Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

ALGUNAS PROPIEDADES MÉTRICAS GENERALIZADAS HEREDITARIAS, ADITIVAS Y PRODUCTIVAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Luis Raúl Figueroa Martínez

DIRECTORES DEL TRABAJO:
Dr. Fernando Orozco Zitli
M. en C. Nataly Mondragón Chigora

Toluca, México, Abril 2023

Introducción

Sean X un espacio topológico, S un conjunto no vacío y $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos.

Dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$, diremos que:

(1) $\mathcal{P}$ es **hereditaria** si para cada espacio topológico X que tiene $\mathcal{P}$, cada subespacio Z de X tiene $\mathcal{P}$;
(2) $\mathcal{P}$ es **aditiva** si para cada familia de espacios topológicos $\{X_s\}_{s\in S}$ tal que cada X_s tiene $\mathcal{P}$, se cumple que $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ tiene $\mathcal{P}$;
(3) $\mathcal{P}$ es **productiva** si para cada familia de espacios topológicos $\{X_s\}_{s\in S}$ tal que cada X_s tiene $\mathcal{P}$, se cumple que $\prod\limits_{s\in S} X_s$ tiene $\mathcal{P}$.
Sean $\mathcal{P}$ una propiedad topológica y $\mathcal{D}$ una clase de funciones. Diremos que:

(4) $\mathcal{P}$ se **preserva bajo la clase** $\mathcal{D}$ si para cada espacio topológico X que tiene $\mathcal{P}$ y para cada $(f : X \to Y) \in \mathcal{D}$, se cumple que Y tiene $\mathcal{P}$.

En este proyecto de tesis queremos desarrollar de algunas condiciones necesarias bajo las cuales propiedades como: compacidad local, ser cósmico, ser de Lašnev, ser $\aleph_0$-espacio, ser desarrollable y ser de Moore son hereditarias, aditivas, productivas o preservadas bajo alguna clase de funciones.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos

Los símbolos $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ denotan el conjunto de los números reales, el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números naturales, respectivamente.

Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Los símbolos $\mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{int}(A)$ y $\mathrm{fr}(A)$ denotan la cerradura, el interior y la frontera de A respectivamente.

Sean $g : X \to Y$ una función y $Z \subset X$. Definimos la función $g|_Z : Z \to g(Z)$ como $g|_Z(z) = g(z)$. A $g|_Z$ se le llama la función restricción a Z o la función restringida a Z.

Consideremos (X, τ) un espacio topológico y $Y \subset X$. Denotamos por $\tau|_Y$ a la topología de subespacio para Y.

En algunos casos usaremos el símbolo τ_X para denotar la topología de X.

Sean $U \subset X$ y $x \in U$. Decimos que U es una **vecindad** de x si existe un abierto V tal que $x \in V \subset U$.

Para un espacio métrico Z, el símbolo $B_\epsilon(p)$ denota a la bola abierta con centro en p y de radio ϵ.

La prueba del siguiente resultado, se puede consultar en [1, Teorema 1.1.1, p. 13].

Proposición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico. Para todo $A \subset X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *El punto x es un elemento de* $\mathrm{cl}(A)$.

2. *Para toda vecindad U de x tenemos que $U \cap A \neq \emptyset$.*

3. *Existe una base local $\beta(x)$ en x tal que para cada $U \in \beta(x)$, $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definición 1.1.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $\beta \subset \tau$. Decimos que β es una* **base local** *de x en X si se cumplen las siguientes condiciones.*

1. *Para cada $U \in \beta$, $x \in U$.*

2. *Para cada $W \in \tau$ tal que $x \in W$, existe un $U \in \beta$ tal que $U \subset W$.*

Proposición 1.1.3. *Sean X un espacio topológico y Z un subespacio de X. Si A es compacto en Z, entonces A es compacto en X.*

Teorema 1.1.4. *Si $f : X \to Y$ es biyectiva, entonces para todo $A \subset X$*

$$f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A) = Y \setminus f(A)$$

Demostración. Primero, sea $x \in f(X \setminus A) \subset f(X)$ entonces existe $y \in X \setminus A$ tal que $f(y) = x$. Supongamos que $x \in f(A)$ entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = x$. Así, $f(y) = x = f(a)$. Como f es inyectiva $a = y$ pero esto es una contradicción. Por lo tanto $x \notin f(A)$. Entonces $x \in f(X) \setminus f(A)$.

Por otro lado supongamos que $x \in f(X) \setminus f(A)$ entonces existe $y \in X$ tal que $f(y) = x$. Supongamos que $y \in A$ entonces $f(y) \in f(A)$. Así $x \in f(A)$ pero esto es una contradicción. De esta manera $y \notin A$. Entonces $y \in X \setminus A$. Por lo tanto $x \in f(X \setminus A)$. Finalmente por la suprayectividad $f(X) = Y$. $\square$

Lema 1.1.5. *Sean X, Y conjuntos, $g : X \to Y$ una función suprayectiva, $A \subset X$, $Z \subset Y$ y $B = g^{-1}(Z)$. Entonces $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$.*

Demostración. Claramente $g(A \cap B) \subset g(A) \cap g(B)$.
Para probar la otra contención, sea $y \in g(A) \cap g(B)$. Dado que g es suprayectiva, $g(B) = Z$. Sea $a \in A$ tal que $g(a) = y$. Como $y \in Z$, $a \in g^{-1}(Z)$. Así $a \in A \cap g^{-1}(Z) = A \cap B$. Por lo que $y = g(a) \in g(A \cap B)$. De donde $y \in g(A \cap B)$. Por lo tanto, $g(A) \cap g(B) \subset g(A \cap B)$.
De lo anterior, $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$. □

Lema 1.1.6. *Sean X un conjunto y $\mathcal{S} = \{U_1, U_2, \ldots\} \subset \mathcal{P}(X)$ un conjunto numerable. Entonces:*

1) $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{D} : \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ finito no vacío$\}$ es numerable.

2) $\mathcal{C} = \{\bigcup \mathcal{D} : \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ finito no vacío$\}$ es numerable.

Demostración. Para la prueba de 1), notemos que $\bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^s$ es numerable. Definamos la función $\varphi : \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^s \to \mathcal{B}$ por

$$\varphi(a) = \begin{cases} U_a & \text{si } a \in \mathbb{N}, \\ \\ \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} & \text{si } a = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Claramente φ está bien definida. Probaremos que φ es suprayectiva. Para $n = 1$ y $U_i \in \mathcal{S}$, se tiene que $\varphi(i) = U_i$. Para $n \geq 2$ y $\bigcap\limits_{j=1}^{n} U_{i_j} \in \mathcal{B}$, se tiene que $\varphi((i_1, \ldots, i_n)) = \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}$. Como $\bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^s$ es numerable, $\mathcal{B}$ es numerable.

La prueba de 2), es similar a la anterior. □

Proposición 1.1.7. *Sean $g : X \to Y$ una función y $Z \subset X$. Si $E \subset Y$, entonces $g|_Z^{-1}(E \cap g(Z)) = g^{-1}(E) \cap Z$.*

Demostración. Si $E \cap g(Z) = \emptyset$, entonces $g^{-1}(E) \cap Z = \emptyset$, así, $g|_Z^{-1}(E \cap g(Z)) = \emptyset = g^{-1}(E) \cap Z$.

Supongamos que $g|_Z^{-1}(E \cap g(Z)) \neq \emptyset$. Sea $a \in g|_Z^{-1}(E \cap g(Z)) \subset Z$. Entonces $g|_Z(a) = g(a) \in E \cap g(Z)$. Así, $a \in g^{-1}(E) \cap Z$.

Por otro lado, sea $b \in g^{-1}(E) \cap Z$. Entonces $g|_Z(b) = g(b) \in E \cap g(Z)$. Así, $b \in g|_Z^{-1}(E \cap g(Z))$.

Por lo tanto, $g|_Z^{-1}(E \cap g(Z)) = g^{-1}(E) \cap Z$. □

Proposición 1.1.8. *Sea X un espacio topológico. Se dice que D es denso en X si y sólo si, para cada abierto U no vacío en X, se cumple que $D \cap U \neq \emptyset$.*

Definición 1.1.9. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es separable si existe $D \subset X$ tal que D es numerable y denso en X.*

Proposición 1.1.10. *Sea X un espacio topológico. Si X es segundo numerable, entonces X es separable.*

Demostración. Sea $\beta = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$ una base numerable. Sea $D = \{x_i : x_i \in U_i\}$. Claramente D es numerable. Por otra parte, sean U un abierto en X y $x \in U$. Como β es una base, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_i \subset U$. Por lo que $U \cap D \neq \emptyset$. Por lo tanto D es denso en X. □

Lema 1.1.11. *Sean X, Y espacios topológicos y $H \subset X$. Consideremos C un conjunto, $A \subset C$ y $g : X \to Y$ una función. Si $K = g^{-1}(C) \cap H$ entonces $g(K) \cap A = g(H) \cap A$.*

Demostración. Primero, notemos que

$$g(K) = g(g^{-1}(C) \cap H) \subset g(g^{-1}(C)) \cap g(H) = C \cap g(H).$$

Así, $g(K) \cap A \subset A \cap C \cap g(H) = A \cap g(H)$.

Por otro lado, sea $z \in g(H) \cap A$. Entonces existe $h \in H$ tal que $g(H) = z$. Dado que $A \subset C$ y $z \in A$, entonces $g(h) \in C$. De donde $h \in g^{-1}(C)$. Así $h \in K$. Entonces $z = g(h) \in g(K)$. Por lo tanto $z = g(h) \in g(K) \cap A$.

Por lo que $g(K) \cap A = g(H) \cap A$. □

Proposición 1.1.12. *Sea X un espacio métrico. Las siguientes condicionesson equivalentes :*

1. *X es separable*
2. *X es segundo numerable.*

Demostración. La prueba de 2. implica 1., se sigue de la Proposición 1.1.10.

Para probar que 1., implica 2., consideremos $D \subset X$ numerable y denso en X. Sea $\beta = \{B(z, \frac{1}{n}) : z \in D, n \in \mathbb{N}\}$. Claramente β es numerable. Para probar que β es una base, sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Probaremos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $z \in D$ tales que $x \in B(z, \frac{1}{n}) \subset B(x, \epsilon)$. Por la propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Como D es denso en X, $B(x, \frac{1}{n}) \cap D \neq \emptyset$. Sea $z \in B(x, \frac{1}{n}) \cap D$. Entonces $d(z, x) < \frac{1}{n}$. Así, $x \in B(z, \frac{1}{n})$. Para ver que $B(z, \frac{1}{n}) \subset B(x, \epsilon)$, sea $y \in B(z, \frac{1}{n})$. Dado que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \epsilon$, $y \in B(x, \epsilon)$. De donde $B(z, \frac{1}{n}) \subset B(x, \epsilon)$. Con lo anterior, $B(z, \frac{1}{n}) \in \beta$ y cumple con lo requerido.

Por lo que β es una base numerable. Por lo tanto X es segundo numerable.

$\square$

Definición 1.1.13. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es:*

- *T_1, si para todo $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x_1 \in U_1 \setminus U_2$, $x_2 \in U_2 \setminus U_1$.*

- *T_2, si para todo $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

- *T_3, si X es T_1 y para todo $x \in X$ y para todo cerrado $C \subset X \setminus \{x\}$, existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x_1 \in U_1$, $C \subset U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

- *T_4, si X es T_1 y para cualesquiera dos cerrados $A, B \subset X$ con $A \cap B = \emptyset$, existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $A \subset U_1$, $B \subset U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

- *T_5, si X es T_1 y cada subespacio abierto de X es normal.*

Observación 1.1.14. *Directamente de las definiciones, se observa que ser T_4 implica ser T_3, ser T_3 implica ser T_2, ser T_2 implica ser T_1 y ser T_1implica ser T_0.*

Un espacio topológico X es metrizable si existe una métrica d sobre X tal que la topología inducida por la métrica d coincide con la topología original de X.

Sean (Z, d) un espacio métrico y $M \subset Z$. Definimos $d_M = d|_{M\times M}$. Es fácil probar que d_M es una métrica para M.

Sean (X, τ) un espacio topológico metrizable y $M \subset X$. Consideremos que d es una métrica para X tal que $\tau = \tau_d$. Se puede probar que $\tau|_M = \tau_{d_M}$, donde $\tau|_M$ es la topologia relativa a M y τ_{d_M} es la topología induciva por la métrica d_M.

La prueba del siguiente resultado puede ser consultada en [5, Teorema 32.2, p. 230]

Teorema 1.1.15. *Todo espacio topológico metrizable es T_4.*

La prueba del siguiente resultado puede ser consultada en [5, Teorema 32.3, p. 231]

Teorema 1.1.16. *Todo espacio topológico T_2 y compacto es T_4.*

1.2. Funciones continuas, abiertas y cerradas

Sean X, Y espacios topológicos, $\{A_s\}_{s\in S}$ una cubierta de X y $\{f_s : A_s \to Y\}_{s\in S}$ una familia de funciones continuas. Decimos que la familia $\{f_s\}_{s\in S}$ es **compatible** si para cualesquiera $s_1, s_2 \in S$, se tiene $f_{s_1}(x) = f_{s_2}(x)$ para cada $x \in A_{s_1} \cap A_{s_2}$. Finalmente definamos la función $f : X \to Y$ como $f(x) = f_s(x)$ para cada $x \in A_s$. A f se le llama la **combinación de las funciones** $\{f_s\}_{s\in S}$ y es denotada por $\bigtriangledown_{s\in S} f_s$.

Lema 1.2.1. *Sean $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de X y $\{f_s : U_s \to Y\}_{s\in S}$ una familia de funciones continuas compatible. Sea $f = \bigtriangledown_{s\in S} f_s$. Entonces para cualquier $U \subset Y$,*

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(U).$$

Demostración. Consideremos $x \in f^{-1}(U)$. Como $\bigcup_{s\in S} U_s = X$. Entonces existe $s \in S$ tal que $x \in U_s$. De donde $f(x) = f_s(x) \in U$. Así, $x \in f_s^{-1}(U)$. Por lo tanto, $f^{-1}(U) \subset \bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(U)$.

Por otro lado, si $x \in \bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(U)$, entonces existe $s_2 \in S$ tal que $x \in f_{s_2}^{-1}(U) \subset \bigcup_{s\in S} U_s$. Sea s_3 tal que $x \in U_{s_3}$. Entonces $f(x) = f_{s_3}(x)$ y $f_{s_2}(x) \in U$. Dado que el dominio de f_2 es U y $f_{s_2}^{-1}(U) \subset U_2$, $x \in U_{s_2}$. Por definición de f, para $x \in U_{s_2} \cap U_{s_3}$, $f_{s_2}(x) = f_{s_3}(x) = f(x)$. Así, $f(x) \in U$. Por lo que $x \in f^{-1}(U)$. Por lo tanto, $\bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(U) \subset f^{-1}(U)$.
Así $f^{-1}(U) = \bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(U)$. □

Proposición 1.2.2. *Si $\{U_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta de X y $\{f_s : U_s \to Y\}_{s\in S}$ es una familia de funciones continuas compatible, entonces la combinación de las funciones $\{f_s\}_{s\in S}$, $f = \bigtriangledown_{s\in S} f_s$, es una función continua de X a Y.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de Y, por el Lema 1.2.1

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(U).$$

Sea $s \in S$. Dado que el dominio de f_s es U_s, el conjunto $f_s^{-1}(U)$ es un abierto en U_s y dado que U_s es abierto en X, $f_s^{-1}(U)$ es abierto en X. Así, $f^{-1}(U)$ es un abierto en X. Por lo tanto, f es continua. $\square$

La prueba del siguiente resultado puede ser consultada en [5, Teorema 18.2 (f), p. 122]

Lema 1.2.3. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de X. Si cada función restricción $f|U_\alpha$ es continua, entonces f es continua.*

La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [15, Teorema 12.3, p. 88]

Teorema 1.2.4. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Entonces f es un homeomorfismo y además $g = f^{-1}$.*

A continuación presentamos algunos resultados sobre funciones abiertas y cerradas.

Teorema 1.2.5. *Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es biyectiva, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es abierta.*
2. *f es cerrada.*

Demostración. Supongamos que f es abierta. Sea $F \subset X$un conjunto cerrado, demostraremos que $f(F)$ es un conjunto cerrado. Sabemos que $f(X \setminus F) = Y \setminus f(F)$ y $X \setminus F$ es un conjunto abierto. Dado que f es abierta, entonces $f(X \setminus F)$ es un conjunto abierto de Y. Por lo que $Y \setminus f(F)$ es un conjunto abierto. Así, $f(F)$ es un conjunto cerrado.

Por otro lado, supongamos que f es cerrada. Sea $U \subset X$ un abierto. Demostraremos que $f(U)$ es un conjunto abierto. Sabemos que $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ y $X \setminus U$ es un conjunto cerrado. Dado que f es cerrada entonces $f(X \setminus U)$ es un conjunto cerrado de Y. Por lo que $Y \setminus f(U)$ es un conjunto cerrado. Así $f(U)$ es abierto. $\square$

El siguiente resultado lo podemos encontrar en [15, Teorema 12.2, p. 88]

Teorema 1.2.6. *Sea $f : X \to Y$ es biyectiva. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *f es un homeomorfismo;*

2. *f es continua y abierta;*

3. *f es continua y cerrada.*

1.3. Espacios cociente

Sea (X, τ) un un espacio topológico y R un relación de equivalencia sobre X. El conjunto cociente $Y = X/R$ es el conjunto de clases de equivalencia de los elementos de X; es decir, $Y = \{[x] : x \in X\}$, donde $[x]$ denota una clase de equivalencia.

Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $g : X \to Y$ una función suprayectiva. Consideremos la colección

$$\tau_g = \{G \subset Y | g^{-1}(G) \text{ es abierto en } X\}.$$

Claramente τ_g es una topología para Y, la cual llamaremos la **topología cociente inducida en Y por** g, y cuando no haya confusión, simplemente nos referiremos como la topología cociente. A la pareja (Y, τ_g) es llamado **espacio cociente**. A la función g se le conoce como la función cociente. Todo lo anterior quedará denotado como sigue $(X, (Y, \tau_g), g)$.

Proposición 1.3.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ cerrado. Entonces la función cociente $\rho : X \to X/A$ dada por $\rho(x) = [x]$ es cerrada.*

Demostración. Sea $K \subset X$ cerrado. Para probar que $\rho(K)$ es cerrado en X/A es suficiente ver que $\rho^{-1}(\rho(K))$ es cerrado en X. Consideremos los siguientes casos.
Caso I. Supongamos que $K \cap A = \emptyset$.
Dado que ρ es inyectiva de $X \setminus A$ sobre $X/A \setminus \{A\}$, $\rho^{-1}(\rho(K)) = K$. Por lo que $\rho^{-1}(\rho(K))$ es cerrado en X.
Caso II. Supongamos que $K \cap A \neq \emptyset$.
Probaremos que $\rho^{-1}(\rho(K)) = A \cup K$.
$\subseteq\rfloor$ Sea $x \in \rho^{-1}(\rho(K))$. Entonces $\rho(x) \in \rho(K)$. Así, existe $a \in K$ tal que $\rho(a) = \rho(x)$. Supongamos que $x \notin A \cup K$. Si $a \in A$, $\rho(a) = A = \rho(x) = \{x\}$. De donde $x \in A$, una contradicción. En el caso de que $a \in K \setminus A$, $\rho(a) = \{a\} = \rho(x) = \{x\}$. De donde $x = a \in K$, contradicción. Por lo que $x \in A \cup K$.
$\supseteq\rfloor$ Dado que $K \cap A \neq \emptyset$, $\rho(A) = \{A\} \subset \rho(K)$. De donde $\rho(A \cup K) \subset \rho(K)$. Por lo que $A \cup K \subset \rho^{-1}(\rho(K)$.

De esta manera $\rho^{-1}(\rho(K)) = A \cup K$ y $\rho^{-1}(\rho(K))$ es cerrada.
Por lo tanto, ρ es cerrado. $\square$

1.4. Suma de espacios topológicos

Para esta sección consideremos una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos disjuntos dos a dos, es decir, si $s \neq s'$, $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$. Veamos algunos resultados que usaremos a lo largo del trabajo.

Lema 1.4.1. *Sea $A \subset \bigcup\limits_{s\in S} X_s$ y $s' \in S$. Entonces*

$$((\bigcup_{s\in S} X_s) \setminus A) \cap X_{s'} = X_{s'} \cap (X_{s'} \setminus A).$$

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned}((\bigcup_{s\in S} X_s) \setminus A) \cap X_{s'} &= ((\bigcup_{s\in S} X_s) \setminus (X_s \cap A)) \cap X_{s'} \\ &= (\bigcup_{s\in S}(X_s \setminus (X_s \cap A))) \cap X_{s'} \\ &= \bigcup_{s\in S}((X_s \setminus (X_s \cap A)) \cap X_{s'}).\end{aligned}$$

De lo anterior y dado que $X_s \setminus (X_s \cap A) \subseteq X_s$ y $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$ para cada $s \in S \setminus \{s'\}$, $(\bigcup\limits_{s\in S} X_s \setminus A) \cap X_{s'} = X_{s'} \cap (X_{s'} \setminus A)$. □

Si $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia de espacios topológicos disjunto dos a dos. Definamos $\tau_\oplus = \{U \subset \bigcup\limits_{s\in S} X_s : U \cap X_s$ es abierto en X_s para cada $s \in S\}$.

Lema 1.4.2. *La familia de conjuntos $\tau_\oplus$ es una topología para $\bigcup\limits_{i\in S} X_i$.*

Demostración. 1) Vamos a probar que $\emptyset \in \tau_\oplus$. Tenemos que $\emptyset \subseteq X$ y $\emptyset \cap X_i = \emptyset$ para todo $i \in S$. Así, $\emptyset \in \tau_\oplus$.
Hagamos $X = \bigcup\limits_{i\in S} X_i$. Además $X_i \cap X_s = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Sea $i \in S$. Tenemos que $X \cap X_i = X_i$ es un abierto en X_i. Por lo tanto $X \in \tau_\oplus$.

2) Sean $U, V \in \tau_\oplus$. Demostraremos que $U \cap V \in \tau_\oplus$. Sea $i \in S$. Tenemos que demostar que $(U \cap V) \cap X_i$ es un abierto en X_i. Notemos que

$$(U \cap V) \cap X_i = (U \cap X_i) \cap (V \cap X_i).$$

Dado que $U \cap X_i$ y $V \cap X_i$ son abiertos en X_i, $(U \cap X_i) \cap (V \cap X_i)$ es un abierto en X_i. Por lo tanto $(U \cap V) \cap X_i$ es abierto en X_i.

3) Sean $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \lambda} \subset \tau_\oplus$ e $i \in S$. Demostraremos que $(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha) \cap X_i$ es un abierto en X_i. Notemos que

$$(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (U_\alpha) \cap X_i = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (U_\alpha \cap X_i).$$

Por hipótesis tenemos que $U_\alpha \in \tau_\oplus$; esto es $U_\alpha \cap X_i$ es un abierto en X_i para todo $\alpha \in \Lambda$. Por lo que $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (U_\alpha \cap X_i)$ es un abierto en X_i. Así, $(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha) \cap X_i$ es un abierto en X_i.

De las condiciones 1), 2) y 3), podemos concluir que $\tau_\oplus$ es una topología para $\bigcup\limits_{i \in S} X_i$. $\square$

La unión $\bigcup\limits_{i \in S} X_i$ con la topología $\tau_\oplus$, se llama **suma topológica** de los espacios $\{X_s\}_{s \in S}$ y es denotada por $\bigoplus\limits_{s \in S} X_s$.

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_s\}_{s \in S}$ los cuales no son disjuntos dos a dos, le podemos asociar una familia $\{X'_s\}_{s \in S}$ de espacios disjuntos a pares tales que X'_s es homeomorfo a X_s para cada $s \in S$.

Iniciamos con dicha construcción, por cada $s \in S$, consideramos al singular $\{s\}$ con la topología discreta y por cada $s \in S$, sea $X'_s = X_s \times \{s\}$ con la topología producto. Sea $s \in S$. Probaremos que X'_s es homeomorfo a X_s. Definamos $p_1 : X'_s \longrightarrow X_s$ por $p_1((x, s)) = x$. Veamos que p_1 es un homeomorfismo. Dado que p_1 es la proyección en el primer factor, p_1 es continua,abierta y suprayectiva. Ahora veamos que p_1 es inyectiva. Sean $(x, s), (y, s) \in X'_s$ tales que $p_1((x, s)) = p_1((y, s))$. Entonces $x = p_1((x, s)) = p_1((y, s)) = y$. Por lo que $x = y$. Así $(x, s) = (y, s)$. Por lo que p_1 es inyectiva. Por lo tanto p_1 es un homeomorfismo. Finalmente, obtenemos la familia de espacios $\{X'_s\}_{s \in S}$ con las condiciones requeridas.

Con lo anterior, a lo largo de la tesis supondremos que la familia de los espacios $\{X_s\}_{s \in S}$ son disjuntos dos a dos y usaremos el símbolo $\bigoplus\limits_{s \in S} X_s$ para denotar la suma topológica de los espacios $\{X_s\}_{s \in S}$.

Proposición 1.4.3. *Sea $s \in S$. Si $U \subset X_s$ es abierto, entonces $U \in \tau_\oplus$.*

Demostración. Dado que $U = U \cap X_s$ y $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$ para todo $s' \in S \setminus \{s\}$, tenemos que $U \cap X_{s'} = \emptyset$ para todo $s' \in S \setminus \{s\}$. Así, como U es abierto en X_s y $\emptyset$ es abierto en cada $X_{s'}$, $U \in \tau_\oplus$. □

Proposición 1.4.4. *Un conjunto $A \subset \bigoplus_{s\in S} X_s$ es cerrado si y sólo si $A \cap X_s$ es un conjunto cerrado en X_s para cada $s \in S$.*

En particular X_s es un conjunto cerrado en $\bigoplus_{s\in S} X_s$ para cada $s \in S$.

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea $A \subset \bigoplus_{s\in S} X_s$. Supongamos que A es cerrado en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Entonces $\bigoplus_{s\in S} X_s \setminus A$ es abierto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Sea $s' \in S$. Por definición, $((\bigoplus_{s\in S} X_s) \setminus A) \cap X_{s'}$ es abierto en $X_{s'}$. Por el Lema 1.4.1, $((\bigoplus_{s\in S} X_s) \setminus A) \cap X_{s'} = X_{s'} \setminus (X_{s'} \cap A)$. Así, $X_{s'} \setminus (X_{s'} \cap A)$ es abierto en $X_{s'}$. Por lo que $X_{s'} \cap A$ es cerrado en $X_{s'}$.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $s' \in S$ y supongamos que $X_{s'} \cap A$ es cerrado en $X_{s'}$. Por definición $X_{s'} \setminus (X_{s'} \cap A)$ es abierto en $X_{s'}$. Por el Lema 1.4.1, $((\bigoplus_{s\in S} X_s) \setminus A) \cap X_{s'} = X_{s'} \setminus (X_{s'} \cap A)$. Así, $((\bigoplus_{s\in S} X_s) \setminus A) \cap X_{s'}$ es abierto en $X_{s'}$. Así, $\bigoplus_{s\in S} X_s \setminus A$ es abierto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Por lo tanto A es cerrado en $\bigoplus_{s\in S} X_s$.

Sea $s \in S$. Dado que $X_s \cap X_s = X_s$ y X_s es cerrado en X_s, X_s es cerrado en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. □

Proposición 1.4.5. *Para cada $s \in S$, X_s es abierto y cerrado en $\bigoplus_{s\in S} X_s$.*

Demostración. Por la Proposición 1.4.4, X_s es cerrado en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Que X_s sea abierto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$ se sigue de la Proposición 1.4.3. □

Consideremos a cada X_s como subespacio de la suma $\bigoplus_{s\in S} X_s$. La función inclusión de X_s en $\bigoplus_{s\in S} X_s$, se denotará por $\mathfrak{i}_s$.

Si $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia de espacios topológicos disjuntos a pares y A_s es un subespacio de X_s para cada $s \in S$. Por cada $s \in S$, denotemos por τ_s

la topología para X_s.
Definamos $\rho_\oplus = \{U \subset \bigcup\limits_{s\in S} A_s : U \cap A_s$ es abierto en A_s para cada $s \in S\}$.

Proposición 1.4.6. *Si $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia de espacios topológicos disjuntos a pares y A_s es un subespacio de X_s para cada $s \in S$, entonces $\rho_\oplus = \tau_\oplus|_{\bigcup\limits_{s\in S} A_s}$.*

Demostración. Primero demostraremos que $\rho_\oplus \subset \tau_\oplus|_{\bigcup\limits_{s\in S} A_s}$. Sea $U \subset \bigcup\limits_{s\in S} A_s$ tal que $U \cap A_s$ es abierto en A_s para toda $s \in S$. Así, por cada $s \in S$, existe $W_s \in \tau_s$ tal que $U \cap A_s = W_s \cap A_s$. Sea $W = \bigcup\limits_{s\in S} W_s$. Claramente $W \in \tau_\oplus$. Necesitamos probar que $W \cap \bigcup\limits_{s\in S} A_s = U$. Sea $x \in W \cap \bigcup\limits_{s\in S} A_s = \bigcup\limits_{s\in S} W_s \cap \bigcup\limits_{s\in S} A_s$. Entonces $x \in W_{s'}$ para algún $s' \in S$ y $x \in A_{s''}$ para algún $s'' \in S$. Así, dado que $W_{s'} \subset A_{s'}$ y la familia de $\{A_s\}_{s\in S}$ son ajenos a pares, $s' = s''$. Por lo que $x \in W_{s'} \cap A_{s'} = U \cap A_{s'}$. Concluimos, $x \in U$. Por lo tanto, $\rho_\oplus \subset \tau_\oplus|_{\bigcup\limits_{s\in S} A_s}$.

Ahora demostraremos que $\tau_\oplus|_{\bigcup\limits_{s\in S} A_s} \subset \rho_\oplus$. Sea $L \in \tau_\oplus|_{\bigcup\limits_{s\in S} A_s}$. Entonces existe $U \in \tau_\oplus$ tal que $U \cap \bigcup\limits_{s\in S} A_s = L$. Necesitamos probar que $L \in \rho_\oplus$. Como $U \in \tau_\oplus$, por definición $U \subset \bigcup\limits_{s\in S} X_s$ y $U \cap X_s \in \tau_s$ para toda $s \in S$. Hagamos $W_s = U \cap X_s$ para toda $s \in S$. Dado que, para toda $s \in S$, W_s es un abierto en X_s, tenemos que $W_s \cap A_s$ es un abierto en A_s para toda $s \in S$. Notemos que $\bigcup\limits_{s\in S}(W_s \cap A_s) \subset \bigcup\limits_{s\in S} A_s$ y para $s' \in S$, $(\bigcup\limits_{s\in S} W_s \cap A_s) \cap A_{s'} = W_{s'} \cap A_{s'}$. Así, $\bigcup\limits_{s\in S}(W_s \cap A_s) \in \rho_\oplus$. De lo anterior y de que

$$L = U \cap \bigcup_{s\in S} A_s = \bigcup_{s\in S} U \cap A_s =$$

$$\bigcup_{s\in S}(U \cap X_s) \cap A_s = \bigcup_{s\in S}(W_s \cap A_s),$$

tenemos que $L \in \rho_\oplus$. Por lo tanto, $\rho_\oplus = \tau_\oplus|_{\bigcup\limits_{s\in S} A_s}$. □

Proposición 1.4.7. *Sean (X, ρ) un espacio topológico y $\{X_s\}_{s\in S} \subset \rho$ disjuntos a pares. Si $X = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$, entonces $\rho = \tau_\bigoplus$.*

Demostración. Sea $U \in \rho$. Entonces $U \subset \bigcup_{s\in S} X_s$ y $U \cap X_s$ es un abierto en X_s para cada $s \in S$. De donde $U \in \tau_{\bigoplus}$.

Por otro lado, tomemos $V \in \tau_{\bigoplus}$. Claramente $V \subset X$ y $V \cap X_s$ es un abierto en X_s para cada $s \in S$. De esto y de que cada X_s es un abierto en X, $V \cap X_s$ es un abierto en X para cada $s \in S$. Así, como $V = \bigcup_{s\in S}(V \cap X_s)$, $V \in \rho$. Por lo tanto, $\rho = \tau_{\bigoplus}$ □

Lema 1.4.8. *Sean Y un espacio topológico y $f : \bigoplus_{s\in S} X_s \to Y$ una función. Entonces $f = \bigtriangledown_{s\in S} f \circ i_s$.*

Demostración. Notemos que para $\bigoplus_{s\in S} X_s$, la familia $\{X_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta de $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Dado que los elementos de la familia $\{X_s\}_{s\in S}$ son ajenos dos a dos, la familia $\{f \circ \mathfrak{i}_s : X_s \to Y\}_{s\in S}$ es compatible. Por lo que el dominio de la función $\bigtriangledown_{s\in S}(f \circ \mathfrak{i}_s)$ es $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Para probar la igualdad, sea $x \in \bigoplus_{s\in S} X_s$. Entonces existe $s \in S$ tal que $x \in X_s$. De donde $\bigtriangledown_{s\in S}(f \circ \mathfrak{i}_s)(x) = (f \circ \mathfrak{i}_s)(x) = f(\mathfrak{i}_s(x)) = f(x)$. Por lo tanto $f = \bigtriangledown_{s\in S}(f \circ \mathfrak{i}_s)$. □

Proposición 1.4.9. *Sean Y un espacio topológico y $f : \bigoplus_{s\in S} X_s \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si $f \circ \mathfrak{i}_s : X_s \to Y$ es continua para cada $s \in S$.*

Demostración. Dado que f y $\mathfrak{i}_s$ son continuas, cada $f \circ i_s$ es continua.
Para la suficiencia, notemos que para $\bigoplus_{s\in S} X_s$, la familia $\{X_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta de $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Dado que los elementos de la familia $\{X_s\}_{s\in S}$ son ajenos dos a dos, la familia $\{f \circ \mathfrak{i}_s : X_s \to Y\}_{s\in S}$ es compatible. La continuidad de f se sigue del Lema 1.4.8 y de la Proposición 1.2.2. □

Proposición 1.4.10. *Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos e $i \leq 5$. Si cada X_s es T_i, entonces $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es T_i.*

Demostración. Sólo demostraremos la propiedad para espacios T_4.

Primero, supongamos que cada X_s es T_1. Vamos a probar $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ es T_1. Sean $x_1, x_2 \in \bigoplus\limits_{s\in S} X_s$. Entonces $x_1, x_2 \in \bigcup\limits_{s\in S} X_s$. Consideremos dos casos.

Caso 1 Supongamos que existen $s \in S$ tal que $x_1, x_2 \in X_s$.
Dado que X_s es T_1, existen dos abiertos $U_1, U_2 \subset X_s$ tales que $x_1 \in U_1 \setminus U_2$ y $x_2 \in U_2 \setminus U_1$. Por la Proposición 1.4.5, U_1, U_2 son abiertos en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$. Así, U_1 y U_2 son los abiertos en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ requeridos.

Caso 2 Supongamos que existen $s_1, s_2 \in S$ tal que $x_1 \in X_{s_1}$ y $x_2 \in X_{s_2}$. Dado que $X_{s_1} \cap X_{s_2} = \emptyset$, por la Proposición 1.4.5 se tiene que X_{s_1} y X_{s_2} son los abiertos en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ requeridos.

Por lo tanto $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ esT_1.

Para probar que $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ es T_4, sean $A, B \subset \bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ cerrados ajenos. Sea $s \in S$. Claramente $A \cap X_s$ y $B \cap X_s$ son ajenos. Por la Proposición 1.4.4, $A \cap X_s$ y $B \cap X_s$ son cerrados. Dado que X_s es T_4, existen dos abiertos $U_1^s, U_2^s \subset X_s$ tales que $A \cap X_s \subset U_1^s$, $B \cap X_s \subset U_2^s$ y $U_1^s \cap U_2^s = \emptyset$. Hagamos $U_1 = \bigcup\limits_{s\in S} U_1^s$ y $U_2 = \bigcup\limits_{s\in S} U_2^s$. Claramente U_1, U_2 son abiertos ajenos en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$. Finalmente probaremos que $A \subset U_1$ y $B \subset U_2$. Sea $x \in A$. Dado que $A \subset \bigcup\limits_{s\in S} X_s$, existe un $s \in S$ tal que $x \in X_s$. Así, $x \in U_1^s$. Por lo que $x \in U_1$. De esta forma $A \subset U_1$. De la misma manera se prueba que $B \subset U_2$. $\square$

Teorema 1.4.11. *Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ espacios topológicos separables ajenos dos a dos. Entonces $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es separable.*

Demostración. Sea D_i un denso numerable de X_i. Demostraremos que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D_i$ es numerable y denso en $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Sea $U \in \tau_{\oplus}\setminus\{\emptyset\}$ entonces $U \cap X_i \in \tau_{X_i}$. Dado que D_i es denso en X_i tenemos que $(U \cap X_i) \cap D_i \neq \emptyset$.
Así, $\emptyset = X_i \cap U \cap D_i \subset X_i \cap (U \cap \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D_i) = (X_i \cap U) \cap \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D_i \subset U \cap \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D_i$.
Por lo tanto subespacios abiertos de un espacio separable son separables . Así, $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es separable. $\square$

Teorema 1.4.12. *La suma $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ es metrizable si y sólo si cada espacio X_s es metrizable.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que la suma $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es metrizable. Dado que cada X_s es un subespacio de $(\bigoplus_{s\in S} X_s, \tau_{\oplus})$ y $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es metrizable, cada X_s es metrizable.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que cada X_s es metrizable. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para cada $s \in S$ la topología en X_s es inducida por una metrica d_s acotada por 1, es decir, $d_s(a,b) \leq 1$ para cada $a,b \in X_s$. Sean $x,y \in \bigoplus_{s\in S} X_s$. Definimos la función $d : \bigoplus_{s\in S} X_s \times \bigoplus_{s\in S} X_s \longrightarrow [0,\infty)$ como

$$d(x,y) = \begin{cases} d_s(x,y), & \text{si } x,y \in X_s \text{ para algún } s \in S, \\ \\ 1, & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Veremos que d es una métrica sobre X.

Sean $x,y \in \bigoplus_{s\in S} X_s$. Probaremos que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Primero, supongamos que $d(x,y) = 0$. Entonces existe $s \in S$ tal que $x,y \in X_s$. Así, $0 = d(x,y) = d_s(x,y)$. Dado que d_s es una métrica, $x = y$.

Ahora si $x = y$, por definición de suma, existe $s \in S$ tal que $x,y \in X_s$. Así, $d(x,y) = d_s(x,y)$. Dado que d_s es una métrica y $x = y$, $0 = d_s(x,y) = d(x,y)$.

Para probar la condición de simetría, sean $x,y \in \bigoplus_{s\in S} X_s$.
Caso I. Supongamos que existe $s \in S$ tal que $x,y \in X_s$.
Así $d(x,y) = d_s(x,y)$ y dado que d_s es una métrica $d(x,y) = d_s(x,y) = d_s(y,x) = d(y,x)$. Por lo que $d(x,y) = d(y,x)$.
Caso II. Sean $s_1, s_2 \in S$ tales que $x \in X_{s_1}$ y $y \in X_{s_2}$.
Así, $d(x,y) = 1 = d(y,x)$.

Para probar la desigualdad del triángulo. Sean $x,y,z \in \bigoplus_{s\in S} X_s$. Demostraremos que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Consideremos los siguientes casos.
Caso I. Supongamos que $x,z \in X_s$ para algún $s \in S$.
Entonces $d(x,z) = d_s(x,z)$. Para la otra parte de la desigualdad, tenemos los siguientes dos subcasos.

Subcaso i. Si $y \in X_s$, entonces $d_s(x,z) \leq d_s(x,y) + d_s(y,z)$. Por lo que

$d(x,z) = d_s(x,z) \leq (d(x,y) = d_s(x,y)) + (d(y,z) = d_s(y,z))$. De donde $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Subcaso ii. Si $y \notin X_s$, entonces $d(x,y) = 1 = d(y,z)$. De donde $d(x,z) = d_s(x,z) \leq 1 < 2 = d(x,y) + d(y,z)$.

Caso II. Supongamos que existen $s_1 \neq s_2 \in S$ tales que $x \in X_{s_1}$ y $z \in X_{s_2}$. Entonces $d(x,z) = 1$. Ahora consideremos los siguientes subcasos.

Subcaso i. Supongamos que $y \notin X_{s_1}$ o $y \notin X_{s_2}$.
Entonces $d(x,y) = 1$ o $d(y,z) = 1$. Por lo que $1 \leq d(x,y) + d(y,z)$. Así $d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Subcaso ii. Supongamos que $y \in X_{s_1} \cup X_{s_2}$.
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $y \in X_{s_1}$. Entonces $d(y,z) = 1$. Por lo que $1 \leq d(x,y) + d(y,z)$. De donde $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

De lo anterior, d es una métrica para $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$.

Finalmente probaremos que $\tau_\oplus = \tau_d$.
Primero, sean $U \in \tau_d$ y $x \in U \subset \bigcup\limits_{s\in S} X_s$. Así, existe $\epsilon > 0$ tal que $B^d_\epsilon(x) \subset U$. Sea $s \in S$ tal que $x \in X_s$. Claramente $B^d_\epsilon(x) \cap X_s \subset B^d_\epsilon(x)$. Necesitamos probar que $B^d_\epsilon(x) \cap X_s = B^{d_s}_\epsilon(x)$.

Sea $y \in B^d_\epsilon(x) \cap X_s$ tenemos que $d(y,x) = d_s(y,x) < \epsilon$. Por lo tanto, $y \in B^{d_s}_\epsilon(x)$. Así, $B^d_\epsilon(x) \cap X_s \subset B^{d_s}_\epsilon(x)$. Por otro lado, sea $z \in B^{d_s}_\epsilon(x) \subset X_s$. Entonces $\epsilon > d_s(x,z) = d(x,z)$. Por lo que $z \in B^d_\epsilon(x)$. Así, $z \in B^d_\epsilon(x) \cap X_s$. Por lo tanto $B^d_\epsilon(x) \cap X_s = B^{d_s}_\epsilon(x)$.
Así, $B^d_\epsilon(x) \cap X_s \in \tau_{d_s}$. Por la Proposición 1.4.3, $B^d_\epsilon(x) \cap X_s \in \tau_\oplus$.
Concluimos que para cada $x \in U$, $B^d_\epsilon(x) \cap X_s$ es un abierto en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ que contiene a x y está contenido en U. Por lo tanto $U \in \tau_\oplus$.

Para ver la otra contención, sean $U \in \tau_\oplus$, $x \in U$ y $s \in S$ tal que $x \in X_s$. Por la definición de $\tau_\oplus$, $U \cap X_s$ es abierto en X_s. Dado que la topología de X_s coincide con la topología inducida por d_s, existe $\epsilon' > 0$ tal que $B^{d_s}_{\epsilon'}(x) \subset U \cap X_s$. Sea $0 < \epsilon < \epsilon'$ tal que $\epsilon < 1$. Entonces $B^{d_s}_\epsilon(x) \subset B^{d_s}_{\epsilon'}(x) \subset U \cap X_s$. Necesitamos probar que $B^d_\epsilon(x) = B^{d_s}_\epsilon(x)$. Sea $y \in B^{d_s}_\epsilon(x)$. Como $y \in X_s$ y $d_s(x,y) = d(x,y) < \epsilon$, $y \in B^d_\epsilon(x)$.
Por otro lado, sea $y \in B^d_\epsilon(x)$. En el caso de que $y \in X_{s'}$ para algún $s' \in S \setminus \{s'\}$, entonces $1 = d(x,y) < \epsilon < 1$, una contradicción. Por lo que $y \in X_s$. De donde $d(x,y) = d_s(x,y) < \epsilon$. Así, $y \in B^{d_s}_\epsilon(x)$. Por lo tanto $B^d_\epsilon(x) \subset$

$U \cap X_s \subset U$.
Esto termina la prueba de que $\tau_\oplus = \tau_d$ y que $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es metrizable. $\square$

Sean X un conjunto y S una familia de índices. Por cada $s \in S$, sea $X_s = X \times \{s\}$. Claramente $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos y $X \times S = \bigcup_{s\in S} X \times \{s\}$. Sean τ la topología para X, τ_{dis} la topología discreta para S y τ_s la topología discreta para $\{s\}$ para cada $s \in S$. Dado que $X \times S = \bigcup_{s\in S} X \times \{s\}$, es fácil probar que la topología producto para $X \times S$ coincide con la topología $\tau_\oplus$. Sin embargo, nosotros elegimos probar el siguiente lema.

Lema 1.4.13. *Entonces $X \times S$ es homeomorfo a $\bigoplus_{s\in S} X_s$.*

Demostración. Es fácil probar que, para $U \subset \bigcup_{s\in S} X_s$, tenemos que . Observemos que, para $V \subset X$ y $L \subset S$, se tiene que $V \times L = \bigcup_{s\in L} V \times \{s\}$. Sea $id : X \times S \to \bigoplus_{s\in S} X_s$ la función identidad la cual esta definida como $id(x, s) = (x, s)$. Claramente id es biyectiva. Veremos que id es continua y abierta.

Ahora sea $U \in \tau_{\bigoplus}$. Entonces $U \cap X_s \in \tau_{X_s}$ para todo $s \in S$. Dado que cada $X \times \{s\}$ es abierto en $X \times S$, $U \cap X \times \{s\}$ es un abierto en $X \times S$ para todo $s \in S$. De esto y de que $i^{-1}(U) = U = \bigcup_{s\in S} U \cap X_s$, $i^{-1}(U) = U$ es un abierto en $X \times S$. Esto prueba la continuidad de id.
Ahora, veamos que id es abierta. Sea $V \times L$ un abierto básico de $X \times S$. Dado que $id(V \times L) = V \times L = \bigcup_{s\in L} V \times \{s\}$ y cada $V \times \{s\}$ es abierto en X_s, $V \times L$ es abierto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Por lo que id es abierta. Por lo tanto id es un homeomorfismo. $\square$

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ será considerado como espacio topológico con la topología discreta. Los espacios $I = [0, 1]$ y $H = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ serán considerados como espacios topológicos con la topología usual. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $X_i = I \times \{i\}$. Por el Lema 1.4.13, $I \times \mathbb{N}$ es homemorfo a $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Analogamente, para cada $s \in \mathbb{N}$ consideremos $X_s = H \times \{s\}$. Por el Lema 1.4.13, $H \times \mathbb{N}$ es homeomorfo a $\bigoplus_{s\in\mathbb{N}} X_s$.
A los espacios cocientes $I \times \mathbb{N}/(\{0\} \times \mathbb{N})$ y $H \times \mathbb{N}/(\{0\} \times \mathbb{N})$ los denotaremos como $J(\mathbb{N})$ y $S(\mathbb{N})$ respectivamente.

Proposición 1.4.14. *Los espacios $I \times \mathbb{N}$ y $H \times \mathbb{N}$ son métricos y separables.*

Demostración. Únicamente haremos la prueba para $I \times \mathbb{N}$. Notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_i = I \times \{i\}$ es homeormofo a I. Entonces cada X_i es métrico y separable. Por lo Teoremas 1.4.11 y 1.4.12 , $I \times \mathbb{N}$ es métrico y separable. $\square$

Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ y $\{Z_s\}_{s\in S}$ dos familias de espacios topológicos y $\{f_s : Z_s \to X_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones. Definamos la función $\triangle_{s\in S} f_s : \bigoplus_{s\in S} Z_s \to \bigoplus_{s\in S} X_s$ como $\triangle_{s\in S} f_s(z) = f_s(z)$ si $z \in Z_s$. Claramente $\triangle_{s\in S} f_s$ está bien definida.

En el siguiente resultado probamos algunas propiedades que cumple la función $\triangle_{s\in S} f_s$.

Lema 1.4.15. *Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ y $\{Z_s\}_{s\in S}$ dos familias de espacios topológicos y $\{f_s : Z_s \to X_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones. Entonces se cumplen lo siguiente:*

1. *Para todo $s \in S$, $(\triangle_{s\in S} f_s)^{-1}(X_s) = Z_s$.*

2. *Si cada f_s es continua, cerrada y suprayectiva, entonces $\triangle_{s\in S} f_s$ es continua, cerrada y suprayectiva.*

Demostración. Para probar 1., sean $s \in S$ y $z \in Z_s$. Entonces $\triangle_{s\in S} f_s(z) = f_s(z) \in X_s$. Así, $z \in (\triangle_{s\in S} f_s)^{-1}(X_s)$.
Ahora, por otro lado, sea $z \in (\triangle_{s\in S} f_s)^{-1}(X_s)$. Entonces $\triangle_{s\in S} f_s(z) \in X_s$. Si $z \notin Z_s$, entonces existe $s' \in S \setminus \{s\}$ tal que $z \in Z_{s'}$, por lo que $\triangle_{s\in S} f_s(z) \in X_s \cap X_{s'}$, contradicción. Por lo tanto $z \in Z_s$.
De lo anterior $(\triangle_{s\in S} f_s)^{-1}(X_s) = Z_s$.

Para la segunda parte, notemos que $\{Z_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta de $\bigoplus_{s\in S} Z_s$ (ver Proposición 1.4.5).
De la definición de $\triangle_{s\in S} f_s$, se sigue que $\triangle_{s\in S} f_s|_{Z_s} = f_s$ para todo $s \in S$. Por

el Lema 1.2.3, $\triangle_{s\in S} f_s$ es continua.
De la definición de $\triangle_{s\in S} f_s$ y de que cada f_s es suprayectiva, $\triangle_{s\in S} f_s$ es suprayectiva.

Para probar que $\triangle_{s\in S} f_s$ es cerrada, sean K un cerrado en $\bigoplus\limits_{s\in S} Z_s$ y $s \in S$. Por el Lema 1.4.4, es suficiente ver que $\triangle_{s\in S} f_s(K) \cap X_s$ es cerrado en X_s. Dado que K es cerrado en $\bigoplus\limits_{s\in S} Z_s$, por el Lema 1.4.4, $K \cap Z_s$ es cerrado en Z_s. Así, como f_s es cerrada, $f_s(K \cap Z_s)$ es cerrado en X_s. Por definición de $\triangle_{s\in S} f_s$, $\triangle_{s\in S} f_s(K \cap Z_s) = f_s(K \cap Z_s)$. Así, por 1. y por el Lema 1.1.5, $f_s(K \cap Z_s) = \triangle_{s\in S} f_s(K \cap Z_s) = \triangle_{s\in S} f_s(K) \cap X_s$. Por lo que $\triangle_{s\in S} f_s(K) \cap X_s$ es cerrado en X_s. Esto prueba que $\triangle_{s\in S} f_s$ es cerrada. $\square$

1.5. Producto topológico

En esta sección veremos algunos resultados de espacios producto que usaremos a lo largo del trabajo.

Sea X un conjunto, $\{(Y_s, \tau_{Y_s})\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_s : X \to Y_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones. Se puede definir una topología τ en X que está generada por la base que consiste de todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{k} f_{s_i}^{-1}(V_i)$, donde $s_1, \ldots, s_k \in S$ y V_i es un abierto de Y_{s_i} para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Además τ es la mínima topología que contiene a $\{f_s^{-1}(V_s) : s \in S, V_s \in \tau_{Y_s}\}$.

Regularmente se dice que τ es la topología topología generada por la familia de funciones $\{f_s\}_{s\in S}$.

Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos. Definamos el producto cartesiano de la familia $\{X_s\}_{s\in S}$ como:

$$\prod_{s\in S} X_s = \{x : S \to \bigcup_{s\in S} X_s : x(s) \in X_s \text{ para cada } s \in S\}.$$

Por cada $s \in S$, definimos la función $p_s : \prod_{s\in S} X_s \to X_s$ como $p_s(x) = x(s)$. Hagamos τ_{prod} la topología generada por las funciones $\{p_s\}_{s\in S}$ la cual se denomina topología de Tychonoff o topología producto sobre $\prod_{s\in S} X_s$; la función p_s es llamada la proyección de $\prod_{s\in S} X_s$ en X_s.

El producto cartesiano de una familia finita de espacios $\{X_i\}_{i=1}^{k}$ es denotada por $X_1 \times \cdots \times X_k$. Si $X_i = X$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces el producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_k$ es denotado por X^k.

Para toda $i \in \{1, \cdots, k\}$, sea $W_{s_i} \subset X_{s_i}$. Definamos $\mathcal{W}(W_{s_1}, \ldots, W_{s_k}) = \prod_{s\in S} Y_s$, donde $Y_s = X_s$ para toda $s \in S \setminus \{s_1, \ldots, s_k\}$ y $Y_{s_i} = W_{s_i}$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Lema 1.5.1. *Si $W_{s_i} \subset X_{s_i}$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $\mathcal{W}(W_{s_1}, \ldots, W_{s_k}) =$*

$\bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$.

Demostración. Sea $x \in \prod\limits_{s\in S} Y_s$. Entonces $x : S \to \bigcup\limits_{s\in S} Y_s$. Claramente x tiene contradominio $\bigcup\limits_{s\in S} X_s$. Así, $x \in \prod\limits_{s\in S} X_s$. Dado que $p_{s_i}(x) = x(s_i) \in W_{s_i}$, $x \in p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$. Así $\mathcal{W}(W_{s_1}, \ldots, W_{s_k}) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$.

Por otro lado, sea $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$. Entonces $x(s) \in X_s$ para toda $s \in S \setminus \{s_1, \ldots, s_k\}$ y $P_{s_i}(x) = x(s) \in W_{s_i}$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo que x es una función cuyo contradominio es $\bigcup\limits_{s\in S} Y_s$, $x \in \prod\limits_{s\in S} Y_s$, y así $x \in \mathcal{W}(W_{s_1}, \ldots, W_{s_k})$.

Por lo tanto, $\mathcal{W}(W_{s_1}, \ldots, W_{s_k}) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$. □

Proposición 1.5.2. *La familia* $\{\mathcal{W}(W_{s_1}, \ldots, W_{s_k}) : s_1, \ldots, s_k \in S, k \in \mathbb{N}, (W_{s_1}, \ldots, W_{s_k}) \in \tau_{X_{s_1}} \times \cdots \times \tau_{X_{s_k}}\}$ *es una base para el producto cartesiano* $\prod\limits_{s\in S} X_s$.

Demostración. Consideremos $\beta = \{\mathcal{W}(W_{s_1}, \ldots, W_{s_k}) : s_1, \ldots, s_k \in S, k \in \mathbb{N}, (W_{s_1}, \ldots, W_{s_k}) \in \tau_{X_{s_1}} \times \cdots \times \tau_{X_{s_k}}\}$, y $\beta' = \{\bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(V_i) : s_1, \ldots, s_k \in S, k \in \mathbb{N}, V_i \in \tau_{X_{s_i}}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Por el Lema 1.5.1, $\beta = \beta'$. Así, dado que β' es una base para la topología producto, β es una base para la topología producto. □

La base β para $\prod\limits_{s\in S} X_s$ es llamada la base canónica para el producto cartesiano.

Lema 1.5.3. *Sean* $\{X_s\}_{s\in S}$ *una familia de conjuntos y* $A_s \subset X_s$ *para toda* $s \in S$. *Si* $A = \prod\limits_{s\in S} A_s$ *y* $W \subset X_s$, *entonces*

$$p_s|_A^{-1}(W \cap A_s) = A \cap p_s^{-1}(W).$$

Demostración. Sea $x \in p_s|_A^{-1}(W \cap A_s) \subset A$. Dado que cada $A_s \subset X_s$, el contradominio de la función x es $\bigcup_{s \in S} X_s$. Así, como $p_s|_A(x) = p_s(x) = x(s) \in W \cap A_s \subset W$, $x \in p_s^{-1}(W)$. Por lo que $x \in A \cap p_s^{-1}(W)$.

Para probar la otra contención. Sea $y \in A \cap p_s^{-1}(W)$. Entonces $y \in A$ y $y \in p_s^{-1}(W)$. Así, $p_s|_A(y) = p_s(y) = y(s) \in W$. De donde $p_s|_A(y) = y(s) \in W \cap A_s \subset A_s$. Por lo que $y \in p_s|_A^{-1}(W \cap A_s)$.

Por lo tanto, $p_s|_A^{-1}(W \cap A_s) = A \cap p_s^{-1}(W)$. □

Por cada $s \in S$, sea $A_s \subset X_s$. Denotemos por τ_{prod}^A a la topología producto para $A = \prod_{s \in S} A_s$. Observemos que si $x : S \to \bigcup_{s \in S} A_s$ y $x(s) \in A_s$, dado que cada $A_s \subset X_s$, el contradominio de x es $\bigcup_{s \in S} X_s$ y $x(s) \in X_s$. Por lo que $\prod_{s \in S} A_s \subset \prod_{s \in S} X_s$. Recordemos que $\tau_{prod}|_A$ es la topología subespacio para A.

Proposición 1.5.4. *Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos. Si A_s es un subespacio de X_s para toda $s \in S$, entonces:*

$$\tau_{prod}|_A = \tau_{prod}^A.$$

Demostración. Primero, sea $\mathcal{W} \in \tau_{prod}$ tal que $\mathcal{W} \cap A \in \tau_{prod}|_A$. Queremos ver que $\mathcal{W} \cap A \in \tau_{prod}^A$. Sea $x \in \mathcal{W} \cap A$. Como $\mathcal{W} \in \tau_{prod}$, existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $W_{s_i} \in \tau_{X_{s_i}}$ para todo $i \in 1, \ldots, n$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i}) \subset \mathcal{W}$. Entonces $x \in (\bigcap_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})) \cap A \subset W \cap A$. Por el Lema 1.5.3, $p_{s_i}^{-1}(W_{s_i}) \cap A = p_{s_i}|_A^{-1}(W_{s_i} \cap A_{s_i})$ para todo $i \in 1, \ldots, n$. Así, dado que $p_{s_i}|_A^{-1}(W_{s_i} \cap A_{s_i}) \in \tau_{prod}^A$ para todo $i \in 1, \ldots, n$, $x \in \bigcap_{i=1}^{k} p_{s_i}|_A^{-1}(W_{s_i} \cap A_{s_i}) \subset \mathcal{W} \cap A$. Por lo tanto $\mathcal{W} \cap A \in \tau_{prod}^A$

Por otro lado, sea $U \in \tau_{prod}^A$ y $x \in U$. Por definición de τ_{prod}^A, existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $V_{s_i} \in \tau_{X_{s_i}}$ para todo $i \in 1, \ldots, n$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{k} p_{s_i}|_A^{-1}(V_{s_i} \cap A_{s_i}) \subset U$. Por el Lema 1.5.3, $p_{s_i}|_A^{-1}(V_{s_i} \cap A_{s_i}) = p_{s_i}^{-1}(V_{s_i}) \cap A$ para todo $i \in 1, \ldots, n$. De donde $x \in \bigcap_{i=1}^{k} (p_{s_i}^{-1}(V_{s_i}) \cap A) \subset U$. De lo anterior y de que $(\bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(V_{s_i})) \cap A \in \tau_{prod}|_A$, $x \in (\bigcap\limits_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(V_{s_i})) \cap A \subset U$. Por lo tanto $U \in \tau_{prod}|_A$.

Así, $\tau_{prod}|_A = \tau_{prod}^A$. □

Proposición 1.5.5. *Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos. Si A_s es un subespacio de X_s para toda $s \in S$, entonces*

$$\mathrm{cl}(\prod_{s\in S} A_s) = \prod_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s).$$

Demostración. Primero, sea $x \in \mathrm{cl}(\prod\limits_{s\in S} A_s)$. Queremos ver que $x \in \prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s)$. Notemos que $x \in \prod\limits_{s\in S} X_s$. Queremos ver que para toda $s \in S, x(s) \in \mathrm{cl}(A_s)$. Sean $s \in S$ y $W \in \tau_{X_s}$ tal que $x(s) \in W$. Probaremos que $W \cap A_s \neq \emptyset$. Notemos que $x \in p_s^{-1}(W) \in \tau_{prod}$. Por definición de cerradura, $p_s^{-1}(W) \cap \prod\limits_{s\in S} A_s \neq \emptyset$. Sea $y \in p_s^{-1}(W) \cap \prod\limits_{s\in S} A_s$. Entonces $p_s(y) = y(s) \in W$ y $p_s(y) = y(s) \in A_s$. Así, $y(s) \in W \cap A_s$. Por lo tanto, $W \cap A_s \neq \emptyset$. Así $x(s) \in \mathrm{cl}(A_s)$. De donde el contradominio de x es $\bigcup\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s)$ y por lo que $x \in \prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s)$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}(\prod\limits_{s\in S} A_s) \subset \prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s)$.

Por otro lado, sea $x \in \prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s)$. Dado que $x(s) \in \mathrm{cl}(A_s) \subset X_s$ para toda $s \in S$, x tiene contradominio $\bigcup\limits_{s\in S} X_s$. Por lo que $x \in \prod\limits_{s\in S} X_s$. Queremos ver que $x \in \mathrm{cl}(\prod\limits_{s\in S} A_s)$. Sean $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $W_{s_i} \in \tau_{X_{s_i}}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$. Vamos a demostrar que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i}) \cap \prod\limits_{s\in S} A_s \neq \emptyset$. Sabemos que $p_{s_i}(x) = x(s_i) \in W_{s_i}$ y $x(s_i) \in \mathrm{cl}(A_{s_i})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $W_{s_i} \cap A_{s_i} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $a_i \in W_{s_i} \cap A_{s_i} \subset X_{s_i}$. Por el Axioma de Elección, $\prod\limits_{s\in S} A_s \neq \emptyset$. Sea $z \in \prod\limits_{s\in S} A_s$. Definamos $y : S \to \bigcup\limits_{s\in S} A_s$ como

$$y(s) = \begin{cases} a_i, & si \quad s \in \{s_1, \ldots, s_n\}, \\ \\ z(s), & si \quad s \notin \{s_1, \ldots, s_n\}. \end{cases}$$

Claramente $y \in \prod\limits_{s\in S} A_s$. Queremos ver que $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$. Notemos que

$p_{s_i}(y) = y(s_i) = a_i \in W_{s_i} \cap A_{s_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo que $y \in p_{s_i}^{-1}(W_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De donde $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i}) \cap \prod\limits_{s \in S} A_s$. Concluimos que $x \in \mathrm{cl}(\prod\limits_{s\in S} A_s)$ y que $\prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s) \subset \mathrm{cl}(\prod\limits_{s\in S} A_s)$.

Por lo tanto $\mathrm{cl}(\prod\limits_{s\in S} A_s) = \prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s)$. □

Proposición 1.5.6. *Sean $\{A_s\}_{s\in S}$ y $\{B_s\}_{s\in S}$ familias de conjuntos no vacíos. Entonces $\prod\limits_{s\in S} A_s = \prod\limits_{s\in S} B_s$ si y sólo si $A_s = B_s$ para toda $s \in S$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea $s_0 \in S$. Probaremos que $A_{s_0} = B_{s_0}$. Para probar que $B_{s_0} \subset A_{s_0}$, sea $b \in B_{s_0}$. Tomemos $x \in \prod\limits_{s\in S} A_s$. Dado que $\prod\limits_{s\in S} A_s = \prod\limits_{s\in S} B_s$, $x \in \prod\limits_{s\in S} B_s$. Definamos $y : S \to \bigcup\limits_{s\in S} B_s$ como

$$y(s) = \begin{cases} b, & si \quad s = s_0, \\ \\ x(s), & si \quad s \neq s_0. \end{cases}$$

Así, $y \in \prod\limits_{s\in S} B_s$. De donde $y \in \prod\limits_{s\in S} A_s$. Por lo que $y(s_0) = b \in A_{s_0}$. Por lo tanto $B_{s_0} \subset A_{s_0}$.

Análogamente se puede probar que $A_{s_0} \subset B_{s_0}$.

Por lo tanto $A_{s_0} = B_{s_0}$ para toda $s \in S$.

$\Leftarrow\rfloor$ Esta implicación es inmediata. □

Corolario 1.5.7. *Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos y $A_s \subset X_s$ para toda $s \in S$. Entonces $\prod\limits_{s\in S} A_s$ es cerrado en $\prod\limits_{s\in S} X_s$ si y sólo si A_s es cerrado en X_s para toda $s \in S$.*

Demostración. Supongamos que A_s es cerrado en X_s para toda $s \in S$. Entonces $\prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s) = \prod\limits_{s\in S} A_s$. Así, por la Proposición 1.5.5, tenemos que $\mathrm{cl}(\prod\limits_{s\in S} A_s) = \prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s) = \prod\limits_{s\in S} A_s$. Por lo tanto, $\prod\limits_{s\in S} A_s$ es cerrado.

Por otro lado, supongamos que $\prod\limits_{s\in S} A_s$ es cerrado. Entonces $\prod\limits_{s\in S} A_s = \mathrm{cl}(\prod\limits_{s\in S} A_s)$. Por la Proposición 1.5.5, tenemos que $\prod\limits_{s\in S} A_s = \prod\limits_{s\in S} \mathrm{cl}(A_s)$. Por la Proposición 1.5.6, tenemos que $A_s = \mathrm{cl}(A_s)$ para toda $s \in S$. Por lo tanto, A_s es cerrado en X_s para toda $s \in S$. $\square$

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [1, Teorema 2.3.11, p. 80]

Teorema 1.5.8. *Cualquier producto de espacios T_i es un espacio T_i para toda $i \leq 3$. Si el producto cartesiano $\prod\limits_{s\in S} X_s$ es un espacio T_i para toda $i \leq 5$, entonces cada X_s es un espacio T_i para toda $i \leq 5$*

Demostración. Sólo haremos la demostración para espacios T_1.
Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios T_1, consideremos $x, y \in \prod\limits_{s\in S} X_s$ tales que $x \neq y$. Entonces existe $s_0 \in S$ tal que $x_{s_0} \neq y_{s_0} \in X_{s_0}$. Dado que X_{s_0} es T_1, entonces existen abiertos $U_0, V_0 \subset X_{s_0}$ tales que $x_{s_0} \in U_0 \setminus V_0$ y $y_{s_0} \in V_0 \setminus U_0$. Definamos $U, V \subset \prod\limits_{s\in S} X_s$ como

$$U_s = \begin{cases} X_s & si \quad j \neq s_0 \\ \\ U_0 & si \quad j = s_0 \end{cases} \ldots V_s = \begin{cases} X_s & si \quad j \neq s_0 \\ \\ V_0 & si \quad j = s_0 \end{cases}$$

Donde U, V son abiertos en $\prod\limits_{s\in S} X_s$ por definición y $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$. Por lo tanto, $\prod\limits_{s\in S} X_s$ es T_1 $\square$

Lema 1.5.9. *Sea $\{X_s : s \in S\}$ una colección de espacios topológicos.*

1. *Si $\mathcal{U}$ es una vecindad de x en $\prod\limits_{s\in S} X_s$, entonces existe $\{s_1 \ldots, s_n\} \subset S$ tal que $p_i(\mathcal{U}) = X_i$ para cada $i \in S \setminus \{s_1, \ldots, s_n\}$.*

2. *Sean $F \subset S$ finito y no vacío y $x \in \prod\limits_{s\in S} X_s$. Supongamos que para todo $s \in S \setminus F$, X_s es compacto. Si para cada $s \in F$, K_s es una vecindad compacta de $x(s)$ en X_s, entonces $\bigcap\limits_{s\in F} p_s^{-1}(K_s)$ es una vecindad compacta de x en $\prod\limits_{s\in S} X_s$.*

Demostración. Para 1., sea $\mathcal{U}'$ un abierto en $\prod\limits_{s\in S} X_s$ tal que $x \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Consideremos $\{s_1 \ldots, s_n\} \subset S$ y abiertos $U_{s_1}, \ldots, U_{s_n}$ en $X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}$, respectivamente, tales que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(U_{s_i}) \subset \mathcal{U}'$. Sea $s \in S \setminus \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Dado que $\mathcal{W}(U_{s_1}, \ldots, U_{s_n}) = \bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(U_{s_i})$, se tiene que

$$X_s = p_s(\mathcal{W}(U_{s_1}, \ldots, U_{s_n})) = p_s(\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(U_{s_i})) \subset p_s(\mathcal{U}') \subset p_s(\mathcal{U}) \subset X_s.$$

De donde $p_s(\mathcal{U}) = X_s$. □

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [7, Teorema 17.8, p. 120]

Teorema 1.5.10. *Sea $\{X_s : s \in S\}$ una coleccion de espacios topológicos. Entonces $\prod_{s\in S} X_s$ es compacto si y sólo si X_s es compacto para toda $s \in S$.*

Es conocido el siguiente resultado.

Proposición 1.5.11. *Sean $\{(X_s, \tau_s)\}_{s\in S}$ familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{s\in S} X_s$. Entonces X es primero numerable si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*
(1) X_s es primero numerable, para cada $s \in S$,
(2) el conjunto $\Lambda = \{s \in S : \tau_s$ tiene por lo menos tres elementos$\}$ es numerable.

1.6. Estrella de un conjunto y refinamientos

Sean X un conjunto no vacío, $M \subset X$, $x \in X$, y $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$, $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ dos cubiertas de X.
Decimos que $\mathcal{B}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{A}$ o que $\mathcal{B}$ **refina** a $\mathcal{A}$ si para toda $t \in T$ existe $s \in S$ tal que $B_t \subset A_s$.
La **estrella de** M **con respecto a** $\mathcal{A}$ es el conjunto $St(M, \mathcal{A}) = \bigcup\{A_s : M \cap A_s \neq \emptyset\}$.
La estrella de $\{x\}$ con respecto a $\mathcal{A}$ le llamaremos **la estrella del punto** x **con respecto a** $\mathcal{A}$ y la denotaremos por $St(x, \mathcal{A})$ en lugar de $St(\{x\}, \mathcal{A})$.
Decimos que $\mathcal{B}$ es un **refinamiento estrella de** $\mathcal{A}$ si para cada $t \in T$ existe $s \in S$ tal que $St(B_t, \mathcal{B}) \subset A_s$.
Decimos que $\mathcal{B}$ es un **refinamiento baricéntrico de** $\mathcal{A}$ si para cada $x \in X$ existe $s \in S$ tal que $St(x, \mathcal{B}) \subset A_s$.

Observemos que la estrella de $\{x\}$ con respecto a $\mathcal{A}$ contiene al singular $\{x\}$.
Claramente, cada refinamiento estrella es un refinamiento baricéntrico y cada refinamiento baricéntrico es un refinamiento.

Para el caso en que $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$, por cada $x \in X$, la estrella del punto x con respecto a $\mathcal{B}$ es $St(x, \mathcal{B}) = \{x\}$.

Ahora, si consideremos $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ una cubierta de X y $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$, notemos que $\mathcal{B}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{A}$ pues si $x \in X$, existe $s \in S$ tal que $x \in A_s$. Así, $St(x, \mathcal{B}) = \{x\} \subset A_s$. De esta manera $\mathcal{B}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{A}$.

A continuación presentamos dos resultados importantes.

Lema 1.6.1. *Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ una cubierta de X. Si $N \subset M$, entonces $St(N, \mathcal{A}) \subset St(M, \mathcal{A})$*

Demostración. Dado que $N \subset M$, $\{A_s : N \cap A_s \neq \emptyset\} \subset \{A_s : M \cap A_s \neq \emptyset\}$.
Así $\bigcup\{A_s : N \cap A_s \neq \emptyset\} \subset \bigcup\{A_s : M \cap A_s \neq \emptyset\}$.
Por lo tanto $St(N, \mathcal{A}) \subset St(M, \mathcal{A})$ □

Lema 1.6.2. *Sean X, Y conjuntos no vacíos tal que $Y \subset X$. Si $x \in Y$, $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ una cubierta de X y $\mathcal{H} = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}_s\}_{s \in S}$. Entonces $St(x, \mathcal{H}) \subset St(x, \mathcal{A}) \cap Y$*

Demostración. Claramente $\mathcal{H}$ es una cubierta de Y. Sea $z \in St(x, \mathcal{H})$. Entonces existen $A \in \mathcal{A}$ tal que $x, z \in A \cap Y$. Así $x, z \in A \subset St(x, \mathcal{A})$.
Por lo tanto $z \in St(x, \mathcal{A}) \cap Y$. □

Proposición 1.6.3. *Sean X un conjunto, $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ y $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ dos cubiertas de X. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{B}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}$ es un refinamiento baricéntrico de $\mathcal{A}$.*

2. *Si $\mathcal{B}$ es un refinamiento baricéntrico de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Para probar 1, sea $x \in X$. Como $\mathcal{B}$ es una cubierta de X, existe $t \in T$ tal que $x \in B_t$. Como $\mathcal{B}$ es un refinamiento estrella, existe $s \in S$ tal que $St(B_t, \mathcal{B}) \subset A_s$. Por el Lema 1.6.1, $St(x, \mathcal{B}) \subset St(B_t, \mathcal{B}) \subset A_s$.
Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es un refinamiento baricéntrico de $\mathcal{A}$

Para probar 2, sean $t \in T$ y $x \in B_t$. Por hipótesis, existe $s \in S$ tal que $St(x, \mathcal{B}) \subset A_s$. Así, $B_t \subset St(x, \mathcal{B}) \subset A_s$.
Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$. □

Capítulo 2

Propiedades del tipo hereditario

En este capítulo se mostrarán resultados bajo los cuales algunas propiedades son hereditarias, aditivas, productivas o preservadas bajo funciones.

A continuación presentamos la notación necesaria para el desarrollo de este capítulo.

Dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$, diremos que:

(1) $\mathcal{P}$ es **hereditaria** si para cada espacio topológico X que tiene $\mathcal{P}$ y cada subespacio Z de X, se cumple que Z tiene $\mathcal{P}$;

(2) $\mathcal{P}$ es **aditiva** si para cada familia de espacios topológicos $\{X_s\}_{s\in S}$ tal que cada X_s tiene $\mathcal{P}$, se cumple que $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ tiene $\mathcal{P}$;

(3) $\mathcal{P}$ es **productiva** si para cada familia de espacios topológicos $\{X_s\}_{s\in S}$ tal que cada X_s tiene $\mathcal{P}$, se cumple que $\prod\limits_{s\in S} X_s$ tiene $\mathcal{P}$.

Sean $\mathcal{P}$ una propiedad topológica y $\mathcal{D}$ una clase de funciones. Diremos que:

(4) $\mathcal{P}$ se **preserva bajo la clase** $\mathcal{D}$ si para cada espacio topológico X que tiene $\mathcal{P}$ y para cada $f : X \to Y \in \mathcal{D}$, se cumple que Y tiene $\mathcal{P}$.

Definamos las siguientes clases de funciones:

- Sea $\mathcal{C}$ la clase de las funciones continuas y suprayectivas;
- Sea $\mathcal{A}$ la clase de las funciones abiertas, continuas y suprayectivas;
- Sea $\mathcal{S}$ la clase de las funciones cerradas, continuas y suprayectivas;
- Sea $\mathcal{H}$ la clase de homeomorfismos.

2.1. Espacios localmente compactos

En esta sección probamos que la propiedad de ser localmente compacto es aditiva y se preserva bajo la clase $\mathcal{A}$, sin embargo no es hereditaria ni productiva.

A continuación presentaremos la definición de localmente compacto que trabajaremos a lo largo de la tesis.

Definición 2.1.1. *Decimos que un espacio topológico (X, τ) es* ***localmente compacto*** *si cada uno de sus puntos tiene una vecindad compacta, es decir si para cada punto $x \in X$, existen un conjunto compacto K y $U \in \tau$ tales que $x \in U \subset K$.*

Ejemplo 2.1.2. *Sean X un espacio discreto. Entonces X es localmente compacto*

Demostración. Dado que todo subconjunto finito de X es compacto y abierto, X es localmente compacto. □

Ejemplo 2.1.3. *Todo espacio compacto es localmente compacto.*

Demostración. Dado que un espacio topológico es vecindad de cada uno de sus puntos, este es localmente compacto. □

Existen espacios localmente compactos que no son compactos. Mostraremos un ejemplo de un espacio localmemnte compacto que no es compacto.

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos a $\mathbb{R}$ con a topología usual. Entonces $\mathbb{R}$ es un espacio localmente compacto que no es compacto.*

Demostración. Es conocido que $\mathbb{R}$ no es compacto. Para probar la compacidad local de $\mathbb{R}$, sea $x \in \mathbb{R}$. Dado que $[x-1, x+1]$ es compacto en $\mathbb{R}$ y $x \in (x-1, x+1) \subset [x-1, x+1]$, $[x-1, x+1]$ es una vecindad compacta de x. Por lo que $\mathbb{R}$ es localmente compacto. $\square$

Lema 2.1.5. *Sea X un espacio topológico T_2. Entonces X es localmente compacto si y sólo si para todo $x \in X$, existe un abierto U tal que $x \in U$ y la cerradura de U es un compacto en X.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sean $x \in X$ y V una vecindad compacta de x. Como V es una vecindad de x, existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset V$. Como X es T_2 y V es compacto en X, V es cerrado en X. Dado que $\mathrm{Cl}_X(U) \subset \mathrm{Cl}_X(V) = V$ y V es compacto de X, $\mathrm{Cl}_X(U)$ es compacto de V. Por el Lema 1.4.12, $\mathrm{Cl}_X(U)$ es compacto de X.

$\Leftarrow\rfloor$ Esta implicación es inmediata de la definición de compacidad local. $\square$

A continuación mostraremos con un ejemplo que la propiedad de ser localmente compacto no es hereditaria.

Ejemplo 2.1.6. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ no es localmente compacto.*

Demostración. Notemos que $\mathbb{R}$ es localmente compacto. Supongamos que $\mathbb{Q}$ es localmente compacto. Sea $q \in \mathbb{Q}$. Entonces existe una vecindad compacta K de q en $\mathbb{Q}$. Como K es compacto en $\mathbb{Q}$, K es compacto en $\mathbb{R}$. Así, K es cerrado en $\mathbb{R}$. Sea (a, b) un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ tal que $q \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subset K$. Veamos que cualquier punto $y \in (a, b) \setminus \mathbb{Q}$ es un punto de acumulación de K en $\mathbb{R}$ que no pertenece a K. Sean $x \in (a, b) \setminus \mathbb{Q}$ y $U \in \tau_{\mathbb{R}}$ tales que $x \in U$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $w \in ((a, b) \cap \mathbb{Q}) \cap U$. Así, $U - \{x\} \cap K \neq \emptyset$. De donde x es punto de acumulación de K en $\mathbb{R}$. Como K es cerrado $x \in K$, esto es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. $\square$

Sin embargo, para un subespacio cerrado se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.1.7. *Sean X un espacio y Y un subespacio cerrado de X. Si X es localmente compacto, entonces Y es localmente compacto.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Como X es localmente compacto, existen un abierto U en X y un compacto K en X tales que $y \in U \subset K$. Entonces $y \in U \cap Y \subset K \cap Y$. Es claro que $U \cap Y$ es abierto en Y. Veamos que $K \cap Y$ es compacto en Y. Consideremos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau_X|_Y$ una cubierta abierta de $Y \cap K$. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau_X$ tales que $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$ para todo $\alpha \in I$. Ahora bien, dado que Y es cerrado en X, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{X - Y\}$ es una cubierta abierta de K en X. Dado que K es compacto en X, existe $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\} \subset \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $K \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots, V_{\alpha_n} \cup (X - Y)$. Notemos que la familia $\{V_{\alpha_1} \cap Y, \ldots, V_{\alpha_n} \cap Y\} \subset \tau_X|_Y$ es una cubierta abierta de $K \cap Y$. De lo anterior $Y \cap K$ es compacto en Y. Por lo tanto Y es localmente compacto. □

Teorema 2.1.8. *La propiedad de ser localmente compacto se preserva bajo la clase $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sean X un espacio localmente compacto y $f : X \to Y \in \mathcal{A}$. Veremos que Y es localmente compacto. Sea $y \in Y$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Dado que X es localmente compacto, existe una vecindad compacta K de x en X. Consideremos U abierto en X tal que $x \in U \subset K$. Notemos que $y \in f(U) \subset f(K)$. Dado que f es una función continua y abierta, $f(K)$ es un subconjunto compacto de Y y $f(U)$ es abierto en Y. De lo anterior, $f(K)$ es una vecindad compacta de y en Y.
Por lo tanto Y es localmente compacto. □

Para probar que la propiedad de ser localmente compacto no es productiva, necesitamos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.1.9. *Sea $\{X_s : s \in S\}$ una coleccion no vacía de espacios topológicos no vacíos. Entonces $\prod_{s \in S} X_s$ es localmente compacto si y sólo si*
(1) X_s es localmente compacto para toda $s \in S$, y
(2) todos los espacios X_s son compactos salvo un número finito.

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Como cada proyección $p_s : \prod_{s \in S} X_s \to X_s$ es una función continua, abierta y suprayectiva, entonces por el Teorema 2.1.8, cada espacio X_s es localmente compacto.
Tomemos $x \in \prod_{s \in S} X_s$. Como $\prod_{s \in S} X_s$ es un espacio localmente compacto, existe una vecindad compacta $\mathcal{W}$ de x en $\prod_{s \in S} X_s$. Por el Lema 1.5.9, existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ tales que $p_s(\mathcal{W}) = X_s$ para cada $s \in S \setminus \{s_1, \ldots, s_n\}$. Ahora, dado que $\mathcal{W}$ es compacto, X_s es compacto para todo $s \in S \setminus \{s_1, \ldots, s_n\}$. Lo

cual demuestra (2).

$\Leftarrow\rfloor$ Sea F un subconjunto finito. Supongamos que para todo $s \in S \setminus F$, X_s es compacto. Supongamos que F es no vacío. Para probar que $\prod\limits_{s\in S} X_s$ es localmente compacto, tomemos $x \in \prod\limits_{s\in S} X_s$. Ahora, para cada $s \in F$, elijamos una vecindad compacta K_s de $x(s)$ en X_s. Por el Lema 1.5.9, $\bigcap\limits_{s\in F} p_s^{-1}(K_s)$ es una vecindad compacta de x en $\prod\limits_{s\in S} X_s$. Por lo que $\prod\limits_{s\in S} X_s$ es localmente compacto.
En el caso de que F sea vacío, por el Teorema 1.5.10, tenemos que $\prod\limits_{s\in S} X_s$ es compacto y localmente compacto. □

A continuación mostraremos con un ejemplo que la propiedad de ser localmente compacto no es productiva.

Ejemplo 2.1.10. *Consideremos la familia de los espacios $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces cada Z_n es localmente compacto y $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ no es localmente compacto.*

Demostración. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología usual. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $Z_n = \mathbb{R}$. Claramente cada Z_n es localmente compacto pero no compacto (ver 2.1.4). Supongamos que $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ es localmente compacto. Entonces por la Proposición 2.1.9, todos los espacios Z_n son compactos salvo un número finito de estos, contradicción. Por lo que $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ no es localmente compacto. □

Del siguiente resultado se desprende que la propiedad de ser localmente compacto es aditiva.

Proposición 2.1.11. *Sea $\{X_s : s \in S\}$ una coleccion no vacía de espacios topológicos no vacíos. Entonces $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ es un espacio localmente compacto si y sólo si X_s es localmente compacto para toda $s \in S$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Por el Lema 1.4.4, cada X_s es cerrado en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$. Dado que $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ es localmente compacto, entonces por el Lema 2.1.7, X_s es localmente compacto para toda $s \in S$.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $x \in \bigoplus_{s\in S} X_s$, entonces $x \in X_{s_0}$ para algún $s_0 \in S$. Como X_{s_0} es localmente compacto, existen un compacto K en X_{s_0} y un abierto U de X_{s_0} tales que $x \in U \subset K$. Por la Proposición 1.4.3, U es abierto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Dado que X_{s_0} es un subespacio de $\bigoplus_{s\in S} X_s$, K es compacto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Así K es una vecindad compacta de x en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Por lo tanto $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es un espacio localmente compacto. □

Corolario 2.1.12. *La propiedad de ser localmente compacto es aditiva.*

Demostración. La prueba se sigue de la Proposición 2.1.11 □

2.2. Espacios de Lašnev

En esta sección probamos que la propiedad de ser Lašnev se preserva bajo la clase $\mathcal{S}$, es aditiva y hereditaria pero no es productiva.

Definición 2.2.1. *Sea Y un espacio topológico. Decimos que Y es de Lašnev si existen un espacio métrico X y una función continua, cerrada y suprayectiva $f : X \to Y$.*

Ejemplo 2.2.2. *Todo espacio métrico es de Lašnev.*

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [3, Teorema B, p. 109].

Teorema 2.2.3. *Si X, Y son espacios topológicos no discretos y $X \times Y$ es de Lašnev, entonces $X \times Y$ es metrizable.*

A continuación probaremos que ciertos espacios cocientes son de Lašnev.

Proposición 2.2.4. *Si X es un espacio métrico y $A \subset X$ es cerrado, entonces X/A es de Lašnev.*

Demostración. Notemos que la función cociente $\rho : X \to X/A$ es continua y suprayectiva. Por el Lema 1.3.1, ρ es cerrada. Así, X/A es un espacio de Lašnev. □

El siguiente ejemplo muestra un espacio de Lašnev que no es metrizable.

Ejemplo 2.2.5. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Consideremos $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, el espacio cociente obtenido de $\mathbb{R}$ identificando los enteros a un punto. Entonces Por la Proposición 2.2.4, Y es de Lašnev. Para probar que Y no es métrico es suficiente ver que Y no es primero numerable.*

Vamos a probar que no existen bases locales numerables de $\mathbb{Z}$ en Y. Supongamos que $\{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local de $\mathbb{Z}$ en Y. Notemos que $\mathbb{Z} \subset \rho^{-1}(\mathcal{V}_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\mathbb{Z}$ no es abierto en $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \neq \rho^{-1}(\mathcal{V}_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $x_n \in \rho^{-1}(\mathcal{V}_n) \setminus \mathbb{Z}$. Consideremos $U = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Necesitamos probar que $\rho^{-1}(\rho(U)) = U$. Claramente $U \subset \rho^{-1}(\rho(U))$. Para la otra contención, sea $x \in \rho^{-1}(\rho(U))$. Dado que $\mathbb{Z} \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset$, $\mathbb{Z} \subset U$. En el caso de que $x \in \mathbb{Z}$, $x \in U$. Para el caso de que $x \notin \mathbb{Z}$, $\rho(x) = \{x\} = \rho(u)$

para algún $u \in U$. Veamos que $u \notin \mathbb{Z}$. Si $u \in \mathbb{Z}$, $\rho(u) = \mathbb{Z} = \{x\}$ y $x \in \mathbb{Z}$,lo cual es una contradicción. Así, $u \notin \mathbb{Z}$ y $\rho(x) = \{x\} = \rho(u) = \{u\}$. Por lo que $u = x \in U$. Esto prueba que $\rho^{-1}(\rho(U)) \subset U$.
De lo anterior, $\rho(U)$ es un abierto en Y que contiene a $\mathbb{Z}$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{Z} \in \mathcal{V}_n \subset \rho(U)$. De donde $x_n \in \rho^{-1}(\mathcal{V}_n) \subset \rho^{-1}(\rho(U)) = U$, contradicción. Por lo tanto, Y no es primero numerable.

Teorema 2.2.6. *La propiedad de ser Laš̃nev es hereditaria.*

Demostración. Sean X un espacio de Laš̃nev y Y un subespacio de X. Veremos que Y es de Laš̃nev. Dado que X es de Laš̃nev, entonces existe un espacio métrico Z y una función $g : Z \to X$ continua, cerrada y suprayectiva. Sea $Z' = g^{-1}(Y)$. Claramente, Z' es métrico y $g|_{Z'} : Z' \to Y$ es una función continua y suprayectiva. Para probar que $g|_{Z'}$ es una función cerrada. Sean K un cerrado en Z' y A un cerrado en Z tales que $K = Z' \cap A$. Usando que $g(A)$ es cerrado en X y $g(K) = g(Z' \cap A) = g(g^{-1}(Y) \cap A) = Y \cap g(A)$ (ver Lema 1.1.5), $g(K) = g|_{Z'}(K)$ es cerrado en Y.
Por lo tanto Y es de Laš̃nev. □

Teorema 2.2.7. *La propiedad de ser Laš̃nev se preserva bajo la clase $\mathcal{S}$.*

Demostración. Sean X un espacio de Laš̃nev y $f : X \to Y \in \mathcal{S}$. Veremos que Y es de Laš̃nev. Como X es de Laš̃nev, existe un espacio métrico Z y una función $g : Z \to X$ continua, cerrada y suprayectiva. Consideremos $f \circ g : Z \to Y$. Entonces $f \circ g$ es una función continua, suprayectiva y cerrada. Por lo tanto Y es de Laš̃nev. □

Como consecuencia del siguiente resultado se tiene que la propiedad de ser Laš̃nev es aditiva.

Proposición 2.2.8. *$\bigoplus_{s \in S} X_s$ es de Laš̃nev si y sólo si X_s es de Laš̃nev para todo $s \in S$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Como cada X_s es de Laš̃nev y cada X_s es un subespacio de $\bigoplus_{s \in S} X_s$, entonces por el Teorema 2.2.6, cada X_s es de Laš̃nev.
$\Leftarrow\rfloor$ Para cada $s \in S$, consideremos un espacio métrico Z_s y una función continua, cerrada y suprayectiva $f_s : Z_s \to X_s$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los elementos de la familia $\{Z_s\}_{s \in S}$ son ajenos a pares. Como cada Z_s es métrico, entonces por el Lema 1.4.12, $\bigoplus_{s \in S} Z_s$ es métrico.

Así, dado que la función $\triangle_{s\in S} f_s : \bigoplus_{s\in S} Z_s \to \bigoplus_{s\in S} X_s$ es continua, cerrada y suprayectiva (ver Lema 1.4.15), $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es de Lašnev. □

Corolario 2.2.9. *La propiedad de ser Lašnev es aditiva.*

Demostración. La prueba se sigue de la Proposición 2.2.8 □

A continuación mostraremos con un ejemplo que la propiedad de ser Lašnev no es productiva.

Ejemplo 2.2.10. *Existe un espacio topológico Y de Lašnev tal que $Y \times Y$ no es de Lašnev.*

Demostración. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Consideremos $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En el ejemplo 2.2.5 se probó que Y es de Lašnev y no es primero numerable. Dado que la propiedad de ser primero numerable es una propiedad hereditaria bajo subespacios, $Y \times Y$ no es primero numerable. Así, $Y \times Y$ no es metrizable. De esta manera por el Teorema 2.2.3, $Y \times Y$ no es de Lašnev. □

2.3. Espacios Cósmicos

En esta sección probamos que la propiedad de ser cósmico se preserva bajo la clase $\mathcal{C}$, es productiva y hereditaria pero no es aditiva.

Definición 2.3.1. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{N}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{N}$ es una **red** en X si cada abierto U en X y para todo $x \in U$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subset U$.*

Ejemplo 2.3.2. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Cualquier base en X es una red en X.*
2. *El conjunto potencia de X es una red en X.*
3. *El conjunto de los unipuntuales de X forman una red en X.*

Definición 2.3.3. *Decimos que un espacio topológico X es **cósmico** si tiene una red numerable.*

Ejemplo 2.3.4. *Todo espacio numerable es cósmico.*

Ejemplo 2.3.5. *Todo espacio segundo numerable es cósmico.*

Ejemplo 2.3.6. *La línea de Sorgenfrey, $(\mathbb{R}, \tau_{Sorg})$, no es cósmico.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una red en $\mathbb{R}$. Probaremos que $\mathcal{B}$ no es numerable. Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe $B_a \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B_a \subset [a, a+1)$. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ dada por $f(a) = B_a$. Veamos que f es una función inyectiva. Sean $a \neq b \in \mathbb{R}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a < b$. Entonces $a \notin [b, b+1)$. Así $f(a) = [a, a+1) \neq [b, b+1) = f(b)$. Por lo tanto f es inyectiva y $\mathcal{B}$ tiene al menos tantos elementos como los números reales. De donde $\mathcal{B}$ es una red no numerable. Por lo que $(\mathbb{R}, \tau_{Sorg})$ no es cósmico. □

Proposición 2.3.7. *Sean X un espacio y $A \subset X$, $\emptyset \neq A \neq X$. Si $X \setminus A$ es cósmico, entonces el espacio cociente X/A es cósmico.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una red numerable en $X \setminus A$. Sea $\rho : X \to X/A$ la función cociente. Sea $\mathcal{Q} = \{\{A\}\} \cup \{\rho(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Veremos que $\mathcal{Q}$ es una red numerable en X/A. Dado que $\mathcal{B}$ es numerable, $\mathcal{Q}$ es numerable. Tomemos un abierto $\mathcal{U}$ en X/A y $x \in X$ tal que $\rho(x) \in \mathcal{U}$. Consideremos los siguientes casos.

Caso I. $x \in A$.
El elemento de $\mathcal{Q}$ que cumple con lo requerido es $\{\rho(x) = A\}$.
Caso II. $x \notin A$.
Como $\mathcal{U}$ es un abierto en X/A, $\rho^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto en X y $x \in \rho^{-1}(\mathcal{U}) \cap (X \setminus A)$. Dado que $\rho^{-1}(\mathcal{U}) \cap (X \setminus A)$ es abierto en $X \setminus A$ y $X \setminus A$ es cósmico, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \rho^{-1}(\mathcal{U}) \cap X/A \subset \rho^{-1}(\mathcal{U})$. Así, $\rho(x) \in \rho(B) \subset \mathcal{U}$.
De los anteriores dos casos, concluimos que $\mathcal{Q}$ es una red.
Por lo tanto X/A es un espacio cósmico. □

A continuación presentamos ejemplos de
espacios que son cósmicos y no segundo numerables.

Ejemplo 2.3.8. *Existe un espacio cósmico Y que no es segundo numerable.*

Demostración. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología usual y $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Hagamos $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Veremos que Y es cósmico y que no es segundo numerable. Primero veremos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ es un espacio cósmico. Como todo subespacio de un espacio segundo numerable es segundo numerable, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ es cósmico. Así, por la Proposición 2.3.7, Y es un espacio cósmico.
Por otra parte, por el Ejemplo 2.2.5, Y no es primero numerable y así Y no es segundo numerable. □

Consideremos los espacios $J(\mathbb{N})$ y $S(\mathbb{N})$ lo cuales fueron definidos en la página 21.

Ejemplo 2.3.9. *Los espacios $J(\mathbb{N})$ y $S(\mathbb{N})$ son espacios cósmicos.*

Demostración. Por el Lema 2.3.7, $J(\mathbb{N})$ y $S(\mathbb{N})$ son espacios cósmicos. Por [5, Ejemplo 2.3, p.123], $J(\mathbb{N})$ y $S(\mathbb{N})$ no son primero numerables y por lo tanto tampoco son segundo numerables. □

Teorema 2.3.10. *La propiedad de ser un espacio cósmico es hereditaria.*

Demostración. Sean X un espacio cósmico y $Y \subset X$ un subespacio de X. Veremos que Y es cósmico. Sea $\mathcal{N}$ una red numerable en X. Hagamos $\mathcal{N} \cap Y = \{N \cap Y : N \in \mathcal{N}\}$. Veremos que $\mathcal{N} \cap Y$ es una red numerable en Y.
Sean U un abierto en X y $y \in U \cap Y$. Dado que $\mathcal{N}$ es red de X, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $y \in N \subset U$. De aquí, $N \cap Y \in \mathcal{N} \cap Y$ es tal que $y \in N \cap Y \subset U \cap Y$. Por lo tanto, $\mathcal{N} \cap Y$ es una red de X. Claramente $\mathcal{N} \cap Y$ es numerable.
Por lo tanto, Y es cósmico. □

Teorema 2.3.11. *La propiedad de ser cósmico se preserva bajo la clase $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean X un espacio cósmico y $f : X \to Y \in \mathcal{C}$. Veremos que Y es cósmico. Sea $\mathcal{N}$ una red numerable en X. Hagamos $f(\mathcal{N}) = \{f(N) : N \in \mathcal{N}\}$. Veremos que $f(\mathcal{N})$ es una red numerable en Y. Sean U un abierto en Y y $y \in U$. Tomemos $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es un abierto en X tal que $x \in f^{-1}(U)$. Dado que X es cósmico, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subset f^{-1}(U)$. De lo anterior $f(x) = y \in f(N) \subset U$. Por lo que $f(\mathcal{N})$ es una red. Es claro que $f(\mathcal{N})$ es numerable. Por lo tanto, Y es cósmico. □

Veamos que ser cósmico no es una propiedad aditiva.

Ejemplo 2.3.12. *Existe una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos cada uno de los cuales es cósmico pero la suma $\bigoplus_{s\in\mathbb{R}} X_s$ no lo es.*

Demostración. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología usual. Para cada $s \in \mathbb{R}$, sea $X_s = \mathbb{R} \times \{s\}$. Claramente $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia no numerable de conjuntos ajenos dos a dos. Para toda $s \in S$, X_s es considerado con la topología producto, donde $\{s\}$ tiene la topología indiscreta. Claramente cada Z_s es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Así, dado que $\mathbb{R}$ es segundo numerable, Z_s es cósmico para todo $s \in \mathbb{R}$.
Ahora, supongamos que $\bigoplus_{s\in\mathbb{R}} X_s$ es cósmico. Consideremos $\mathcal{B}$ una red de $\bigoplus_{s\in\mathbb{R}} X_s$. Por cada $s \in \mathbb{R}$, tomemos $x_s \in X_s$. Como cada X_s es abierto en $\bigoplus_{s\in\mathbb{R}} X_s$, existe $B_s \in \mathcal{B}$ tal que $x_s \in B_s \subset X_s$ para toda $s \in \mathbb{R}$. Dado que $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia no numerable de conjuntos ajenos dos a dos, se tiene que el conjunto $\{B_s\}_{s\in S}$ es no numerable. Así, cualquier red en $\mathcal{B}$ no puede ser numerable.

Por lo tanto $\bigoplus_{s\in\mathbb{R}} X_s$ no es cósmico. □

Sin embargo, cuando el conjunto de índices es numerable tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.13. *$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es cósmico si y sólo si X_n es cósmico para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$ Dado que cada X_n es subespacio de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_s$, por el Teorema 2.3.10, X_n

es cósmico para todo $n \in \mathbb{N}$.
$\Leftarrow\rfloor$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos una red numerable $\mathcal{B}_n$ de X_n. Sea $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Es claro que $\mathcal{B}$ es numerable. Probaremos que $\mathcal{B}$ es una red de $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Sean U un abierto en $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y $x \in U$. Entonces $x \in X_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y existe $B_n \in \mathcal{B}_n$ tal que $x \in B_n \subset U \cap X_n \subset U$. Así, $\mathcal{B}$ es una red en $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es cósmico. □

Veamos que la propiedad de ser cósmico no es productiva.

Ejemplo 2.3.14. *Existe una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos cada uno de los cuales es cósmico pero el producto $\prod\limits_{s\in S} X_s$ no lo es.*

Demostración. Consideremos $\mathbb{N}$ como subespacio del espacio $\mathbb{R}$ (con la topología usual). Sea $S = \mathbb{R}$. Para cada $s \in S$, consideremos $X_s = \mathbb{N} \times \{s\}$. Dado que $\mathbb{N}$ es un espacio discreto, X_s es un espacio discreto numerable para toda $s \in \mathbb{R}$.
Supongamos que existe $\mathcal{B}$ una red de $\prod\limits_{s\in S} X_s$. Por cada $s \in S$, tomemos $x_s \in X_s$. Observemos que $x_s \neq x_{s'}$ siempre que $s \neq s'$. Consideremos $\mathcal{A} = \{p_s^{-1}(\{x_s\}) : s \in S\}$. Vamos a probar que $\mathcal{A}$ es una familia no numerable de abiertos distintos dos a dos $\prod\limits_{s\in S} X_s$. Por cada $s \in S$, definamos $\alpha_s : S \to \bigcup\limits_{s\in S} X_s$ como $\alpha_s(t) = x_s$ para cada $t \in S$. Claramente, por cada $s \in S$, $\alpha_s \in p_s^{-1}(\{x_s\})$. Ahora, sean $s, s' \in S$ con $s \neq s'$. Como $p_s(\alpha_s) = \alpha_s(s) = x_s$, se tiene que $\alpha_s \notin p_{s'}^{-1}(\{x_{s'}\})$. Por lo que $p_s^{-1}(\{x_s\}) \neq p_{s'}^{-1}(\{x_{s'}\})$. Finalmente vamos a probar que $\mathcal{B}$ es no numerable. Sea $s \in S$. Como $\mathcal{B}$ es una red, existe $L_s \in \mathcal{B}$ tal que $\alpha_s \in L_s \subset p_s^{-1}(\{x_s\})$. Dado que $\alpha_s \in L_s$ y $L_{s'} \subset p_{s'}^{-1}(\{x_{s'}\})$ para toda $s' \in S \setminus \{s\}$, $\alpha_s \notin L_{s'}$ para toda $s' \in S \setminus \{s\}$. Por lo que $\mathcal{L} = \{L_s\}_{s\in S}$ es una familia no numerable de conjuntos distintos dos a dos. Concluimos que $\mathcal{B}$ es no numerable. Por lo tanto $\prod\limits_{s\in S} X_s$ no es cósmico. □

Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.15. *Sea $\{X_s : s \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\prod\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ es cósmico si y sólo si X_s es cósmico para todo $s \in \mathbb{N}$.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$ Dado que cada X_s es homeomorfo a un subespacio de $\prod\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$, entonces, por el Teorema 2.3.10, X_s es cósmico para todo $s \in \mathbb{N}$.
$\Leftarrow\rfloor$ Por cada $s \in \mathbb{N}$, consideremos una red numerable $\mathcal{B}_s$ de X_s. Sea $\mathcal{S} = \{\pi_s^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_s \text{ y } s \in \mathbb{N}\}$. Sea $\mathcal{B}$ la familia de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Por el Lema 1.1.6, $\mathcal{B}$ es numerable.
Veamos que $\mathcal{B}$ es una red de $\prod\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \prod\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ y U un abierto básico de $\prod\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ tales que $x \in U$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}(U_{j_i})$ para algún $\{j_1, \ldots, j_n\} \subset \mathbb{N}$ y donde cada U_{j_i} es un abierto en X_{j_i}. Sea $j_i \in \{j_1, \ldots, j_n\}$. Dado que $x_{j_i} \in U_{j_i}$ y $\mathcal{B}_{j_i}$ es una red de X_{j_i}, existe $B_{j_i} \in \mathcal{B}_{j_i}$ tal que $x_{j_i} \in B_{j_i} \subset U_{j_i}$. Entonces:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}(B_{j_i}) \in \mathcal{B}$$

y

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}(B_{j_i}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}(U_{j_i}).$$

Esto prueba que $\mathcal{B}$ es una red de $\prod\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$.

Por lo tanto $\prod\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ es cósmico . $\square$

2.4. $\aleph_0$-Espacios

En esta sección probamos que la propiedad de ser $\aleph_0$-espacio se preserva bajo la clase $\mathcal{S}$ y es hereditaria, sin embargo no es aditiva ni productiva.

Definición 2.4.1. *Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X es una **pseudobase** en X si para cada compacto C de X y cada abierto U en X tales que $C \subset U$, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $C \subset P \subset U$.*

Lema 2.4.2. *Sean X un espacio topológico y Y subespacio de X. Si X tiene una pseudobase, entonces Y tiene una pseudobase. Si la pseudobase para X es numerable entonces la pseudobase para Y es numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una pseudobase de X y consideremos $\mathcal{B} \cap Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$. Veremos que $\mathcal{B} \cap Y$ es pseudobase de Y. Notemos que en el cado de que $\mathcal{B}$ sea numerable, es claro que $\mathcal{B} \cap Y$ es numerable. Para probar que $\mathcal{B} \cap Y$ es pseudobase, sean C compacto en Y y W un abierto en X tales que $C \subset W \cap Y$. Dado que C es compacto en X y $C \subset W$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset B \subset W$. Así $C \subset B \cap Y \subset W \cap Y$. Por lo tanto $\mathcal{B} \cap Y$ es pseudobase de Y. $\square$

Lema 2.4.3. *Sea X un espacio topológico.*

(1) Si β es una base para la topología de X tal que es cerrada bajo uniones finitas, entonces β es una pseudobase en X.

(2) Si β es una base numerable para la topología de X, entonces la familia de las uniones finitas de elementos de β es una pseudobase numerable en X.

(3) Si β es una pseudobase numerable, entonces la familia de las uniones finitas de elementos de β es una pseudobase numerable en X.

(4) La familia de los subconjuntos compactos de X es una pseudobase.

Demostración. (1) Sean C un compacto de X y U un abierto en X tales que $C \subset U$. Para cada $x \in C$, existe $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset U$. Entonces $\{B_x : x \in C\}$ es una cubierta abierta de C. Dado que C es un compacto, existen $x_1, \ldots, x_m \in C$ tales que $C \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{x_i}$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{m} B_{x_i} \in \beta$ y $C \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{x_i} \subset U$.

Por lo tanto β es una pseudobase en X.

(2) Sea β' la familia de las uniones finitas de elementos de β. Por el Lema 1.1.6, β' es numerable. Dado que β' es cerrada bajo uniones finitas, entonces por (1), β' es una pseudobase en X. Por lo que β' es una pseudobase numerable.

(3) Sea β' la familia de las uniones finitas de elementos de β. Claramente $\beta \subset \beta'$. Por el Lema 1.1.6, β' es numerable. La prueba de que β' es una pseudobase se sigue directamente de la definición.

(4) Se sigue de la definición de pseudobase. □

Corolario 2.4.4. *Todo espacio topológico segundo numerable tiene una pseudobase numerable*

Definición 2.4.5. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un k-espacio si para cada $E \subset X$ tal que $E \cap K$ es cerrado en K para todo subconjunto compacto K de X, implica que E es cerrado en X.*

Proposición 2.4.6. *Consideremos $(X, (Y, \tau_g), g)$. Si X es un k-espacio, entonces para cada compacto $K \subset X$ y para cada $E \subset Y$ tal que $E \cap g(K)$ es cerrado en $g(K)$, se tiene que E es cerrado en Y.*

Demostración. Sea $E \subset Y$ tal que $E \cap F$ es cerrado en F para todo compacto F de Y. Probaremos que E es cerrado en Y. Dado que (Y, τ_g) es un espacio cociente, es suficiente probar que $g^{-1}(E)$ es cerrado en X. Para probar esto, sea K un compacto en X. Como g es continua, $g(K)$ es compacto en Y. Veamos que $g^{-1}(E) \cap K$ es cerrado en K.
Por la Proposición 1.1.7, $g|_K^{-1}(E \cap g(K)) = g^{-1}(E) \cap K$. Dado que por hipótesis $E \cap g(K)$ es cerrada en $g(K)$, $g|_K^{-1}(E \cap g(K)) = g^{-1}(E) \cap K$ es cerrado en K.
De lo anterior y de que X es un k-espacio, $g^{-1}(E)$ es cerrado en X. □

Corolario 2.4.7. *Consideremos $(X, (Y, \tau_g), g)$. Si X es un k-espacio, entonces (Y, τ_g) es un k-espacio.*

Proposición 2.4.8. *Consideremos $(X, (Y, \tau_g), g)$. Supongamos que X es un k-espacio con una pseudobase numerable. Si (Y, τ_g) es un espacio Hausdorff, entonces (Y, τ_g) es un k-espacio con una pseudobase numerable.*

Demostración. Por el Corolario 2.4.7, (Y, τ_g) es un k-espacio.
A continuación, demostraremos que (Y, τ_g) tiene una pseudobase numerable. Sea $\mathcal{P}$ una pseudobase numerable de X que es cerrada bajo uniones finitas (ver Lema 2.4.3,(3)). Sea $\mathcal{R} = \{g(P) : P \in \mathcal{P}\}$. Claramente $\mathcal{R}$ es numerable. Ahora, mostraremos que $\mathcal{R}$ es una pseudobase para Y.
Para ello, necesitamos probar la siguiente afirmación.

Afirmación. Si C es compacto en (Y, τ_g) y $A \subset C$ infinito, entonces existe un compacto $K \subset X$ tal que $g(K) \subset C$ y $g(K) \cap A$ es infinito.

Como C es compacto, A tiene un punto de acumulación $y \in C$. Por lo que $A' = A - \{y\}$ no es cerrado en C, ni es cerrado en Y. Así, dado que X es un k-espacio, por la Proposición 2.4.6, existe un compacto $H \subset X$ tal que $g(H) \cap A'$ no es cerrado en $g(H)$. Si $g(H) \cap A'$ es finito, como (Y, τ_g) es Hausdorff, $g(H) \cap A'$ es cerrado, una contradicción. Por lo que $g(H) \cap A'$ es infinito. Dado que $g(H) \cap A' \subset g(H) \cap A$, $g(H) \cap A$ es infinito.
Finalmente, hagamos $K = g^{-1}(C) \cap H$. Claramente $g(K) \subset C$. Como C es cerrado en (Y, τ_g), K es cerrado en H. Así, dado que H es compacto, K es compacto en H. Por lo que K es compacto en X. Ahora, dado que $A \subset C$ por el Lema 1.1.11 tenemos que $g(K) \cap A = g(H) \cap A$. De donde $g(K) \cap A$ es infintio. Esto prueba la afirmación.

Para demostrar que $\mathcal{R}$ es una pseudobase para Y, sea $C \subset Y$ compacto y un abierto U en Y tal que $C \subset U$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Supongamos que C es finito.
Como $\mathcal{P}$ es pseudobase, por cada $x \in g^{-1}(C)$, existe $P_x \in \mathcal{P}$ tal que $x \in P_x \subset g^{-1}(U)$. Supongamos que $\{P_x : x \in g^{-1}(C)\} = \{P_1, P_2, \ldots\}$. Por cada $i \in \mathbb{N}$, sea $R_i = g(P_i)$. Dado que C es finito, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\bigcup_{i=1}^{n} R_i \subset U$.

Dado que $\mathcal{P}$ es cerrada bajo uniones finitas y $\bigcup_{i=1}^{n} R_i = \bigcup_{i=1}^{n} g(P_i) = g(\bigcup_{i=1}^{n} P_i)$, $\bigcup_{i=1}^{n} R_i \in \mathcal{R}$.

Caso II. Supongamos que C es infinito.
Como $\mathcal{P}$ es pseudobase, por cada $x \in g^{-1}(C)$, existe $P_x \in \mathcal{P}$ tal que $x \in P_x \subset$

$g^{-1}(U)$. Supongamos que $\{P_x : x \in g^{-1}(C)\} = \{P_1, P_2, \ldots\}$. Por cada $i \in \mathbb{N}$, sea $R_i = g(P_i)$. Claramente $R_i \subset U$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Necesitamos probar que la familia $\{R_1, R_2, \ldots\}$ es una cubierta de C. Sean $z \in C$ y $x \in g^{-1}(z)$. Entonces existe $P_x \in \mathcal{P}$ tal que $x \in P_x$. Así, $g(x) = z \in g(P_x)$. Claramente $P_x = P_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $\{R_1, R_2, \ldots\}$ es una cubierta de C.

Por cada $n \in \mathbb{N}$, sea $R'_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R_i$. Dado que $\mathcal{P}$ es cerrada bajo uniones finitas y $R'_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} g(P_i) = g(\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i)$, $R'_n \in \mathcal{R}$.
Además, observemos que $R'_n \subset U$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, probaremos que $C \subset R'_n$ para alguna n.

Dado que C es infinito, podemos suponer que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $C \setminus R'_n \neq \emptyset$. Dado que $C \setminus R'_1 \neq \emptyset$, sea $y_1 \in C \setminus R'_1$ y $n_1 = 1$. Como $\{R_1, R_2, \ldots\}$ es una cubierta de C, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $y_1 \in R_{n_2}$. Entonces $y_1 \in R'_{n_2}$. Dado que $C \setminus R'_{n_2} \neq \emptyset$, consideremos $y_2 \in C \setminus R'_{n_2}$. Claramente $y_1 \neq y_2$. Continuando con este proceso, existen dos sucesiones:

a) $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots$ y

b) $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C$ tal que:

- $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$;
- para cada $i \in \mathbb{N}$, $y_i \notin R'_{n_i}$;
- para cada $i \geq 2$, $y_{i-1} \in R'_{n_i}$.

Hagamos $A = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Claramente A es infinito. Necesitamos probar que $R'_{n_k} \cap A = \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$. Para $k = 1$, se tiene $R'_{n_1} \cap A = R_1 \cap A = \emptyset$. Ahora, sean $k \geq 2$ y $l \geq k$. Como $y_{n_l} \notin R'_{n_l}$ y $R'_{n_k} \subset R'_{n_l}$, $y_{n_l} \notin R'_{n_k}$. Así $R'_{n_k} \cap A = \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$.
Usando la Afirmación, existe un compacto $K \subset X$ tal que $g(K) \subset C$ y $g(K) \cap A$ es infinito.

Por otra parte, dado que $K \subset g^{-1}(C) \subset g^{-1}(U)$, $K \subset P \subset g^{-1}(U)$ para alguna $P \in \mathcal{P}$. Por lo que $g(K) \subset g(P) \subset U$. Entonces $g(P) = R_m$ para alguna m. Por a), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m < n_k$.

Así $g(K) \subset R_m \subset R'_m \subset R'_{n_k}$. De donde, $g(K) \cap A \subset R'_{n_k} \cap A$. Por lo que $R'_{n_k} \cap A$ también es infintio, contradicción.
Por lo tanto $C \subset R'_n$. Así, $\mathcal{R}$ es una pseudobase para Y $\square$

Proposición 2.4.9. *Todo espacio métrico es un k-espacio.*

Demostración. Sea X un espacio métrico con métrica d. Consideremos $E \subset X$ no vacío tal que para todo compacto K, se cumple que $K \cap E$ es cerrado en K. Probaremos que E es cerrado en X. Dado que $E \subset cl(E)$, es suficiente probar que $cl(E) \subset E$. Sea $p \in cl(E)$. Supongamos que $p \notin E$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(p) \cap E$. Entonces $0 < d(p, x_n) < \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $x_n \to p$. Por lo que $cl(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{p\}$. Claramente $K = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{p\}$ es compacto en X. Por hipótesis, $K \cap E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cerrado en K. Así, dado que K es cerrado en X, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cerrada en X, contradicción. Concluimos que $p \in E$ y E es cerrado en X.
Por lo tanto, X es un k-espacio. □

Definición 2.4.10. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un **$\aleph_0$-espacio** si X es T_3 y tiene una pseudobase numerable.*

Proposición 2.4.11. *Todo $\aleph_0$-espacio es un espacio cósmico.*

Demostración. Se sigue de que toda pseudobase numerable es una red numerable. □

Proposición 2.4.12.
1. *Todo espacio T_3 y segundo numerable es un $\aleph_0$-espacio.*
2. *Todo espacio métrico y separable es un $\aleph_0$-espacio.*
3. *Todo espacio de Hausdorff, compacto y segundo numerable es un $\aleph_0$-espacio.*
4. *Todos los espacios cocientes T_3 de un espacio métrico separable son $\aleph_0$-espacios.*

Demostración. Para 1., sea X un espacio T_3 y segundo numerable. Dado que X es segundo numerable, entonces por el Corolario 2.4.4, X tiene una pseudobase numerable. Por lo tanto X es un $\aleph_0$-espacio.

Para 2., sea X un espacio métrico y separable. Por la Proposición 1.1.12, X es segundo numerable. Por el Corolario 2.4.4, X tiene una pseudobase numerable.
Por otra parte, por el Teorema 1.1.15, X es T_4. Entonces X es T_3.

Por lo tanto X es un $\aleph_0$-espacio.

Para 3., sea X un espacio de Hausdorff, compacto y segundo numerable. Por el Teorema 1.1.16, X es T_4. Entonces X es T_3.
Ahora, por el Corolario 2.4.4, X tiene una pseudobase numerable.
Por lo tanto, X es un $\aleph_0$-espacio.

Para 4., consideremos $(X, (Y, \tau_g), g)$ tal que X es un espacio métrico separable y (Y, τ_g) es T_3. Dado que X es métrico, entonces por 2., X es un $\aleph_0$-espacio, y por la Proposición 2.4.9, X es un k-espacio. Así, dado que (Y, τ_g) es T_3, entonces por la Proposición 2.4.8, (Y, τ_g) es un k-espacio con una pseudobase numerable.
Por lo tanto, (Y, τ_g) es un $\aleph_0$-espacio. $\square$

Teorema 2.4.13. *La propiedad de ser un $\aleph_0$-espacio es hereditaria.*

Demostración. Sean X un $\aleph_0$-espacio y Y es subespacio de X. Veremos que Y es un $\aleph_0$-espacio. Dado que la propiedad de ser T_3 es hereditaria, Y es T_3. Por el Lema 2.4.2, Y tiene una pseudobase numerable. Por lo tanto Y es un $\aleph_0$-espacio. $\square$

Lema 2.4.14. *Si C es compacto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$, entonces $C \cap X_s$ es compacto en X_s para cada $s \in S$.*

Demostración. Sea $s \in S$. Probaremos que $C \cap X_s$ es compacto en X_s. Supongamos que $C \cap X_s$ es no vacío. Consideremos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $C \cap X_s$ en X_s. Dado que cada X_s es un abierto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$ y cada elemento de $\mathcal{U}$ es un abierto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$, la familia $\mathcal{U} \cup \{X_i : i \in S \setminus \{s\}\}$ es una cubierta abierta de C en $\bigoplus_{s\in S} X_s$. Dado que C es compacto en $\bigoplus_{s\in S} X_s$, existen $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ y $\{i_1, \ldots, i_m\} \subset S \setminus \{s\}$ tales que $C \subset \bigcup_{l=1}^{n} U_l \cup \bigcup_{k=1}^{m} X_{i_k}$. Veamos que $C \cap X_j \subset \bigcup_{l=1}^{n} U_l$. Sea $c \in C \cap X_s$. Entonces $c \notin \bigcup_{k=1}^{m} X_{i_k}$, de donde $c \in \bigcup_{l=1}^{n} U_l$. Por lo tanto $C \cap X_s$ es compacto en X_s. $\square$

A continuación mostraremos con un ejemplo que la propiedad de ser $\aleph_0$-espacio no es aditiva.

Ejemplo 2.4.15. *Existe una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos cada uno de los cuales es un $\aleph_0$-espacio pero la suma $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ no lo es.*

Demostración. Consideremos un conjunto de índices arbitrario. Para cada $s \in \mathbb{R}$, consideremos $X_s = \mathbb{R} \times \{s\}$. Como $\mathbb{R}$ es segundo numerable, regular y cada X_s es homeomorfo a $\mathbb{R}$, X_s es $\aleph_0$-espacio para todo $s \in \mathbb{R}$. Probaremos que $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{R}} X_s$ no es $\aleph_0$-espacio. Si $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{R}} X_s$ tiene una pseudobase $\mathcal{B}$ y C es un compacto en $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{R}} X_s$ tenemos por el Lema 2.4.14, que $C \cap X_s$ es compacto en X_s para todo $j \in \mathbb{R}$. Como cada X_s es abierto en $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{R}} X_s$, existe $B_s \in \mathcal{B}$ tal que $C \cap X_s \subset B_s \subset X_s$. Notemos $B_s \cap B_j = \emptyset$ para $s \neq j$. De lo anterior $B_s \neq B_j$ para $s \neq j$. De donde $\{B_s : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}$ es no numerable. Por lo tanto $\mathcal{B}$ no puede ser numerable .
Por lo que $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{R}} X_s$ no es $\aleph_0$-espacio. □

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado para la suma numerable de $\aleph_0$-espacios.

Proposición 2.4.16. $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ *es un $\aleph_0$-espacio si y sólo si X_s es un $\aleph_0$-espacio para todo $s \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Notemos primero que por 1.4.10, $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ es regular si y sólo si X_s es regular para todo $s \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow\rfloor$ Dado que cada X_s es un subespacio de $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$, entonces por el Teorema 2.4.13, X_s es $\aleph_0$-espacio para todo $s \in \mathbb{N}$.
$\Leftarrow\rfloor$ Para cada $s \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathcal{B}_s$ una pseudobase numerable de X_s. Sea $\mathcal{B} = \{B \subset \bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s : B = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k$ y cada $B_k \in \mathcal{B}_k\}$. Es claro que $\mathcal{B}$ es numerable. Probaremos que $\mathcal{B}$ es una pseudobase de $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$. Sean C un compacto en $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ y U un abierto en $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ tales que $C \subset U$. Por el Lema 2.4.14, $C \cap X_s$ es compacto en X_s para todo $s \in \mathbb{N}$. Por cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos $B_k \in \mathcal{B}_k$ tal que $C \cap X_k \subset B_k \subset U \cap X_k$. Así, $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} C \cap X_k \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k \subset U$.
Por lo que $\mathcal{B}$ es pseudobase numerable de $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$.
Por lo tanto $\bigoplus\limits_{s\in\mathbb{N}} X_s$ es $\aleph_0$-espacio

□

Definición 2.4.17. *Sea $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos abiertos de un espacio X. Entonces la colección $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X es llamada una* ***$\mathcal{U}$-pseudobase*** *si, para $C \subset U$ con C un compacto y $U \in \mathcal{U}$, tenemos $C \subset P \subset U$ para todo $P \in \mathcal{P}$*

Proposición 2.4.18. *Sea $\mathcal{S}$ una sub-base de un espacio X Hausdorff. Entonces X tiene una pseudobase numerable si y sólo si, tiene una $\mathcal{S}$-pseudobase.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$ Claramente cualquier pseudobase de X es una $\mathcal{S}$-pseudobase.
$\Leftarrow\rfloor$ Por otro lado, supongamos que $\mathcal{P}$ es una $\mathcal{S}$-pseudobase de X. Sea $\mathcal{R}$ la colección de uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{P}$. Entonces $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ es cerrada bajo la formación de uniones finitas e intersecciones. Demostraremos que $\mathcal{R}$ es una pseudobase para X. Entonces, sea $C \subset U$, con C compacto y U abierto en X, y debemos encontrar $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subset R \subset U$.
Primero, supongamos que $U \in \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es la base para X generada por $\mathcal{S}$. Entonces $U = S_1 \cap \ldots \cap S_n$, donde cada $S_i \in \mathcal{S}$. Por hipótesis, existen $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ tales que $C \subset P_i \subset S_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Ahora, si $\mathcal{R} = P_1 \cap \ldots P_n$, entonces $R \in \mathcal{R}$ y $C \subset R \subset U$.
Ahora, sea U un conjunto abierto arbitrario. Cubramos a C con un número finito de elementos $B_1, \ldots, B_n$ de $\mathcal{B}$, todos los cuales son subconjuntos de U. Como C es normal, es la unión de subconjuntos cerrados $C_1, \ldots, C_n$ tales que $C_i \subset B_i$ para toda i. Aplicando el resultado del parrafo anterior, podemos encontrar $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R}$ tal que $C_i \subset R_i \subset B_i$ para toda i. Ahora, si $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$, entonces $R \in \mathcal{R}$ y $C \subset R \subset U$. Por lo tanto $\mathcal{R}$ es una pseudobase de X. □

Definición 2.4.19. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{U}$ es una familia* ***localmente finita*** *si y sólo si cada $x \in X$ posee una vecindad que intersecta a lo más una colección finita de elementos de $\mathcal{U}$.*

Definición 2.4.20. *X un espacio topológico es* ***paracompacto*** *si cualquier cubierta abierta de X tine un refinamiento abierto localmente finito.*

Definición 2.4.21. *Una función continua $f : X \to Y$ es llamada* ***cobertura compacta*** *si cada subconjunto compacto de y es la imagen de algún subconjunto compacto de x.*

Las Proposiciones 2.4.22, 2.4.23 y 2.4.24 se prueban en [4, (7), p. 987].

Proposición 2.4.22. *Si X es un $\aleph_o$-espacio, entonces X es un espacio paracompacto.*

Proposición 2.4.23. *Si X es un espacio paracompacto y $f : X \to Y$ es continua, cerrada y suprayectiva, entonces f es una cobertura compacta.*

Proposición 2.4.24. *Si $f : X \to Y$ es compactamente cubierta y X tiene una pseudobase numerable, entonces Y tiene una pseudobase numerable.*

Proposición 2.4.25. *Todo producto numerable de $\aleph_0$-espacios es un $\aleph_0$-espacio.*

Demostración. Sea $X = \prod_{s\in\mathbb{N}} X_s$, donde cada X_s es $\aleph_0$-espacio. Como cada X_s es regular, entonces X es un espacio regular por el Teorema 1.5.8. Sea $\mathcal{S}$ la subbase para X formada por todos los subconjuntos $\pi_s^{-1}(U_s)$, donde U_s es abierto en X_s para todo $s \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.4.18, es suficiente encontrar una $\mathcal{S}$-pseudobase numerable.
Para cada $s \in \mathbb{N}$ consideremos $\mathcal{P}_s$ pseudobase numerable para X_s y $\mathcal{P} = \{\pi_s^{-1}(P_s) \subset X : P_s \in \mathcal{P}_s, s \in \mathbb{N}\}$. Probaremos que $\mathcal{P}$ es una $\mathcal{S}$-pseudobase. Sean C compacto de X y U_s abierto en X_s tales que $C \subset \pi_s^{-1}(U_s)$. Entonces $\pi_s(C) \subset U_s$ y $\pi_s(C)$ es compacto de X_s. Dado que $\mathcal{P}_s$ es pseudobase numerable para X_s existe $P_s \in \mathcal{P}_s$ tal que $\pi_s(C) \subset P_s \subset U_s$. De aquí, $C \subset \pi_s^{-1}(P_s) \subset \pi_s^{-1}(U_s)$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es $\mathcal{S}$-pseudobase y X un $\aleph_0$-espacio. □

Teorema 2.4.26. *La propiedad de ser $\aleph_0$-espaciose preserva bajo la clase $\mathcal{S}$.*

Demostración. Sean X un $\aleph_0$-espacio y $f : X \to Y \in \mathcal{S}$. Veremos que Y es un $\aleph_0$-espacio. Como X es un $\aleph_o$-espacio se sigue de la Proposición 2.4.22, X es paracompacto y por lo tanto X es normal. Dado que toda imagen continua y cerrada de un espacio normal es normal, Y es normal y por lo tanto regular. Por las Proposiciones 2.4.23 y 2.4.24, Y tiene una pseudobase numerable. Por lo tanto, Y es un $\aleph_o$-espacio. □

2.5. Espacios Desarrollables y de Moore

En esta sección probamos que la propiedad de ser desarrollable se preserva bajo la clase $\mathcal{H}$, es hereditaria y aditiva pero no es productiva. Además veremos que la propiedad de ser de Moore es hereditaria y aditiva pero no se preserva bajo la clase $\mathcal{S}$ y no es productiva.

Definición 2.5.1. *Un espacio topológico X es* ***desarrollable*** *si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de X tal que para cada $x \in X$, $\{St(x, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de x. Llamaremos* ***desarrollo*** *de X a la familia $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$.*

Es claro de la Definición 2.5.1 que todo espacio desarrollable es primero numerable.

Proposición 2.5.2. *Todo espacio métrico es desarrollable.*

Demostración. Sea X un espacio métrico con métrica d. Por cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{W}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(z) : z \in X\}$. Claramente cada $\mathcal{W}_n$ es una cubierta abierta de X. Sea $x \in X$. Para probar que $\{St(x, \mathcal{W}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de x, consideremos $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Demostraremos que $St(x, \mathcal{W}_n) \subset B_\epsilon(x)$. Sea $y \in St(x, \mathcal{W}_n) = \bigcup\{B_{\frac{1}{n}}(z) : x \in B_{\frac{1}{n}}(z), z \in X\}$. Entonces existe $z \in X$ tal que $x, y \in B_{\frac{1}{n}}(z)$. Veremos que $y \in B_\epsilon(x)$. Notemos que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \epsilon$. Por lo que $y \in B_\epsilon(x)$. Así $St(x, \mathcal{W}_n) \subset B_\epsilon(x)$. Por lo tanto $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo de X. □

En el siguiente teorema probaremos que la propiedad de ser desarrollable es hereditaria.

Teorema 2.5.3. *La propiedad de ser un espacio desarrollable es hereditaria.*

Demostración. Sean X un espacio desarrollable y Y un subespacio de X. Probaremos que Y es desarrollable. Dado que X es desarrollable, existe una sucesión $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de X tal que para cada $x \in X$, $\{St(x, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de x. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathcal{H}_m = \{G \cap Y : G \in \mathcal{G}_m\}$. Claramente $\{\mathcal{H}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de Y. Sea $y \in Y$. Probaremos que $\{St(y, \mathcal{H}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de y en Y. Para ello, tomemos un abierto W en X tal que $y \in W \cap Y$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in St(y, \mathcal{G}_m) \subset W$. De aquí, existe $G \in \mathcal{G}_m$ tal que $y \in G$. Así, $y \in G \cap Y \in \mathcal{H}_m$. Por lo que $y \in St(y, \mathcal{H}_m)$.

Finalmente, veremos que $St(y, \mathcal{H}_m) \subset W \cap Y$. Dado que $St(y, \mathcal{G}_m) \subset W$ y $St(y, \mathcal{H}_m) \subset St(y, \mathcal{G}_m) \cap Y$ (ver Lema 1.6.2), se tiene que $St(y, \mathcal{H}_m) \subset W \cap Y$. Concluimos que $\{St(y, \mathcal{H}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de y en Y.
Por lo tanto Y es un espacio desarrollable. □

Ahora, consideremos una sucesión $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ de familias de subconjuntos de X. Definamos las siguientes familias como sigue. Para $m = 1$, hagamos:

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{V}_1.$$

Y para cada $m \geq 2$, definimos:

$$\mathcal{B}_m = \{\bigcap_{j=1}^{m} V_j : (V_1, \ldots, V_m) \in \prod_{j=1}^{m} \mathcal{V}_j\}.$$

Lema 2.5.4. *Sean X un espacio topológico.*

1. *Si $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X, entonces cada $\mathcal{B}_m$ es una cubierta abierta de X;*

2. *Si $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de X, entonces la sucesión $\{\mathcal{B}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de X.*

Demostración. Para probar 1., observemos que $\mathcal{B}_1$ es una cubierta abierta de X. Sean $m \geq 2$ y $x \in X$. Probaremos que $\mathcal{B}_m$ es cubierta abierta de X. Dado que todo elemento en $\mathcal{B}_m$ es una intersección finita de abiertos en X, se tiene que cada elemento en $\mathcal{B}_m$ es un abierto en X.
Como $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ son cubiertas de X, por cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe $V_j \in \mathcal{V}_j$ tal que $x \in V_j$. Así, $x \in \bigcap_{j=1}^{m} V_j \in \mathcal{B}_m$. Por lo tanto $\mathcal{B}_m$ es una cubierta abierta de X.

Para ver 2., se tiene por 1. que $\{\mathcal{B}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X. Ahora, sea $x \in X$. Veremos que $\{St(x, \mathcal{B}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de x. Sea W un abierto en X tal que $x \in W$. Como $\{St(x, \mathcal{V}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de x, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in St(x, \mathcal{V}_m) \subset W$. Claramente $x \in St(x, \mathcal{B}_m)$. Para probar que $St(x, \mathcal{B}_m) \subset W$. Sea $y \in St(x, \mathcal{B}_m)$. Entonces existe $(V_1, \ldots, V_m) \in \prod_{j=1}^{m} \mathcal{V}_j$ tal que $y \in \bigcap_{j=1}^{m} V_j$. Así, dado que $x \in V_m \in \mathcal{V}_m$, $y \in V_m \subset St(x, \mathcal{V}_m)$. De lo anterior y de que $St(x, \mathcal{V}_m) \subset W$ se tiene que

$y \in W$. Por lo que, $St(x, \mathcal{B}_m) \subset W$.
Concluimos que $\{St(x, \mathcal{B}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de x en X.
Por lo tanto $\{\mathcal{B}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de X. □

Teorema 2.5.5. *La propiedad de ser desarrollable se preserva bajo la clase $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sean X un espacio desarrollable y $f : X \to Y \in \mathcal{H}$. Veremos que Y es un espacio desarrollable. Sea $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ un desarrollo de X. Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos $f(\mathcal{G}_m) = \{f(G) : G \in \mathcal{G}_m\}$. Como f es abierta, $\{f(\mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de Y. Ahora, sea $y \in Y$. Probaremos que $\{St(y, f(\mathcal{G}_m))\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de y en Y. Para ello, tomemos W un abierto en Y tal que $y \in W$. Sea $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Usando que $\{St(x, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de x en X, $f^{-1}(W)$ es un abierto en X y $x \in f^{-1}(W)$, se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in St(x, \mathcal{G}_m) \subset f^{-1}(W)$. Claramente $y \in St(y, f(\mathcal{G}_m))$. Finalmente probaremos que $St(y, f(\mathcal{G}_m)) \subset W$. Sea $z \in St(y, f(\mathcal{G}_m))$. Entonces existe $G \in \mathcal{G}_m$ tal que $y, z \in f(G)$. Tomemos $w \in G$ tal que $f(w) = z$. De donde $w \in St(x, \mathcal{G}_m) \subset f^{-1}(W)$. De lo anterior $f(W) \in f(f^{-1}(W))$. Por lo que $z \in W$. Así, $St(y, f(\mathcal{G}_m)) \subset W$.
Concluimos que $\{St(y, f(\mathcal{G}_m))\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de y en Y. Por lo tanto Y es un espacio desarrollable. □

Para probar que la propiedad de ser desarrollable es aditiva necesitamos introducir la siguiente terminología.
Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $s \in S$, consideremos $\{\mathcal{G}_m^s\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas de X_s. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathfrak{G}_\mathfrak{m} = \bigcup\limits_{s\in S} \mathcal{G}_m^s$. Es claro que $\{\mathfrak{G}_\mathfrak{m}\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas de $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$.
Observemos que si $\{\mathcal{G}_m^s\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X_s, entonces $\{\mathfrak{G}_\mathfrak{m}\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$.
Para $s \in S$, $x \in X_s$ y $m \in \mathbb{N}$, el símbolo $St(x, \mathcal{G}_m^s)$ denota la estrella del punto x con respecto a $\mathcal{G}_m^s$ en X_s, lo mismo sucede para el símbolo $St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m})$, el cual denotará la estrella del punto x con respecto a $\mathfrak{G}_\mathfrak{m}$ en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$.
Con lo anterior enunciaremos el siguiente lema.

Lema 2.5.6. *Sean $s \in S$ y $x \in X_s$. Para toda $m \in \mathbb{N}$,*

$$St(x, \mathcal{G}_m^s) = St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m}).$$

Demostración. Sea $w \in St(x, \mathcal{G}_m^s)$. Entonces existe $G \in \mathcal{G}_m^s$ tal que $x, w \in G$. Dado que $\mathcal{G}_m^s \subset \bigcup\limits_{s\in S} \mathcal{G}_m^s = \mathfrak{G}_\mathfrak{m}$, $x, w \in G \in \mathfrak{G}_\mathfrak{m}$. Así $w \in St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m})$. Por lo que $St(x, \mathcal{G}_m^s) \subset St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m})$.

Para probar la otra contención, sea $w \in St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m})$. Entonces existe $D \in \mathfrak{G}_\mathfrak{m}$ tal que $x, w \in D$. Como $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$ para toda $s' \in S \setminus \{s\}$, $\mathcal{G}_m^s \cap \mathcal{G}_m^{s'} = \emptyset$. Dado que $x \in D$, se tiene que $D \in \mathcal{G}_m^s$. Por lo tanto $x, w \in D \subset St(x, \mathcal{G}_m^s)$. De donde $w \in St(x, \mathcal{G}_m^s)$. Por lo que $St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m}) \subset St(x, \mathcal{G}_m^s)$.

Por lo tanto $St(x, \mathcal{G}_m^s) = St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m})$. □

El siguiente resultado es de nuestra autoría. Desconocemos si se encuentra en la literatura.

Proposición 2.5.7. *Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ es desarrollable si y sólo si cada X_s es desarrollable.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $s \in S$. Dado que X_s es un subespacio de $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$, por el Teorema 2.5.3, X_s es un espacio desarrollable.
$\Leftarrow\rfloor$ Para cada $s \in S$, consideremos $\{\mathcal{G}_m^s\}_{m=1}^\infty$ un desarrollo de X_s. Entonces $\{\mathfrak{G}_\mathfrak{m}\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$.

Sean $x \in \bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ y U un abierto en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$. Probaremos que $\{St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m})\}_{m=1}^\infty$ es base local de x en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$. Sea $s \in S$ tal que $x \in X_s$. Como $U \cap X_s$ es abierto en X_s y $\{\mathcal{G}_m^s\}_{m=1}^\infty$ es un desarrollo de X_s, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in St(x, \mathcal{G}_m^s) \subset U \cap X_s$. Dado que $St(x, \mathcal{G}_m^s) = St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m})$ (ver 2.5.6), se tiene que $x \in St(x, \mathfrak{G}_m) \subset U \cap X_s \subset U$. Por lo tanto, $\{St(x, \mathfrak{G}_\mathfrak{m})\}_{m=1}^\infty$ es una base local de x en $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ y $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ es un espacio desarollable. □

Corolario 2.5.8. *La propiedad de ser desarrollable es aditiva.*

Demostración. La prueba se sigue de la Proposición 2.5.7 □

A continuación mostraremos con un ejemplo que la propiedad de ser desarrollable no es productiva.

Ejemplo 2.5.9. *Existe una familia no numerable de espacios topológicos desarrollables tal que su producto topológico no es desarrollable.*

Demostración. Sea $S = \mathbb{R}$. Para cada $s \in S$, consideremos $X_s = \mathbb{R}$ y τ_s la topología usual de $\mathbb{R}$. Notemos que para cada $s \in S$, X_s es desarrollable. Ahora, dado que cada τ_s contiene más de tres elementos, por la Proposición 1.5.11, $\prod\limits_{s\in S} X_s$ no es primero numerable. De donde $\prod\limits_{s\in S} X_s$ no es desarrollable. $\square$

Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.5.10. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios topológicos. Entonces $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ es desarrollable si y sólo si cada X_i es desarrollable.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es fácil ver que X_i se puede encajar en $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$. Así, por el Teorema 2.5.3, X_i es desarrolllable.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$. Por cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $\{\mathcal{G}_m^i\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X_i que satisface la Definición 2.5.1. Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $m \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$\mathfrak{G}_m^i = \{\bigcap_{j=1}^{m} G_j^i : G_j^i \in \mathcal{G}_j^i \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Entonces por el Lema 2.5.4, $\{\mathfrak{G}_m^i\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de X_i para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es claro que $\mathfrak{G}_{m+1}^i \subset \mathfrak{G}_m^i$ y $St(x, \mathfrak{G}_{m+1}^i) \subset St(x, \mathfrak{G}_m^i)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por cada $m \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{H}_m = \{H_1 \times \cdots \times H_n : H_i \in \mathfrak{G}_m^i \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Probaremos que $\{\mathcal{H}_m\}_{m=1}^{\infty}$ satisface la Definición 2.5.1. Primero veamos que $\{\mathcal{H}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $\mathfrak{G}_m^i$ es una cubierta de X_i, existe $H_i \in \mathfrak{G}_m^i$ tal que $x_i \in H_i$. De donde $(x_1, \ldots, x_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$. Por lo que $\{\mathcal{H}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Ahora, sea $(x_1,\dots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$. Probaremos $\{St((x_1,\dots,x_n),\mathcal{H}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de $(x_1,\dots,x_n)$. Tomemos $U_1 \times \cdots \times U_n$ abierto en $\prod_{i=1}^{n} X_i$ tal que $(x_1,\dots,x_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n$. Por cada $i \in \{1,\dots,n\}$, sea $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in St(x_i,\mathfrak{G}^i_{m_i}) \subset U_i$. Sean $m = \max\{m_i : i \in \{1,\dots,n\}\}$. Veamos que $St((x_1,\dots,x_n),\mathcal{H}_m) \subset U_1 \times \cdots \times U_n$. Sea $(z_1,\dots,z_n) \in St((x_1,\dots,x_n),\mathcal{H}_m)$. Entonces existe $H_1 \times \cdots \times H_n \in \mathcal{H}_m$ tal que

$$(x_1,\dots,x_n),(z_1,\dots,z_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n.$$

Ahora, sea $i \in \{1,\dots,n\}$. Dado que $x_i \in H_i \in \mathfrak{G}^i_m$, $z_i \in St(x_i,\mathfrak{G}^i_m) \subset St(x_i,\mathfrak{G}^i_{m_i}) \subset U_i$. Por lo que $(z_1,\dots,z_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$.

Por lo tanto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es desarrollable. □

Definición 2.5.11. *Decimos que un espacio topológico X es un **espacio de Moore** si es un espacio regular y desarrollable.*

Lema 2.5.12. *Todo espacio métrico es un espacio de Moore.*

Demostración. Como todo espacio métrico es regular y desarrollable (Lema 2.5.2), entonces todo espacio métrico es un espacio de Moore. □

Ejemplo 2.5.13. *Sea X la línea de Sorgenfrey. Es sabido que X es separable, normal y no metrizable. Entonces la línea de Sorgenfrey no es un espacio de Moore y no es desarrollable.*

Teorema 2.5.14. *La propiedad de ser un espacio de Moore es hereditaria*

Demostración. Sean X un espacio de Moore y Y un subespacio de X. Veremos que Y es un espacio de Moore. Claramente Y es regular. Por el Teorema 2.5.3, Y es desarrollable. Así, Y es un espacio de Moore. □

A continuación mostraremos con un ejemplo que la propiedad de ser un espacio de Moore no se preserva bajo la clase $\mathcal{S}$.

Ejemplo 2.5.15. *Los espacios cociente $J(\mathbb{N})$ y $S(\mathbb{N})$ son imagenes cerradas bajo funciones cociente de los siguientes espacios métricos $I \times \mathbb{N}$ y $H \times \mathbb{N}$, respectivamente (ver Proposiciones 1.4.14 y 1.3.1). Notemos que $I \times \mathbb{N}$ y $H \times \mathbb{N}$ son espacios de Moore (Lema 2.5.12). Dado que $J(\mathbb{N})$ y $S(\mathbb{N})$ no son primero numerables, estos no son desarrollables y consecuentemente $J(\mathbb{N})$ y $S(\mathbb{N})$ no son espacios de Moore.*

Ahora, con el siguiente resultado tenemos que la propiedad de ser Moore es aditiva.

Proposición 2.5.16. *Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es un espacio de Moore si y sólo si cada X_s es un espacio de Moore.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $s \in S$. Dado que X_s es un subespacio de $\bigoplus_{s\in S} X_s$, por la Proposición 2.5.7, X_s es un espacio desarrollable. Claramente X_s es un espacio regular. Por lo tanto X_s es un espacio de Moore.
$\Leftarrow\rfloor$ Por la Proposición 2.5.7, $\bigoplus_{s\in S} X_S$ es un espacio desarrollable. Por la Proposición 1.4.10, $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es un espacio regular. Así, $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es un espacio de Moore. □

Corolario 2.5.17. *La propiedad de ser Moore es aditiva.*

Demostración. La prueba se sigue de la Proposición 2.5.16 □

A continuación mostraremos con un ejemplo que la propiedad de ser espacio de Moore no es productiva.

Ejemplo 2.5.18. *La familia de espacios topológicos presentada en el Ejemplo 2.5.9, muestra que el producto topológico no numerable de espacios de Moore no es un espacio de Moore.*

Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.5.19. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios topológicos. Entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es un espacio de Moore si y sólo si cada X_i es un espacio de Moore.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como X_i puede encajarse en $\prod_{i=1}^{n} X_i$, X_i es regular. Por la Proposición 2.5.10, X_i es desarrollable. Así, X_i es un espacio de Moore.
$\Leftarrow\rfloor$ Es claro que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es regular (ver 1.5.8). Por la Proposición 2.5.10, $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es desarrollable. Por lo tanto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es un espacio de Moore. □

Bibliografía

[1] R. Engelking, General Topology, Translated from the Polish by the author, 2nd ed. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, 1989.

[2] R. Hodel, *Moore spaces and ω-spaces,* Pacific J. Math., **38**, (1971), 641-652.

[3] D. Hyman, *A Note on closed maps and metrizability*, Proc. Amer. Math. Soc., **21**, (1969), 109-112.

[4] E. Michael, $\aleph_o$*-spaces*, J. Math. Mech., **15** (1966), 983-1002.

[5] J.R. Munkres, *Topología*, 2nd ed, Prentice Hall, (2002).

[6] K. Tamano, *Closed images of metric spaces and metrization*, Topology Proc., **10** (1985), 177-186.

[7] S. Willard, *General topology,* Dover Publications, Inc. Mineola, N.Y., (2004).