas como en lo conceptual. Gödel demostró que el logicismo no refleja la esencia creadora de la matemática.

La fé en la matemática finitaria del intuicionismo y el formalismo descansaba en la creencia de su concretud y veracidad, pero los formalistas aceptaban lo transfinito en la matemática clásica, creyendo de ellos obtener resultados finitistas, así que el programa formalista en su labor de probar la consistencia formal de las matemáticas clásicas, se vió contrastado por la afirmación de Gödel, que comprobaba la finalidad del programa formalista como imposible, cuando indica que “Incluso si la prueba de consistencia del sistema formal de la matemática clásica fuese posible, ello, por sí solo, no garantizaría la verdad de los teoremas matemáticos finitarios obtenidos con su ayuda” (Peña Páez cita a Gödel, 2021, p. 2).

El intuicionismo de Brouwer también tenía problema con la lógica clásica, y es que admitía que su uso era adecuado para las clases finitas, pero inadecuado para las clases infinitas. Gödel mostró que la aritmética y la teoría de números clásicas son intuicionistas, pero interpretadas de manera extraordinaria en el intuicionismo.

4.1 Teorema de Incompletitud

El teorema de incompletitud identifica la imposibilidad de cimentar un sistema axiomático y reglamentario concreto, emparejado con la certeza matemática de que los mismos son correctos y abarcan la totalidad de las matemáticas. Es por Gödel que se entiende, cómo varios sistemas formales pueden ser consistentes pero no completos y decidibles, a la par que su misma consistencia no puede ser demostrada. Parte importante del trabajo de Gödel es mostrar que la labor matemática no está centrada en la demostración formal. Muchas implicaciones filosóficas de los teoremas tuvieron que ver con la imposibilidad de probar la consistencia de las teorías matemáticas por medios matemáticos.

Para Hilbert, consistencia es sinónimo de existencia. Mientras en la ciencia empírica la existencia depende de la experiencia y de la teoría, en matemáticas depende de la consistencia formal. Pero gracias a Gödel, quien mostró que no puede probarse la consistencia, la intuición en la matemática cobra un papel tan importante como, la experiencia en las ciencias empíricas: "En este sentido lo que indican los teoremas gödelianos es que no existe ningún sistema formal completo para la aritmética que, siendo consistente, pueda ser descrito con rigor formal" (Peña Páez cita a Lorenzo, 2021, p. 3).

> La verdad de ciertos enunciados debe ser intuitiva. Puesto que la imposibilidad de demostrar un enunciado no implica que este no pueda ser verdadero, se concluye que verdad y demostrabilidad no son equivalentes. Esta distinción fue un éxito, como principio heurístico, acabando con el sueño de 'una matemática segura, consistente, decidible, categórica, formalizable y completa' (Gödel), dando opción al paralelismo con la ciencia empírica (Peña con una cita de Gödel, 2021, p. 3).

Ya puesta en juicio la naturaleza matemática y colocada en el lugar epistemológico de las ciencias empíricas, se abre un abismo existencial que deriva en nuestra capacidad para aprehender nuestra realidad en lo empírico con base en en el lenguaje, ¿qué es lo que la humanidad y el individuo puede conocer?, ¿tenemos algún tipo de coherencia? La intuición es, por lo observado, una gran parte de nuestra realidad. En la matemática, según lo comprobado por Gödel, la intuición no se puede eliminar y no se puede formalizar. Peña Páez (2021) cita a Rebecca Goldstein con una interrogante que abre un campo existencial muy interesante sobre las matemáticas: "¿Cómo llegan a estar disponibles para personas como nosotros? Una vez más, nos enfrentamos a la naturaleza misteriosa del conocimiento matemático y de nosotros mismos como conocedores de las matemáticas" (p. 3).

La ciencia matemática, anterior al teorema de incompletitud, asumió que la verdad en la matemática tenía su base en lo demostrable, pero ahora tenía que reconocer que no existe método formal que pueda demostrar verdades matemáticas. Gödel demuestra las conclusiones por las que es reconocido, influenciado por la *paradoja richardiana*. La paradoja encontrada por el matemático Jules Richard en 1905, se puede ejemplificar tomando, para el ejercicio, un lenguaje como el español, "en el que se puedan formular y definir las propiedades puramente aritméticas de los números cardinales" (Nagel & Newman, 2007, p. 31), observando las definiciones que se pueden declarar en él. La forma simplificada de la paradoja de Richard se puede encontrar explicada de manera general en Poincaré como lo expresa Carlos Raitzin (2014) de la siguiente manera:

> Consideremos todos los números decimales (expresados en sistema decimal) que se pueden definir con la ayuda de un número finito de palabras (empleando la lengua castellana u otra cualquiera bien definida y fijada). Estos números naturales forman un conjunto *E* y es fácil ver que este conjunto es numerables, es decir, que se pueden numerar los elementos del mismo desde el uno hasta el infinito
>
> Supongamos que esta numeración se ha efectuado y definamos un número N de la manera siguiente: si la n-ésima cifra decimal del n-ésimo número del conjunto es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 la n-ésima cifra decimal de *N* será respectivamente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Como se ve, *N* no es igual al nésimo número de *E* y, por lo tanto, *N* deberá pertenecer a este conjunto pues lo hemos definido como auxilio de un número finito de palabras.
>
> Veamos la explicación de esta antinomia. *E* es el conjunto de todos los números que se pueden definir por medio de un número finito de palabras sin introducir la noción de conjunto *E* mismo. Sin esta salvedad, la definición de *E* contendrá un círculo vicioso: no se puede definir *E* en base al conjunto *E* mismo.
>
> Según esto hemos definido *N* mediante un número finito de palabras: el inconveniente es que para ello nos hemos apoyado en la noción de conjunto *E*. Por esto es que *N* no forma parte de *E* (p. 108).

De manera sencilla podemos entender de qué consta la paradoja de Richard con el ejemplo anterior de Poincaré, expresado en palabras de Carlos Raitzin, en una buena manera de aproximarse al cometido, pero hay cosas aún más específicas para colaborar al entendimiento de Gödel, así que se tiene que revisar la paradoja misma para entender sus palabras o conceptos. El ejercicio comienza dando por sentado que cada enunciado contiene un número finito de palabras y un número finito de letras. Los enunciados serán ordenados en una serie de la siguiente forma: un enunciado será anterior a otro si su número de letras es menor que el enunciado posterior, si algún enunciado coincide en número de letras se colocará por orden alfabético. Cada enunciado, con el orden mencionado, será un número entero a manera individual y ocupará un lugar de la serie.

Debido a esta sucesión de enunciados se pueden nombrar *números richardianos* a los que cumplen con la característica de que su enunciado en el orden de la serie que corresponda a ese número no corresponda con la definición que se encuentra en el enunciado, por ejemplo: el enunciado número 15 de la lista se define como el producto de un número entero multiplicado por sí mismo; no hay asociación entre el enunciado y el lugar del mismo en la lista. Ese es entonces, o tiene la propiedad, de ser *richardiano*. También existe el caso de los números no richardianos, que tienen la característica de que sus enunciados coinciden definitoriamente con su lugar en la lista, como pudiera ser en un ejemplo, si fuera el caso, del lugar en la lista número 17, con una definición que mencione que no es divisible por ningún número entero, sólo por sí mismo y por la unidad. En ese caso carece de la propiedad de ser richardiano.

La paradoja richardiana consiste en que, como vimos anteriormente, existen propiedades de las definiciones que según el orden del enunciado, la definición puede ser o no richardiana, pero existe una cuestión paradójica en esa afirmación de ser un enunciado richardiano, al cualquier definición de la serie poseer la propiedad de ser un número entero, es entonces que también puede ser relacionada con la posición que también determine una posición no richradiana. Entonces, ¿puede ser un número richardiano un número richardiano? Tendría que el enunciado definidor carecer de la propiedad de ser richardiano para poder ser richradiano, o más bien de la enunciación definidora por ser esta la que da las cualidades. Entonces:

> ¿Es n richardiano? [...] n es richardiano si, y solamente si, n carece de la propiedad designada por la expresión (definidora) con la que está relacionado (esto es, si carece de la propiedad de ser richardiano). En resumen, n es richardiano si, y solamente si, n no es richardiano; de modo que la declaración ‘n es richardiano’ es verdadera y falsa a la vez (Nagel & Newman, 2007, p. 33).

Como se puede suponer, la propiedad de ser richardiano no es parte de una definición ya conocida de los números enteros que se puedan abarcar en la serie propuesta por Jules Richard, ya que se habían propuesto definiciones *estrictamente aritméticas*. Entonces, la propiedad de ser richardiano entra en la parte metamatemática del sistema que se enumera. por lo que es una contradicción traída a colación por ser hipotéticamente fundamental o subyacente del sistema de enumeración del que se habla. Podría evitarse fácilmente la paradoja distinguiendo claramente las definiciones aritméticas y lo que se pueda decir del sistema en el que aparecen. Todo lo anterior podría ser sostenido sólo por un sistema falaz o razonamiento erróneo, aun de esto útil.

La revisión de la paradoja de Richard ejemplifica la posibilidad de representar “declaraciones metamatemáticas acerca de un sistema formal suficientemente amplio dentro del sistema mismo” (Nagel & Newman, 2007, p. 33). Como ha sido observado anteriormente en David Hilbert y Husserl, *vorstellung* o representación es un problema matemático de importancia, en algunos casos más complicados como la representación de la geometría en el álgebra por Hilbert, o de menos abstracción como la reproducción de mapas que representan una esfera, pero se proyectan sobre un plano, o la elaboración de una maqueta de proyecto de tamaño natural. Lo que caracteriza a la representación "es que puede demostrarse que una estructura abstracta de relaciones existente en un campo de "objetos" existe también entre "objetos" (generalmente de un tipo distinto que los del primer grupo) pertenecientes a otro campo diferente" (Nagel & Newman, 2007, p. 34).

La paradoja de Richard y la idea de la representación son principales para dar paso al trabajo de Kurt Gödel, no sólo su inspiración, sino su carácter y cuestionamientos, que en Gödel evitan lo ambiguo y erróneo de la paradoja, para su perfeccionamiento y resolución adecuada. Con lo anterior, Gödel probó que las proposiciones matemáticas "acerca de un cálculo aritmético formalizado pueden efectivamente ser representadas por fórmulas aritméticas dentro del cálculo" (Nagel & Newman, 2007, p. 34) con un método ideado por él, que consta de ser una representación para comprobar que "ni la fórmula aritmética correspondiente a una determinada proposición metamatemática verdadera acerca de la fórmula ni la fórmula aritmética correspondiente a la negación de la proposición son demostrables dentro del cálculo" (Nagel & Newman, 2007, p. 34). Se toma en cuenta que los axiomas son incompletos, pues no existe verdad aritmética codificada de las fórmulas dichas, al no ser productos de los axiomas.

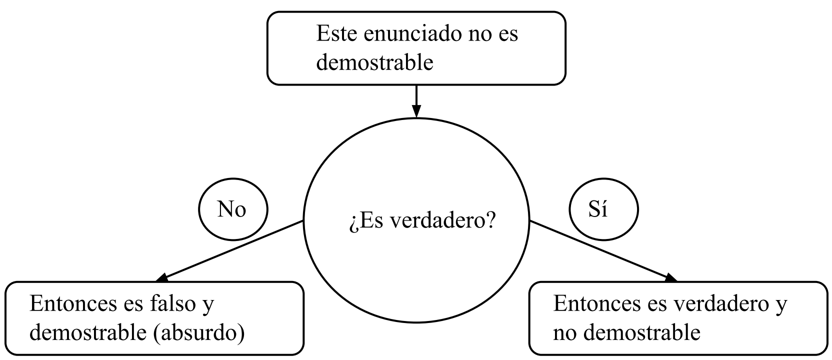
En la demostración del teorema de Gödel, se eligen como axiomas unos cuantos enunciados aritméticos verdaderos, que dan garantía que los enunciados derivados de ellos también serán verdaderos, ya que de manera lógica, con los métodos correctos de argumentación, sólo se concluyen verdades de enunciados anteriores que sean verdaderos. Lo anterior asegura que ninguna demostración sea falsa, pero no tiene la certeza de que todas las verdades sean demostrables. El objetivo del primer teorema de incompletitud de Gödel, también llamado *El teorema de Gödel* consiste en probar que existe de manera necesaria el caso de un enunciado aritmético verdadero que no puede demostrarse a partir de los axiomas dados, ajustado todo a los métodos de demostración del programa formalista de David Hilbert.

La manera general de entender la prueba que hace Gödel es considerar que en ella se trata de conseguir un enunciado *G* que diga de sí mismo que no es demostrable: "*G* no es demostrable"; la afirmación *G* se escribe "Esta afirmación no es demostrable". También, hay que saber que el enunciado *G* es autorreferente y al decir de sí mismo que no es demostrable, debe tenerse en cuenta que "demostrable" es demostrable a partir de los axiomas propuestos (Piñeiro, 2012, p. 89).

Para probar que el enunciado *G* es una verdad no demostrable, primero se debe saber que *G* es verdadero o falso, por lo que si *G* fuera falso por lo que expresa de sí mismo, se podría llegar a la conclusión de que *G* es demostrable, por lo que *G* debería ser falso y demostrable, pero esto no puede darse, puesto que tal conclusión parte del conjunto definido de axiomas verdaderos; en consecuencia, *G* no puede ser falso. Lo que como conclusión expresa que *G* es verdadero, pero por lo que dice de sí mismo no es demostrable. Entonces, *G* es un enunciado verdadero no demostrable.

Figura 3

Indemostrabilidad de G



Nota. Esta figura es una adecuación de la original que se encuentra en Piñeiro, G. E. (2012). *Gödel: dos teoremas que revolucionaron las matemáticas*. RBA. p. 88.

Lo anteriormente expuesto es la idea general expresada de manera correcta, de la esencia de la prueba de Gödel, pero para resolver el problema concreto planteado por *G* debe ser una afirmación aritmética, una propiedad de los números naturales. El problema es que los enunciados de la aritmética que definen, que son números enteros, no hablan o se refieren a otros enunciados y tampoco se expresan de sí mismos. Para superar esa incapacidad se debe equiparar números con afirmaciones, asociando a cada enunciado aritmético un número natural, en la manera en que cuando se hace referencia al hablar del número se hable del enunciado que le corresponde. Entonces, a cada enunciado aritmético se le asocia con un número natural, que se llamará *número gödel*.

4.2 El Sistema de Gödel según Ernest Nagel y James Newman

4.2.1 La Numeración de Gödel

El trabajo de numeración de Gödel es la descripción de un cálculo formal, en el que pueden declararse las notaciones aritméticas conocidas y constituir sus relaciones generales. Existe para ello un vocabulario base con *signos elementales* que construye las fórmulas del cálculo. También, la base depende de fórmulas primitivas dadas como axiomas. Por lo que los teoremas del cálculo se presentan como fórmulas que se sugieren de los axiomas por medio de reglas de transformación, como reglas de deducción. La primera tarea del lógico fue demostrar que se puede atribuir un número único a cada signo elemental, fórmula (serie de signos) y a cada prueba; estas representaciones diferenciadoras son los números gödel. Según Ernest Nagel y James Newman (2007), existen dos clases de signos elementales que forman parte del vocabulario fundamental de Gödel, estos son:

> [...] los signos constantes y las variables. Supondremos que hay exactamente diez signos constantes *19* , a los que se asocian, como números Gödel, los números enteros que van del 1 al 10. La mayorıía de estos signos son ya conocidos del lector: ¬ (que quiere decir ‘no’); *∨* (que quiere decir ‘o’); → (que quiere decir ‘si... entonces…’); = (que quiere decir ‘igual a’); *0* (el numeral para el número cero); y tres signos de puntuación, el paréntesis de apertura, ‘(’, el paréntesis de cierre ‘)’, y la coma, ‘,’. Se utilizarán además otros dos signos: la letra invertida *∃*, que puede leerse como ‘existe’ y que se da en los *cuantificadores existenciales*, y la minúscula ‘s’, que se agrega a las expresiones numéricas para designar el inmediato sucesor de un número. Por ejemplo, la fórmula *(∃x)(x = s0)* puede leerse ‘existe un x tal que x es el sucesor inmediato de 0’. La tabla que insertamos a continuación muestra los diez signos constantes, expresa el número Gödel asociado con cada uno de ellos e indica los significados usuales de los signos Además de los signos elementales constantes, aparecen tres clases de variables en el vocabulario fundamental del cálculo: las variables numéricas *x, y, z,* etc., con las que se puede sustituir a los numerales y expresiones numéricas; las variables sentenciales *p, q, r,* etc., con las que se puede sustituir a las fórmulas (sentencias), y las variables predicativas *P, Q, R,* etc., con las que se pueden sustituir los predicados tales como ‘primo’ o ‘mayor que’. A las variables se asignan números gödel de

acuerdo con las siguientes tres reglas:

1. Asociar a cada variable numérica un número primo distinto mayor de 10.
2. A cada variable sentencial el cuadrado de un número primo mayor de 10.
3. A cada variable predicativa el cubo de un número primo mayor de 10 (pp. 35-36).

Tabla 4

Signos constantes de los números de Gödel con su significado

Signos constantes	Número de Gödel	Significado
¬	1	No
∨	2	O
→	3	Si… entonces…
∃	4	Existe un…
=	5	Igual
0	6	Cero
s	7	Sucesor
(	8	Signo de puntuación
)	9	Signo de puntuación
,	10	Signo de puntuación

Nota. Esta tabla es una adaptación de la tabla original que se encuentra en Nagel, E., & Newman, J. R. (2007). El Teorema de Gödel (A. Martín, Trans.). Tecnos. p. 36.

Los signos que están en la tabla son nombrados *signos constantes*, pero no son los definitivos ni tampoco están establecidos, son los signos elementales que se utilizan en la explicación que dan Nagel y Newman para una definición adecuada, Gödel sólo utilizó siete signos constantes. “El número de signos constantes depende de cómo se construye el cálculo formal” (Nagel & Newman, 2007, p. 59).

También, se puede dar el caso de que en el cálculo formal existan signos que no están dados en el vocabulario, que se introducen en él definiéndolos mediante los signos del vocabulario. Un ejemplo es el signo ∧ que es una proposición lógica que significa “y”, este puede contextualizarse de la siguiente manera: $p \wedge q$ es lo mismo que $\neg(\neg p \vee \neg q)$. Después de definir un signo se asigna un número gödel; la manera en que se le asigna su correspondiente número gödel es observando que las expresiones que encierran signos definidos se pueden sustraer en favor de su correspondiente definidora; en lo que le sigue, un número gödel se puede establecer para la expresión transformadora. A lo que sigue:

> […] el número gödel de la fórmula $p \wedge q$ es el número gödel de la fórmula $\neg(\neg p \vee \neg q)$. Análogamente, los diversos numerales pueden ser introducidos por definición del modo siguiente: *1* abreviatura de *s0*, *2* abreviatura de *ss0*, *3* abreviatura de *sss0*, y así sucesivamente. Para obtener el número Gödel de la fórmula $\neg(2 = 3)$, eliminamos los signos definidos, obteniendo así la fórmula $\neg(ss0 = sss0)$, y obtenemos su número gödel siguiendo las reglas [...] (Nagel & Newman, 2007, p. 59).

La tabla es una forma gráfica de hacer más visible los signos elementales, pero no da comprensión a su uso y significado de manera expresa. Se contempla desde la interpretación que dan Nagel y Newman all teorema de Gödel, una explicación sencilla del sistema que tiene forma lógica y un cuantificador existencial conocido, a eso se añaden variables numéricas, otras sentenciales y algunas predicativas, junto con sus reglas. Hasta ahora, la forma en que lo presentan los autores es una manera poco compleja en que ambos le dan entendimiento al teorema y colocan un ejemplo de cómo es su lectura a manera práctica. Lo mismo será para establecer un método que aritmetize el cálculo formal, el ejemplo se reserva en este trabajo a la manera en que Ernst y Newman simplifican el proceso que tomó Gödel, de la siguiente forma:

Para el proceso se toma una fórmula del sistema, que en este caso será $(\exists x)(x = sy)$, que de manera literal significa: "Existe un *x* tal que *x* es el sucesor inmediato de *y*, lo que quiere decir, en realidad, que todo número tiene un sucesor inmediato" (Nagel & Newman, 2007, p. 36). Los signos elementales que corresponden a la fórmula se emparejan con su correspondiente número gödel de la siguiente manera:

(	∃	x	)	(	x	=	s	y	)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	4	11	9	8	11	5	7	13	9

Pero lo conveniente es tener un sólo número para la fórmula. En el paso actual se reemplaza la fórmula por el número que sea producto de los primeros diez números primos en orden de menor a mayor, cuando cada uno se encuentre elevado a una potencia igual al número gödel de su signo elemental. Por lo que la fórmula queda de la siguiente manera:

$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9$

Este número es llamado número *m*. De la misma manera, en toda sucesión finita de signos elementales (fórmula) se repite el mismo procedimiento para obtener el número de todos sus signos elementales. Por último se considera una sucesión de fórmulas a modo de cualquier forma de *demostración*. Ejemplo:

$(\exists x)(x = sy) \quad (\exists x)(x = s0)$

La segunda fórmula que dice "*0* tiene un sucesor inmediato", se deriva de la primera fórmula añadiendo el numeral *0* en sustitución de la variable numérica *y*. Teniendo en cuenta que ya hemos determinado *m* que es el número gödel de la primera fórmula, ahora se supone *n* como número gödel de la segunda fórmula. Para la sucesión es necesario repetir el proceso y darle un número, por lo que se asocia con el número producto de los dos primeros números primos del orden de menor a mayor, que son los números primos *2* y *3*, estos números elevados ya a la potencia del número gödel que le corresponde (*m* y *n*). El número resultante se nombra *k* y se representa de la siguiente manera:

$k = 2^m \cdot 3^n$

El proceso anterior es una *condensación* donde se pudo obtener el número para cada serie de fórmulas. Lo observado, para finalizar, es que toda expresión contenida en el sistema, como cualquier signo elemental, sucesión de signos o sucesión de sucesiones se le puede asignar un número gödel.

Hasta este punto, lo que se ha llevado a la tarea es erigir un método que aritmetiza el cálculo formal. El método fue establecer las reglas para enlazar de manera biunívoca las expresiones del cálculo y una determinada subclase de números pertenecientes a los enteros. Así, cuando se da una expresión, es posible calcular de manera unequívoca el número gödel que le corresponde. También, al tener un número se puede determinar si es gödel, y en cuanto lo es puede ser analizado o restablecido, sólo hay que tener en cuenta las tres reglas vistas; por lo que recordando se inicia el método asociando a las variables numéricas un número primo distinto mayor de 10, en el primer paso, después a las variables sentenciales se asigna, el cuadrado de un número primo mayor de 10 y por último a las variables predicativas, el cubo de un número primo mayor de 10. De la siguiente manera se ejemplifica:

> Si un número dado es igual o menor que 10, es el número Gödel de un signo constante elemental. El signo puede ser identificado. Si el número es mayor de 10, puede ser descompuesto en sus factores primos de una manera precisa (como sabemos por un famoso teorema de la aritmética). Si es un número primo mayor de 10, o la segunda o tercera potencia de un número primo que reúna esa cualidad, es el número Gödel de una variable identificable. Si es el producto de números primos sucesivos, elevados cada uno de ellos a alguna potencia, puede ser el número Gödel o de una fórmula o de una sucesión de fórmulas. En tal caso, puede determinarse exactamente la expresión a que corresponde (Nagel & Newman, 2007, p. 38).

Con ese método se puede desmontar cualquier número de manera maquinal, analizar su construcción y observar los elementos que lo integran; es también una forma de análisis, que al conocer que sus elementos se relacionan con elementos de la expresión que representa, de manera ordenada y en correspondencia, se puede reconstruir la expresión y analizar su construcción, y más examinaciones que puedan ser correspondientes. En este caso, Nagel y Newman lo ejemplifican con una tabla que adecua su correcta observación, de manera en que las reglas del método se encuentran en sentido inverso para demostrar su adecuación para el análisis o deconstrucción del método, tal cual es; como se muestra a continuación:

Tabla 5

Fórmula aritmética "cero igual a cero" tiene el número gödel 243000000

Orden	Proceso	Método
A	243000000	Número gödel
B	$64 \cdot 243 \cdot 15625$	Regla 3
C	$2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^6$	Regla 2
D	$\begin{array}{ccc} 6 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & = & 0 \end{array}$	Regla 1
E	0=0	Fórmula aritmética

Nota. Esta ilustración de cómo se transforma el número en la expresión que lo representa (en sentido inverso de las reglas). Esta tabla es una versión más explícita de la original que se encuentra en Nagel, E., & Newman, J. R. (2007). El Teorema de Gödel (A. Martín, Trans.). Tecnos. p. 38.

4.2.2 Aritmetización de la Metamatemática

La aritmetización de la metamatemática es el paso que le sigue en la explicación corta que le dan Nagel y Newman, al complejo pero corto proceso que llevó Gödel para la estructuración de su teorema de incompletitud. Este paso es el empleo de la idea de representación que utiliza el lógico para su fin, que al momento de este paso es demostrar que las proposiciones metamatemáticas que reflejan las características estructurales de las expresiones del cálculo, se reflejan en el mismo cálculo.

La manera de entender la idea es tener en cuenta que toda expresión del cálculo está en relación a un número gödel (un número), por lo que tiene la posibilidad de elaborar una proposición metamatemática en relación a los número gödel que le correspondan, como también de sus correspondientes relaciones aritméticas. Esa es la manera en que se aritmetiza la metamatemática, desde una visión general. El ejemplo para representar la metamatemática es, como una tienda que asigna fichas a los clientes, las cuales tienen un número de cliente, que es el mismo número que ocupa para ser atendido, por lo que su orden está predeterminado y el cliente sabe perfectamente qué cliente es, cuáles otros números y clientes le suceden y anteceden, por lo tanto reconoce intuitivamente sin contar si va antes o después de un cliente o número, pero también sabe exactamente el lugar que le corresponde.

En la metamatemática cada proposición está representada por una fórmula en la aritmética, y las correspondencias dependientes de la lógica entre proposiciones metamatemáticas se ven igualadas en las relaciones numéricas de sujeción con sus concernientes fórmulas aritméticas. La importancia de la representación es por la clarificación al momento de observar su estructura, lo que trae consigo que la inspección de lo metamatemático pueda llevarse al estudio mediante la indagación de las propiedades aritméticas y relaciones de números enteros fijados. Otro ejemplo de Nagel y Newman (2007) muestra de manera idónea lo que se menciona:

> Consideremos el primer axioma del cálculo proposicional, que es, además, un axioma del sistema formal sujeto a examen: *(p ∨ p) → p*. Su número gödel es $2^8 \cdot 3^{11(2)} \cdot 5^2 \cdot 7^{11(2)} \cdot 11^9 \cdot 13^3 \cdot 17^{11(2)}$, que designaremos con la letra *a*. Consideremos también la fórmula *(p ∨ p)* cuyo número Gödel es $2^8 \cdot 3^{11(2)} \cdot 5^{2(2)} \cdot 7^{11(2)} \cdot 11^9$; la designaremos con la letra '*b*'. Enunciamos ahora la proposición metamatemática de que la fórmula *p ∨ p* es una parte inicial del axioma (p. 39).

Ahora podemos evidenciar que la fórmula *(p ∨ p)* parece ser el principio de la fórmula completa que es el axioma *(p ∨ p) → p*, esto únicamente si el número *b* ($2^8 \cdot 3^{11(2)} \cdot 5^{2(2)} \cdot 7^{11(2)} \cdot 11^9$) que está representando a la primera fórmula puede ser factor de *a* ($2^8 \cdot 3^{11(2)} \cdot 5^2 \cdot 7^{11(2)} \cdot 11^9 \cdot 13^3 \cdot 17^{11(2)}$) que está representando la segunda fórmula. Con lo visto, podemos proceder a mencionar que la fórmula *b es un factor de a*, porque es la única fórmula aritmética que concuerda con *(p ∨ p)*, mientras que la expresión "factor de" tenga la lectura originalmente definida en el sistema aritmético formalizado. Se concluye, entonces, que si *b es un factor de a*, es correcto que *(p ∨ p)* es parte de *(p ∨ p) → p*.

En seguimiento del sistema de Gödel para la realización del teorema de incompletitud, se necesita comprender de qué manera se establece la verdad o falsedad de una proposición. La proposición a tomar en cuenta es "La sucesión de fórmulas con número gödel *x* es una prueba de la fórmula con número gödel *z*" (Nagel & Newman, 2007, p. 40), tal declaración es reflejo o representación de la fórmula que está establecida en el cálculo aritmético, por lo que la relación entre *x* y *z* tiene que ser estrictamente aritmética. La fórmula que relaciona de manera aritmética la proposición metamatemática mencionada es la fórmula *Dem (x, z)*, tomando en cuenta que leída a la manera en que se expone la parte que dice "*x* es una prueba", también podría leerse "*x* es una demostración" (*Dem*).

Para comprobar si "la sucesión de fórmulas con número gödel *x* es la demostración de la fórmula con número gödel *z*" es verdadera, es necesario saber si *x* está con *z* en la relación aritmética asignada como *Dem*. Lo que concluye que, para demostrar la verdad o falsedad de la proposición metamatemática, sólo es de importancia si la relación *Dem* es entre dos números, para lo que se recurre a reducción al absurdo para reflejar de manera inversa que la relación aritmética entre un par de números es, como la proposición metamatemática se lee, "La sucesión de fórmulas con el número gödel *x* no es una prueba para la fórmula con número Gödel *z*" (Nagel & Newman, 2007, p. 40) y se representa en el sistema aritmético formalizado con una fórmula definida que es *¬Dem (x, z)*.

Para llegar al núcleo de la argumentación de Gödel es necesario entender cómo se compone esta notación especial. Nagel y Newman proponen el ejemplo que se retrata a continuación:

> La fórmula $(\exists x)(x = sy)$ tiene como número gödel *m*, mientras que el número gödel de la variable *y* es *13*. En dicha fórmula sustitúyase la variable de número gödel *13* (o sea, *y*) por el numeral de m. El resultado es la fórmula $(\exists x)(x = sm)$, que dice literalmente que existe un número *x* tal que *x* es el sucesor inmediato de *m* (Nagel & Newman, 2007, p. 40).

La fórmula anterior tiene un número gödel que puede calcularse, pero también se puede reconocer con una caracterización metamatemática, porque de manera sencilla se sabe que es el número gödel resultante de la fórmula de *m*, cambiando la variable de 13 (número gödel), por el numeral *m*. Esta representación metamatemática dispone, en asociación unívoca de un número definido a una función aritmética de *m* y *13*, que puede expresar la función misma en el sistema formal. Lo que resulta en que puede asignarse su representación en el cálculo; su forma designada es *sust (m, 13, m)* con la intención de recordar que representa "el número gödel de la fórmula obtenida a partir de la fórmula de número gödel *m*, sustituyendo la variable de número gödel *13* por el numeral de *m*" (Nagel & Newman, 2007, p. 41), que es su caracterización metamatemática.

4.2.3 Argumentación de Gödel

Para seguir la estructura de la argumentación principal de Gödel, se enlistan los pasos seguidos por el lógico, para consecuentemente dar su explicación en la parte siguiente del texto. Los pasos expuestos son una forma general de la panorámica argumental que Gödel lleva a exposición para su teorema de incompletitud.

1. Construcción de una fórmula aritmética *G* que sea representación de la declaración metamatemática "La fórmula *G* no es demostrable".
2. Mostrar que *G* es demostrable si, y sólo si, es demostrable $\neg G$.
3. *G* no es formalmente demostrable, pero es una fórmula aritmética verdadera.
4. Al ser *G* verdadera y formalmente *indecidible*, los axiomas de la aritmética se observan como *incompletos*.

5. Descripción del proceso para construir una fórmula aritmética *A* que sea representación de la proposición metamatemática "la aritmética es consistente"; a continuación, la demostración que $A \rightarrow G$ es formalmente demostrable; y para finalizar, la demostración que *A* no es demostrable.

Ahora, reconocidos los pasos de la argumentación que sigue Gödel para su demostración, se sigue su explicación general pero comprensiva de cada número en la lista.

Paso 1

Teniendo en cuenta que en la aritmética formalizada la fórmula *Dem (x, z)* es la proposición metamatemática: "la sucesión de fórmulas con número gödel *x* no es una prueba de la fórmula con número gödel *z*". Se sigue entonces que, en la fórmula *Dem* se añade el prefijo *(x)*, esto en el sistema formalizado, que se interpreta como: "para todo *x*". La fórmula resultante es *(x)¬Dem(x, z)* que es la representación aritmética de la proposición metamatemática "para todo *x*, la sucesión de fórmulas con número Gödel x no es una prueba de la fórmula con número gödel *z*". Ahora se puede observar que a manera de paráfrasis se lee la fórmula formal, en su proposición metamatemática como: "la fórmula con número gödel *z* no es demostrable" o también: "no hay prueba para la fórmula con *z*". Lo que quiere decir que hay un *caso específico* en la fórmula que no es demostrable de manera formal. Para señalar el caso y observarlo es necesario construirlo, empezando con la fórmula de este primer caso (I).

I) *(x) ¬Dem (x, sust (y, 13, y))*. La fórmula presentada es del cálculo aritmético, pero es representación de alguna proposición metamatemática específica. Para localizarla hay que traer a la situación lo anteriormente observado. La expresión *sust (y, 13, y)* es la representación de un número gödel. Lo que diría la proposición metamatemática de la fórmula I es: "la fórmula *sust (y, 13, y)* no es demostrable", pero como I pertenece al cálculo aritmético, tiene un número gödel que puede ser calculado. Se cambia la variable de número gödel 13 (variable *y*) por el numeral *n* y así se crea la fórmula *G*, que se representa: *(x) ¬Dem (x, sust (n, 13, n))*.

G es el "caso específico", y ahora resuelta o construida la fórmula, se aclara que se da en el cálculo aritmético, por lo que se le tiene que asignar un número gödel; su número gödel es *sust (n, 13, n)*. Hay que recordar que *G* es el reflejo dentro "del cálculo aritmético de la proposición metamatemática: 'La fórmula de número gödel *sust(n, 13, n)* no es demostrable'. De donde se sigue que la fórmula aritmética *(x)¬Dem(x, sust(n, 13, n))* representa en el cálculo la proposición metamatemática: La fórmula *(x)¬Dem(x, sust(n, 13n))* no es demostrable'" (Nagel & Newman, 2007, p. 43). Por lo que se entiende que la fórmula aritmética de *G* puede construirse afirmando de sí misma su indemostrabilidad.

Paso 2

Probar que *G* no se puede demostrar de manera formal. La argumentación se desarrolla observando que si *G* pudiera ser demostrable, entonces ¬*G [¬(x)¬Dem(x, sust(n, 13, n))]*, también pudiera ser demostrable; y a la inversa. El problema ahí recae en que "si de un conjunto de axiomas pueden ser derivadas tanto una fórmula como su negación formal, esos axiomas no son consistentes" (Nagel & Newman, 2007, p. 44), por consiguiente si los axiomas del sistema formal de la aritmética son consistentes, *G* y ¬*G* pueden demostrarse. Lo anterior se concentra en que la consistencia de los axiomas es que *G* formalmente es indecidible, porque *G* ni ¬*G* pueden ser deducidas de los axiomas de manera formal.

Paso 3

Entonces, puede construirse una fórmula *G* en la aritmética que sea indecidible, y más aun de eso, si los axiomas en tal sistema son consistentes, también puede demostrarse mediante el razonamiento metamatemático que *G* es verdadera. Lo que quiere decir es que, se puede demostrar que *G* define una propiedad numérica dada necesariamente en los números enteros. La fiabilidad de que *G* es indecidible pero verdadera descansa en que se ha demostrado la verdad de la proposición metamatemática "La fórmula *(x)¬Dem(x, sust(n, 13, n))* no es demostrable" tomando en cuenta que su representación aritmética es consistente. Sin olvidar que en el formalismo aritmético las proposiciones metamatemáticas verdaderas son correspondientes de las fórmulas aritméticas verdaderas; por lo que la fórmula *G* es metamatemáticamente verdadera.

Paso 4

La *completitud* depende de que todos los axiomas de un sistema deductivo sean completos, y esto se cumple cuando la totalidad de proposiciones verdaderas que pueden decirse en el sistema, son deducibles de los axiomas a manera formal. En el caso contrario es *incompleto*. Y aunque se construyera otra fórmula, o sea que se cambiara *G* por otro axioma, caería en lo mismo. Es así que se comprueba la limitación del sistema axiomático; por lo que queda expuesto que la verdad aritmética no es un orden sistemático fijo, siendo “fijo” por un conjunto de axiomas que deriven todas las proposiciones aritméticas verdaderas.

Paso 5

La conclusión de Gödel es que “Si la aritmética es consistente, es incompleta” que está representada como $(\exists y)(x)\neg Dem(x, y) \rightarrow (x)\neg Dem(x, sust(n, 13, n))$, que puede simbolizarse en la brevedad $A \rightarrow G$. En este siguiente paso, se demuestra que la fórmula *A* no es demostrable. Primero tenemos que pensar que *A* es demostrable, entonces $A \rightarrow G$ es demostrable y por regla de separación la fórmula *G* es demostrable. Pero, si el cálculo es inconsistente *G* sería formalmente indecidible, que es lo mismo que no demostrable. Lo que daría como resultado que la fórmula *A* no sea demostrable si la aritmética es consistente.

La conclusión anterior es dada conociendo que la proposición metamatemática “la aritmética es consistente” y en su versión de lectura de la fórmula completa que es “Existe por lo menos una fórmula de la aritmética para la cual ninguna sucesión de fórmulas constituye una prueba” que está representada por la fórmula *A*, entonces si esta proposición fuera demostrada mediante una sucesión de argumentos que puedan ser una sucesión de fórmulas como prueba en el cálculo aritmético podría demostrarse la fórmula *A*. Eso es imposible, según lo visto anteriormente, cuando la aritmética es consistente. Lo que concluye en que “si la aritmética es consistente, su consistencia no puede ser demostrada por ningún razonamiento metamatemático susceptible de ser representado dentro del formalismo de la aritmética” (Nagel & Newman, 2007, p. 46).

La publicación de este Teorema de incompletitud, en 1931, hizo de Gödel un personaje afamado y de amplio reconocimiento dentro de las matemáticas, su demostración pasó a formar parte de los grandes clásicos de los razonamientos matemáticos. La publicación del artículo donde se encontraba el teorema de incompletitud, era seguido por otro teorema que es conocido como Segundo teorema de incompletitud, que dependiendo de muchos factores es reconocido por distintos nombres hasta ahora; tanto el primer teorema como el segundo han sido bautizados de distintas maneras o nombrados como un mismo teorema.

El teorema revisado ahora, llamado Primer teorema de incompletitud, El teorema de Gödel y demás formas de llamarlo, dice que “si elegimos como axiomas aritméticos cualquier conjunto de enunciados verdaderos, y sólo admitimos demostraciones verificables algorítmicamente, entonces habrá siempre un enunciado verdadero que no es demostrable a partir de esos axiomas" (Piñeiro, 2012, p.113). El segundo teorema de incompletitud menciona la imposibilidad de verificar la verdad de un conjunto de axiomas aritméticos, mediante algoritmos. Esta segunda parte de su artículo, que es el segundo teorema de incompletitud, no fue escrito a detalle o completado, sólo fue mostrado mediante una panorámica general, esto a causa de una crisis nerviosa resultante de su salto a la fama académica en las matemáticas; con tanto peso y preguntas, como también personas que no compartían su idea, la recaída en su estado de salud pesó en Gödel como para continuar inmediatamente en el detallamiento de la segunda parte, por lo que no se adentró en el segundo teorema, ya aceptado por la comunidad académica como un hecho y gran razonamiento.

4.3 Análisis Filosófico de los Resultados de Kurt Gödel

La *teoría de la demostración* de la consistencia en el programa formalista de Hilbert, que trataba de dar fin a los problemas de la *fundamentación de las matemáticas*, se ve acabado en 1931 por Gödel con sus teoremas de incompletitud. Desde entonces, la actitud de los matemáticos ha sido de resignación. Los fundamentos esenciales o primeros y el sentido de las matemáticas siguen abiertos, sin dirección o pronta solución, sin panoramas de objetividad en alguna ahora improbable resolución final. Los único que es visible en las matemáticas a partir de la incompletitud matemática en sentido formal, es que el quehacer matemático ahora se ve más como una actividad creadora de la humanidad, "como la música, cuyos productos en forma y sustancia están condicionados por la historia y por ello impiden una realización objetiva completa" (Torres citando a Herman Weyl, 1989, p. 43).

Los teoremas de incompletitud de Gödel demuestran que tanto en el formalismo de Hilbert como en cualquier otro sistema formal no estricto en totalidad:

1. se suelen encontrar proposiciones aritméticas esenciales (de manera relativa) que son verdaderas pero no deducibles dentro del sistema formal;
2. y también, que la fórmula que contiene la consistencia del sistema formal no es deducible del mismo sistema formal. Lo que sería que la deducción de cualquiera de las dos dentro

del formalismo deduce una contradicción en el mismo sistema formal; ejemplo: una deducción de $\neg(1 = 1)$.

Del primer teorema se puede deducir el hecho que las áreas de las proposiciones accesibles al entendimiento y el de las accesibles a la deducción se superponen sin contener uno al otro.

La idea en que descansa el formalismo es la idea, también, de un mundo completo en sí mismo, fuera del signo, a pesar de lo que se pueda creer por su intención de ser formal; el mismo que en su comprobación tuvo la naturaleza de ser de carácter incompleto en sentido formal. Todos los problemas simples de la aritmética en un sistema formal pueden formularse y verificarse por discernimiento, pero no mediante la deducción en un sistema formal.

Del segundo teorema de Gödel se deduce el hecho de que:

1. el razonamiento que decreta la consistencia del formalismo debe de encerrar algún argumento sin oposición formal en el sistema;
2. o, debe de eliminarse la idea de que se pueda hacer una demostración finitista de consistencia.

En Gödel se observa que la naturaleza de fórmulas, pruebas, símbolos, etc. que son objetos para la construcción de un sistema formal, son de poca importancia desde la generalidad, lo que los hace reemplazables por números naturales. De la misma forma nos prueba que la metamatemática como la matemática puede ser tratada de manera formal, a la manera en que los enunciados metamatemáticos mudan a enunciados aritméticos capaces de formalizarse.

4.3.1 El Realismo Platónico de Gödel

Gödel considerado hoy, uno de los lógicos más importantes es reconocido por sus teoremas y sus implicaciones matemáticas y formales, pero también en él se encuentra una base filosófica fuerte, más penetrante que en Hilbert y de abiertas ideas platónicas. La mayoría de sus ideas son recogidas por su amigo y colega Hao Wang, a la vez que el profesor Rodriguez Consuegra que asegura que las principales motivaciones de Gödel eran filosóficas, pero su trabajo culminó en los teoremas de incompletitud, esto para la defensa de alguna forma especial o particular de platonismo.

En la conferencia Gibbs de 1951, Gödel declaró que sus teoremas de incompletitud mantenían y demostraban el platonismo de las matemáticas a diferencia del refutado formalismo de Hilbert. El argumento pronunciado por Gödel ilustraba que los números naturales son intuidos por la mente de manera natural, por lo que sus operaciones fundamentales y propiedades básicas son derivadas intuitivamente. Una manera de entenderlo es la multiplicación *2 x 4*, donde puede hacerse la representación en forma de operación física con un rectángulo que contiene cuatro columnas, cada una erigida por dos objetos, lo que resulta en que la cantidad total de objetos en contenidos en el rectángulo es ocho (ocho objetos); lo anterior es un modelo mental de los números naturales como entes y estructura.

De manera semántica somos capaces de comprender la ilustración de la multiplicación en un modelo mental, pero según el teorema de incompletitud de Gödel, de manera sintáctica ese mismo modelo no puede ser caracterizado, por lo que para los razonamientos y métodos sintácticos siempre habrá limitaciones para alcanzar esas verdades expuestas de manera semántica que abarcan todas las propiedades del modelo pensado, lo que implica, según Gödel, que ese modelo y esos entes que son los números naturales y sus propiedades, junto a sus formas de relacionarse, existen como cualquier otro objeto, en una realidad platónica fuera del espectro lingüístico (Piñeiro, 2012, p.193).

El platonismo matemático es variado, pero tiene dos formas aceptadas que se adhieren, aunque pudieran estar separadas, podemos nombrar a una que es llamada la versión débil. La versión débil dice que los objetos matemáticos existen, un ejemplo pueden ser los números, que son espacio-temporales pero son existentes fuera de nuestra vista o sensibilidad y son independientes de la empiria y actividad teorizante; la segunda premisa de la versión es que las teorías describen estos objetos. Es necesaria la segunda premisa que defiende que nuestras teorías tratan de esos objetos platónicos, puesto que sin esto la tesis de la primera premisa no tendría sustento, pues tales objetos no es posible conocerlos. En cambio, la versión fuerte del platonismo matemático afirma que cualquier objeto matemáticamente posible existe.

Las versiones vistas del platonismo tienen sus respuestas por parte de antiplatónicos realistas y antiplatónicos antirrealistas. Los antiplatónicos realistas no niegan radicalmente el platonismo, pues en parte están convencidos del primer argumento de la versión débil del platonismo, pues las matemáticas pueden estar describiendo objetos en particular, pero estos no son entidades abstractas que se encuentran fuera del espacio y el tiempo; pueden ser objetos mentales o físicos, lo que haría de la labor matemática descubridora. En otra postura están los antiplatónicos antirrealistas que, se oponen a ambos argumentos de la versión débil del platonismo al considerar que las matemáticas no describen ningún objeto, pues consideran que carecen de contenido, por lo que no pueden describir objetos de algún mundo posible. Dentro de esta última respuesta al platonismo débil se encuentra el formalismo, que afirma a las matemáticas como un sistema que puede deducir verdades formales, manipulando signos mediante reglas formales.

Dentro de las críticas al platonismo matemático resalta una que con fuerza aporta dos cuestiones para resolver dos demandas complejas de las matemáticas o los matemáticos. Paul Benacerraf en *La verdad matemática* propone dos cuestionamientos para atender la naturaleza matemática en la filosofía de las matemáticas. La primera cuestión sentencia que cualquier teoría de la verdad matemática debe estar revisada conforme a una teoría general acerca de la verdad. La segunda cuestión trata la investigación en filosofía de las matemáticas, y que esta investigación siempre debe estudiar la manera en que se está obteniendo el conocimiento matemático; lo que quiere decir que "una semántica adecuada para las matemáticas debe encajar en una epistemología aceptable" (Cardona Suárez, 2002, p.27). El argumento de Benacerraf es expuesto por Balaguer de la siguiente manera; y cito a Cardona Suaréz (2002) mostrando la síntesis de Balaguer sobre el argumento de Benacerraf:

1. Los seres humanos existen enteramente en forma espacio-temporal;
2. si hay objetos matemáticos abstractos, ellos existen por fuera del espacio-tiempo;
3. aplicando la teoría causal del conocimiento: si existen objetos matemáticos abstractos, los seres humanos no podrían tener conocimiento de ellos;
4. si el platonismo matemático es correcto, los seres humanos no podrían tener conocimientos matemáticos;
5. los seres humanos tienen conocimientos matemáticos;
6. luego: el platonismo matemático no es correcto. (p.27-28).

Hay respuestas a Benenacerraf por parte del platonismo matemático y de otros que no defienden específicamente el platonismo, como Quine que responde al argumento de Benacerraf para defender una visión holística del conocimiento, en lugar de la causalidad planteada. La respuesta de los platonistas matemáticos ronda en tres alternativas que se despliegan de las tres primeras premisas de Benacerraf; la primera alternativa parte de la posibilidad de que se puede tanto afirmar, como negar que los seres humanos son únicamente espacio-temporales, esta defensa se ajusta a la idea de Gödel; la segunda alternativa también encuentra que es posible tanto afirmar como negar que se puede adquirir información por medio de la percepción; y la tercera alternativa admite que se puede negar la teoría sobre la causalidad del conocimiento, y en ese caso dejarla de lado.

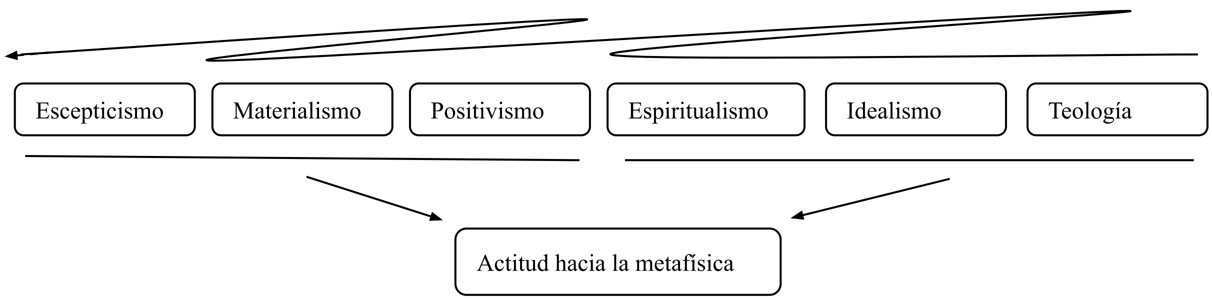
La defensa del platonismo matemático que pretende Kurt Gödel está construida a partir de unos cuantos artículos de su autoría, pues no son muchos los que se le conocen en torno al tema, pero claro que tuvo intereses filosóficos y algunos especialistas afirman que esa fue la razón de realizar los teoremas de incompletitud que cercaron el formalismo de Hilbert. Se dice que Gödel escribió poco al respecto, ya que era tímido en cuanto a expresar ideas, y que su nivel de rigurosidad a la hora de exponer ideas, siempre lo dejaba insatisfecho, actitud que hacía compleja la publicación de sus escritos. También, es difícil hacer una filosofía de sus textos, pues es comentado por especialistas que tales escritos no sobrepasan la forma de pensamientos heurísticos por lo que no es una filosofía en sentido estricto pero sí una defensa filosófica del platonismo matemático.

4.3.2 La Dicotomía Materialismo-Idealista

El platonismo matemático de Gödel está presente en un artículo que el lógico titula “El desarrollo moderno de los fundamentos de las matemáticas a la luz de la filosofía”, el cual fue publicado para promover la charla de aceptación –que es requisito– en la Sociedad Americana de Filosofía, esto en 1961 (Cardona Suárez, 2002, p. 29). En este artículo Gödel divide las *visiones del mundo* (*weltanschauungen*) en una métrica que propone una disposición, ya sea más lejana o cercana de la metafísica. Esta métrica se compone de positivismo, escepticismo y materialismo en una sección, mientras que en su lado contrario se encuentran teología, espiritualismo e idealismo. En este esquema dividido, Gödel nombra al área de la izquierda como visiones de izquierda y al área que se encuentra a la derecha visiones de derecha. La figura siguiente representa esa métrica.

Figura 4

Esquema dicotómico de la visión del mundo de izquierda y la de derecha



Nota. Este esquema es una adaptación del que se encuentra en Cardona Suárez, C. (2002, noviembre). Algunas consecuencias filosóficas del trabajo de Kurt Gödel. DIÁNOIA, 47 (UNAM), 23-50. p. 29.

Según Gödel, las visiones del mundo de izquierda, que son escepticismo, materialismo y positivismo, destacan por su empirismo y pesimismo, mientras que las visiones del mundo en la derecha, destacan por su *apriorismo* y optimismo, por lo que uno se dirige a un punto (sentido) y el otro al escepticismo (carencia de sentido). Cardona Suárez (2002, p. 29) indica que el desarrollo de la filosofía desde el Renacimiento se ha desplazado de derecha a izquierda, según el esquema de las visiones del mundo de Gödel, pero con retrocesos, por lo que no es una línea recta. Esto se ve representado en la ilustración de Gödel, que está adaptada en la figura 4.

En una visión gödeliana, las ciencias físicas son el ejemplo de que, desde el renacimiento el desarrollo filosófico y científico se desplaza hacia el lado izquierdo del esquema, esto confirmado por la confianza en el programa mecanicista y después por el contentar a la ciencia con ser sólo predictora de resultados de observaciones, así, sin más explicación. Por el contrario, las matemáticas bajo esta visión gödeliana se concentran en el lado derecho del mismo esquema, inamovibles por tratarse de una ciencia *a priori*, por lo que son al parecer de Gödel, ajenas a los paradigmas de las épocas. El empirismo paradigmático de J. S. Mill no pudo intervenir en el proseguir matemático, pero claro que muchos de los académicos y matemáticos se vieron seducidos por el lado izquierdo del esquema. Cardona Suarez (2002) relata lo siguiente sobre Gödel y su postura o visión platónica de las matemáticas:

> Es muy posible que Gödel leyera el siguiente hermoso fragmento de Frege como la conspiración de un anarquista: después de mostrar que en el caso de las matemáticas no basta un convencimiento puramente moral apoyado en muchas aplicaciones convincentes, y 'Después de que uno se haya convencido de la imposibilidad de mover una roca ante la inutilidad de los esfuerzos por lograrlo, se puede preguntar qué es lo que la sostiene con tanta firmeza'. Jamás habíamos contemplado tal irreverencia: atreverse siquiera a cuestionar los fundamentos mismos de la matemática. El mismo Descartes tuvo que inventarse un argumento esotérico para poner en entredicho, en forma pasajera, el piso firme de las matemáticas: imaginar *un genio maligno que me hace concebir en forma clara y distinta aquello que no es verdadero*. Pero este atrevimiento de Frege roza ya los límites de la insolencia: convertir la petición pasajera, y en algunos aspectos inocua, de Descartes en un programa permanente de investigación. La falibilidad, propia de las ciencias empíricas, pronto se transformó en una clara amenaza para las matemáticas (p. 30).

Se refieren aquí a los *fundamentos matemáticos*, el programa de investigación que se inaugura desde Frege como exigencia del tiempo o de la época y se instaura como eje rector del estudio en el área matemática, adquiriendo como regla probar la consistencia de los sistemas matemáticos; esto sucedido a partir de las geometrías no euclidianas y las antinomias de la teoría de conjuntos.

La naturaleza de la matemática y la necesidad del tiempo por probar o fundamentar las matemáticas causa el nacimiento de una tregua entre ambos lados del esquema, pero con tendencia de su tiempo hacia la falibilidad científica o empírica, que se refleja en el programa formalista de David Hilbert, donde el matemático, aludiendo al lado izquierdo del esquema de Gödel, reconoce que los axiomas en los que descansa la matemática sólo tienen verdad aparente por no tener justificación, por lo que los resultados matemáticos son hipotéticos. Y también en concordancia con el lado derecho del esquema, reconoce que la naturaleza matemática debe ser precisa, por lo que sólo admite dos respuestas, una correcta y una incorrecta que debe ser definitiva. Esto se ve reflejado en el programa formalista que es caracterizado por tratar de ser un juego de símbolos únicamente sintácticos.

Gödel defiende la perspectiva filosófica del platonismo en la matemática probando en los teoremas de incompletitud que el programa de Hilbert es imposible, pues queda probado que no se pueden establecer al mismo tiempo un sistema bien definido de axiomas y reglas, y a la vez concluir formalmente que esos axiomas y reglas son correctos y contienen toda la matemática.

En Gödel se entiende que los sistemas formales consistentes no son completos y decidibles, y que su misma propiedad de ser consistentes no puede ser demostrada. La tarea de Gödel fue, entonces, esclarecer el mito que pone el quehacer matemático en la pura demostración formal.

Se concluye que probar la consistencia de las matemáticas no es posible por medios matemáticos, ya a sabiendas que la axiomatización y formalización no cumplen tal función por lo que la consistencia depende de una existencia intuitiva que rechaza estas posturas; entonces la consistencia dependerá de otros factores existentes. Mientras que para Hilbert la existencia es en sí misma una consistencia, en la ciencia empírica la existencia depende de la teoría y la empiria, esto que en matemáticas se ha ignorado por propias razones para llevarlo a la formalización. Se encuentra problemática y rebuscada la cuestión que a la vista de Gödel es la intuición, la vía para el quehacer matemático, como la experiencia para el quehacer científico. Peña Paez aterriza el argumento de la siguiente manera, citando en ello a Gödel:

> La verdad de ciertos enunciados debe ser intuitiva. Puesto que la imposibilidad de demostrar un enunciado no implica que este no pueda ser verdadero, se concluye que verdad y demostrabilidad no son equivalentes. Esta distinción fue un éxito, como principio heurístico, acabando con el sueño de ‘una matemática segura, consistente, decidible, categórica, formalizable y completa’ (Gödel), dando opción al paralelismo con la ciencia empírica (Peña Páez con una cita de Gödel, 2021, p. 3).

El problema de la naturaleza matemática en la dicotomía izquierda o derecha, o también Hilbert o Gödel, parece en el caso, balancearse hacía el platonismo de Gödel, asegurando que la fiabilidad en la sintaxis formal no asegura siquiera la coherencia matemática. Son las intuiciones matemáticas las que no se pueden eliminar y tampoco formalizar para un uso exclusivamente sintáctico. Las consecuencias que ve Gödel en la izquierda de su esquema es que el escepticismo trae estrategias estériles hacia el conocimiento y dejan de lado la búsqueda del fundamento último de la ciencia, según Gödel. Cardona Suarez (2002) presenta el pensamiento de Gödel sobre este argumento de la siguiente manera:

> La actitud del escéptico tenía siempre la ventaja de la prudencia, la ventaja de aquel que se compromete con menos. El dogmático, por el contrario, tenía sobre sus hombros la carga de la prueba. Es él quien debe probar que el mundo existe, es él quien debe mostrarnos que hay un fundamento sólido para el conocimiento. El escéptico puede limitarse a contemplar con cierto aire de incertidumbre (p. 32).

Gödel acepta el método del programa de Hilbert –que de cierta forma lo ve tendiente hacia el lado izquierdo de su esquema, dirigido hacia el escepticismo científico, aunque Hilbert no lo contempla de la misma manera–, entonces, sólo para probar que la matemática tiende hacia la intuición del conocimiento verdadero, y no hacía la comprobación lógica. Esto mismo, Gödel lo había visto en un artículo de Carnap, donde se advierte que una noción como la verdad no se puede expresar en un lenguaje consistente. De esto mismo Gödel concluye con sus teoremas de incompletitud que la certeza matemática no se puede probar con un sistema de símbolos con reglas lógicas; la certeza matemática se aproxima mediante intuición.

4.3.3 La Dicotomía Lógica-Intuitiva

Antes de la publicación del teorema de incompletitud de Gödel en 1931 –y a la actualidad que se mantiene este diálogo entre posturas–, estaban –y están– presentes dos tendencias opuestas en torno a las matemáticas, que se sitúan en la postura la lógica y la postura de la intuición matemática; sin prueba o refutación los matemáticos se colocan en una posición que les haga sentido, según sus conocimientos o experiencia. Esta dicotomía es abordada por Gödel en su artículo "El desarrollo moderno de los fundamentos de las matemáticas a la luz de la filosofía", donde muy a su manera y desde su visión propone la observación de estas posturas desde sus conocimientos y filosofía. Tiempo antes, en 1907, el matemático Henri Poincaré publicó un ensayo nombrado *La intuición y la lógica en las matemáticas*, que versa sobre la misma situación, en su conocer y observar la oposición entre lógica e intuición matemáticas.

Poincaré (1907, p. 1) menciona que los matemáticos que están guiados por la lógica se les trata de analistas, mientras que los guiados por la intuición se les denomina geómetras; esto anterior no es impedimento para que los analistas sigan siendo analistas aún cuando tratan la geometría, o que los geómetras lo sigan siendo aún cuando trabajan el análisis puro. Poincaré menciona que es la naturaleza de la mente la que hace lógicos o intuitivos, pues no existe ninguna prueba que dé mayor o menor razón a alguno o que alguna educación especial enfoque a unos y a otros en la naturaleza matemática. Tanto es así, que es sabido que en los estudiantes algunos prefieren tratar problemas mediante análisis y cálculos largos, mientras que otros se decantan por la observación de los espacios y formas de la geometría; y los dos son igualmente necesarios y complementarios para las matemáticas y las ciencias, por lo que ambos son legítimos razonadores.

Poincaré encuentra que las obras de los antiguos podrían incluir a una gran mayoría, si no es que a todos entre los que destacan la intuición para su desarrollo racional, pero no es ahora o recientemente que se cultiva el análisis lógico, y curiosamente los geómetras desde siempre han tratado sus obras mediante el análisis. Hasta ahora es visto que toda la vasta construcción matemática y científica se debe a la intuición, pero su desenvolvimiento y construcción es mediante la lógica. Se deduce que las mentes son intuitivas, dadas a las ideas y siempre ha sido igual, pero han necesitado herramientas para su examinación, por lo que se ha desarrollado el rigor mediante la lógica, dando este paso evolutivo de la inteligencia ideal al análisis de las construcciones observadas para dales certeza y veracidad en un examen más formal. Pero no se puede fiar siempre de alguno, o de ambos, incluso hay personas que desconfían de la intuición y otros que encuentran incompleto el análisis, por lo que Poincaré menciona lo siguiente:

> Creemos que en nuestros razonamientos ya no apelamos a la intuición; los filósofos nos dirán que eso es una ilusión. La pura lógica nunca nos podría conducir a otra cosa que a tautologías; no podría crearse nada nuevo; de ella sola no podría surgir nunca un tema científico. En cierto sentido, estos filósofos tienen razón; para construir la aritmética, lo mismo que para la geometría, o para cualquier ciencia, es necesario algo más que la pura lógica. Para designar esta otra cosa necesaria no tenemos ninguna palabra que no sea intuición (p. 4).

La intuición, como puede ser pensado no está fundada necesariamente en evidencia sensible, puesto que lo sensible es inmediato a los sentidos por lo que no serviría en el caso de una intuición racional de las matemáticas, pero sí se puede intuir un polígono de cien lados sin tener alguna imagen o sensibilidad de esta figura. A esta intuición es a la que se refiere muchas veces el matemático. En cambio, el análisis pone a disposición una multiplicidad de procedimientos infalibles, que de variadas maneras puede satisfacer el examen y duda en la observación matemática. Por lo tanto, “la lógica y la intuición tienen cada una su necesario papel. Cada una es indispensable. La lógica, la única que puede dar certeza, es el instrumento de la demostración; la intuición es el instrumento de la invención” (Poincaré, 1907, p. 7).

Al igual que Poincaré, Gödel afirma que, conforme a su ilustración (figura 4), donde se encuentran las posiciones materialistas y positivistas a la izquierda y las posturas idealistas y teológicas a la derecha, “la verdad yace en el medio o que consiste en una combinación de las dos concepciones” (Cardonza Suárez citando a Gödel, 2002, p. 32), pues la oposición desmedida de la postura materialista, sólo es una respuesta a la inmoderación de la postura idealista, en cuanto a que las épocas idealistas fueron inmoderadas durante largo tiempo de la historia.

4.3.4 La Intuición

No hay que confundir la intuición matemática con la filosofía matemática del intuicionismo, esta última no comparte los rasgos de la intuición matemática en varios aspectos. El intuicionismo es una filosofía de las matemáticas que se opone al formalismo y al platonismo, con una forma de ver las matemáticas como una creación de la mente y adopta una postura constructivista. Este mismo constructivismo pretende que los objetos matemáticos existen en tanto que son construidos y que la validez de las demostraciones matemáticas es producto de su construcción. El intuicionismo propone que el platonismo y el formalismo se buscan fundamentar en una base ya existente; en el caso del platonismo reduciéndose a la lógica y en el caso del formalismo mediante una demostración de consistencia. El intuicionismo es fundado por Brower, quien en 1907 presenta su tesis doctoral con título “Sobre los fundamentos de la matemática”, donde se inicia la labor de construcción intuicionista de las matemáticas.

Brower concibe, en su filosofía matemática, un principio básico de su visión sobre la matemática, que nombra el *acto primero* del intuicionismo, donde se separa totalmente la matemática del lenguaje matemático y por consiguiente de los fenómenos del lenguaje abarcados en la lógica teórica, conociendo que la matemática en sentido intuicionista es una actividad de la mente, carente de lenguaje en su esencia, con origen en la percepción del movimiento del tiempo. Este acto primero separa a la matemática de la lógica y el lenguaje –un ejemplo de esto sería la distinción o separación de las relaciones entre objetos matemáticos y las relaciones lógicas entre los signos que las simbolizan–, esto debido a que deben separarse los objetos matemáticos de su consistencia, por ser la consistencia derivada de la lógica y la matemática ser una cuestión de existencia; esto ya afirmado por preintuicionistas.

Para acentuar su división, y notar su diferencia, se puede observar las contradicciones que Brower les adjudica: la contradicción lógica es un hecho lingüístico, mientras la contradicción matemática es la imposibilidad de efectuar una construcción. “La existencia de un objeto matemático está dada por la posibilidad de su construcción mental, y de esta manera la separación de matemática y lenguaje lleva al intuicionismo a una forma de constructivismo” (Oostra, 2009, p. 12). La existencia de un objeto matemático se concibe porque es posible construirlo en la mente, por lo que la separación de lenguaje y matemática lleva al intuicionismo al constructivismo.

En el sentido de Brouwer, el intuicionismo no tiene la misma noción de intuición como comúnmente se entiende, no significa la aprehensión o comprensión de cosas de manera inmediata, no es un instinto o la habilidad de enfocar y encontrar cosas autoevidentes. El sentido que Brower da a la intuición es ya un término técnico en su filosofía y matemáticas, pero que surge de una coincidencia de su variabilidad de acepciones de la intuición en donde se puede comprender a la matemática como anterior o independiente del pensamiento deductivo, por lo tanto de la lógica. En ese contexto del primer acto del intuicionismo de Brouwer, aparece la pregunta sobre la verdad en las matemáticas intuicionistas.

Para Brouwer lo único que define la verdad es la mente, por lo que una proposición matemática se hace verdadera cuando el sujeto intuye de manera experiencial su verdad con su construcción mental correcta; una falsedad, entonces, es una proposición matemática de la cual es imposible su construcción mental. Por lo que Brouwer afirma que no hay verdades no experimentadas. Esto tiene consecuencias lógicas, que transforman la interpretación de la lógica tradicional, a una nueva adaptación que el intuicionismo da con una nueva lectura de esta.

Tabla 6

Lógica intuicionista

Conector o principio	Interpretación intuicionista
∨ (o)	Una disyunción entre dos proposiciones es verdadera si puede construirse alguna de las dos.
∧ (y)	Es verdadera una conjunción cuando se pueden construir ambas proposiciones conjugadas.
→(implica)	Si una proposición implica otra es porque la construcción de la antecedente puede ser (hacerse del) del consecuente.
¬ (Negación)	En el intuicionismo negar una proposición es estudiar que su construcción es imposible. De su afirmación puede construirse un absurdo.
¬(¬P) (Doble negación)	En el intuicionismo se rechaza la doble negación, pues de la sentencia negada se construye un absurdo.
(P∨¬P) (Tercero excluido)	El intuicionismo rechaza el principio del tercero excluido porque afirmar que una sentencia o su negación es verdadera, es en el intuicionismo, que ya se tiene una construcción de la sentencia o su negación.

Nota. Esta tabla es una adecuación de la información que se encuentra en Oostra, A. (2009). La matemática intuicionista y sus conexiones con el pensamiento de Peirce. Cuadernos de Sistemática Peirceana, 1(Nomos), p. 14-15.

La consecuencia del absurdo de los principios de doble negación y tercero excluido en la lógica intuicionista provocan el desplazamiento de la herramienta preferida de la matemática clásica, que es el método de reducción al absurdo, por lo que todo resultado que haya sido probado por reducción al absurdo, en la matemática intuicionista ya no es válido. Aún de lo anterior, se conserva la reducción al absurdo débil: esto es que si un enunciado conduce al absurdo se puede concluir su negación. La reconocida precisión de la lógica intuicionista se abrió paso en las matemáticas y tiene hasta el día de hoy gran reconocimiento.

El *segundo acto* del intuicionismo es importante para separar y comparar el platonismo de Gödel, con el intuicionismo de Brouwer. En este segundo acto, Brouwer afirma que los entes matemáticos se crean, y propone que hay dos formas para crearlos. La primera forma es la forma en sucesiones infinitas[11] que se dan casi libremente, la segunda forma es en especies matemáticas adquiridas con anterioridad que si se cumplen para un ente matemático se cumplen para todos los entes matemáticos que han sido definidos como iguales. En términos actuales, esto es que se supone la estabilidad matemática y existencia por sucesiones y por relaciones de equivalencia[12].

Ahora se tiene en cuenta el intuicionismo de Brouwer y sus similitudes con lo que se piensa comúnmente de la intuición, puesto que entre la intuición, la intuición matemática, la intuición del intuicionismo y el intuicionismo no hay familiaridad, sólo similitudes con base en un entendido de la palabra. Aún de esto, es importante hacer la comparación de esta nombrada intuición en la matemática, y observar cuál es su papel en Gödel, sabiendo diferenciar cada similitud que se le pueda atribuir, para no confundir lo que quiso decir Gödel, o lo que pretendió con su postura filosófica de las matemáticas, recordando que le atribuye a la intuición la certeza de las matemáticas.

Para Gödel, que la matemática sea inagotable supone que se pueden generar axiomas nuevos de manera constante, lo que quiere decir que la mente no es estática, está desarrollándose a cada momento. El ejemplo de lo anterior es que: si se considera la serie infinita del *axioma del infinito*,[13] cada paso en la teoría de conjuntos implica que cada axioma expresa una nueva idea o intuición, cosa que sucede también con los términos o conceptos primitivos.[14] Para Gödel, de la teoría de conjuntos en menester aritmético, es sabido que no se tiene una intuición clara del universo de la teoría de conjuntos, se tiene un conocimiento general de los números naturales, pero no una claridad absoluta del universo aritmético (Peña Páez, 2021, p. 4).La idea de intuición

---

[11] Un ejemplo de sucesión infinita es $a_n=2n$ donde $a_1=2(1)=2$ es su primer término y $a_2=2(2)=4$ es su segundo término, entonces sus primeros cinco términos son 2, 4, 6, 8, 10… , 2n (que es el término general). Por lo que se puede saber que es la sucesión de los números pares, una sucesión infinita.

[12] "Una relación binaria es una relación de equivalencia si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva. [...] si *R* es una relación de equivalencia, debe cumplir las siguientes propiedades: Es reflexiva: $\forall x \in A, (x,x) \in R$. Es simétrica: $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$. Es transitiva: $[(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R] \rightarrow (x,z) \in R$. Observe que las dos primeras no tienen el cuantificador "para todo" simbolizado por ∀, no es una obligación que deba cumplirse para todo los elementos de *A*, excepto la primera, la relación reflexiva. Por su reflexividad, implica que el dominio de *R* es el mismo conjunto *A* lo que implica que la relación de equivalencia tenga como dominio al conjunto *A*". Consultado en https://ciencias-basicas.com/matematica/superior/relaciones-matematicas/relacion-de-equivalencia/.

[13] En la Teoría de conjuntos axiomática, las matemáticas y filosofía de las matemáticas que la tienen en cuenta, existe el axioma que es nombrado como axioma infinito, y es uno de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo, este axioma dice: "Existe un conjunto dedekin-infinito", por lo tanto que contiene todos los números naturales. Este axioma permite construir conjuntos infinitos.

[14] Estos son conceptos geométricos que no se definen del todo o claramente, son ideas formadas en la mente, entidades formales y no empíricas, pero que se abstraen de la observación del entorno quitando toda cualidad y cantidad, para dejar sólo la idea o forma. En geometría euclidiana pueden ser el *espacio*, la *línea* y el *punto*.

en Gödel está presente en la constitución de la teoría de conjuntos, pero diferente a la prueba formal, como se puede entender directamente de uno de sus ensayos que menciona lo siguiente:

> Todo intento formalista de interpretar la matemática está destinado al fracaso, pues olvida que ha de ser nuestra intuición matemática la que nos sirva de guía en la construcción de los sistemas formales, que deben dar cuenta precisa de aquellos conceptos objetivos, mientras que tal intuición no puede reemplazarse por ningún tipo de prueba de consistencia, o por ningún otro recurso similar interpretado de forma 'reductiva' (Peña Páez citando a Gödel, 2021, p. 5).

La intuición matemática en Gödel requiere del conocimiento de las matemáticas, no es algo inmediato como pudiera entenderse y tampoco se reduce al formalismo. Esta intuición se cultiva mediante la experiencia matemática y observacional de ideas; la intuición es una idea sugerente de uso matemático, son "sugerencias plausibles que aparecen después de la experiencia con el uso de algún sistema axiomático" (Peña Páez, 2021, p. 5). Peña Paez (2021, p. 5) adjudica a Hallett la comprensión de la intuición matemática a la que se refiere Gödel, dada no como una piedra de toque de la verdad en la adquisición de nuevos principios matemáticos, sino como una deliberación reflexiva aprehendida por la experiencia matemática.

Con los conocimientos en matemáticas y la experiencia en estos mismos se obtiene la intuición matemática, que se puede desarrollar en mayor o menor medida según sea la experiencia o capacidad reflexiva de quien esté acudiendo a esta intuición, que es más bien ejercicio de intuición y una captación inmediata. Mediante el ejercicio intuitivo se pueden observar proposiciones matemáticas verdaderas. Gödel dice que no se hace análisis de una intuición para tener una prueba, es mediante la intuición que se observa algo que aún no tiene prueba, se describe lo que se observa de aquellas cosas que por ser ulteriores no se pueden analizar; lo que tiene la proposición es mera intuición de los objetos a los que refiere y si se deja de lado la formulación de palabras se observa de alguna manera (Peña Páez, 2021, p. 6).

> Puede notarse que la intuición matemática no necesita ser concebida como una facultad que proporciona un conocimiento inmediato de los objetos en cuestión. Más bien parece que, como en el caso de la experiencia física, formamos nuestras ideas también de esos objetos sobre la base de otra cosa que se da de inmediato. Solo que este algo no es, o no principalmente, las sensaciones (Peña Paez citando a Gödel, 2021, p. 6).

No son las sensaciones sensibles e inmediatas las que deducen una idea a considerar, ni las que vienen de los objetos físicos que se abstraen de forma empírica, la intuición a la que se refiere Gödel se encuentra en la relación entre la forma de los objetos y el concepto de conjunto matemático, como propone Hallett según Peña Paez (2021, p. 6).

Gödel invita a revisar a Husserl y su fenomenología para sugerir la manera en que se puede tener conocimiento de los conceptos abstractos, en este afán de atender la intuición matemática a la que se quiere referir, pero Hao Wang encuentra incompleta e insatisfactoria su referencia a la fenomenología, que trata un ideal de el acercarse a la fenomenología para descubrir los axiomas en los conceptos primitivos de la filosofía; también asegura Hao Wang que no existen ejemplos exitosos de ese método para descubrir axiomas definitivos. Aún de esto, Gödel advierte que la fenomenología trae de regreso a los fundamentos del conocimiento y desde el interior humano, al mismo proceso de cómo se forman esos conceptos.

Gödel en la tarea de aclarar la intuición a la que se quiere referir –de donde procede el conocimiento de los conceptos abstractos–, también está de acuerdo con la concepción kantiana de las matemáticas, en el entender que unos axiomas nuevos pueden ser independientes de manera lógica de unos axiomas iniciales, teniendo sus precauciones y diferencias; el ejemplo está en que para kant la derivación de teoremas geométricos necesitan nuevas intuiciones geométricas, ahí es donde Gödel ve en ello una falsedad, pero que sería correcto en el caso de cambiarse los términos “geométricos” y “geométricas”, por matemáticos y matemáticas. Esto demuestra que hay diferencia entre la intuición kantiana y la gödeliana.

> La intuición kantiana puede implicar tal conocimiento (el conocimiento a priori) porque su mera introducción reproduce las operaciones a través de las cuales nosotros imponemos las formas de espacio y tiempo sobre los objetos y a través de las cuales hemos también individualizado aquellos objetos. En otras palabras, podemos anticipar intuitivamente la aplicabilidad de aquellas formas de experiencia porque nosotros mismos las hemos proyectado a los objetos [...]. De acuerdo con Kant, el uso de intuiciones a priori no es como percibir un objeto; es como introducir una representación para algún objeto particular desconocido en anticipación de cualquier conocimiento perceptual. Esto se encuentra en agudo contraste con Gödel, para quien la intuición podría acceder a una realidad independiente de la mente (Cardona Suárez citando a Hintikka, 2002, p. 36).

Gödel al igual que Kant, afirma que no existe la intuición inmediata de los objetos, ni en lo sensorial, ni en la matemática, sin importar su procedencia, ya sea empírica o abstracta. La formación de ideas resulta de un proceso que requiere abstracción u observación a priori que supere lo captado de manera sensorial, ya que estas mismas sensaciones están agrupadas para su entendimiento en conceptos, como el concepto general de *objeto*.

> [...] para conocer y entender objetos concretos como discretos o unificados, es decir, enmarcados bajo los conceptos, fue necesaria la síntesis de las sensaciones a través de ideas abstractas como objeto o unidad. Puede entenderse la intuición como la 'matemática dada'. Es decir, se compara no sólo con la sensación sino con lo que se agrega para formar objetos empíricos. Para Gödel, el concepto de conjunto cumple la función de sintetizar o generar unidades. Por tanto, la intuición matemática de los objetos básicos, 'aparece' luego del procesamiento abstracto de la sensación dada en la experiencia (Peña Páez, 2021, p. 6).

En el entendido que, para Gödel la intuición matemática no concede un conocimiento inmediato, se comprende ahora que mediante la reflexión y la práctica se tiene este instrumento que puede intuir ideas sobre la base de algo dado, pero ese algo no es la idea o su reflexión, que en el caso de la intuición matemática no puede provenir de las sensaciones, por lo que ese algo dado en las matemáticas está en relación con los objetos abstractos que contiene la idea de algo empírico; esto significa que se encuentra en el medio, entre el sujeto y el contexto, por lo que para Gödel, la intuición no es concretamente conocimiento.

Es aquí donde se encuentra el platonismo y también el entendido de Aristóteles sobre la intuición de los objetos matemáticos platónicos, muy parecido al de él: "Aristóteles responde, repetidas veces y de manera muy clara: Platón, quien admite dos tipos de sustancia inteligible, es decir, las Ideas y los objetos matemáticos, situados éstos entre las Ideas y las cosas sensibles" (Cattanei, 2000, p. 10), en un tipo de *realismo* que, dota de realidad existente a los objetos matemáticos entre lo sensible y la idea, por lo que la intuición es este proceso intermedio que los reflexiona en un sentido existencial y de cualidad real, objetos presentes en la realidad, como es visto en Platón, por lo que en este sentir los objetos matemáticos existen, pero no en el plano sensible, sino que se descubren en esta intuición intermedia. Aristoteles tenía una idea similar, de la siguiente manera:

> Por lo demás, si existen las *realidades matemáticas*, necesariamente han de existir o en las cosas sensibles como algunos dicen, o separadas de las cosas sensibles (esto lo dicen también algunos);

> y si ni lo uno ni lo otro, o bien, no existen, o bien existen de otro modo. [...]
>
> Los objetos matemáticos no tienen existencia actual en los cuerpos sensibles, y tampoco separados de ellos.
>
> [...] ni son entidades en mayor grado que los cuerpos, ni son anteriores a las cosas sensibles en el ser, sino sólo en la definición, ni pueden existir separadas en modo alguno. Y puesto que tampoco es posible que sean en las cosas sensibles, es evidente que o no son, sin más, o no son en cierto modo y, por tanto, no son en el sentido absoluto del término (Aristóteles, 2014, p. 416).

Se encuentran en este sentido Gödel, Platón y Aristoteles, en la observación de los objetos matemáticos fuera de los accidentes de lo sensible, pero en un plano intermedio hacia las ideas, con una forma de ser ideas intermedias, pero existentes en el sentido de Platón, universales, y en sentido aristotélico como ideas particulares no en mayor grado o importancia que los cuerpos, ni anteriores a las cosas, sino atadas a las cosas. Ahí hay una diferencia marcada entre el platonismo y Aristóteles. Pero sin duda que, si se ocuparan del mismo término que Gödel, los tres filósofos de las matemáticas, tal vez, coincidirían en su ejercicio intermedio, lo que es intuición en Gödel.

En el caso de que el formalismo de Hilbert se hubiera logrado, la intuición matemática seguiría existiendo como el saber sobre la configuración de símbolos, reglas y mecánicas que captan la consistencia matemática en cuestión, por lo que se sigue asimilando que la intuición matemática es dada por la práctica y el conocimiento matemático, esto asimilado entre la mente, los signos y la idea de lo que se quiere resolver, un hecho psicológico y mecanicista, pero por la naturaleza matemática afirmada por los teoremas de Gödel, no es posible verla de tal manera. Los seguidores de Brouwer tampoco ponen en duda esta intuición matemática, pero la observan como un hecho psicológico que tiene la capacidad de abarcar los axiomas de la matemática clásica.

Gödel es más que nada reconocido por ser un realista matemático, que observa los objetos de la teoría de conjuntos como objetos tan palpables como los físicos, pero que sólo pueden ser percibidos por la intuición, por el hecho intelectual de que los axiomas mismos forzan al matemático a aceptar su veracidad. Esta facultad semejante a la percepción sensorial con la que se captan los objetos sensibles, se dirige con esta percepción abstracta hacia las ideas abstractas, sin desconfianza alguna en estos objetos matemáticos. Gödel no hace primordial este carácter empírico de la percepción hacia los objetos empíricos, sino que reubica a la ciencia empírica como intuitiva de los objetos, como el del matemático hacia los objetos matemáticos. Lo que coloca, en la comprensión de Gödel, a la ciencia empírica como intuitiva o más parecida al arte en el sentido creativo y descubridor de los objetos de manera intuitiva e intelectual.

Xavier Zubiri considera y adopta la posición de Gödel, comprendiendo que frente al *positivismo lógico* la existencia de proposiciones indecidibles de la matemática no son creaciones del matemático, de la mente de alguien, y más bien se encuentran en algún tipo de forma de *realismo*, primitivo en Gödel, pero que da influencia en alguien como Zubiri para que su estudio pueda tener continuidad. Para Gödel hay tres alternativas que se presentan, estas son: *aristotelismo* que, menciona a los objetos matemáticos dentro de la naturaleza; el *psicologismo* que, propone a los objetos matemáticos como creaciones de la mente humana; y el *platonismo* que, rechaza el aristotelismo porque no puede explicar los conceptos matemáticos abstractos que no son captados por los sentidos, también rechaza el psicologismo porque niega el conocimiento matemático (que se puedan descubrir las matemáticas como algo nuevo, fuera de nuestra mente). Así, Gödel se entiende más en el *realismo platónico*.

El realismo platónico de Gödel describe una realidad no sensible que es independiente de los actos y disposiciones de la mente humana, pero que al mismo tiempo es percibida por esta, probablemente de forma incompleta, lo que sería la razón de que las proposiciones indecidibles reflejan la ignorancia intrínseca de la conciencia de lo creado. Existe aún la opción en Gödel de que se deba a error en los cálculos y con el desarrollo matemático se pudiera resolver el ignorar las partes no sensibles de la realidad. Para Zubiri, el teorema de incompletitud de Gödel implica el realismo matemático.

> De éste se sigue ‘la anterioridad de lo real sobre lo verdadero en la matemática’. Los postulados no son meros enunciados lógicos sino caracteres del ‘contenido’ de la ‘realidad’ de lo postulado; enuncian la ‘verdad real’ de lo postulado. ‘Lo construido en ‘la realidad’ es, por estar realizado, algo más que lo postulado al realizarlo’. No es cosa real en y por sí mismo como esta piedra, pero no es sólo lo que lo ‘real sería’, sino lo que postulada y construidamente ‘es real’. El objeto matemático es realidad construida ‘según conceptos’ dentro del momento ‘físico’ de la formalidad de realidad sentida. Puede tener propiedades ‘suyas’, ‘propias’, dadas y no concebidas (Díaz Muñoz con citas de Zubiri, 2001, p. 20).

El realismo constructivo de Zubiri es otra perspectiva que surge de los teoremas de incompletitud de Gödel, y parece, a la par del pensamiento de Gödel, tratar esta temática de la realidad matemática en la distinción entre realidad y contenido de la inteligencia sintiente que muestra la inherencia de imposición de realidad y la libre construcción (creatividad matemática). Esta propuesta zubiriana, se encuentra más en relación con Gödel, que del realismo platónico según Díaz Muñoz. Pues se entiende mejor la intuición constructiva de Zubiri en un realismo constructivo, que la intuición descubridora del realismo platónico que se adjudica a Gödel. La postura de Zubiri "[..] es un modo de impresión y no proporciona al matemático el objeto entero sino algo a partir de lo cual formamos los objetos matemáticos. Así, se observa el acercamiento a lo que Zubiri denomina *aprehensión primordial de realidad*" (Díaz Muñoz, 2001, p. 20).

Gödel obteniendo en sus teoremas proposiciones matemáticas indecidibles, prueba que tenemos alguna percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como la aceptación de que existen axiomas que son verdaderos pero no son justamente comprobables, así que estos axiomas están anclados a algo que les da verdad, pues nos obligan a aceptarlos como verdaderos. Es por tal que, la intuición matemática no es una facultad que proceda hacia conocimientos inmediatos de los objetos matemáticos, sino la intuición es el conocimiento y experiencia matemática que es piedra de toque del realismo matemático. En algunos casos, Gödel para declarar la "intuición" llega a expresar "impresión", tal cual como convendría más a Zubiri. El traer a Zubiri sólo es simple información para aclarar más la tendencia platónica realista de Gödel, no para abarcar más sobre Zubiri. Ahora se tiene la perspectiva de un claro realismo platónico de las matemáticas en Gödel, que se defiende frente a otras posturas y argumentaciones que puedan refutarlo o parecerse.

4.3.5 Espacio Temporalidad

En el platonismo matemático de Gödel, los objetos del mundo sensible y su existencia objetiva son una réplica de la existencia ideal de los objetos matemáticos, por lo que se ve en la necesidad de elaborar su respuesta al programa formalista de Hilbert, pero se encuentra en el menester de abarcar lo que es esa percepción de dichas entidades abstractas, por lo que hasta ahora el problema sigue siendo confuso, aún siendo más explícitos de la postura de Gödel, puesto que la intuición sólo podría ser un recurso que salva por un momento el desconocimiento de las razones de los objetos matemáticos y las limitaciones con las que se encuentra el matemático a la hora de analizarlos en el ejercicio de salvar la razón de la teorización pura del conocimiento de los objetos abstractos en las matemáticas. Este reconocimiento de los objetos matemáticos es el intento por parte de Gödel de refutar la primera premisa del argumento de Benacerraf, que vers: “los seres humanos no pueden obtener conocimiento de objetos que existen fuera del espacio y el tiempo” (Balaguer, 1994, p. 132).

En el argumento de Benacerraf contra el platonismo matemático, si se refuta la primera premisa se invalidan las demás premisas, pero no es una premisa que sea refutable del todo, puesto que nadie puede saber si el ser humano es sólo espacio-temporal. Pero el planteamiento del conocimiento de los objetos matemáticos desde una perspectiva del realismo platónico que refuta la perspectiva formalista de las matemáticas, se tiene el entendido de que existe una realidad fuera de lo espacio-temporal, que aún no es visible del todo pero tiene la prueba de que existen verdades que no pueden ser probadas; es la importancia de los teoremas de Gödel en el asunto. Hasta ahora sólo se puede adoptar una u otra postura, según la métrica de Gödel, que sería la parte escéptica de la cual no se puede realizar nada más que mera observación científica en términos de empirismo, y la otra que se dirige hacia las preguntas esenciales que crean la ciencia dirigida a lo absoluto de la verdad científica. En este razonamiento de Gödel, queda claro cuál es, a su parecer, el camino que limita el conocimiento de la realidad.

Lo que dicen las siguientes dos premisas de Benacerraf es: “[...] si hay objetos matemáticos abstractos, ellos existen por fuera del espacio-tiempo; y aplicando la teoría causal del conocimiento: si existen objetos matemáticos abstractos, los seres humanos no podrían tener conocimiento de ellos” (Cardona Suárez citando a Benacerraf, 2002, p. 40), por lo que la existencia no únicamente espacio-temporal de la humanidad también tiene consecuencia en el conocimiento de los objetos matemáticos no espacio-temporales, como deduce Gödel. Estos objetos no dependientes del tiempo y del espacio, como son los objetos matemáticos, se traen a nosotros mediante la intuición, no en un plano psicológico, puesto que como se mencionaba con Zubiri, no podría mostrarse de algo cerrado en sí mismo algo nuevo que no conocemos, así que los objetos son extrasensoriales y extramentales, un realismo platónico gödeliano de las matemáticas que toma por existentes tanto como los objetos sensibles, como los objetos matemáticos.

> Sabemos que muchas proposiciones generales acerca de los números naturales son verdaderas (dos más dos es cuatro, hay infinita cantidad de números primos, etc.) y, por ejemplo, creemos que la conjetura de Goldbach tiene sentido, debe ser verdadera o falsa, sin que haya espacio para alguna convención arbitraria. De ahí que debe haber hechos objetivos acerca de los números naturales. Pero estos hechos objetivos deben referir a objetos que deben ser diferentes de los objetos físicos pues, entre otras cosas, son inmodificables en el tiempo (Wang, 1996, p. 211).

Estos objetos matemáticos que son los números naturales, pueden presentarse en sentido del tiempo, pero el tiempo no los modifica ni se encuentran en él, son objetos ajenos a esta experiencia que es únicamente sensible en el espacio, donde no son aprehensibles ni sensibles, sólo intuitivos, y las proposiciones que se tienen acerca de estos números naturales son verdaderas sin prueba, más que en los mismos números naturales. Así que frente a Goldbach, los números naturales son un misterio de la existencia y frente a Gödel son objetos tangibles en la experiencia de la intuición del conocimiento matemático, y estos se descubren como cualquier otro objeto sensible.

4.4 La Inteligencia de las Máquinas

En 1951, Gödel ofreció una conferencia en una reunión de la Sociedad Americana de matemáticas, titulada "Algunos teoremas básicos en los fundamentos de las matemáticas y sus implicaciones", en donde muestra unos resultados lógicos relacionados con la inexhaustibilidad o incompletabilidad de las matemáticas. Gödel prueba a través de dichos resultados su panorama de las matemáticas, con respaldo de los teoremas de incompletitud demostrados, y tales reflexiones se tornan en el siguiente par de pasos: El primer paso define que en un sistema consistente cualquiera hay problemas diofánticos[15] y que no son decidibles las reglas y axiomas que conforman su sistema.

[15] El análisis diofántico, en matemáticas, se encuentra en la *Teoría de números* y se encarga de solucionar ecuaciones algebráicas con dos o más incógnitas. En estos análisis se intenta descubrir si el problema tiene o no tiene solución y si tiene un número finito o infinito de soluciones. "Gödel define los problemas diofánticos en los siguientes términos: Sea $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ un polinomio con coeficientes enteros dados y $n + m$ variables tales que las variables x_i son desconocidas, y las variables y_i operan como parámetros, un problema diofántico se puede plantear en los siguientes términos: ¿tiene la ecuación $P = 0$ soluciones enteras para cualesquiera valores enteros de los parámetros, o hay valores enteros de los parámetros para los cuales esta ecuación no tiene soluciones enteras?" (Cardona Suárez, 2002, p. 42).

Lo anterior quiere decir que, si se tiene un sistema definido es posible listar los axiomas en un sistema formal concreto y si se trata de un número infinito de axiomas, se puede proceder bajo un sistema finitista para listarlos en orden. Se debe poder escribir las conclusiones alcanzadas por las reglas de inferencia, a partir de las premisas dadas, o en otro caso determinar que no existe conclusión inmediata de dichas reglas de inferencia. La finalidad de lo anterior es el requisito de que las reglas y los axiomas puedan solucionarse como una máquina de Turing, es decir un sistema finitista que los pruebe.

El segundo paso acude a la pregunta por la consistencia de un sistema ya definido de axiomas y reglas de inferencia y su posibilidad de contener la matemática; esta cuestión es posible con una gödelización, lo que es transformar una cuestión teórica a números. Cuando se tiene la traducción gödeliana, se puede presentar que la proposición que rotula la consistencia del sistema, puesta en números, es indemostrable a partir de los axiomas definidos en el mismo sistema y sus reglas, pero estos mismos axiomas y reglas sí pueden ser consistentes y útiles para derivar una parte de la aritmética finitista.

> Nadie puede construir un sistema formal y afirmar con sentido que él percibe con certeza matemática que los axiomas y reglas son correctos y creer que contiene todas las matemáticas. Si alguien afirma esto, debe reconocer también que percibe la consistencia del sistema. Ahora bien, dado que la consistencia no es demostrable con las herramientas del sistema, esta persona afirma percibir la verdad de algo que no puede ser probado en el mismo y por esa razón debe abandonar la pretensión de que el sistema contenga toda la matemática (Cardona Suárez, 2002, p. 42).

El sentido de la expresión “toda la matemática” puede ser muy ambigüo y por lo tanto no tiene una respuesta única o solución concreta, pero en cuanto se trata de contenerla en un sistema definido de axiomas correctos y reglas formales, la matemática en su sentido objetivo que habla de todas las proposiciones verdaderas en sentido absoluto, no puede ser contenida en ningún sistema, tanto que el sistema no podría demostrar la consistencia de sí mismo.

El sentido subjetivo de “toda la matemática”, o matemática subjetiva, se refiere a que todas las proposiciones puedan ser demostrables y estar contenidas en el sistema; un sistema con regla finita y axiomas evidentes, pero donde no se puede contener la intuición matemática, cosa que va más allá de un sistema de reglas finito. Si un sistema finito de reglas pudiera tener intuición matemática podría demostrar la consistencia de sí mismo, pero esto va más allá de las reglas o la forma de los sistemas, y si por alguna cosa tal regla pudiera ser existente no podría ser conocida la matemática de forma segura y general, sólo se podría vislumbrar la verdad de una proposición tras otra con una cantidad finita de proposiciones.

Para Gödel (1995, p. 134), de esta última observación sobre la matemática subjetiva, se tendría que admitir que, en ese caso de ser la mente humana una máquina finita, esta no tendría la capacidad de conocer su funcionamiento. Las limitaciones de una máquina finita, tendrían la imposibilidad de abstraer y comprender la matemática objetiva, por lo que esta le sería una cuestión incompletable por no estar dentro de un sistema axiomático concreto y tendría problemas diofánticos imposibles de resolver. La mente humana, vista como una máquina finita en un sistema de matemáticas subjetivas tendría problemas diofánticos irresolubles, ninguna prueba en la mente humana podría concebir o intuir resolución de estos.

Esto conduce a un dilema observado por Gödel (1995, p. 134-136): las matemáticas pueden ser incompletables o inagotables porque sus axiomas evidentes no pueden comprenderse en una regla finita (lo que pone el lugar de la mente humana sobre la potencia de las máquinas finitas), o en la matemática existen problemas diofánticos que nunca podrán solucionarse. Gödel, tampoco excluye la opción de que ambas premisas existan simultáneamente, lo que es una tercera vía de comprensión. La primera premisa coloca la inteligencia humana, no únicamente en el cerebro el cual puede ser una máquina finita parte de algo que le da inteligencia o intuición o mayor cognición, y la segunda premisa se opone a la creencia de que las matemáticas son creación humana, pues cualquier construcción mental en términos de ser finita puede resolverse dentro del sistema finito. El argumento central de la conferencia de Gödel se resume de la siguiente manera, tomando la idea de Cardona Suárez (2002, p. 45 y 47):

1. Si la inteligencia humana se redujera a una máquina de Turing (finita) espacio-temporal, sólo podrían observarse como verdaderos los teoremas construidos en la misma máquina. Por lo que, existen tareas que una máquina de Turing no puede realizar, como demostrar su propia consistencia.
2. La inteligencia humana puede reconocer verdades que no puede construir una máquina de Turing finita, pues esta sólo reproduce como una mimesis fragmentos de las verdades que la inteligencia humana puede intuir por completo. Por esto, la inteligencia humana adelanta tales tareas de conocimiento sobre un objeto

existente, por lo que podemos reconocer la consistencia de un sistema al poder explorarlo fuera del mismo sistema, lo que es visto como intuición, en este caso matemática.

3. Luego, entonces, la inteligencia no es espacio-temporal, por lo tanto no es una máquina de Turing.

Como es visto, estas proposiciones de Gödel son encaminadas tanto a la cuestión matemática, como a la existencial, pero también a la de la inteligencia por parte de las máquinas, tan siquiera en el sentido matemático, por lo que el tema se llega a comparar a menudo en los debates sobre la inteligencia del cerebro humano en la comparación con las máquinas, computadoras o inteligencias artificiales. Lo anterior, de manera sencilla se puede analogar para un ejemplo con una calculadora, pues en la actualidad las calculadoras están construidas con directivas de funcionamiento, que equivalen a instrucciones que son reglas fijas de deducción lógica de un procedimiento axiomático formalizado. Estas calculadoras, contestan a los problemas introducidos, operando por pasos establecidos, que a la vez están controlados por las directivas tecleadas en estas (Nagel & Newman, 2007, p. 48).

Gödel demostró en su teorema de incompletitud que, muchos problemas de la *teoría elemental de números* se encuentran fuera del panorama de un método axiomático fijo y que las mencionadas máquinas calculadoras (máquinas finitas de Turing), son incapaces de resolver, aun estas se encuentren bien dotadas de mecanismos ordenadores. Se pudiera construir una máquina dado un problema específico para resolver, pero no podría construirse una máquina que resuelva todos los problemas de dicha teoría, o de la matemática en general. En cambio, el cerebro puede tener limitaciones y pudiera no poder resolver algunos problemas matemáticos, pero lo que es sabido hasta ahora, o intuido, es que la inteligencia humana tiene una estructura de operación más intrincada y misteriosa que la de las máquinas.

Lo anterior y las demás afirmaciones de Gödel no han sido exploradas con rigurosidad o con una finalidad más allá de la curiosidad filosófica, se han explorado más otras corrientes de la filosofía de las matemáticas, como el formalismo o el intuicionismo por su practicidad computacional o rigurosidad formal o lógica, pero es claro que su estudio trasciende de manera filosófica y existencial la naturaleza de las matemáticas y hasta del intelecto. Estas proposiciones prueban que la postura formalista de Hilbert se inicia para encontrar una prueba absoluta de consistencia de un sistema de deducción finitista, esto aunque no es imposible desde el punto de vista lógico, es improbable que se dé en algún momento.

Gödel también afirma que existe un número infinito de proposiciones aritméticas verdaderas que no se pueden deducir mediante un sistema formal establecido por unos axiomas dados con un conjunto de reglas de deducción conocidas de manera completa o cerrada. De esto se deduce el ejemplo donde se menciona que, un sistema axiomático que trate la teoría de números no agota el universo de la verdad aritmética. También, en el proceso de Gödel se descubre que lo que se conocía al momento como *proceso de prueba matemática* no debe agotar el recurso de un método axiomático formalizado, sino que:

> Un procedimiento axiomático formalizado se basa en un conjunto, inicialmente fijo y determinado, de axiomas y de reglas de transformación. Como la propia argumentación de Gödel señala, no es posible trazar ningún límite previo a la inventiva de los matemáticos en la ideación de nuevas reglas de prueba. Por consiguiente, no puede darse ninguna descripción definitiva de la forma lógica precisa de las demostraciones matemáticas válidas (Nagel & Newman, 2007, p. 47).

Por lo anterior, aún existe la interrogante de si pudiera existir una omnicomprensiva verdad matemática o lógica que defina con claridad resuelta la cuestión, o si como Gödel pretende, sólo se debe reconocer lo anterior como un realismo platónico filosófico no resuelto y complejo para examinarse de manera formal.

Los teoremas de Gödel son una invitación al estudio a profundidad de las matemáticas, para nada deben relacionarse con misticismo, escepticismo o idealización, pues como ya se sabe, se debe equilibrar la parte lógica y la parte del conocimiento para generar intuiciones correctas hacia el descubrimiento matemático, científico y filosófico. No debe tomarse como una imposibilidad de conocer verdades matemáticas o de otro tipo, de manera formal o tangible, o que no valga la pena realizar pruebas para su comprobación. Lo que hasta ahora se entiende de lo que explicó el lógico es que los recursos intelectuales no pueden ser formalizados de manera perfecta. Se siguen estudiando las posibilidades de nuevos principios de demostración. Lo interesante en Gödel es que demuestra que las proposiciones matemáticas que no pueden demostrarse por deducción formal partiendo de axiomas establecidos y concretos, pueden demostrarse con un método específico, nuevo e individual, o como en el caso de Gödel, un método informal de razonamiento lógico.

CONCLUSIÓN

La incompletitud aritmética a la que hace referencia Gödel es la comprobación dada de sus teoremas, donde demuestra que en cualquier sistema axiomático formalista se encuentran proposiciones aritméticas que son verdaderas pero no demostrables, o lo mismo que es, no deducibles dentro del mismo sistema. Esto corrompe la completitud y consistencia en que descansa cualquier sistema formalista, según David Hilbert; por lo que la matemática vuelve a carecer de construcción o formalidad, para recaer en la visión platonista de la matemática que defiende Gödel. Esta visión, de manera panorámica, intuye los objetos matemáticos y sus problemas como abstracciones de una realidad platónica, fuera de lo sensible, idea proveniente de la tradición clásica del platonismo, robustecida a la actualidad con la demostración de Gödel.

Esta demostración no se queda en la aritmética, abarca menesterosamente las matemáticas y no descansa ahí, pues plantea interrogantes filosóficas sobre el tratamiento epistemológico de la matemática como base científica, que es paradigmática para la creencia humana en la ciencia, donde algunos encuentran mayor razón en el materialismo científico, a la vez que otros en el idealismo científico. Estas posturas se mantienen siempre en diálogo y conflicto al mismo tiempo que son constructivas una de la otra, y según el resultado de lo investigado en Gödel y Poincaré, ambas son complementarias. En Poincaré son la esencia de la práctica matemática, científica y humana, mientras que en Gödel son la búsqueda de la verdad metafísica. Esto, por lo visto en la investigación, se acerca a lo que es un área tratante de la inteligencia humana, que descubre nuestra razón como observacional de sistemas complejos, lógicos y matemáticos, más allá de lo que una máquina finitista de Turing (una computadora física) puede ordenar o resolver (mucho menos comprender), por lo que sus consecuencias en el análisis y filosofía de la inteligencia y, por lo tanto del quehacer humano, se vienen intuyendo y encuentran un camino de investigación por esta parte.

El principio de la investigación encamina el texto a un recorrido filosófico de la práctica e investigación matemática donde se coloca al pensamiento, la lógica y las mismas matemáticas en el campo de la filosofía, como estudios inherentes y más que nada menesteres humanos que descubren la realidad en la observación racional, siendo herramientas para la filosofía al mismo tiempo que se sirven de esta para reconocerse, con el objeto de responder qué trae a nosotros ese orden de la lógica, esos objetos matemáticos y los problemas que nos proponen de esta manera, que ayudan a la organización del pensamiento filosófico, a la vez que necesitan el complemento lógico, formal, racional, platónico, intuitivo, etc. de las herramientas y áreas del conocimiento y del saber que van descubriendo su naturaleza y la de la inteligencia en sentido lógico, conocida como racional humana, que capta objetos, ordena y racionaliza magnitudes.

La figura de Gödel y su contexto ayudan a la comprensión del momento, para revivir de manera biográfica *la crisis de los fundamentos,* que reveló tan importantes sujetos en la filosofía de las matemáticas, su discusión, su filosofía y sus proyectos académicos dentro de las áreas que pudieron abarcar, sin lo cual no hubiera existido, probablemente, la comprobación de Gödel en ese momento. Este panorama gödeliano, filosóficamente fijado por el jovén lógico en el realismo platónico de las matemáticas, observa a los objetos matemáticos con tanta realidad como los objetos físicos, pero sin materializarlos en lo captado por lo sensible, intuidos en el intelecto o más bien fuera de él, en las ideas. Esto es una manera de invitación a la filosofía, a reavivar la histórica convivencia e inherencia de las matemáticas, la lógica y la mencionada filosofía. Es por eso que, Gödel es un paradigma en la filosofía tanto como Platón, Aristoteles o Kant. Kurt Gödel, un lógico y filósofo que, en su estudio de las matemáticas y el programa formalista del matemático más reconocido de la época, David Hilbert, comprueba que la matemática va más allá de signos en papel, y por lo tanto estas cuestiones inherentes sobre la matemática, la inteligencia, la lógica y la filosofía siguen reavivando el camino del saber y del conocimiento.

BIBLIOGRAFÍA

Alchourrón, C. E. (Ed.). (1995). *Lógica*. Trotta.

Alonso, E. (2007). *Sócrates en Viena: una biografía intelectual de Kurt Gödel*. Montesinos.

Aristóteles. (2014). *Protréptico: Metafísica* (C. S. Candel & M. Candel, Eds.). Gredos.

Balaguer, M. (1994). Platonismo pleno. *Análisis Filosófico*, *14*(SADAF), 131-148.

Beuchot, M. (1981). *El problema de los universales* (1st ed.). UNAM.

Bombal Gordón, F. (2013). David Hilbert: la búsqueda de la certidumbre. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *106*(1), 123-146.

Bridges, D. (1997, noviembre 18). *Constructive mathematics*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Retrieved enero 22, 2023, from https://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/mathematics-constructive/

Bridges, D., Palmgren, E., & Ishihara, H. (2018). *Constructive mathematics*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Retrieved 2023, from https://plato.stanford.edu/entries/mathematics-constructive/#Bib

Cardona Suárez, C. (2002, noviembre). Algunas consecuencias filosóficas del trabajo de Kurt Gödel. *DIÁNOIA*, *47*(UNAM), 23-50.

Cattanei, E. (2000). El problema del objeto de la matemática como sustancia inteligible en la Metafísica de Aristóteles. *ARETÉ*, *12*(UNICA), 5-27.

Contreras Oré, F. A. (2017). La axiomática. *Horizonte de la Ciencia*, *7*(FE/UNCP), 111-121.

Corry, L. (2002). David Hilbert y su filosofía empirista de la geometría. *Boletín de la Asociación matemática venezolana*, *9*(1), 27-43.

Díaz Muñoz, G. (2001). Aproximación del realismo matemático de Gödel al realismo constructivo de Zubiri. *The Xavier Zubiri Review*, *3*(CEI), 7-28.

Fernández de Castro, M. (2020). La constitución del programa de Hilbert. *RIDAA-UNQ*, *10*(2), 31-50. http://ridaa.unq.edu.ar/handle/20.500.11807/2396

Ferrater Mora, J. (1979). *Diccionario de filosofía*. Diccionario Ferrater Mora. Retrieved 2023, from https://www.diccionariodefilosofia.es/

Gödel, K. (1995). *Unpublished philosophical essays* (F. A. Rodríguez-Consuegra, Ed.). Birkhäuser Verlag.

Lluís Blasco, J. (1998). El positivismo lógico. In J. J. E. Gracia (Ed.), *Concepciones de la metafísica* (pp. 293-310). Editorial Trotta.

Madrid Casado, C. M. (2009, 2). Filosofía de las matemáticas: el cierre de la topología y la teoría del caos. *El Basilisco*, *41*(Permeso S. L.), 1-48. https://fgbueno.es/bas/bas24101.htm

Madrid Casado, C. M. (2017). *Hilbert: en busca de unos axiomas universales*. RBA.

Nagel, E., & Newman, J. R. (2007). *El Teorema de Gödel* (A. Martín, Trans.). Tecnos.

Oostra, A. (2009). La matemática intuicionista y sus conexiones con el pensamiento de Peirce. *Cuadernos de Sistemática Peirceana*, *1*(Nomos), 9-32.

Peña Páez, L. M. (2021). Filosofía de la matemática: la intuición en el pensamiento de Kurt Gödel. *Filosofía Unisinos*, *22*(2), 1-13. 10.4013/fsu.2021.222.06

Piñeiro, G. E. (2012). *Gödel: dos teoremas que revolucionaron las matemáticas*. RBA.

Poincaré, H. (1907). La intuición y la lógica en las matemáticas. *El Valor de la Ciencia*, 1-9.

Raitzin, C. (2014). Significado y alcance del teorema de Goedel. *Signos Universitarios*, *10*(20), 103-117. https://p3.usal.edu.ar/index.php/signos/article/download/2685/3304

Rescher, N. (2002). *Reductio ad absurdum*. Internet Encyclopedia of Philosophy. Retrieved enero 22, 2023, from https://iep.utm.edu/reductio/

Rodriguez-Consuegra, F. A. (Ed.). (2011). *Kurt Gödel: Unpublished Philosophical Essays*. Springer Basel AG.

Ruiz Zúñiga, Á. (2003). *Historia Y Filosofía de Las Matemáticas*. Euned.

Shapiro, S., & Kouri Kissel, T. (2000, septiembre 16). *Classical logic*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Retrieved enero 22, 2023, from https://plato.stanford.edu/cgi-bin/encyclopedia/archinfo.cgi

Solaeche Galera, M. C. (1995). La controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del infinito. *Divulgaciones Matemáticas*, *3*(1/2), 115-120.

Tamariz Mascarúa, Á. (2002). Los infinitos: el paraíso de cantor. *Ciencias*, *68*(UNAM), 66-77. https://lya.fciencias.unam.mx/tamariz/ainvestigacion/LosInfinitos.pdf

Torres Alcaraz, C. (1989). La filosofía y el programa de Hilbert. *Mathesis*, *5*(UNAM), 33-56. https://alejandro-garciadiego.com/wp-content/uploads/2022/05/3.Torres.Programa.Hilbert_compressed.pdf

Torres Alcaraz, C. (2009, noviembre). De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano. *Diánoia*, *54*(UNAM), 37-70.

Torreti, R. (1993). El método axiomático. In *La ciencia: estructura y desarrollo* (Trotta ed., Vol. 4, pp. 89-110). C. Unises Moulines.

Van Bendegem, J. P. (2002). *Finitism in Geometry*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Retrieved 2023, from https://plato.stanford.edu/entries/geometry-finitism/#Log

Wang, H. (1996). *A Logical Journey, from Gödel to Philosophy*. The MIT Press.

Xolocotzi Yáñez, Á. (2019). El impacto del problema de la representación (Vorstellung) en el inicio de la fenomenología husserliana. *Open Insight*, *10*(18), 159-184. https://www.redalyc.org/journal/4216/421660973009/html/