

ALGORITMO PARA DESARROLLAR PRONÓSTICOS AUTOMÁTICOS DE SERIES DE TIEMPO UNIVARIADAS. EL ÍNDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR DE MÉXICO¹

Eduardo Rosas Rojas^{2*} Jéssica Gámez Arroyo* Javier Lapa Guzmán* Christian Bucio Pacheco*

*Universidad Autónoma del Estado de México, Centro Universitario UAEM Valle de México.

ABSTRACT

The present study compares the accuracy of automatic univariate time series forecasting methods for the value of the National Consumer Price Index of Mexico, for which monthly data from 1969 to 2021 are used. Two of the main methods are presented in the study area: 1) The Exponential Smoothing State Spatial Models (ETS) and 2) The Autoregressive Integrated and Moving Average (ARIMA) models. A computational algorithm is developed for the identification of a data generating process to estimate the optimal parameters. The second method presents a better performance in the calculation of the predicted values. The results show the usefulness of automatic forecasting methods when proper procedures are followed.

KEYWORDS: ARIMA models; exponential smoothing; model comparison.

MSC: 37M10; 62P20.

RESUMEN

El presente estudio compara la precisión de los métodos automáticos de pronóstico de series de tiempo univariadas para el valor del Índice Nacional de Precios al Consumidor de México, para lo cual se utilizan datos mensuales de 1969 a 2021. Se presentan dos de los principales métodos en el área de estudio: 1) Los Modelos Espaciales de Estado de Suavizado Exponencial (ETS) y 2) Los modelos Autoregresivos Integrados y de Medias Móvil (ARIMA). Se desarrolla un algoritmo computacional para la identificación de un proceso de generación de datos para estimar los parámetros óptimos. El segundo método presenta un mejor desempeño en el cálculo de los valores pronosticados. Los resultados muestran la utilidad de los métodos automáticos de pronóstico cuando se siguen los procedimientos adecuados.

PALABRAS CLAVE: modelos ARIMA; suavizado exponencial; comparación de modelos.

1. INTRODUCCIÓN

La tarea de seleccionar el modelo óptimo para el pronóstico de series de tiempo univariadas ha sido tradicionalmente complicada, laboriosa, lenta y subjetiva. Su desarrollo requiere de un conocimiento experto, apoyado en procedimientos computacionales que permitan un ajuste adecuado del modelo respecto a la variable estudiada. A menudo la identificación de las tendencias, las variaciones estacionales, los cambios estructurales y algunos otros patrones del fenómeno darán como resultado la identificación de un modelo aceptable; pero, no necesariamente óptimo.

La disponibilidad de softwares estadísticos, para el desarrollo de pronósticos automáticos de series temporales, ha hecho que esta tarea sea más fácil, eficiente, rápida y objetiva, para lo cual se emplean criterios de información y medidas de error que permiten la estimación de pronósticos automáticos; por ejemplo, el procedimiento “*automatic ARIMA forecasting*” en E.views (Eviews 12, User Guide, parte II), el procedimiento “*ESM*” en SAS (SAS Institute 2020, Cap. 15) o los procedimientos, “*auto.arima*” o “*ets*” alojados en la librería “*forecast*” del software libre R-project. (Hyndman et al. 2019).

¹ Presented at 15th International Conference on Operations Research, Havana (Cuba) May 31 – June 3, 2022

² Corresponding author email: erosasr@uaemex.mx

En ausencia del predominio (teórico o empírico) de un “mejor método”, las competencias internacionales³ representan un mecanismo establecido, proveen evidencia objetiva sobre la precisión empírica *ex ante* de los métodos de pronóstico y orientan la elección racional entre algoritmos y metodologías para un conjunto de datos (Crone, 2011). Estos eventos han estimulado la discusión entre la comunidad académica, abriendo nuevas áreas de investigación (evaluación y selección de modelos) y han derivado en mejores prácticas sobre diseños experimentales.

En la competencia M3, fueron dos métodos los que generalmente superaron a todos los demás: el sistema experto de software ForecastPro que utiliza la selección automática y la parametrización para modelos de suavizado exponencial y los modelos ARIMA (Goodrich, 2000) y Theta, un enfoque de descomposición que combina suavizado exponencial y regresiones alrededor de una línea de tendencia amortiguada (Assimakopoulos y Nikolopoulos, 2000). Los modelos espaciales de estado de suavizado exponencial (denominados ETS) y los modelos autorregresivos, integrados y de medias móviles (ARIMA) funcionan de manera adecuada en comparación con otros métodos para pronosticar, debido a que se constituyen como técnicas sólidas y bien establecidas (Karlsson, 2021). Entre las principales conclusiones destacan: 1) Las características de una serie de datos son un factor importante en la determinación de los diferentes métodos; 2) la precisión de un método depende de la longitud del horizonte de pronóstico; 3) los métodos sofisticados no necesariamente proporcionan pronósticos más precisos si se les compara los métodos más simples.

En la competencia NN3 (Neural Network and Computational Intelligence 2007) se aplicaron ambos métodos a un conjunto de 111 series temporales empíricas, los resultados fueron superiores a los métodos más complejos, por ejemplo, la regresión generalizada de redes neuronales o los modelos de redes neuronales recurrentes. En particular, los modelos ARIMA estimados automáticamente superaron a todos los demás métodos cuando se aplicaron a 48,000 series de datos en la competencia M4 (The Makridakis Competition 4); mientras que, los modelos ETS estimados automáticamente resultaron superiores cuando se aplicaron a 366 series de tiempo de la competencia de Turismo (Hewamalage, Bergmeir, y Bandara, 2021)

En la práctica algunas variables económicas presentan muestras de apenas unas decenas de observaciones, incluso cuando se requiere la proyección de un pequeño número de periodos, podría resultar adecuado un algoritmo que permita la calibración de un pronóstico óptimo, a través de una secuencia bien definida. Por un lado, la metodología ETS ha demostrado que la estimación de modelos de alisado exponencial genera pronósticos óptimos para las estructuras espaciales de estado. Y por el otro, la metodología Box-Jenkins permite establecer eficazmente el esquema que representa a la serie de tiempo, mediante la identificación de procesos estocásticos autorregresivos y de medias móviles, y de sus posibles diferencias ordinarias y estacionales. En tales circunstancias, un algoritmo para pronosticar se vuelve una herramienta esencial.

2. MARCO METODOLÓGICO

En esta sección se presenta la notación que será utilizada para discutir los dos principales métodos que serán evaluados, y presentar los criterios de selección implementados en el caso de estudio para el Índice Nacional de Precios al Consumidor de México. Varias de las clasificaciones en esta sección son adaptaciones de los trabajos desarrollados por Hyndman y Athanasopoulos (2018).

2.1 Modelos espaciales de estado de suavizado exponencial (ETS)

La serie de tiempo considerada en esta investigación puede ser vista como un conjunto de tres componentes: Una tendencia (T) correspondiente a la parte que indica la dirección de la serie; un comportamiento estacional (S) que representa el patrón de periodicidad en la variable; y una parte de error (E) que captura el componente estocástico de la serie. Con $F(E, T, S)$ denotando una función de estos tres componentes, una serie temporal univariante y puede ser representada como: $y = f(E, T, S) = E + T + S$, lo que expresa un modelo puramente aditivo; mientras que: $y = f(E, T, S) = E * T * S$, denota un modelo puramente multiplicativo (Hyndman y Khandakar, 2008).

Los modelos de suavizado exponencial o modelos de Error, Tendencia y Estacionalidad (ETS, por sus siglas en inglés) son una clase de métodos de pronóstico basados en la idea de que el valor pronosticado $\hat{y}_{t+h|t}$ debe

³ En 1998, la competencia M3 evaluó la precisión de 24 algoritmos para 3003 series de tiempo empíricas univariantes de datos históricos, el conjunto de datos más grande que se ha utilizado en una competencia. Las series de tiempo fueron elegidas de varios campos de la ciencia como: microeconomía, macroeconomía, el sector financiero, y la demografía, además de emplear diferentes frecuencias (datos mensuales, trimestrales y anuales) (Makridakis y Hibon, 2000).

ser el resultado de una combinación ponderada de observaciones pasadas $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-h}$ donde a las más recientes se les asigna más peso que a las más antiguas. Las ponderaciones son exponencialmente decrecientes a medida que las observaciones se alejan cada vez más, a esto se debe el nombre de alisado exponencial. De acuerdo con la taxonomía de **Pegels (1969)** y **Taylor (2003)** se contabilizan un total de quince métodos de suavizamiento exponencial (Tabla 1).

Tabla 1. Métodos de Alisado Exponencial

Componente de tendencia (T)	Componente estacional (S)		
	N(Ninguna)	A(Aditivo)	M(Multiplicativo)
N (Ninguna)	(N, N)	(N, A)	(N, M)
A(Aditivo)	(A, N)	(A, A)	(A, M)
A _d (Aditivo amortiguado)	(A _d , N)	(A _d , A)	(A _d , M)
M (Multiplicativo)	(M, N)	(M, A)	(M, M)
M _d (Multiplicativo amortiguado)	(M _d , N)	(M _d , A)	(M _d , M)

Fuente: Elaboración propia con base en Hyndman et al. (2008)

Los métodos difieren solo en el manejo de los componentes de tendencia (T) y estacionalidad (S) de una serie de tiempo. El primero de los componentes se puede clasificar como aditivo (A), aditivo amortiguado (Ad), multiplicativo (M), multiplicativo amortiguado (Md) o ninguno (N) si no hay tendencia, mientras que el segundo componente se puede clasificar como aditivo (A), multiplicativo (M), o ninguno (N). Para construir intervalos de predicción, también se debe tener en cuenta el componente de error (E) que puede ser aditivo (A) o multiplicativo (M).

De esta manera se conciben dos estructuras de innovaciones espaciales de estado, una para los errores aditivos y la otra para los errores multiplicativos, con lo que se pueden construir 30 modelos diferentes (tabla 2). La clase 1 corresponde a modelos lineales con errores homocedásticos. La clase 2 representa estructuras lineales con errores heterocedásticos. La clase 3 incluye modelos con errores y estacionalidad multiplicativa, pero con tendencia aditiva. Por su parte la clase 4 está conformada por modelos con errores y tendencia multiplicativa, además de estacionalidad multiplicativa o sin estacionalidad. Finalmente, la clase 5 consta de modelos en los que se pueden tener dificultades numéricas con horizontes de pronóstico muy extensos (**Hyndman y Khandakar, 2008**).

Tabla 2. Modelos de Innovaciones Espaciales de Estado con errores aditivos y multiplicativos

Clase 1	A,N,N	A,N,A			
	A,A,N	A,A,A			
	A,A _d ,N	A,A _d ,A			
Clase 2	M,N,N	M,N,A	M,N,M	← Clase 3	
	M,A,N	M,A,A	M,A,M		
	M,A _d ,N	M,A _d ,A	M,A _d ,M		
Clase 4	M,M,N	M,M,M			
	M,M _d ,N	M,M _d ,M			
Clase 5		M,M,A	A,N,M	A,M,N	A,M _d ,N
		M,M _d ,A	A,A,M	A,M,A	A,M _d ,A
			A,A _d ,M	A,M,M	A,M _d ,M

Fuente: Elaboración propia con base en Hyndman y Khandakar (2008)

La metodología busca desarrollar un algoritmo para estimar pronósticos puntuales. Se deben definir las formulas correspondientes a los cálculos recursivos y sus pronósticos puntuales (Tabla 3). Cada uno de los quince modelos incluye los siguientes elementos: ℓ_t denota que la serie se encuentra en nivel en el tiempo "t"; por su parte, b_t representa la pendiente en el tiempo "t"; S_t expresa el componente estacional de la serie en el momento t; m denota el número de estaciones en un año; mientras que, α, β^*, γ y ϕ son constantes (**Hyndman et al. 2008**). Una vez especificado un modelo, es posible estudiar la distribución de probabilidad de sus valores subsecuentes.

Para poder utilizar estos modelos con fines de pronóstico, es necesario especificar el esquema propuesto, además del valor para los parámetros α, β^*, γ y ϕ . De acuerdo con **Hyndman (2002)** se sigue un enfoque

heurístico, que consiste en la identificación de un componente estacional, de nivel y de crecimiento, todos ellos iniciales. Estas condiciones o estados iniciales serán refinados al estimarse junto con sus parámetros, empleando para ello una función de máxima verosimilitud para los modelos de innovaciones espaciales de estado. Adicionalmente, se deben cumplir algunas restricciones en los parámetros de espacio de α, β^*, γ y ϕ . El enfoque tradicional sugiere que las ecuaciones puedan ser interpretadas como promedios ponderados, esto requiere que: $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < \alpha, 0 < \gamma < 1 - \alpha$ y $0 < \phi < 1$

Tabla 3. Fórmulas para cálculos recursivos y pronósticos puntuales.

TENDECIA		ESTACIONALIDAD		
		N	A	M
N	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t$	$\ell_t = \alpha(y_t - S_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$ $S_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1}) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + S_{t-m+h_m^*}$	$\ell_t = \alpha(y_t / S_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$ $S_t = \gamma(y_t / \ell_{t-1}) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t S_{t-m+h_m^*}$	
A	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + hb_t$	$\ell_t = \alpha(y_t - S_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $S_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + hb_t + S_{t-m+h_m^*}$	$\ell_t = \alpha(y_t / S_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $S_t = \gamma(y_t / (\ell_{t-1} - b_{t-1})) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = (\ell_t + hb_t)S_{t-m+h_m^*}$	
A _d	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + \phi_h b_t$	$\ell_t = \alpha(y_t - S_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$ $S_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} - \phi b_{t-1}) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + \phi_h b_t + S_{t-m+h_m^*}$	$\ell_t = \alpha(y_t / S_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t / \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$ $S_t = \gamma(y_t / (\ell_{t-1} - \phi b_{t-1})) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = (\ell_t + \phi_h b_t)S_{t-m+h_m^*}$	
M	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1} b_{t-1}$ $b_t = \beta^*\left(\frac{\ell_t}{\ell_{t-1}}\right) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^h$	$\ell_t = \alpha(y_t - S_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1} b_{t-1}$ $b_t = \beta^*(\ell_t / \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $S_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} b_{t-1}) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^h + S_{t-m+h_m^*}$	$\ell_t = \alpha(y_t / S_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1} b_{t-1}$ $b_t = \beta^*(\ell_t / \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $S_t = \gamma(y_t / (\ell_{t-1} b_{t-1})) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^h S_{t-m+h_m^*}$	
M _d	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1} b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta^*\left(\frac{\ell_t}{\ell_{t-1}}\right) + (1 - \beta^*)b_{t-1}^\phi$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^{\phi h}$	$\ell_t = \alpha(y_t - S_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1} b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta^*(\ell_t / \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}^\phi$ $S_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} b_{t-1}^\phi) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_{t-1}^{\phi h} + S_{t-m+h_m^*}$	$\ell_t = \alpha(y_t / S_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1} b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta^*(\ell_t / \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}^\phi$ $S_t = \gamma(y_t / (\ell_{t-1} b_{t-1}^\phi)) + (1 - \gamma)S_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_{t-1}^{\phi h} S_{t-m+h_m^*}$	

Fuente: Elaboración propia con base en Hyndman et al. (2008)

De acuerdo con **Hyndman et al. (2008)**, en una siguiente etapa se debe medir la precisión de los pronósticos mediante los errores de escala. Las dos medidas principales se basan en el error absoluto medio (MAE) o el error cuadrático medio (MSE). Adicionalmente, pueden considerarse los errores porcentuales, ya que presentan la ventaja de ser independientes de la escala; y por lo tanto, son empleados frecuentemente para comparar el desempeño de los pronósticos entre los diferentes conjuntos de datos. Otra medida utilizada es el error porcentual absoluto medio (MAPE), no obstante presentan la desventaja de asignar una penalización mayor sobre los errores positivos respecto a los negativos. Finalmente, se ha propuesto una medida para la precisión del pronóstico de aplicación general denominada media de error de escala absoluta (MASE).

Otra forma para determinar la precisión de un pronóstico es mediante el criterio de información Akaike (AIC). Se selecciona el modelo que minimiza el AIC entre todos los modelos que son apropiados para los datos. También funciona como un método para seleccionar los modelos de error aditivo y multiplicativo. El criterio es capaz de seleccionar entre los tipos de error basándose en la probabilidad. Obviamente, otros criterios de selección de modelos, como el criterio de información de Bayes (BIC) también podría emplearse de manera similar (**Hyndman et al. 2008**)

Combinando las ideas anteriores se puede obtener un algoritmo de pronóstico automático robusto y ampliamente aplicable. De acuerdo con **Makridakis y Hibon (2000)** y **Hyndman et al. (2002)** los pasos involucrados para la estimación de pronósticos empleando modelos espaciales de estado de suavizado exponencial se resumen a continuación:

1. Aplicar todos los modelos que sean apropiados para cada serie de tiempo, optimizando los parámetros en cada estructura.
2. Elegir el modelo con base en los diferentes errores dependientes de la escala o porcentuales, además de los criterios AIC/BIC.
3. Estimar los pronósticos puntuales usando el mejor modelo (con parámetros optimizados) para diferentes escenarios temporales como sea necesario.
4. Obtener intervalos de predicción para el mejor modelo, ya sea empleando los resultados analíticos o simulando futuras trayectorias de la muestra. Si se emplea la simulación, las trayectorias de la muestra

pueden generarse utilizando la distribución gaussiana de errores (bootstrap paramétrico) o los errores remuestreados (bootstrap ordinario).

2.2 Modelos Autorregresivos Integrados y de Medias Móviles (ARIMA)

Box y Jenkins (1970) desarrollaron un avance importante en el área creando un enfoque coherente y versátil que configura el ciclo iterativo de tres etapas para las series temporales: identificación, estimación y comprobación del diagnóstico. La evolución de las computadoras ha vuelto a los modelos autorregresivos integrados y de medias móviles (ARIMA) más populares y aplicables en muchos campos científicos. De acuerdo con (**Enders, 2015**), se pueden construir estructuras con un proceso autorregresivo y de medias móviles (ARMA). Considere la ecuación en diferencias de orden “p”.

$$Y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i Y_{t-i} + X_t \quad (1)$$

Y dado que el proceso forzado $\{X_t\}$ puede ser un proceso $MA(q)$ dado por:

$$X_t = \sum_{i=0}^q B_i E_{t-i} \quad (2)$$

De esta manera:

$$Y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i Y_{t-i} + \sum_{i=0}^q B_i E_{t-i} \quad (3)$$

Siguiendo la convención de normalizar las unidades, esto implica que B_0 sea siempre igual a la unidad. Si las raíces características de la ecuación (3) caen dentro del círculo unitario, $\{Y_t\}$ se conoce como modelo ARMA para Y_t . La parte autorregresiva del modelo es la ecuación diferencial dada por la porción homogénea de (2) y la parte de la media móvil es la secuencia $\{X_t\}$. Si la parte homogénea de la ecuación en diferencias contiene “p” rezagos y el modelo para X_t contiene q rezagos, el modelo se denomina ARMA (p,q). Si q=0. El proceso es llamado autorregresivo puro, denotado por AR(p), y si p=0, el proceso es una media móvil pura, denotado por MA(q). Si la suma de las raíces características de (3) son mayores o igual que uno, la estructura $\{Y_t\}$ se denomina proceso integrado (ARIMA) (**Enders, 2015**).

Si se trata la ecuación (3) en primeras diferencias, ésta puede resolverse para Y_t en términos de la secuencia $\{E_t\}$. Para el modelo general ARMA (p,q) de la ecuación (3) al utilizar el operador de rezagos tenemos que:

$$(1 - \sum_{i=1}^p a_i L^i) Y_t = a_0 + \sum_{i=0}^q B_i E_{t-i} \quad (4)$$

Por lo que la solución particular para Y_t es:

$$Y_t = (a_0 + \sum_{i=0}^q B_i E_{t-i}) / (1 - \sum_{i=1}^p a_i L^i) \quad (5)$$

Como se puede observar la expansión de la suma llevará a un proceso $MA(\infty)$. Lo importante es determinar si tal expansión es convergente con lo que la ecuación en diferencias estocástica dada en (5) es estable⁴.

En la metodología Box-Jenkins a menudo se añade una etapa preliminar de identificación y preparación de datos y una etapa final de validación del modelo (o pronóstico) (**Makridakis et al. 1998**). El enfoque se basa en dos grandes principios: El primero, el principio de parsimonia, busca el modelo más sencillo que sea suficientemente representativo de los datos; y el segundo, el principio del mejoramiento iterativo, consiste en comenzar con un modelo sencillo y factible, al cual se le harán mejoramientos sucesivos, hasta llegar a un modelo satisfactorio.

La metodología Box-Jenkins consiste en las siguientes etapas:

- 1) *Análisis de Estacionariedad y Estacionalidad*. Lo primero es garantizar que la serie sea estacionaria y comprobar si existe un patrón de repetición anual (**González, 2011**). Para el tratamiento de modelos no estacionarios se sugiere: a) Estabilizar la varianza mediante transformaciones matemáticas de la serie temporal, tales como: logaritmos neperianos, raíz cuadrada, recíprocos, o deflactando los datos; b) Eliminar la tendencia a través de diferencias ordinarias⁵; c) Tratar la variación estacional mediante modelos multiplicativos que incluyan el componente estacional.
- 2) *Identificación del Modelo Tentativo*. Se emplean los correlogramas para la representación gráfica y estadística de la función de autocorrelación simple (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP), para identificar las autocorrelaciones⁶ y que será comprobado mediante pruebas de hipótesis tales como el estadístico Q desarrollado por **Box y Pierce (1970)** o el estadístico **Ljung-Box (1978)**.

⁴ La condición de estabilidad es que las raíces del polinomio $(1 - \sum_{i=1}^p a_i L^i)$ deben caer fuera del círculo unitario. Esto también demostraría que Y_t es una ecuación en diferencias estocástica lineal, por lo que la condición de estabilidad es necesaria para que la serie de tiempo $\{Y_t\}$ sea estacionaria.

⁵ Aunque hay varias pruebas para detectar estacionariedad, analizamos las que se estudian de manera prominente en la bibliografía: 1) El análisis gráfico y 2) La prueba del correlograma. y 3) La prueba de estacionariedad (la prueba Dickey-Fuller y Dickey-Fuller Aumentada (correlación serial)).

⁶ La significancia estadística de cualquier coeficiente de autocorrelación se juzga mediante su error estándar. **Bartlett (1946)**

- 3) *Cálculo de Parámetros del Modelo.* Para cada candidato se calibran los parámetros. Para ello se emplea la metodología de máxima verosimilitud. Los valores estimados deben ser examinados para significancia y estabilidad. Si el modelo no es estable (implicando una trayectoria explosiva) o los coeficientes no difieren significativamente de cero, el modelo deberá ser re-examinado y se deberá proponer una nueva estimación del mismo.
- 4) *Verificación del Modelo.* Se recomienda efectuar el siguiente análisis: a) Revisar el ajuste de los datos, esto permite comparar los diferentes modelos (también conocidos como medidas de error); b) Realizar las pruebas de hipótesis individual (t-estadística) sobre la significancia estadística de los coeficientes estimados; c) Llevar a cabo las pruebas sobre las perturbaciones, y obtener sus correlogramas, para identificar que sean estacionarios. Adicionalmente, estimar una prueba de estacionariedad; d) Finalmente, comprobar que no exista autocorrelación, para ello se utiliza la prueba denominada “portmanteau” de Box-Pierce, y/o Ljung-Box.
- 5) *Pronóstico.* El uso más importante de un modelo ARIMA es pronosticar los valores futuros de la secuencia $\{Y_t\}$. Los pronósticos serán construidos utilizando el método de iteración adelantada.
- 6) *Validación del pronóstico.* Para determinar la eficiencia de los modelos se calculan las medidas de error. Idealmente es deseable que las perturbaciones del pronóstico tengan una media cercana a cero y varianza mínima. Además, se debe efectuar una prueba **Diebold-Mariano (1995)**.

2.3. Estimación y selección de modelos

Los modelos espaciales de estado de suavizado exponencial (ETS) son estimados empleando la función “ets()” que se encuentra alojada en la librería “forecast”, en el software libre R-project. Se trata de un procedimiento totalmente automatizado, que estima los valores de los parámetros α, β^*, γ y ϕ para los 30 modelos potenciales de la tabla 2, se optimiza la función del logaritmo de verosimilitud, y a continuación se selecciona el mejor de estos modelos en función de sus ajustes en la muestra, empleando el criterio de información de Akaike corregido (AICc) o el criterio de información de Bayes (BIC).

Para el modelo ARIMA, la principal tarea es identificar el orden apropiado para cada uno de los procesos. Esto se puede desarrollar utilizando la función “auto.arima()” en la librería “forecast” y consiste en un procedimiento totalmente automatizado. Primeramente determina el número de diferencias estacionales y ordinarias, necesarias para que la serie de tiempo sea estacionaria y estima todos los posibles modelos para elegir, con base en los criterios de información y en las medidas de error, el que presente las mejores características. En la presente investigación se ha empleado el valor máximo de 12 rezagos para los parámetros autorregresivos (AR) y de medias móviles (MA), y para los autoregresivos estacionales (SAR) y medias móviles estacionales (SMA) el valor de 4 rezagos.

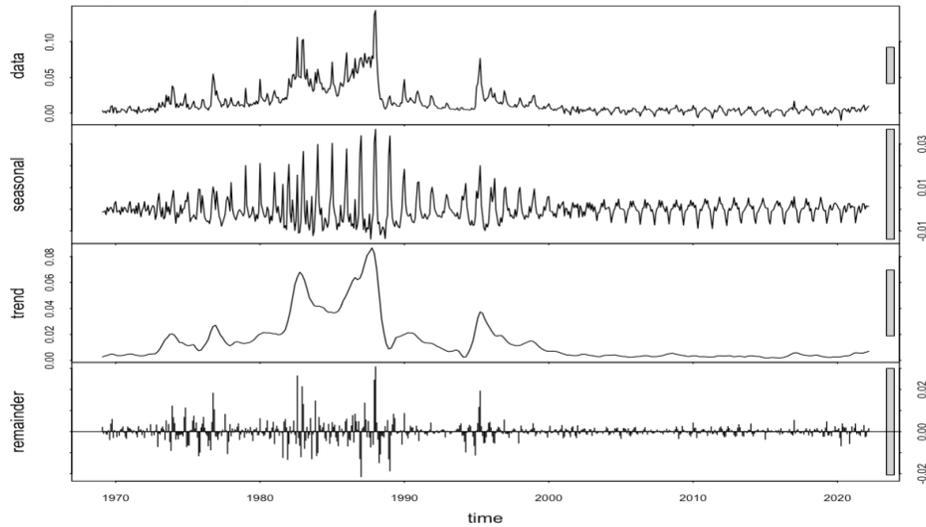
Una vez seleccionada la estructura más apropiada para los modelos ETS y ARIMA, se procede a la estimación de sus parámetros y al cálculo de los valores esperados para los meses de enero a diciembre de 2022. Se emplearon intervalos de confianza del 5%. Cabe mencionar que contrario a los modelos ARIMA, los modelos ETS emplean estructuras no estacionarias; y por tanto, no asumen un comportamiento homocedástico. De esta manera, los modelos espaciales de estado de suavizado exponencial se calibraron con los datos en niveles de la variable (series de tiempo no transformadas); mientras que, para los modelos ARIMA se emplearon datos transformados (diferencias logarítmicas). Posteriormente, el pronóstico de su valor promedio fue calculado utilizando las transformaciones inversas ajustadas.

3. RESULTADOS

En la primera etapa del desarrollo de ambos algoritmos, se descompone la serie en sus elementos (Figura 1). Se identifica que la serie de tiempo del INPC presenta un fuerte componente estacional, una clara tendencia creciente y decreciente en la década de 1970, 1980 y 1990. De igual forma se calcularon las funciones de autocorrelación simple y parcial, evidenciando que la serie se comporta como no estacionaria y con un marcado comportamiento estacional (Figura 2). En el algoritmo también se lleva a cabo la prueba Dickey Fuller Aumentada y se identifica que la serie de tiempo no es estacionaria.

demostró que si una serie de tiempo es puramente aleatoria, es decir, si es una muestra de ruido blanco, los coeficientes de autocorrelación muestrales son aproximadamente: $\rho_k \sim N(0, 1/n)$. Por tanto, según las propiedades de la distribución normal estándar, el intervalo de confianza de 95% para cualquier (población) ρ_k es: $\rho_k \pm 1.96(\sqrt{1/n})$.

Figura 1. Componentes del Índice Nacional de Precios al Consumidor

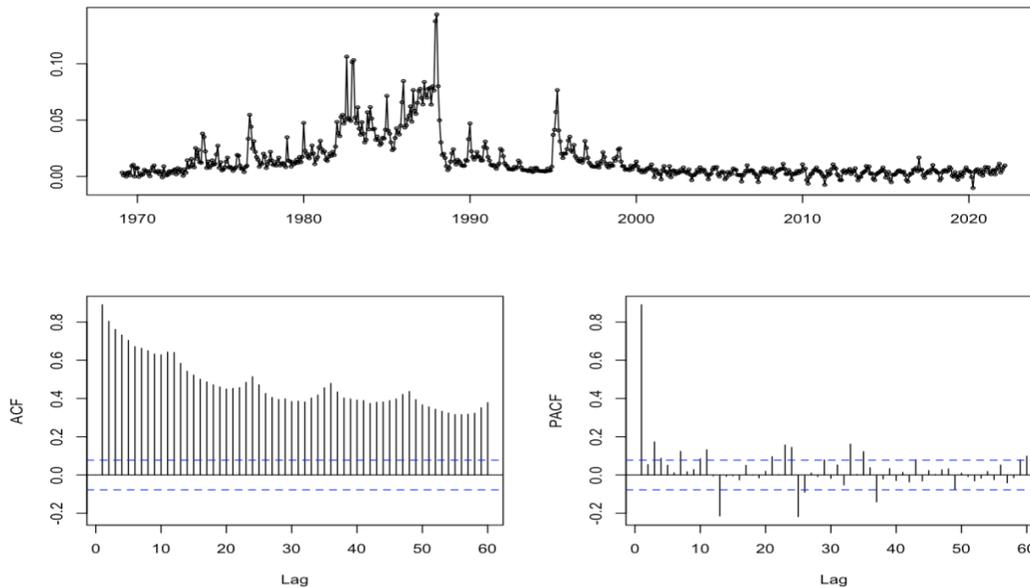


Fuente: Elaboración propia

Considerando el análisis anterior se procede a estabilizar la varianza aplicando logaritmos neperianos, se elimina la tendencia mediante la diferenciación ordinaria y se representa el modelo con un componente estacional. Las pruebas de estacionariedad confirman la pertinencia de ambas metodologías.

Figura 2. Función de autocorrelación simple y parcial (ACF y PACF)

Correlograma Diferencia(log(INPC))



Fuente: Elaboración propia

A continuación, se definen los parámetros para los componentes de error (E), tendencia (T) y estacionalidad (S). El algoritmo muestra que la estructura óptima del modelo es ETS(M,A,N), correspondiente a un modelo Holt lineal. Por su parte, para la identificación de los parámetros p, d, q en el modelo ARIMA, se consideran diferentes criterios de información como son Akaike (AIC, por sus siglas en inglés) y Schwartz Bayesiano (BIC, por sus siglas en inglés). Cabe resaltar que este último seleccionará un modelo más parsimonioso (Enders, 2015). Se identifica una estructura $SARIMA(1,0,2) \times (3,0,0)_{12}$. Esto indica que el proceso generador de datos se conforma de un componente autorregresivo y dos componentes de medias móviles ordinarias más un componente autorregresivo estacional de orden tres. En la tabla 4 y 5 se presentan los resultados de los coeficientes para las dos estructuras propuestas.

**Tabla 4 Método de Alisamiento Exponencial
Modelo (1) (ETS(M,A,N))**

Variable Dependiente:(INPC)	
Modelo(2)	
Parámetros de Alisado	ETS (M,A,N)
Alpha	0.9999
Beta	0.8994
Gamma	0.0000
Estados Iniciales	
l	0.0116
b	0.0000
sigma	0.0087
Observaciones	636
AIC	-119.2332
BIC	-96.9572
ME	0.0008
RMSE	0.2007
MAE	0.1136
MPE	0.0558

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 5. Método ARIMA
Modelo (2) (SARIMA(1,0,2)x(3,0,0)[12]).**

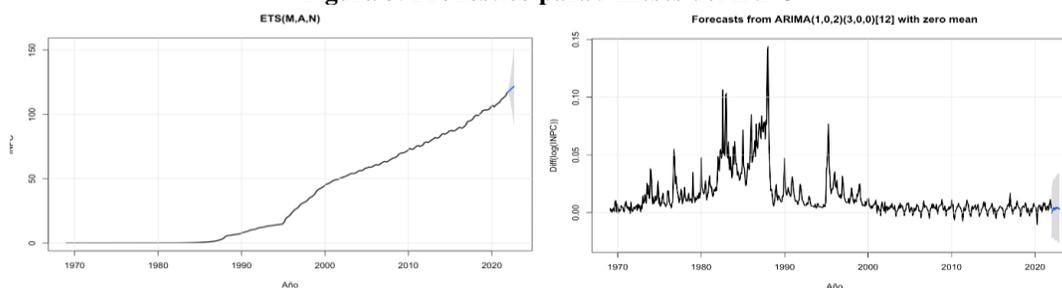
Variable Dependiente:(DLINPC)	
Modelo(1)	
Coefficientes	SARIMA (1,0,2)x(3,0,0)[12]
AR(1)	0.9376 (0.0174)***
MA(1)	-0.1774 (0.0439)***
MA(2)	-0.1385 (0.0413)***
SAR(1)	0.1306 (0.0392)***
SAR(2)	0.2425 (0.0377)***
SAR(3)	0.2075 (0.0382)***
Observaciones	635
AIC	-4346.44
BIC	-4315.27
log likelihood	2180.22
ME	0.0005
RMSE	0.0077
MAE	0.0043
MPE	0.0000

Fuente: Elaboración propia

Enseguida se realizar un análisis para diagnosticar la bondad de ajuste de ambos modelos respecto a la suma de residuos cuadráticos (SRC). Por su parte, los criterios de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC), indican que el modelo (2) es superior. Se puede identificar que el proceso autorregresivo y las dos medias móviles ordinarias así como los tres autorregresivos estacionales son estadísticamente significativos al 1%. El modelo no incluye intersección ya que el coeficiente no presenta significancia estadística. Finalmente, la suma de los coeficientes autorregresivos es menor a la unidad, con lo que se puede garantizar la estabilidad del modelo.

Una vez identificadas las estructuras óptimas se verifica que los residuos de ambos modelos seleccionados corresponden a procesos estacionarios y se comportan de forma independiente, se programaron en el algoritmo pruebas de hipótesis para demostrar que no existe autocorrelación serial. Posteriormente el algoritmo estima el pronóstico de los 12 meses de 2022 para el índice de precios (figuras 3 y tabla 6). Se identifica que en ambos casos el mayor nivel de incremento de los precios ocurrirá en diciembre con 123.43 puntos para el modelo ETS y 121.82 puntos para el modelo ARIMA.

Figura 3. Pronóstico para 9 meses del INPC



Fuente: Elaboración propia

Tabla 6. Pronóstico del Índice Nacional de Precios al Consumidor

Mes/Año	Modelo (1) (ETS)	Modelo (2) (ARIMA)
Enero de 2022	117.8186	117.2520
Febrero de 2022	118.3291	117.4825
Marzo de 2022	118.8396	117.8861
Abril de 2022	119.3501	118.3976
Mayo de 2022	119.8606	118.6694
Junio de 2022	120.3711	119.0206
Julio de 2022	120.8816	119.5778
Agosto de 2022	121.3921	120.0887

Septiembre de 2022	121.9026	120.5001
Octubre de 2022	122.4131	121.0229
Noviembre de 2022	122.9236	121.4594
Diciembre de 2022	123.4341	121.8299

Fuente: Elaboración propia

La precisión en el pronóstico para un modelo seleccionado es crucial. Para comprobar cuál de los modelos seleccionados presenta la mejor capacidad predictiva se emplea la prueba Diebold-Mariano (DM) (1995), consistente en un estadístico que compara la precisión del pronóstico de ambos métodos.

Tabla 7. Prueba Diebold-Mariano

	Prueba DM basa en Modelo (1) ETS y Modelo (2) ARIMA	Prueba DM basa en Modelo (2) ARIMA y Modelo (1) ETS
Estadístico D-M	2.7589	-2.7589
p-values	0.00298	0.997

Fuente: Elaboración propia

El contraste entre los modelos (1) y (2) muestra que de acuerdo a la prueba DM el estadístico es 2.7546, con lo que se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 1%, es decir, las estimaciones observadas entre ambas estructuras son estadísticamente diferentes y la precisión del pronóstico del modelo (2) ARIMA es mejor en comparación con el modelo (1) ETS (tabla 7). El desarrollo de la segunda prueba establece un estadístico de -2.7546, que muestra claramente que el modelo ETS no es mejor al compararlo con el modelo ARIMA.

4. CONCLUSIONES

El presente trabajo de investigación demuestra que el algoritmo propuesto es eficaz en la obtención de un pronóstico preciso y confiable para los 12 meses de 2022. Los procedimientos descritos pueden ser aplicados a diferentes variables económicas y financieras para obtener pronósticos confiables y que apoyen en la toma de decisiones. Los pronósticos obtenidos mediante los modelos espaciales de estado de suavizamiento exponencial (ETS) y los modelos autorregresivos Integrados y de Medias Móviles (ARIMA) han demostrado ser más confiables que los propuestos a través de métodos más complejos.

El adecuado análisis, la correcta identificación, la calibración de la estimación, en conjunto con una clara validación, permiten la óptima construcción y verificación del pronóstico de una variable de suma relevancia para la economía mexicana como lo es el Índice Nacional de Precios al Consumidor. Cabe mencionar que una de las principales diferencias entre estas dos metodologías es que los modelos ARIMA serán estables siempre y cuando las raíces de la ecuación característica no sean mayores a la unidad, lo que garantiza que el proceso sea estacionario.

Por otro lado, los modelos ETS pueden ser aplicados a series de tiempo que presentan raíces unitarias. A pesar de los avances en la investigación sobre la estimación de pronósticos, aún no existe acuerdo sobre la superioridad de alguna de las metodologías. Sin embargo, existen pruebas estadísticas como la desarrollada por Diebold y Mariano (1995) que permiten identificar la precisión de los pronósticos en cada estructura. Los resultados de esta investigación señalan que el modelo ARIMA provee una mayor exactitud en la predicción del Índice Nacional de Precios al Consumidor.

Agradecimientos: Esta investigación se realizó con el apoyo del Cuerpo Académico en Economía Financiera de la Universidad Autónoma del Estado de México, Centro Universitario UAEM Valle de México, en el marco del proyecto de investigación: Impacto de la especulación bursátil de la banca comercial sobre la asignación de créditos y su contribución en el crecimiento económico y generación de empleos decentes.

Disponibilidad del código

El código en R para la estimación de los modelos y los respectivos pronósticos de esta investigación se proporcionan en la página:

<https://mega.nz/file/RPpRibzB#TXfuAImKxAU9YcSy2TTzOtvJJv8AHwawxIrnhiH7-EQ>

RECEIVED: AUGUST, 2022.
REVISED: FEBRUARY, 2023.

REFERENCES

- [1] BARTLETT, M.S. (1946): On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time Series, **Journal of the Royal Statistical Society**, series B, 27, 27-41.
- [2] BOX, G.E.P. and G.M. JENKINS., (1970): Time series analysis: Forecasting and control, San Francisco: Holden-Day.
- [3] BOX, G. E. P. and D. A. PIERCE., (1970): Distribution of residual correlations in autoregressive-integrated moving average time series models. **Journal of the American Statistical Association**, 65, 1509–1526.
- [4] CRONE, S. F., M. HIBON, and NIKOLOPOULOS. (2011): Advances in Forecasting with Neural Networks? Empirical Evidence from the NN3 Competition on Time Series Prediction. **International Journal of Forecasting**, 27, 635–660.
- [5] DICKEY, D. A., and W. A. FULLER. (1979): Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. **Journal of the American Statistical Association**, 74, 427–431.
- [6] DIEBOLD, F.X. and R. MARIANO (1995): Comparing predictive accuracy. **Journal of Business and Economic Statistics**, 13, 253–265.
- [7] EViews 12. (2020): **User’s Guide II**. HIS Markit-EViews.
- [8] ENDERS, W. (2015): **Applied Econometric Time Series**. Wiley, Chichester.
- [9] GONZÁLEZ V., M. (2011): **Pronósticos: metodología Box-Jenkins**, UNAM. México.
- [10] HEWAMALAGE, H., C. BERGMEIR, and K. BANDARA. (2021): Recurrent Neural Networks for Time Series Forecasting: Current Status and Future Directions. **International Journal of Forecasting**, 37, 388–427.
- [11] HYNDMAN R.J., and Y. KHANDAKAR (2008): Automatic Time Series Forecasting: The Forecast Package for R. **Journal of Statistical Software**, 27.
- [12] HYNDMAN, R. J., A. B. KOEHLER, R. D. SNYDER and S. GROSE (2002): A state space framework for automatic forecasting using exponential smoothing methods, **International Journal of Forecasting**, 18, 439–454.
- [13] HYNDMAN, R. J., KOEHLER, A. B., KEITH ORD, J. and SNYDER, R. D. (2008): **Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach**. Springer, Berlin.
- [14] HYNDMAN, R. J., G. ATHANASOPOULOS, C. BERGMEIR, G. CACERES, L. CHHAY, M. O’HARA-WILD, F. PETROPOULOS, S. RAZBASH, E. WANG, and F. YASMEEN. (2019): **Forecast: Forecasting Functions for Time Series and Linear Models**. R package version 8.9.
- [15] KARLSSON R. A. (2021): Accuracy of automatic forecasting methods for univariate time series data: A case study predicting the results of the 2018 Swedish general election using decades-long data series, 7, 475-493.
- [16] LJUNG, G. M. and G., E., P. BOX (1978): On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika** 65, 297–303.
- [17] MAKRIDAKIS, S., WHEELWRIGHT, S. C., and HYNDMAN, R. J. (1998): **Forecasting Methods and Applications**. John Wiley, 3 edition, N. York.
- [18] MAKRIDAKIS, S. and HIBON, M., (2000): The M3-Competition: results, conclusions and implications. **International Journal of Forecasting**, 16, 451-476.
- [19] PEGELS C.C. (1969): Exponential Forecasting: Some New Variations. **Management Science**, 15, 311-315.
- [20] SAS Institute. (2020): **SAS/ETS 15.2 User’s Guide**. Cary, NC., SAS Institute.
- [21] TAYLOR J.W. (2003): Exponential Smoothing with a Damped Multiplicative Trend. **International Journal of Forecasting**, 19, 715-725.
- [22] VELÁSQUEZ, J. D., FRANCO, C. J. and GARCÍA, H. A. (2009): Un modelo no lineal para la predicción de la demanda mensual de electricidad en Colombia, **Estudios Gerenciales**, 25, 37–54. doi: 10.1016/S0123-5923(09)70079-8