



Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Valle de Chalco

**CONSTRUCCIÓN DE QUBITS A TRAVÉS DE FERMIONES DE
MAJORANA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACION

P R E S E N T A

ING. JOSÉ ROMAN CASTRO SAN AGUSTÍN

DIRECTOR:

DR. MANUEL ÁVILA AOKI

CO-DIRECTOR

DR. JUVENAL RUEDA PAZ

TUTORA

DRA. ANABELEM SOBERANES MARTÍN

VALLE DE CHALCO SOLIDARIDAD, MÉXICO OCTUBRE 2023.



CUVCH

CONSTRUCCIÓN DE QUBITS A TRAVÉS DE FERMIONES DE MAJORANA

RESUMEN

Las partículas subatómicas conocidas como fermiones de Majorana pueden formar estados cuánticos que los hacen prometedores para la fabricación de qubits. Se propone una alternativa novedosa para construir qubits por medio de las propiedades cuánticas de estas partículas. Para ello se realizó la simulación de un sistema cuántico de fermiones de Majorana y se compararon los resultados observables con un sistema convencional de dos qubits. Los resultados revelaron similitudes en el comportamiento de ambos sistemas, lo que sugiere que los fermiones de Majorana podrían cumplir con los requisitos necesarios para la generación de qubits.

ABSTRACT

The subatomic particles known as Majorana fermions can form quantum states that make them viable for qubit fabrication. A novel alternative is proposed for constructing qubits using the quantum properties of these particles. To achieve this, a simulation of a quantum system involving Majorana fermions was conducted, and the observable results were compared with those of a conventional two-qubit system. The results revealed similarities in the behavior of both systems, suggesting that Majorana fermions may meet the necessary requirements for qubit generation.

ÍNDICE DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 ANTECEDENTES	2
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
1.3 OBJETIVOS.....	5
1.4 DELIMITACIÓN O ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN.....	5
1.5 HIPÓTESIS.....	6
1.6 JUSTIFICACIÓN	6
2. MARCO TEÓRICO.....	8
2.1 COMPUTACIÓN CLÁSICA	9
2.2 COMPUTACIÓN CUÁNTICA	11
2.2.1 QUBIT	11
2.2.2 ESPACIOS VECTORIALES	15
2.2.3 INTERPRETACIÓN PROBABILÍSTICA DE LA FUNCIÓN DE ONDA.....	16
2.3 ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO	18
2.4 ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.....	19
2.5 COMPUTACIÓN CUÁNTICA TOPOLÓGICA	22
2.5.1 SUPERCONDUCTIVIDAD	23
2.5.2 ESTADÍSTICAS DE TRENZADO NO ABELIANO	24
2.5.3 ANIONES Y PARTÍCULAS NO ABELIANAS	24
2.6 FERMIÓN DE MAJORANA	26
2.6.1 EXCITACIONES DE MAJORANA.....	29
2.6.2 MODO CERO DE MAJORANA	30
2.7 QUBITS DE ESTADO SÓLIDO	31
3. METODOLOGÍA.....	34
4. QUBITS DE MAJORANA	36
4.1 MAJORANAS EN SUPERCONDUCTORES TOPOLÓGICOS	43
4.2 SIMULACIÓN DE QUBITS DE MAJORANA.....	52
5. CONCLUSIONES	59

6. TRABAJOS A FUTURO	62
REFERENCIAS	65

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Representación de un qubit en esfera de Bloch.....	14
Figura 2.2: Entrelazamiento cuántico de un par de electrones.	19
Figura 2.3: Grupo de trenzas en el espacio-tiempo.....	25
Figura 2.4: Gráfica de la ecuación de Yang-Baxter.....	26
Figura 2.5: Unión Josephson.	33
Figura 4.1: Operadores fermiónicos.	38
Figura 4.2: Superposición de operadores de Majorana.....	39
Figura 4.3: Estado fermiónico como qubit.	41
Figura 4.4: Pares de Majorana en nanocable.	44
Figura 4.5: Pares de Majorana en nanocable en forma de T.	45
Figura 4.6: Intercambio de Majoranas en red de nanocables.	46
Figura 4.7: Diagrama de fase normal y fase topológica.	47
Figura 4.8: Diagrama de transición de fase normal a fase topológica para un estado vacío.	49
Figura 4.9: Gráfica de fase normal y fase topológica para un estado vacío.	50
Figura 4.10: Diagrama de transición de fase normal a fase topológica para un estado lleno.	51
Figura 4.11: Gráfica de fase normal y fase topológica para un estado vacío.	51
Figura 4.12 : Diagrama de transición de fase normal a fase topológica para un estado $ 01\rangle$	53
Figura 4.13: Gráfica de fase normal y fase topológica para un estado $ 01\rangle$	54
Figura 4.14: Diagrama de transición de fase normal a fase topológica para un estado $ 00\rangle$	55
Figura 4.15: Gráfica de fase normal y fase topológica para un estado $ 00\rangle$	55
Figura 4.16: σ_{1z} al evolucionar con el tiempo.	56
Figura 4.17: σ_{2z} al evolucionar con el tiempo.	57
Figura 4.18: S_{1z} al evolucionar con el tiempo.	57
Figura 4.19: S_{2z} al evolucionar con el tiempo.	58

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

En 1928, Paul Dirac propuso que cada partícula se encuentra asociada a otra conocida comúnmente como “antipartícula” que tiene propiedades cuánticas similares, pero con carga del signo opuesto. Así como las partículas generan la materia, las antipartículas constituyen la antimateria (Cererols y De la Torre, 2018). Sin embargo, en los años 1930 un físico italiano llamado Ettore Majorana realizó un estudio en el cual propone que las partículas conocidas como fermiones tienen sus propias antipartículas. Esta propiedad consiste en que una partícula se encuentra asociada a otra, con la misma masa, pero con números cuánticos negativos.

En las últimas dos décadas el término de computación cuántica ha tomado relevancia. Este campo de estudio tiene origen en la física clásica. En 1981 Richard Feynman durante una conferencia en *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) abordó el tema al problema de la simulación de la física cuántica con la computación clásica. Mencionó que la naturaleza no es clásica y para simularla sería necesario hacerlo con mecánica cuántica. Por lo tanto, se podría considerar que ésta fue la pauta que abrió la mente de quienes buscan algoritmos que puedan describir el comportamiento de un sistema cuántico. Con esto, inicia la búsqueda del desarrollo de procedimientos que simulen tareas mucho más complejas (Diaz, 2018).

La aparición de los transistores revolucionó lo que se conoce hoy en día como la computación clásica. Esta tecnología es el punto de partida del funcionamiento de las computadoras convencionales, pero debido a la necesidad de aumentar la potencia de procesamiento para la ejecución de tareas más complejas, se busca que durante fabricación se reduzcan en tamaño. Actualmente los transistores han alcanzado un nivel microscópico a tal punto de que se llega a un límite nanométrico que se escapa de las leyes de la física clásica (Rúa y Branch, 2009).

La base del desarrollo de la computación cuántica se debe a lo limitado de la capacidad de procesamiento y almacenamiento que podrían tener las futuras computadoras clásicas. Desde la primera computadora ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) construida en el año 1946, hasta los dispositivos de tecnología basada en el uso de transistores, se ha creado un avance tecnológico importante debido al incremento en capacidad y potencia que muestran los componentes de las computadoras actuales. Siendo más rápidos en el cálculo de operaciones, cada generación de computadoras se ve en la necesidad de crear dispositivos con elementos cada vez más pequeños (Barusio, Gutiérrez, Herrero y Lens, 2016).

El mundo digital de la computación clásica consta de dígitos binarios “bits”, que tienen como únicos valores 0 o 1. En la computación cuántica resulta mucho más complejo y es aquí donde aparece el bit cuántico o qubit que puede tener una combinación simultánea de un conjunto de estados que pueden oscilar entre 0 o 1 (Acín, 2006).

En el año 2014 un grupo de investigadores lograron el hallazgo de la primera evidencia de los fermiones de Majorana. Este descubrimiento es de gran importancia en la comunidad científica puesto que puede ser utilizado para el tratamiento de la información en la computación cuántica. Por lo tanto, su estudio da lugar al desarrollo de una partícula que permitiría crear qubits de forma mucho más factible (Pastor, 2018).

Si bien es cierto que el matemático israelí Gil Kalai da por hecho que será imposible aplicar esta tecnología debido a la complejidad de examinar su funcionamiento en el mundo físico, la realidad es que se espera encontrar sistemas físicos que actúen como un qubit (López, 2019).

Aunque actualmente no hay una única tecnología precisa para fabricar computadoras cuánticas, existen técnicas que aún se encuentran en desarrollo. Sin embargo, esta innovación tecnológica se ve cada vez más cerca con la

aparición de prototipos desarrollados por empresas como IBM o Google. Estos trabajan con circuitos superconductores donde se almacena información en qubits (Varona, 2020).

En noviembre de 2021, IBM presentó *Eagle*, un procesador cuántico de 127 qubits. Cuenta con la capacidad de generar en solo tres minutos una cierta cantidad de números aleatorios que a los ordenadores clásicos más sofisticados del mundo les tomaría aproximadamente 600 millones de años.

Uno de los avances tecnológicos de IBM es el desarrollo de la infraestructura utilizada para trabajar sobre los qubits. Para ello se emplean procedimientos que resultan ser complejos en el uso de sistemas cuánticos como anillos superconductores o trampas de iones (González, 2021).

Los qubits realizados con materiales superconductores es una de las principales opciones viables para la construcción de las próximas computadoras cuánticas. Consiste en la irradiación de microondas de un circuito superconductor acoplado electromagnéticamente para la transición del qubit (Kjaergaard, Schwartz, Braumüller, Krantz, Wang, Gustavsson y Oliver, 2020).

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el campo de la computación cuántica, se utilizan una variedad de enfoques para desarrollar y fabricar qubits. Entre estos se incluyen los basados en superconductividad, átomos neutros, iones atrapados y fotones (Irastorza, 2016). Sin embargo, los qubits son sensibles, lo que los vuelve susceptibles a errores. Los fermiones de Majorana son partículas que poseen propiedades únicas para formar estados cuánticos, además de que poseen la característica de comportarse como sus propias antipartículas, permitiéndoles coexistir en el mismo espacio sin que se aniquilen entre ellas mismas. Esta particularidad genera una estabilidad superior en comparación con otras alternativas de

fabricación de qubits. Esta investigación contribuirá a la comprensión de los fermiones de Majorana y su aplicación en la computación cuántica.

Derivado de lo anterior, surgen las siguientes interrogativas:

1. ¿Cómo se aprovechan las características de los fermiones de Majorana para generar estados cuánticos?
2. ¿Cómo se configuran los fermiones de Majorana para construir un sistema de qubits?

1.3 OBJETIVOS

General: Examinar un sistema de fermiones de Majorana por medio de una simulación demostrando que pueden actuar como qubits.

Específicos:

1. Explorar en profundidad los conceptos básicos de la computación cuántica a través de la investigación y el estudio, obteniendo una perspectiva inicial del trabajo de investigación.
2. Comprender las características y propiedades de los fermiones de Majorana por medio de la explicación y la investigación, demostrando su funcionamiento en computación cuántica.
3. Simular un sistema de dos qubits de Majorana utilizando métodos de modelado en Python, evaluando su comportamiento y características.

1.4 DELIMITACIÓN O ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación se enfocará en el análisis de las características de los fermiones de Majorana y su viabilidad como elementos fundamentales en la construcción de qubits. El objetivo central de este estudio es llevar a cabo una simulación de un sistema de dos qubits de Majorana y posteriormente comparar

su comportamiento con un sistema convencional de dos qubits. El objetivo no es evaluar el rendimiento y la estabilidad sino su comportamiento con la finalidad de proporcionar una validación de la capacidad de los fermiones de Majorana para funcionar como unidades de información cuántica.

Debido a que no se cuentan con aplicaciones prácticas de esta tecnología, no se considerará efectos relativistas ni ruido cuántico en los qubits basados en fermiones de Majorana. Por el momento aún se encuentra en fase experimental. Además de que, si se consideran dichas situaciones, la tesis se podría extender un par de años más. Esto no lo permite el programa de Maestría en ciencias de la computación. Este problema sería tomado como trabajos a futuro después de que exista una implementación real de los qubits de Majorana.

1.5 HIPÓTESIS

Las propiedades del fermión de Majorana pueden tener aplicaciones en el campo de la computación cuántica. Si estos pueden ser controlados y manipulados para mantener estados cuánticos coherentes, podrían convertirse en componentes para el desarrollo de qubits estables.

1.6 JUSTIFICACIÓN

La computación clásica ha sido una herramienta fundamental que, a lo largo de la historia, ha permitido que el conocimiento y desarrollo de distintos campos de estudio tengan un progreso considerable. Esto se puede observar en cualquier área de la ciencia y tecnología cuando se requiere realizar cálculo o procedimientos complejos que requieren tiempo y capacidad de procesamiento. Esta tecnología ha permitido desde optimizar tareas complicadas, hasta la asistencia en decisiones con uso de inteligencia artificial.

Las computadoras clásicas trabajan con bits (ceros y unos). Una computadora cuántica tiene demasiada ventaja en el tratamiento de los datos con la superposición de los ceros y unos. Lo que permitiría la realización de tareas de forma mucho más fluida a comparación de la computación clásica.

Hoy en día las empresas IBM y Google han desarrollado qubits por medio de materiales superconductores o trampas de iones. Estos dispositivos actúan como ambientes que controlan el qubit por medio de campos electromagnéticos. La construcción de estos sistemas cuánticos resulta ser demasiado complejo, lo que provoca que su fabricación sea a gran escala (Varona, 2020).

Los fermiones de Majorana pueden crear un panorama favorable para establecer posibles alternativas en la construcción de qubits. Estas partículas pueden generar estados cuánticos estables, lo que significa un avance en el desarrollo del cómputo cuántico debido a que pueden prevenir errores inducidos por la interferencia de partículas

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 COMPUTACIÓN CLÁSICA

La mecánica clásica es una rama de la física que estudia el movimiento de los objetos. Además, busca interpretar el comportamiento de cuerpos macroscópicos los cuales son los fenómenos a escala intermedia como los océanos o la atmosfera. Por lo tanto, se considera a la mecánica clásica como las bases para la descripción cuántica de la materia subatómica (Hecht, 2005).

Las ciencias de la computación han logrado crear sistemas que pueden resolver problemas que necesitan el manejo de grandes cantidades de información. Pero en algunos casos la computación clásica no ha podido resolver operaciones tan grandes debido a la enorme cantidad de procesos que se deben ejecutar. El cómputo cuántico juega un papel importante en el mundo científico, ya que, encontraría las soluciones a los problemas de cálculo demasiado complejos.

La computación clásica ha tenido una evolución exponencial en el diseño de componentes electrónicos y para aumentar la capacidad de tratamiento de la información se ha tenido que reducir el espacio físico de estos dispositivos. El inicio de la electrónica se da en el año 1904, se con la aparición del diodo vacío o válvula de vacío inventada por John Ambrose Fleming (Dylla y Corneliussen, 2005).

La válvula de vacío es un componente constituido de electrodos dentro de un bulbo vacío. Su funcionamiento consiste en la capacidad de conducir corriente eléctrica, cuya magnitud es manejada por voltajes aplicados a sus electrodos. Esto permitía controlar el flujo de electrones (Pérez, 2004).

Con la aparición de la válvula de vacío, se dio el paso para la fabricación de los primeros radios y televisores. Sin embargo, con el tiempo estos dispositivos sufrían problemas debido a que las válvulas se fundían con frecuencia, consumían mucha energía y se averiaban con las vibraciones,

además de que ocupaban demasiado espacio haciendo que el dispositivo fuera pesado. La solución que se dio a este conjunto de problemas fue cuando surgió el transistor, generando sistemas reducidos en cuanto a volumen y costo.

Shockley, Bardeen y Brattain en los laboratorios Bell desarrollaron el transistor en el año 1947. El invento les permitió obtener el premio Nobel de Física en 1956. Este dispositivo electrónico se basa en materiales semiconductores compuestos principalmente de silicio o germanio. Tienen propiedades eléctricas que permiten controlar fácilmente el flujo de electrones aislando o conduciendo la corriente dependiendo del voltaje aplicado (Lutenberg y Venturino, 2010).

Las propiedades de la física clásica se aplican en los transistores que son una parte fundamental de la computación. Básicamente estos componentes retienen o dan paso a corriente eléctrica y en conjunto dan como resultado una compuerta lógica. Los bits son los impulsos eléctricos controlados por las compuertas lógicas y se representan con 0's o 1's dando como resultado el "lenguaje maquina" utilizado para el procesamiento, tratamiento y creación de información (Martín, 2019).

En 2012, un grupo internacional de científicos de la Universidad de Melbourne y Nueva Gales del Sur, lograron fabricar un transistor con un solo átomo equivalente a los 0.1 nanómetros. Gerhard Klimeck considero que con su investigación llegaban al límite físico de la ley de Moore (Pérez, 2021).

Para el año 2015, se publicaba en Nature Physics la demostración del funcionamiento de un transistor basado en una molécula de ftalocianina. Albergaba una terminal de puerta que lograba controlar la conductancia por efecto túnel (Pérez, 2021).

En 2016, se creó el primer transistor de un nanómetro de tamaño por un equipo del Laboratorio Nacional de Berkeley con nanotubos de carbono y

disulfuro de molibdeno (MoS_2). Estos compuestos tienen una estructura cristalina; sin embargo, los electrones que se conducen a través del silicio tienen una masa efectiva lo que ocasiona problemas con el fenómeno cuántico llamado efecto túnel.

En 2020, un proyecto financiado por el ejército de los Estados Unidos dio como resultado la creación del considerado transistor más pequeño del mundo. Basado en minerales de tierras raras como el telurio, con forma de hélice de ADN unidimensional y encapsulado en un nanotubo, podía comportarse como un transistor de efecto campo de solo dos nanómetros (Pérez, 2021).

La reducción del tamaño en los transistores resulta más difícil. Los fenómenos cuánticos interfieren con el funcionamiento de éstos, parcialmente en estos tamaños tan reducidos. Es por esta razón que la computación cuántica juega un papel muy importante en el futuro de la computación.

2.2 COMPUTACIÓN CUÁNTICA

La mecánica cuántica es el campo de estudio que surge por la necesidad de describir los hechos que no tienen explicación en el mundo de la mecánica clásica. El hecho de intentar explicar los fenómenos atómicos, los resultados entran en contradicción con la experiencia por lo tanto no existe paradigma científico que sustente estos resultados con la realidad (Hecht, 2005).

2.2.1 QUBIT

El qubit es la unidad mínima lógica de información cuántica que, a diferencia de los bits clásicos, simplemente no puede tener el valor 0 o 1 sino que puede tener una combinación de ambos estados (superposición); por lo que la computación cuántica podría tener mejor capacidad de procesamiento a comparación de la computación clásica.

Existen distintas alternativas para la fabricación de qubits, como los átomos, iones, fotones y dispositivos de nanoescala, cada uno tiene sus propios beneficios y desafíos en cuanto a su capacidad para guardar y procesar información de manera confiable (Nielsen y Chuang, 2010).

Para interpretar y describir adecuadamente la naturaleza de la mecánica cuántica, es esencial comprender las características inherentes de los qubits. Estas características incluyen la superposición, el entrelazamiento y la medición (Soto, 2017).

En la computación cuántica el término de decoherencia se refiere a un modelo que describe como se produce esta transición de la mecánica cuántica a la clásica. Esto produce que los sistemas realicen mediciones sobre sí mismos. Se puede decir que el universo está dividido en dos partes: un sistema simple tratado con mecánica cuántica, y un sistema complejo, que se trata estadísticamente (Gamble, 2008).

El término "escalabilidad" se ha utilizado para describir la capacidad de construir una máquina compleja a partir de bloques de construcción fundamentales, manteniendo las propiedades de los qubits individuales. A medida que aumenta la cantidad de qubits, también se deben abordar otros aspectos técnicos. La arquitectura para administrar señales de entrada-salida, los subsistemas electrónicos clásicos de lectura y control, la disipación de energía, la diafonía, el ruido y la sobrecarga informática clásica, son algunos de los elementos necesarios para construir una computadora cuántica. La escalabilidad en la computación cuántica es un requisito técnico crítico que aborda múltiples aspectos del diseño de una máquina cuántica compleja (Reilly, 2019).

En mecánica cuántica un estado puede ser representado en términos de un vector $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert H (un espacio vectorial complejo con un

producto interno): $\langle\psi|\psi\rangle$. Puede decirse que se tienen dos estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ del sistema. Entonces su superposición lineal de la forma $c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$ ($c_k \in \mathbb{C}$) también es considerado un estado del mismo sistema. Esto se conoce como el principio de superposición (Nakahara y Ohmi, 2008).

La representación de los estados básicos del qubit se denotan por un vector de estado en el espacio de Hilbert:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

por lo tanto

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.2)$$

donde α y β son complejos, tal que, si α y β no son nulos. Se dice que los estados cero y uno están en superposición por lo que una medida permite encontrar un estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Por lo tanto:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (2.3)$$

En caso de que un qubit se encuentre en una superposición de estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ y cuando se aplique una medición, esta solo podrá encontrarse en el estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Por lo tanto, las leyes de la mecánica cuántica establecen que, el módulo al cuadrado de Alpha y Beta dan la probabilidad de encontrar el qubit en un estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$ respectivamente (McMahon, 2007). Dicho de otro modo:

- $|\alpha|^2$: Indica la probabilidad de encontrar $|\psi\rangle$ en el estado $|0\rangle$
- $|\beta|^2$: Indica la probabilidad de encontrar $|\psi\rangle$ en el estado $|1\rangle$

Lo que equivale a

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.4)$$

La base $|0\rangle$ o $|1\rangle$ puede ser representada por:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}} = \alpha \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} |+\rangle + \beta \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}} |-\rangle \quad (2.5)$$

La interpretación geométrica del vector se da con la esfera de Bloch (como se observa en la figura 2.1) que representa la “rotación” de un qubit. Puede ser escrito en su forma polar, por lo tanto:

$$|\psi\rangle = e^{iy}(\cos\theta/2|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2|1\rangle) \cong \cos\theta/2|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2|1\rangle) \quad (2.6)$$

donde φ, θ, y son números reales y e^{iy} no tiene efectos observables.

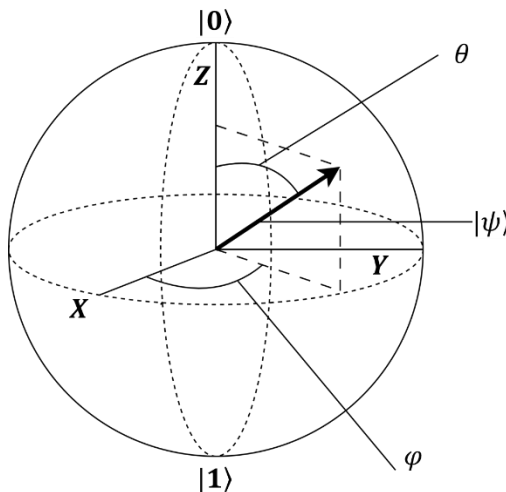


Figura 2.1: Representación de un qubit en esfera de Bloch.

Fuente: Elaboración propia a partir de Hecht (2005).

Dentro del contexto de la computación cuántica, existen operadores que pueden influir en el comportamiento de los qubits. Entre ellos, se encuentran los cuatro operadores de Pauli, que incluyen el operador de identidad. Estos operadores se suelen representar utilizando notaciones como $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3 , o de manera más simplificada como I, X, Y y Z (McMahon, 2007). Los operadores de Pauli se definen como:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

2.2.2 ESPACIOS VECTORIALES

En la computación cuántica, mientras la unidad básica de información es el qubit, el campo en el que esta toma lugar es una abstracción matemática denominada espacio vectorial. Resulta que los estados cuánticos se comportan matemáticamente en una forma análoga a los vectores físicos, de ahí el término espacio vectorial (McMahon, 2007).

Un espacio vectorial “ V ” es un conjunto de elementos no vacíos “ u ”, “ v ” llamados vectores para el que se definen las siguientes operaciones:

- Regla para la suma: denotada por una operación $w = u + v$, que también es elemento de “ V ”; en otras palabras, w es otro vector que pertenece al mismo espacio
- Regla para la multiplicación por escalar: define la multiplicación de un vector por un número α tal que el vector $\alpha u \in V$

Para el espacio vectorial V debe cumplir con los siguientes axiomas.

- Axioma 1: Suma asociativa. Dados los vectores $u, v, y w$,

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad (2.8)$$

- Axioma 2: Existe un vector perteneciente a V denominado como “vector cero” que satisface:

$$(u + 0) = 0 + u = u, \quad \text{para cualquier vector } u \in V \quad (2.9)$$

- Axioma 3: Por cada $u \in V$ existe un inverso aditivo de u tal que:

$$u + (-u) = (-u) + u = 0 \quad (2.10)$$

- Axioma 4: Suma conmutativa:

$$(u + v) = v + u \quad (2.11)$$

En la computación cuántica, el espacio vectorial \mathbb{C}^n es de gran importancia. Este espacio está compuesto por conjuntos de "n-tuplas" de números complejos. Cuando se menciona "n-tuplas", se refiere simplemente a una colección ordenada de números. Utilizando la notación adecuada, es posible asignar etiquetas a los elementos de \mathbb{C}^n , representados como $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$. Por lo tanto, es viable expresar un vector columna n-dimensional para describir un elemento de este espacio vectorial, o bien, una lista ordenada de números a_1, b_2, \dots, a_n de la siguiente manera (McMahon, 2007):

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

2.2.3 INTERPRETACIÓN PROBABILÍSTICA DE FUNCIÓN DE ONDA

La interpretación probabilística de la función de onda es una forma fundamental de comprender el comportamiento de las partículas subatómicas en la mecánica cuántica, donde se establece que la función de onda de un sistema cuántico proporciona la probabilidad de encontrar a la partícula en una posición en un momento específico. Es una de las interpretaciones más utilizadas en la actualidad y fue desarrollada por Max Born en 1926. Esta interpretación se basa en el hecho de que los resultados de las mediciones cuánticas son aleatorios y están gobernados por las probabilidades. Además, es esencial para entender el comportamiento colectivo de las partículas subatómicas. Como en el caso de los electrones en un material conductor, denominado mecánica estadística que ha sido de gran ayuda para el desarrollo de la física de materiales y la tecnología de los semiconductores (Born, 1926).

La interpretación probabilística de la función de onda ha jugado un papel muy importante en el desarrollo de la mecánica cuántica y ha permitido el éxito de muchas predicciones y explicaciones de fenómenos cuánticos. Sin embargo, también ha sido objeto de controversia y ha llevado a la formulación de otras interpretaciones como la de Copenhague (Nielsen y Chuang, 2010).

Aproximadamente la mecánica cuántica tiene un siglo de haber sido descubierta. En 1926 Erwin Schrödinger introduce la función de onda. Denotada comúnmente como “ ψ ”, se define como la amplitud que permite obtener el cálculo de los diferentes resultados de una medición u observación aplicada a un sistema.

Para cualquier cantidad observable “ a ”, existe un operador hermitiano correspondiente A que actúa sobre el espacio de Hilbert H . Cuando se realiza una medición de a se obtiene uno de los valores propios λ_j del operador A . Sean λ_1 y λ_2 dos elementos de A : $A|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$. Cuando el sistema se encuentre en un estado de superposición $c_1|\lambda_1\rangle + c_2|\lambda_2\rangle$. Si este estado es medido, entonces el estado cambia su valor propio al instante: Si el valor propio observado es λ_1 o λ_2 , el sistema colapsa en función de onda: $c_1|\lambda_1\rangle + c_2|\lambda_2\rangle \rightarrow |\lambda_1\rangle$ o $|\lambda_2\rangle$, y el estado después de la medición es $|\lambda_1\rangle$ o $|\lambda_2\rangle$.

En caso de que se tengan varios estados de la forma $c_1|\lambda_1\rangle + c_2|\lambda_2\rangle$. La probabilidad de colapsar al estado $|\lambda_k\rangle$ es dada por $|c_k|^2$ ($k = 1,2$). En este sentido, el coeficiente complejo c_j se conoce como amplitud de probabilidad. Es importante mencionar que una medición produce un resultado λ_i y la probabilidad de obtenerlo se evalúa experimentalmente después de repetir mediciones con estados de la misma forma (Nakahara y Ohmi, 2008).

2.3 ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO

El entrelazamiento es una de las interesantes teorías de la mecánica cuántica. Consiste en un fenómeno donde dos partículas están conectadas de forma que desafía a las leyes de la física clásica. Puede que se encuentren separadas a años luz de distancia y cuando una partícula cambia, inmediatamente afectará a la otra (Nieves, 2021).

En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen diseñaron un experimento mental del principio de localidad y realidad de la mecánica cuántica. La lógica del experimento consiste en que si se considera un sistema de dos partículas en estado $|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, la medición que se realiza en la primera partícula tiene impacto en el resultado de la segunda. Luego de la primera medición, la primera partícula está en estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ (para la segunda partícula los resultados son los mismos). Suponiendo que las partículas están entrelazadas, cuando la primera partícula es medida, ésta colapsa en el estado $|0\rangle$, entonces la segunda estará en el estado $|1\rangle$. La información viaja de una partícula a otra más rápido que la velocidad de la luz. Einstein, Podolsky y Rosen llegaron a la conclusión de que hay una contradicción con la teoría de la relatividad debido a que algunos efectos cuánticos viajan más rápido que la luz. El experimento presentado se llama la paradoja EPR (Kurzyk, 2012).

Un equipo de investigadores ha confirmado la validez de este concepto, subsanando fallos de pruebas anteriores y destacando el papel fundamental del entrelazamiento en la mecánica cuántica. La medición del estado de una partícula cuántica, como un electrón, puede tener un efecto instantáneo en el estado de otro, incluso si se encuentran a grandes distancias. Según la teoría cuántica, un electrón puede girar en ambas direcciones simultáneamente, y su estado cuántico se "colapsa" en una dirección particular solo cuando se mide con un analizador configurado en una orientación específica. Por ejemplo, en la

figura 2.2 se representan dos electrones que pueden estar en un estado de entrelazamiento cuántico, lo que significa que sus giros están completamente inciertos pero correlacionados. Si Alice y Bob comparten dos electrones entrelazados, y Alice mide el giro de su electrón y lo encuentra girando hacia arriba, inmediatamente sabe que el de Bob está girando hacia abajo, incluso si están separados por una gran distancia. Este fenómeno desconcertó a Einstein, ya que sugiere que la onda cuántica que describe los electrones colapsa a una velocidad más rápida que la luz. Además, sugiere que la "realidad" del estado de giro de un electrón no se determina hasta que se mide y la onda cuántica colapsa (Chon, 2015).

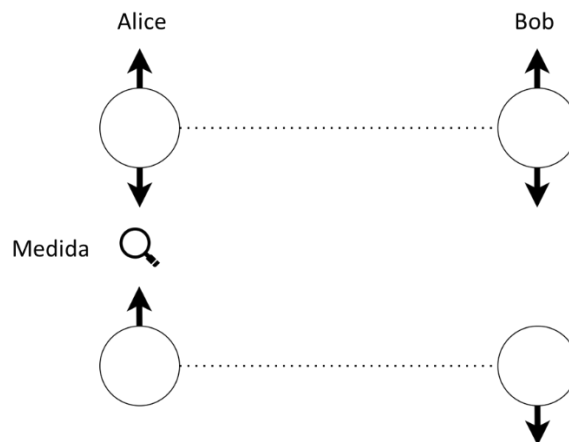


Figura 2.2: Entrelazamiento cuántico de un par de electrones.

Fuente: Elaboración propia a partir de Chon (2015).

2.4 ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Existe una teoría que permite analizar los estados de los sistemas cuánticos. En la mayoría de los casos los problemas que se abordan son del tipo de sistema donde su estado evoluciona con el tiempo; lo que provoca que la ecuación de Schrödinger al caso dependiente del tiempo se generalice. Existe un caso

particular del cual se puede disponer de la evolución temporal, el de la partícula libre (De la Peña, 1991).

$$\psi(x, t) = \int A(k) \exp\left(-\frac{i\hbar k^2 t}{2m} + ikx\right) dk \quad (2.13)$$

Siempre que se utilice el tiempo como variable independiente, se puede intentar construir la ecuación completa de Schrödinger con su ayuda cuando sea una generalización “natural” de la ecuación estacionaria de Schrödinger, que se simplifica a esta última cuando la función de onda como una onda monocromática al factorizarla en funciones de t y x , adoptando la forma:

$$\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \varphi(x) \quad (2.14)$$

Se deriva la ecuación (2.12) dos veces respecto de x , para obtener

$$\psi^n(x, t) = \int k^2 A(k) \exp\left(-\frac{i\hbar k^2 t}{2m} + ikx\right) dk \quad (2.15)$$

Al derivar la misma expresión respecto del tiempo, queda

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \int k^2 A(k) \exp\left(-\frac{i\hbar k^2 t}{2m} + ikx\right) dk \quad (2.16)$$

Comparando resultados se observa que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \psi^n \quad (2.17)$$

O incluso mejor, al considerar el caso multidimensional, mediante la sustitución, $\psi^n \rightarrow \nabla^2 \psi$, que

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (2.18)$$

Observando el caso estacionario, con ψ dada por la ecuación (2.13), se cumple que

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \quad (2.19)$$

con lo que la ecuación (2.17) se simplifica hasta llegar a la ecuación estacionaria de una partícula libre:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (2.20)$$

Estos resultados demuestran que la transición del caso estacionario al caso dependiente del tiempo debe realizarse de manera consistente con todo lo anterior, y esto se logra mediante la sustitución

$$E\psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.21)$$

Aplicando esta condición a la ecuación estacionaria de Schrödinger para un potencial arbitrario,

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \quad (2.22)$$

se obtiene la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \quad (2.23)$$

La computación cuántica es uno de los campos que significa un importante progreso en la ciencia. Al aprovechar los fenómenos cuánticos como la superposición y el entrelazamiento, se ha observado el potencial para resolver tareas que resultan difíciles hoy en día para las computadoras clásicas. Sin embargo, a pesar de los avances, siguen existiendo obstáculos significativos asociados con la decoherencia y la corrección de errores en la computación cuántica. Por esta razón, la computación cuántica topológica se perfila como uno de los enfoques más prometedores para superar dichos desafíos.

2.5 COMPUTACIÓN CUÁNTICA TOPOLÓGICA

Con el surgimiento de la computación cuántica topológica aparece uno de los enfoques para la construcción de computadoras cuánticas estables. Esta área de la computación cuántica se especializa en el uso de estados topológicos para almacenar y procesar información (Pachos, 2012).

Esta tecnología se basa en los estados topológicos de la materia donde las excitaciones de cuasipartículas no son de bosones ni fermiones sino de partículas comúnmente conocidas como aniones no abelianos. Esto quiere decir que sus propiedades obedecen a las estadísticas de trenzado no abelianas. Con estados de múltiples cuasipartículas, es posible almacenar la información cuántica, que tienen una degeneración topológica. Los qubits topológicos se basan en la estabilidad de sus estados de la materia para proteger la información cuántica de las perturbaciones del medio ambiente. Lo que los hace ideales para la creación de dispositivos cuánticos a gran escala (Nayak, Steven, Stern, Freedman y Das Sarma, 2007).

Uno de los desafíos principales en el campo de la computación cuántica topológica es buscar maneras de aplicar estados topológicos en sistemas físicos. Se han planteado varias estrategias para lograrlo, como mediante el empleo de partículas con spin cuántico o mediante el uso de sistemas de luz y resonadores de cavidad (Kitaev, 2003).

Para las operaciones de puerta unitaria se trenzan cuasipartículas para posteriormente medir los estados de multicuasipartículas para el cálculo cuántico. La codificación no local de los estados de las cuasipartículas provoca que la computación cuántica topológica sea inmune a errores causados por perturbaciones locales y permite una gran tolerancia a fallas.

En la actualidad, los estados de Hall fraccionarios son los únicos estados topológicos de este tipo que se cree que se han encontrado en la naturaleza.

Actualmente han surgido varias propuestas de otros posibles candidatos en sistemas tan dispares como los átomos ultra fríos en la óptica (Nayak, Steven, Stern, Freedman y Das Sarma, 2008).

2.5.1 SUPERCONDUCTIVIDAD

La superconductividad es un fenómeno en el cual un material conductor experimenta una ausencia de resistencia eléctrica y una gran repulsión hacia los campos magnéticos a temperaturas por debajo de un valor crítico específico. Estos materiales superconductores pueden ser utilizados para fabricar dispositivos que permiten el flujo de corriente eléctrica sin pérdidas de energía.

En la computación cuántica, la superconductividad se utiliza de diversas formas. Por ejemplo, se pueden emplear dispositivos superconductores para crear qubits de estado sólido, los cuales son qubits implementados en sistemas a nivel nanoescalar. Los qubits de estado sólido se pueden implementar en dispositivos de nanoescala mediante el uso de una partícula con spin cuántico, como un electrón o un espín de protón, situada en un campo magnético. El spin de la partícula puede utilizarse para representar el estado del qubit, y se pueden aplicar pulsos electromagnéticos para controlarlo y manipularlo (Berggren, 2004).

La superconductividad es utilizada en la creación de dispositivos para lectura y escritura de qubits y en el diseño de circuitos cuánticos. Los dispositivos superconductores pueden ser utilizados para fabricar circuitos cuánticos que son más estables y menos propensos a errores que los circuitos clásicos.

2.5.2 ESTADÍSTICAS DE TRENZADO NO ABELIANO

Los fermiones y los bosones se distinguen por dos propiedades cuánticas: la función de onda y la estadística cuántica. Estas propiedades permiten describir sistemas de muchas partículas idénticas y deben satisfacer la simetría adecuada del intercambio entre dos partículas. En tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal (3+1 D), solo existen dos simetrías posibles. La función de onda de los bosones es simétrica en el intercambio, mientras que la de los fermiones es antisimétrica.

La simetría de la función de onda es la raíz del principio de Pauli, la superfluidez, el estado metálico, la condensación de Bose-Einstein y muchos otros fenómenos. Sin embargo, para definir la evolución cuántica de un sistema de muchas partículas, es necesario especificar cómo actúa el grupo de permutación sobre los estados del sistema. Las dos únicas representaciones irreducibles unidimensionales del grupo de permutación de N partículas idénticas son los fermiones y los bosones.

Es importante destacar que los sistemas bidimensionales son cualitativamente diferentes de los tridimensionales. En dos dimensiones, un bucle de partículas que rodea a otra partícula no se puede deformar hasta un punto sin atravesar la otra partícula (Nayak, Steven, Stern, Freedman y Das Sarma, 2008).

2.5.3 ANIONES Y PARTÍCULAS NO ABELIANAS

En la teoría relativista de campos, existe un método para diferenciar entre bosones y fermiones conocido como el teorema estadístico del espín. Este teorema establece que las partículas con un valor de espín entero son clasificadas como bosones, mientras que aquellas con un valor de espín semientero son clasificadas como fermiones. Esto se debe a que el

hamiltoniano de partículas idénticas conmuta con cualquier elemento del grupo simétrico S_N que intercambia las N partículas idénticas. Por lo tanto, se pueden clasificar los estados propios del hamiltoniano en términos de representaciones irreducibles del grupo de permutación. La degeneración de intercambio se debe al hecho de que las partículas son indistinguibles.

En la figura 2.3 se muestra una representación geométrica del grupo de trenzas, la cual se realiza en el espacio-tiempo. El eje horizontal de la figura representa la dimensión espacial, mientras que el eje vertical representa la dimensión temporal. En este ejemplo, cada elemento del grupo de trenzas B_N consta de N hilos numerados del 1 al 5. Los generadores del grupo B_K se utilizan para denotar el trenzado de dos hilos en sentido contrario a las agujas del reloj. Por ejemplo, en la figura, B_1 trenza los hilos 1 y 2 en sentido contrario a las agujas del reloj. La operación inversa se utiliza para trenzar las hebras en el sentido de las agujas del reloj, como se muestra en la figura donde B_4^{-1} trenza las hebras 4 y 5 en el sentido de las agujas del reloj. Es importante destacar que dos elementos del grupo son equivalentes si las trenzas correspondientes pueden ser deformadas suavemente entre sí sin mover los extremos indicados por los puntos negros (Hassler, 2014).

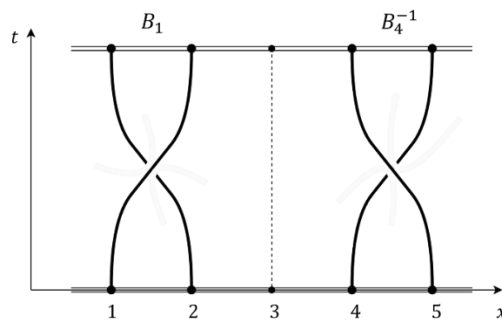


Figura 2.3: Grupo de trenzas en el espacio-tiempo.

Fuente: Elaboración propia a partir de Hassler (2014).

La relación importante entre los generadores B_k y B_{k+1} se representa gráficamente en la figura 2.4 mediante la ecuación de Yang-Baxter $B_k B_{k+1} B_k = B_{k+1} B_k B_{k+1}$. Se puede observar que ambas trenzas son topológicamente equivalentes debido a que comparten la misma configuración: la hebra $k + 2$ se encuentra en la parte posterior y termina en la posición inicial de la hebra k , mientras que la hebra k se encuentra al frente y termina en la posición inicial de la hebra $k + 2$. La hebra central se ubica en $k + 1$ y finaliza en el mismo punto en ambas trenzas. Esta simetría permite que las trenzas se puedan transformar entre sí deslizando la hebra central $k + 1$ suavemente entre las otras dos hebras de izquierda a derecha, lo que confirma su equivalencia topológica.

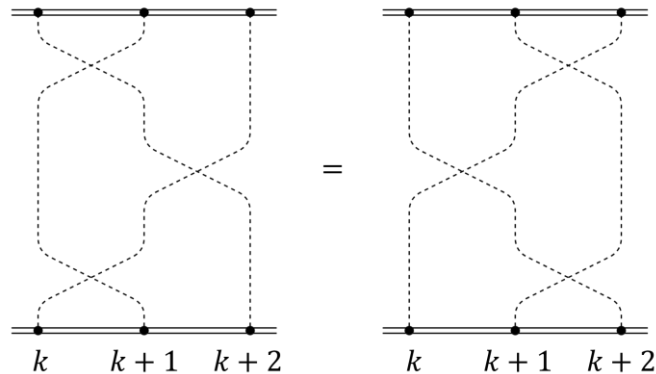


Figura 2.4: Gráfica de la ecuación de Yang-Baxter.

Fuente: Elaboración propia a partir de Hassler (2014).

2.6 FERMIÓN DE MAJORANA

Las partículas de Majorana fueron descritas por primera vez en 1937 por el físico italiano Ettore Majorana y tradicionalmente se han definido como un fermión que es partícula y antipartícula al mismo tiempo. A diferencia de las partículas que predijo Majorana, que eran fermiones, las partículas superconductoras de este trabajo son aniones. “Se trata de un tipo de estado cuántico cuya función de onda no se comporta ni como la de un fermión ni

como la de un bosón. Esta propiedad carece de análogo en el Modelo Estándar de física de partículas y podría dar lugar a una forma de computación cuántica más robusta, denominada computación cuántica topológica”, concluye el investigador del CSIC Ramón Aguado, del Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid.

En el año 2017, en la Universidad de California un grupo de investigación dirigido por los profesores Jing Xia y Kang Wang, logró el hallazgo de la primera evidencia de la existencia de los fermiones de Majorana. Para lograr los resultados, se realizaron diferentes experimentos utilizando materiales superconductores en finos filamentos que a su vez se enfrían hasta llegar al cero absoluto y se aplica una corriente eléctrica a través de ellos. Incluyeron un aislante topológico magnético para hacer fluir los electrones además de que los controlaba de tal forma que al juntar los filamentos se pudo obtener un aislante topológico superconductor. Al aplicar un elemento magnético permitió ralentizar el electrón a tal punto que lo hacía retroceder, esto se realizó varias veces hasta que emergieron las partículas de fermiones de Majorana.

En 2014, Hassler define a los fermiones de Majorana como partículas no abelianas y como pueden percibirse como fermiones de Dirac que emergen estados finitos con energía cero en nanocables superconductores de ondas independientes de cualquier detalle microscópico. Un qubit puede ser codificado por cuatro fermiones de Majorana manteniendo la paridad de fermiones en el sistema; por lo tanto, las puertas en el qubit solo pueden ser realizadas por operadores que involucren dos fermiones de Majorana. Debido a que los fermiones de Majorana están separados espacialmente, no es posible que el qubit de Majorana pueda acoplarse al ruido, debido a las fluctuaciones ambientales. Debido a que los fermiones de Majorana están en partículas abelianas se pueden crear puertas protegidas simplemente trenzando las partículas entre sí mismas, pero las operaciones generadas al trenzar las partículas no son suficientes para definir un sistema cuántico universal. Por esa

razón, se muestra cómo el acoplamiento de un qubit de Majorana a un qubit de transmon superconductor, se puede utilizar para realizar medidas del qubit de Majorana y la implementación de las puertas faltantes.

Leo Kouwenhoven en el año 2019 propone la estructura y diseño de un superconductor topológico donde se alberga dos Majoranas definiendo que se puede contener un número par e impar de fermiones. Las paridades impares forman un estado fundamental degenerado doble, que puede ser utilizado para la interpretación de los estados qubit de Majorana.

La insensibilidad de un qubit de Majorana se debe en gran parte a la ausencia de superposición debido a la ausencia de superposición de funciones de onda o interacciones en general; además, aunque el ruido local se acopla a un solo Majorana no puede extraer información ni influir en el estado del qubit. En consecuencia, las mediciones en un Majorana no pueden proporcionar cualquier información sobre la paridad de un par de Majoranas (Kouwenhoven, 2019).

Aguado y Kouwenhoven en 2020 detallan la computación cuántica topológica como la demostración de paridad interferométrica contenida en los qubits de caja de Majorana de solo medición, además que se debe establecer de manera inequívoca que se pueden construir Majoranas completamente no locales con la protección topológica necesaria. Solo con la tunelización de un solo electrón en los puntos de degeneración de carga es posible. La transferencia se produce a través del estado de fermión formado por dos Majoranas distantes. Por lo tanto, se puede utilizar ese proceso resonante no local para la lectura de paridad que permite el trenzado no abeliano y la construcción de qubits basados en fermiones de Majorana.

Los qubits superconductores propuestos hasta ahora, necesitan de un campo magnético de alta precisión para funcionar correctamente estabilizando y regulando los fermiones de Majorana, debido a que las propiedades

magnéticas del material en el cual se encuentran posibilitan la creación y manipulación de los estados cuánticos.

Las cuasipartículas conocidas como fermiones de Majorana permiten las excitaciones colectivas de electrones de un superconductor, gracias a sus propiedades que responden a las características de antipartículas. Esto genera un panorama favorable a la creación de qubits.

2.6.1 EXCITACIONES DE MAJORANA

Las excitaciones de Majorana son partículas subatómicas teóricas que se han demostrado existir en ciertos materiales y que se caracterizan por tener una masa cero y un spin entero. Estas excitaciones se han propuesto como una posible solución para la construcción de computadoras cuánticas de alta capacidad y estabilidad, ya que se cree que tienen una alta resistencia a la decoherencia, un problema común en la computación cuántica.

Según Alicea (2012), las excitaciones de Majorana se han observado en sistemas de vórtices en superconductores y en el borde de sistemas topológicos en materiales bidimensionales. Estos sistemas se pueden describir mediante un Hamiltoniano de Kitaev, que se basa en la teoría de los operadores de Majorana.

Además, Lutchyn, Sau y Das Sarma (2010) han demostrado que es posible generar excitaciones de Majorana en sistemas de heteroestructuras semiconductor-superconductor mediante la aplicación de campos magnéticos externos. Estos autores también han sugerido que las excitaciones de Majorana se pueden utilizar para construir qubits de Majorana, que se han propuesto como una posible solución para la construcción de computadoras cuánticas estables y de alta capacidad.

Las excitaciones de Majorana se han demostrado teóricamente y se han observado experimentalmente en ciertos materiales. Se han propuesto como una posible solución para la construcción de computadoras cuánticas de alta capacidad y estabilidad. Aunque aún hay mucho por investigar en este campo, las excitaciones de Majorana parecen tener un gran potencial para la tecnología cuántica del futuro.

2.6.2 MODO CERO DE MAJORANA

Los modos cero de Majorana son un tipo particular de excitaciones en sistemas topológicos, los cuales tienen una estructura de banda de energía que los protege de las influencias del entorno, lo que los hace muy estables y resistentes a errores. Estas excitaciones tienen una energía de cero y pueden ser utilizadas para representar el estado de un qubit. Pueden ser controladas y manipuladas mediante campos magnéticos y láseres, y se han sugerido como una posible forma de implementar qubits de Majorana en sistemas de computación cuántica (Alicea, 2012).

Para intereses de computación cuántica, se necesita un tipo específico de fermión de Majorana. El modo cero de Majorana puede actuar como qubit. Coloquialmente un modo cero de Majorana se puede definir como medio electrón. Los experimentos realizados hasta hoy muestran que estas cuasipartículas pueden existir en los extremos de nano cables semiconductores conectados a un superconductor (Chen, 2018).

Un modo cero de Majorana es un operador fermiónico γ que elevado al cuadrado es igual a 1 y que conmuta con el Hamiltoniano H de un sistema, de la siguiente forma:

$$[H, \gamma] = 0 \tag{2.24}$$

Cualquier operador que satisface estas condiciones se le conoce como un operador de fermión de Majorana, pero cuando conmuta con el Hamiltoniano también es llamado operador modo cero de Majorana (Sarma, Freedman y Nayak, 2015).

Los modos cero de Majorana en materiales topológicos son analizados teórica y experimentalmente con el objetivo de demostrar que existen propiedades físicas que mantengan estadísticas de intercambio exóticas y que puedan permitir la implementación de una computación cuántica topológica.

Para poder implementar una puerta lógica cuántica hecha a base de fermiones de Majorana se propone la operación de trenzado de juntura en forma de T mejor conocida como la cadena unidimensional de Kitaev. Los modos cero de Majorana pueden observarse en sistemas de bits cuánticos, donde los operadores de espín pueden conmutar en diferentes ubicaciones actuando como fermiones (Makhlin, Backens y Shnirman, 2018).

2.7 QUBITS DE ESTADO SÓLIDO

Los qubits de estado sólido son una tecnología reciente en el campo de la computación cuántica que tiene el potencial de superar las capacidades de la computación tradicional. Estos qubits están basados en el uso de partículas subatómicas como electrones o átomos para guardar y procesar información cuántica.

Uno de los principales obstáculos en el desarrollo de esta tecnología es mantener la estabilidad y coherencia de los qubits de estado sólido. A diferencia de los qubits basados en la luz, los qubits de estado sólido están sujetos a interferencias y perturbaciones del entorno, lo cual puede afectar su estado cuántico y causar errores en el procesamiento de la información. Sin embargo, diversos estudios han demostrado que estos efectos pueden ser reducidos

mediante técnicas avanzadas de control y manipulación cuántica (Nakamura et al, 1999).

Otro factor importante en el desarrollo de los qubits de estado sólido es la capacidad de escalar. La implementación de un gran número de qubits es esencial para llevar a cabo tareas cuánticas complejas, pero esto también presenta desafíos en términos de control y lectura de los estados cuánticos individuales. Investigaciones en tecnologías de integración cuántica, como los sistemas de qubits basados en nanotubos de carbono o en estructuras de punto cero, han mostrado avances prometedores en esta área (Ladd et al, 2010).

Un qubit de fermiones de Majorana es un tipo específico de qubit de estado sólido que se basa en la utilización de fermiones de Majorana, partículas subatómicas con propiedades cuánticas únicas, para almacenar y procesar información cuántica.

Los qubits superconductores son un tipo específico de qubits de estado sólido, en los cuales los electrones en un circuito superconductor son utilizados para almacenar y procesar información cuántica. Estos qubits se caracterizan por su rápida velocidad de operación y su capacidad para escalar a un gran número de qubits en un solo dispositivo.

Los qubits superconductores se componen de partes metálicas hechas de un material con resistencia cero a la temperatura. Las implementaciones de estos se basan en la creación de circuitos integrados cuánticos. Se fabrican utilizando técnicas de circuitos integrados convencionales. Comúnmente los circuitos cuánticos se fabrican en placas de silicio mediante un haz de electrones depositados en una película delgada. Su diseño consiste en múltiples circuitos de tamaño micrométrico como uniones de túnel, capacitores e inductores unidos mediante cables de transmisión. En la figura 2.5 se muestra

la unión del túnel de Josephson hecha con dos películas delgadas superconductoras (Devoret, Wallraff y Martinis, 2004).

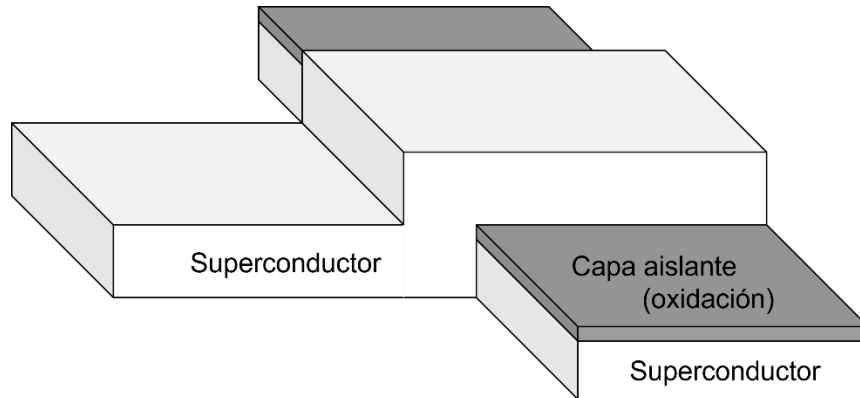


Figura 2.5: Unión Josephson.

Fuente: Elaboración propia a partir de Devoret, Wallraff y Martinis (2004).

La computación cuántica topológica es una tecnología capaz de abordar de manera efectiva los desafíos críticos relacionados con la decoherencia y la corrección de errores en sistemas cuánticos. Asimismo, los fermiones de Majorana han generado un creciente interés debido a su potencial para enfrentar con mayor eficacia los desafíos de la computación cuántica.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

Se llevó a cabo una investigación documental que incluyó la consulta de libros y la lectura de artículos especializados publicados en revistas indizadas. Esta fase inicial permitió establecer una base sólida de conocimiento en el campo de la computación cuántica.

Se realizó una investigación explicativa, empleando métodos deductivos e hipotéticos. Se realizaron consultas de registros documentales y se utilizó el análisis del discurso para elaborar explicaciones detalladas de los modelos y teorías relacionados con las características y propiedades de los fermiones de Majorana. Esto implicó demostrar cómo estos fermiones pueden funcionar efectivamente como qubits en la computación cuántica.

Se empleó una investigación experimental aplicando un modelo que permitió simular el intercambio de pares de fermiones de Majorana en sus dos fases físicas: la fase normal y la fase topológica. Esta simulación proporcionó una representación visual y matemática del comportamiento de estos fermiones.

Se llevo a cabo una investigación aplicada al simular un sistema de dos fermiones de Majorana y se contrastó su comportamiento con un sistema convencional de dos qubits. Este paso se realizó con el objetivo de verificar la capacidad de los fermiones de Majorana para funcionar como qubits de manera eficaz.

CAPÍTULO 4

QUBITS DE MAJORANA

Uno de los principales atractivos de los qubits de fermiones de Majorana es su alta estabilidad y resistencia a errores. Esto se debe a que los fermiones de Majorana están protegidos por la estructura topológica de la banda de energía del material en el que se encuentran, lo que los hace menos propensos a las perturbaciones del entorno y a la decoherencia. Además, los fermiones de Majorana tienen un estado cuántico no local, lo que permite una manipulación y control preciso del estado cuántico del qubit. Otro beneficio de los qubits de fermiones de Majorana es su capacidad para operar a altas temperaturas. Los qubits superconductores, por otro lado, requieren temperaturas extremadamente bajas para funcionar de manera óptima (Kitaev, 2001).

Los fermiones de Majorana son partículas elementales que tienen la propiedad única de ser su propia antipartícula, lo que implica que su carga eléctrica es nula. Los qubits basados en fermiones de Majorana aprovechan la presencia o ausencia de estas partículas para codificar información cuántica.

Estos qubits se construyen mediante la unión de un par de fermiones de Majorana en una estructura llamada cable topológico, y su estado se define por la existencia o falta de este par de partículas en el cable. La presencia o ausencia de los fermiones se controla mediante la aplicación de un campo magnético externo y el ajuste de la temperatura (Nayak, Steven, Stern, Freedman y Das Sarma, 2008).

Una de las principales ventajas de los qubits de Majorana es su capacidad inherente para resistir ciertos tipos de errores cuánticos, lo que los hace prometedores para la construcción de computadoras cuánticas más robustas.

En 1937, Ettore Majorana propuso la existencia de una partícula que pudiera ser su propia antipartícula. En otras palabras, la creación y aniquilación de esta partícula deberían ser posibles mediante el mismo operador. Esta

hipótesis planteada por Majorana tiene importantes implicaciones en el campo de la física de partículas y ha sido objeto de intensa investigación y debate en los años posteriores a su formulación:

$$\gamma = \gamma^\dagger \quad (4.1)$$

En 2001, el artículo de Alexei Kitaev tuvo un gran impacto al detallar cómo los fermiones Majorana en sistemas 2D pueden ser utilizados para almacenar información cuántica de manera completamente segura. Debido a sus estadísticas notables, que son no abelianas, y su espacio de Hilbert no local, estos fermiones también pueden utilizarse para realizar casi todas las puertas cuánticas a través de su entrelazamiento.

En la física de la materia condensada, un estado puede estar ocupado, lo que significa que contiene un electrón, o puede estar vacío, lo que se conoce como un hueco. Estos dos estados son equivalentes a una partícula y su antipartícula, respectivamente, y están descritos por operadores fermiónicos. El operador de creación c^\dagger se utiliza para representar la presencia de un electrón, mientras que el operador de aniquilación c se usa para representar la presencia de un hueco (ver figura 4.1).

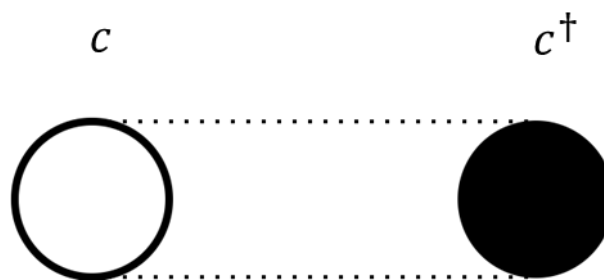


Figura 4.1: Operadores fermiónicos.

Fuente: Elaboración propia.

Mediante una combinación lineal de los operadores de creación y aniquilación, se pueden obtener los operadores de Majorana. Se trata de una superposición

igual de ambos operadores. Es posible comprobar que estos operadores de Majorana cumplen con la propiedad de ser su propia adjunta: $\gamma_1 = \gamma_1^\dagger$ y $\gamma_2 = \gamma_2^\dagger$. La figura 4.2, representa como se pueden interpretar estos estados que se encuentran simultáneamente ocupados y vacíos (Leijnse y Flensberg, 2012).



Figura 4.2: Superposición de operadores de Majorana.

Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que:

$$\gamma_1 = \frac{c+c^\dagger}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{c-c^\dagger}{2} \quad (4.2)$$

Por lo tanto:

$$c = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad c^\dagger = \gamma_1 - i\gamma_2 \quad (4.3)$$

Dos partículas de Majorana, γ_A y γ_B , flotan en un océano de superconductividad de onda p. Una propiedad interesante de estas partículas es su capacidad para almacenar información de forma no local. La paridad de ambos Majoranas puede utilizarse para codificar información. El espacio de Hilbert correspondiente a esta situación se puede definir como:

$$|0\rangle, |1\rangle = \frac{\gamma_A + i\gamma_B}{2} \quad (4.4)$$

Si las dos partículas de Majorana se encuentran separadas, no es posible detectar su estado mediante procesos locales. Cada operador de

Majorana está formado por fermiones, los cuales obtienen un valor de -1 al intercambiarse entre sí. Esta propiedad puede visualizarse como un corte de rama, donde una cuerda conecta a cada entidad fermiónicas y al cruzarse con otras partículas fermiónicas, se produce un cambio de signo. Si se considera una trenza completa, cada fermión obtendrá un valor de -1, lo que mantiene invariante la función de onda en general. Sin embargo, con las partículas de Majorana el proceso se vuelve más complejo, ya que, al intercambiarse, γ_B atraviesa la cuerda de γ_A , pero no viceversa, y luego se reemplazan entre sí: $\gamma_A \rightarrow -\gamma_B$ y $\gamma_B \rightarrow \gamma_A$. En el espacio de Hilbert previamente mencionado, el operador $\gamma_A + i\gamma_B$ tiene una gran importancia:

$$\gamma_A + i\gamma_B \rightarrow -\gamma_B + i\gamma_A = i(\gamma_A + i\gamma_B) \quad (4.5)$$

Los dos operadores de Majorana γ_A y γ_B siguen actuando sobre los mismos estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Si hay diferencia de energía entre estos estados, se representa mediante un hamiltoniano $H = \epsilon c^\dagger c$. Sin embargo, también es posible expresar este hamiltoniano en términos de los operadores de Majorana:

$$H = \frac{1}{2}\epsilon(1 - i\gamma_A\gamma_B) \quad (4.6)$$

Hasta el momento, se ha establecido que la presencia de dos Majoranas da lugar a un estado fermiónico, el cual se presenta comúnmente en pares en sistemas de materia condensada. En este tipo de materiales, los componentes básicos que se utilizan para su construcción son siempre fermiones ordinarios. Entonces surge la pregunta. ¿Cómo se relacionan los estados fermiónicos con los qubits? Los estados fermiónicos tienen la capacidad de ser utilizados para codificar información en qubits. En particular, si el estado fermiónico está vacío, entonces este corresponderá al estado 0 del qubit, mientras que, si está lleno, será el estado 1 (ver figura 4.3).



Figura 4.3: Estado fermiónico como qubit.
Fuente: Elaboración propia.

de tal forma que:

$$\gamma_n^2 = 1 \quad (4.7)$$

así como lo sugiere la ecuación 4.4, se podrían emplear con el fin de describir un fermión regular de forma individual.

$$a_n = \frac{1}{2}(\gamma_A + i\gamma_B) \quad (4.8)$$

$$a_n^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_A - i\gamma_B) \quad (4.9)$$

Por lo tanto, es posible que en un único sitio fermiónico haya espacio para dos fermiones de Majorana. Estos fermiones pueden encontrarse ya sea a la izquierda $\gamma_{(n,l)}$ o a la derecha $\gamma_{(n,r)}$ del sitio n :

$$\gamma_{(n,l)} = a_n + a_n^\dagger \quad (4.10)$$

$$\gamma_{(n,r)} = -ia_n + ia_n^\dagger \quad (4.11)$$

Los qubits de carga son un ejemplo de la relación entre los estados fermiónicos y los qubits, pero desafortunadamente, estos tienden a ser muy susceptibles a las perturbaciones locales, lo cual puede representar un problema en su aplicación práctica. Sin embargo, los Majoranas pueden solucionar esta limitación. Tal como se mencionó previamente, la presencia de dos Majoranas da lugar a un estado fermiónico. Si se utilizan dos Majoranas que estén espacialmente separados, se puede codificar un grado fermiónico de

libertad de manera no local, lo que garantiza que esté protegido contra cualquier perturbación local.

Para la construcción de un qubit, es necesario almacenar la información en algo que pueda experimentar una verdadera superposición. Lamentablemente, la paridad no cumple con esta condición ya que un sistema no puede estar en una superposición de dos estados de paridad. Para solucionar este problema, se pueden agregar dos Majoranas adicionales, lo cual resulta en la formación de un qubit. Las cuatro Majoranas, designadas como $A \pm$ y $B \pm$, pueden ser identificadas con un estado de paridad par:

$$|0_A 0_B\rangle, |1_A 1_B\rangle \quad (4.12)$$

Del mismo modo, se puede aplicar el concepto de paridad impar. En el mar de superconductores, se pueden encontrar cualquier cantidad de pares de Cooper necesarios, por lo que no hay problema en ese aspecto. Es el conjunto de estados dobles de la misma paridad lo que permite proteger y procesar la información cuántica. La protección se logra gracias a la no localidad de la información de paridad en los Majorana, mientras que el procesamiento se lleva a cabo mediante el trenzado. Para saber que sucede en el intercambio de los Majoranas considerando $A +$ y $B +$, es necesario conocer cómo cambiar de bases. Una forma de hacerlo es mediante el uso de los operadores de creación, los cuales pueden ser simplificados (Leijnse y Flensberg, 2012):

$$c_A = \frac{1}{2}(\gamma_{A+} + i\gamma_{B-}), c_B = \frac{1}{2}(\gamma_{B-} + i\gamma_{A+}) \quad (4.13)$$

Este sería el qubit topológico que se compone de dos estados de Majorana ligados, lo que le otorga una gran protección contra diversas perturbaciones y un largo tiempo de coherencia. Es por ello que la búsqueda de estados de Majorana ligados en la materia condensada ha ido en aumento debido a que presenta grandes ventajas.

En cuanto a la búsqueda de partículas de Majorana en la materia condensada, es necesario retomar el concepto de partícula y antipartícula. En este sentido, los electrones y los agujeros se consideran los equivalentes de estas dos entidades en la materia condensada. Un Majorana, por su parte, se refiere a una superposición de estas dos entidades. No obstante, el problema radica en que los electrones y los agujeros poseen cargas opuestas, lo que dificulta la formación de dicha superposición en la práctica.

Se ha descubierto que los superconductores son un buen sistema para la existencia de los estados de Majorana. En estos, se presenta un conjunto de pares de Cooper, que son estados conformados por dos electrones. Suponiendo que en este sistema hay un agujero aislado. Al extraer un par de Cooper del vasto mar de pares existente, este par, junto con el agujero, puede actuar como si fuera un solo electrón. Como resultado, en un superconductor la distinción entre los electrones y los agujeros se difumina de manera efectiva. Por esta razón, es natural buscar estados de Majorana en los superconductores, ya que se puede formar una superposición lineal de electrones y agujeros.

4.1 MAJORANAS EN SUPERCONDUCTORES TOPOLÓGICOS

Existen dos clases de partículas según las estadísticas cuánticas: los bosones, cuya función de onda permanece igual después de un intercambio, y los fermiones, cuya función de onda cambia de signo. Sin embargo, los modos cero de Majorana no se pueden clasificar en ninguna de estas dos categorías. Se pueden encontrar modos cero de Majorana en sistemas unidimensionales como los nanocables, por ejemplo, en las paredes de dominio que aparecen debido a un cambio en el potencial químico. El espectro de energía en un sistema de este tipo consiste en cuatro estados de energía cero debido a la presencia de los modos Majorana.

En la figura 4.4 se observan cuatro Majoranas, es decir, dos pares. No obstante, se considera aquí el caso general de N pares. Aunque los operadores γ_n no aparecen explícitamente en el hamiltoniano, existe un estado cuántico degenerado para cada uno de los $2N$ valores de n . Sin embargo, dado que los modos de Majorana aparecen en pares, solo se les pueden asignar estados cuánticos en pares.

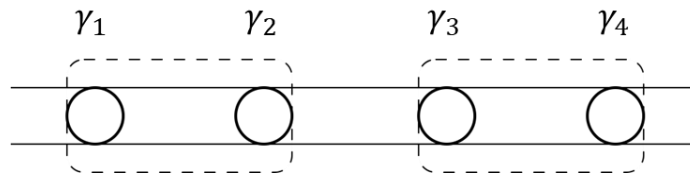


Figura 4.4: Pares de Majorana en nanocable.

Fuente: Elaboración propia a partir de Alicea, Oreg, Refael, Von Oppen y Fisher (2011).

Los modos cero de Majorana son caracterizados exclusivamente por su ubicación en la red y no presentan ninguna otra propiedad distintiva. Al igual que los electrones, todos los modos cero de Majorana son idénticos entre sí y, si se intercambian dos de ellos en el espacio, el sistema resultante se verá exactamente igual que antes del intercambio. Para asignar estados cuánticos a los modos cero de Majorana, es posible emparejar dos Majoranas y formar modos fermiónicos.

$$c_n^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{2n-1} + i\gamma_{2n}), c_n = \frac{1}{2}(\gamma_{2n-1} - i\gamma_{2n}) \quad (4.14)$$

Se hallan dos posibles estados cuánticos degenerados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para cada par de Majoranas al emparejarlas y formar modos fermiónicos. Como los Majoranas solo se mueven en una dimensión, no hay una forma de intercambiarlos sin tenerlos chocando entre sí, lo que resultaría en la división en energía y desaparición de los Majoranas. Debido a esta razón, la estadística cuántica no está bien definida en una dimensión. Para evitar esta dificultad, se

puede permitir que los Majoranas se muevan en una segunda dimensión, lo que permite el intercambio sin problemas. En este sentido, se puede pensar en la forma del nanocable como una T, con múltiples uniones en forma de T entre los modos cero de Majorana, lo que permitiría realizar el intercambio sin problemas (Alicea, Oreg, Refael, Von Oppen, y Fisher, 2011). Regresando a la figura 4.4, se puede representar esta situación de la siguiente forma (ver figura 4.5):

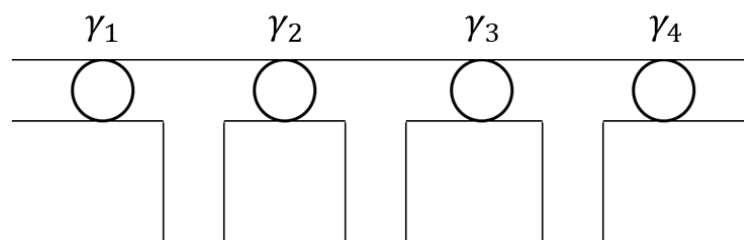


Figura 4.5: Pares de Majorana en nanocable en forma de T.

Fuente: Elaboración propia a partir de Alicea, Oreg, Refael, Von Oppen y Fisher (2011).

De esta manera, se procederá primero a mover un Majorana hacia abajo, de manera que se tenga espacio para moverlo hacia la izquierda y finalmente subirlo. Durante todo el proceso, se mantiene una distancia constante entre los Majoranas involucrados en el intercambio y se evita su colisión. Como resultado del intercambio, los Majoranas γ_2 y γ_3 intercambian sus posiciones. Se supone que el intercambio se realiza de manera adiabática, es decir; lentamente y de manera cuidadosa para evitar saltos cuánticos a estados excitados (ver figura 4.6).

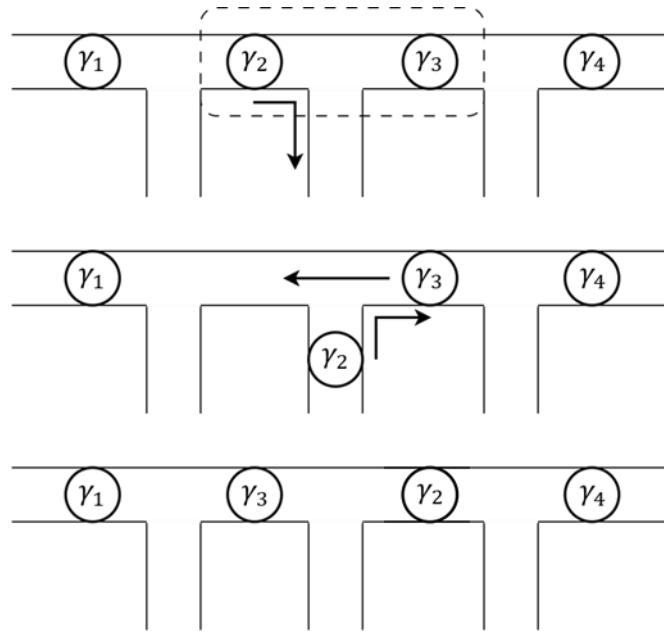


Figura 4.6: Intercambio de Majoranas en red de nanocables.

Fuente: Elaboración propia a partir de Alicea, Oreg, Refael, Von Oppen y Fisher (2011).

Además, la red de qubits de Majorana interconectados también permite la implementación de técnicas de corrección de errores cuánticos, necesarias para proteger los qubits de errores causados por las interacciones con el entorno. El nanocable con muchas uniones en forma de T entre varios modos cero de Majorana es una herramienta esencial para la construcción de una arquitectura escalable de qubits de Majorana y para la realización de operaciones cuánticas complejas.

Regresando a las ecuaciones 4.10 y 4.11, se pueden de crear fermiones de nuevos tipos al combinar las partículas de Majorana de formas distintas a la convencional de los vecinos más cercanos, a estos se le denominan cuasifermiones:

$$f_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha} + i\gamma_{\beta}) \quad (4.15)$$

$$f_{\alpha,\beta}^{\dagger} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha} - i\gamma_{\beta}) \quad (4.16)$$

En 2001, Alexei Kitaev propuso un sistema unidimensional donde se produce una agrupación de fermiones de Majorana en los extremos distantes, y esta posee una energía igual a cero (Narożniak, Dartailh, Dowling, Shabani y Byrnes, 2021). El hamiltoniano es de la siguiente forma:

$$H = -\frac{1}{2}\mu \sum_j^L (2a_j^\dagger a_j - 1) - \sum_j^{L-1} [w(a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j) - (\Delta a_j a_{j+1} - \Delta^* a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger)] \quad (4.17)$$

El hamiltoniano anterior posee diferentes fases dependiendo de la elección de parámetros: μ es la energía en el sitio o la amplitud en el sitio j , w sería el salto de electrones y Δ es la brecha de superconductividad inducida que describe el emparejamiento de Cooper entre j y $j + 1$.

En la figura 4.7, se muestra la fase normal en la parte superior y la fase topológica en la parte inferior, cada fermión puede ser representado por una caja. Los fermiones de Majorana "l" y "r" corresponden a las cajas izquierda y derecha.

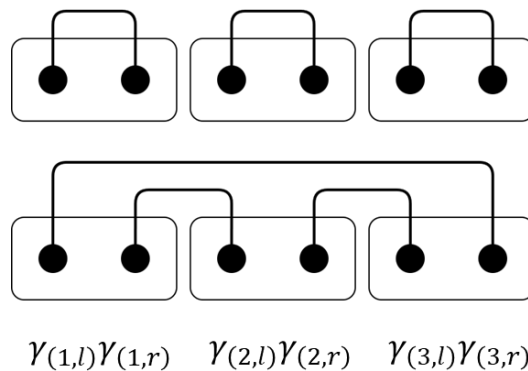


Figura 4.7: Diagrama de fase normal y fase topológica.

Fuente: Elaboración propia a partir de Narożniak, Dartailh, Dowling, Shabani y Byrnes (2021).

Los estados topológicos se describen a través de la combinación de diferentes modos. Si el estado es una configuración específica de estas combinaciones, el procesamiento del estado implica modificar dichas combinaciones (Narożniak,

Dartailh, Dowling, Shabani y Byrnes, 2021). En una dimensión (1D), sería posible realizar el enredamiento de los extremos de los pares α y β utilizando el operador de trenzado que tiene la forma:

$$U_{\alpha,\beta} = \exp \left\{ \frac{\pi}{4} \gamma_\alpha \gamma_\beta \right\} \quad (4.18)$$

Una secuencia de trenzado que transforma la fase N en la fase T se puede lograr aplicando el operador de conversión:

$$U_c = \prod_{j=1}^{L-1} U_{\gamma(j,l),\gamma(j+1,l)} \quad (4.19)$$

Cuando se aplica U_c a un estado en su condición normal, se produce una transición de fase que hace que el fermión ubicado más a la derecha en el índice $n = L$ se vuelva delocalizado, extendiéndose como un cuasifermión a lo largo de todos los sitios de la cadena, desde el primero hasta el último:

$$U_c a_n U_c^\dagger = \begin{cases} -f_{(n,l)(n+1,l)}, & \text{si } n < L \\ f_{(1,l)(L,r)}, & \text{si } n \geq L \end{cases} \quad (4.20)$$

La transición de fase se logra mediante una serie de trenzados que afectan a sitios adyacentes y que intercambian modos de borde de Majorana. Este proceso hace que las parejas se alejen cada vez más. Para el caso de un sistema de longitud $L = 3$, iniciando con un estado vacío:

$$|000\rangle_N = \prod_{j=1}^{L-1} a_j^\dagger |000\rangle_N = |\psi_0\rangle \quad (4.21)$$

La figura 4.8 proporciona una representación visual de la transición de fase topológica al utilizar una secuencia de enredamientos locales.

$$|000\rangle_T = U_{\gamma(1,l),\gamma(2,l)} U_{\gamma(2,l),\gamma(3,l)} |000\rangle_N = |0_L\rangle \quad (4.22)$$

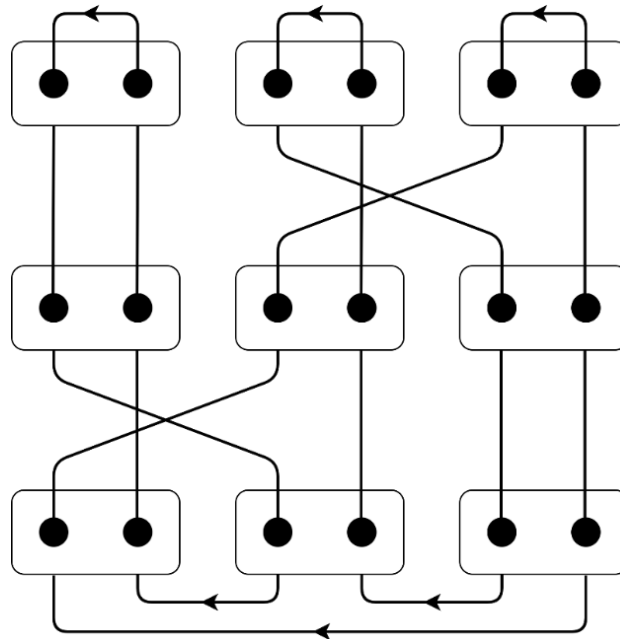


Figura 4.8: Diagrama de transición de fase normal a fase topológica para un estado vacío.

Fuente: Elaboración propia a partir de Narožniak, Dartialh, Dowling, Shabani y Byrnes (2021).

Para simular este efecto, se utilizará la biblioteca *QuTip* (*Quantum Toolbox in Python*), diseñada específicamente para la simulación de sistemas cuánticos. Además, se usará el *software Maple* para representar visualmente los resultados obtenidos (ver figura 4.9). Los estados lógicos están definidos por el apareamiento de los modos cero de Majorana en los bordes del dominio. En este sentido, el fermión delocalizado podría ser etiquetado como el estado lógico $|0_L\rangle$.

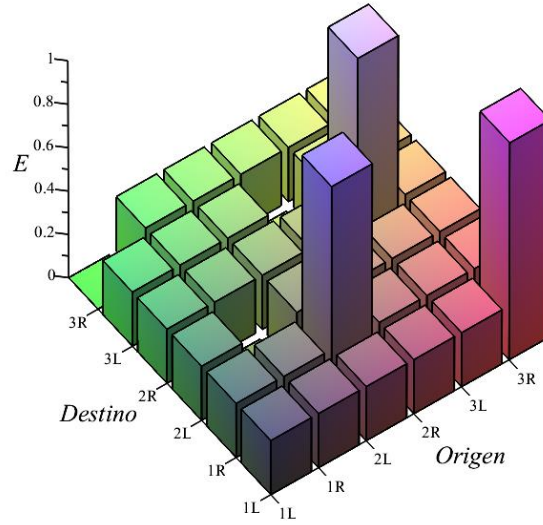


Figura 4.9: Gráfica de fase normal y fase topológica para un estado vacío.

Fuente: Elaboración propia a partir de Narożniak, Dartiailh, Dowling, Shabani y Byrnes (2021).

Como se pudo observar, simplemente se trata de un cambio en la disposición de los modos, lo cual significa que se pueden enredar fermiones incluso en ausencia de fermiones o simplemente con el vacío. Ahora comenzando con un estado en el que todos los espacios están ocupados:

$$|111\rangle_N = \prod_{j=1}^{L-1} a_j^\dagger |111\rangle_N = |\psi_0\rangle \quad (4.23)$$

Se aplica la misma secuencia unitaria de trenzas a este estado:

$$|111\rangle_T = U_{\gamma(1,L),\gamma(2,L)} U_{\gamma(2,L),\gamma(3,L)} |111\rangle_N = |0_L\rangle \quad (4.24)$$

Gráficamente la secuencia de enredado se ve en la figura 4.10.

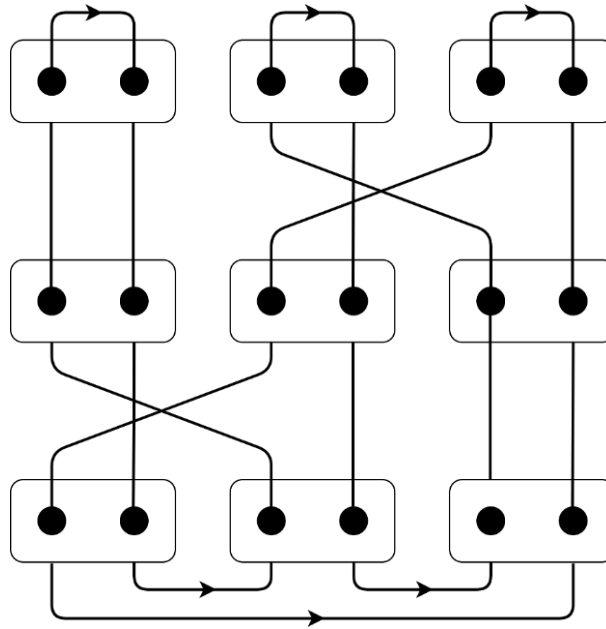


Figura 4.10: Diagrama de transición de fase normal a fase topológica para un estado lleno.

Fuente: Elaboración propia a partir de Narożniak, Dartiailh, Dowling, Shabani y Byrnes (2021).

Numéricamente se puede visualizar en la figura 4.11.

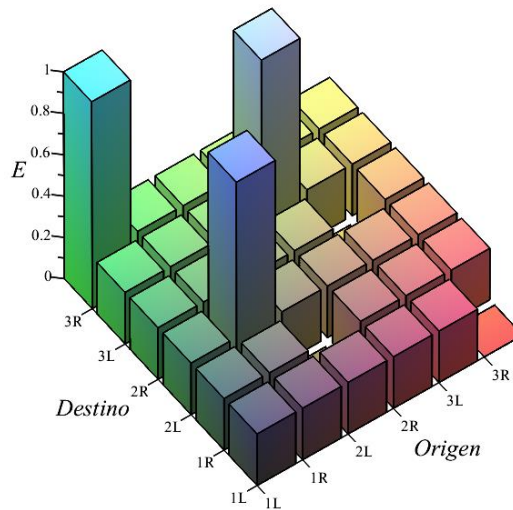


Figura 4.11: Gráfica de fase normal y fase topológica para un estado vacío.

Fuente: Elaboración propia a partir de Narożniak, Dartiailh, Dowling, Shabani y Byrnes (2021).

El fermión delocalizado podría etiquetarse como el estado lógico $|1_L\rangle$. En consecuencia, se puede tener un estado lógico topológico arbitrario:

$$|\psi_0\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle \quad (4.25)$$

Como se pudo observar se ha realizado la simulación de los Modos Zero de Majorana, inmersos en la estructura topológica unidimensional, mediante la implementación del modelo de Kitaev. Además de descubrir una serie de configuraciones diversas en el emparejamiento de fermiones de Majorana, dando origen a una gama de estados topológicos distintos.

Una simulación detallada de una cadena de estados topológicos podrá describir el comportamiento de los fermiones de majorana para crear computación cuántica. En este sentido, se pretende generar un análisis comparativo entre un sistema simplificado compuesto por dos qubits y un sistema más complejo conformado por qubits de Majorana.

4.2 SIMULACIÓN DE QUBITS DE MAJORANA

Para la simulación se utilizará la biblioteca *Qutip* en *Python*. El objetivo es comparar detalladamente el comportamiento de un sistema simple de dos qubits y un sistema equivalente compuesto por dos qubits de Majorana, con el fin de identificar similitudes en los resultados.

Para llevar a cabo la simulación, se realiza el modelado la evolución temporal del sistema de dos qubits bajo el Hamiltoniano simple:

$$H = \frac{1}{4}\sigma_1^x \sigma_2^x \quad (4.26)$$

Las compuertas se crean al entrelazar bordes específicos. Estas combinaciones particulares dan lugar a compuertas específicas (Narożniak, Dartailh, Dowling, Shabani y Byrnes, 2021) y para un sistema equivalente de dos qubits de Majorana en condiciones similares se utiliza la información teórica sobre los qubits de Majorana con el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{4}i(\gamma_{(1,r)}\gamma_{(2,l)}) \quad (4.27)$$

Si se consideran dos los estados lógicos $|0_L\rangle$ y $|1_L\rangle$ definidos por un sistema de longitud $L = 2$:

Para $|0_L\rangle$ con un estado normal $|01\rangle_N$:

$$|01\rangle_N = \prod_{j=1}^{L-1} a_j^\dagger |01\rangle_N = |\psi_0\rangle \quad (4.28)$$

Se aplica la secuencia unitaria de trenzas:

$$|01\rangle_T = U_{\gamma_{(1,l)},\gamma_{(2,l)}} |01\rangle_N = |0_L\rangle \quad (4.29)$$

Gráficamente la secuencia de enredado se ve en la figura 4.12.

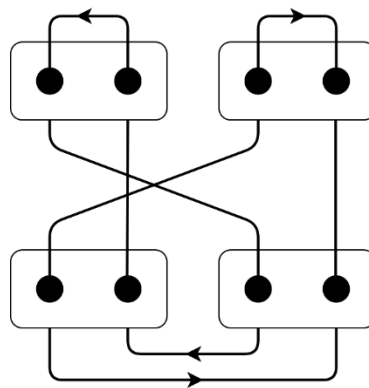


Figura 4.12 : Diagrama de transición de fase normal a fase topológica para un estado $|01\rangle$.

Fuente: Elaboración propia.

Numéricamente se puede visualizar en la figura 4.13.

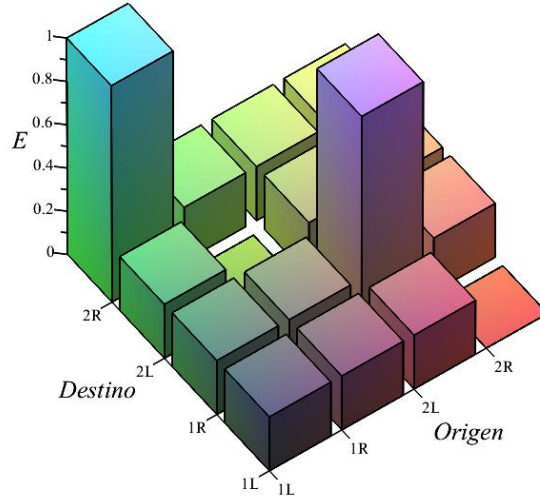


Figura 4.13: Gráfica de fase normal y fase topológica para un estado $|01\rangle$.

Fuente: Elaboración propia.

Para $|1_L\rangle$. con un estado normal $|01\rangle_N$:

$$|01\rangle_N = \prod_{j=1}^{L-1} a_j^\dagger |01\rangle_N = |\psi_0\rangle \quad (4.30)$$

Se aplica la secuencia unitaria de trenzas:

$$|01\rangle_T = U_{\gamma(1,l), \gamma(2,l)} |01\rangle_N = |1_L\rangle \quad (4.31)$$

Gráficamente la secuencia de enredado se ve en la figura 4.14.

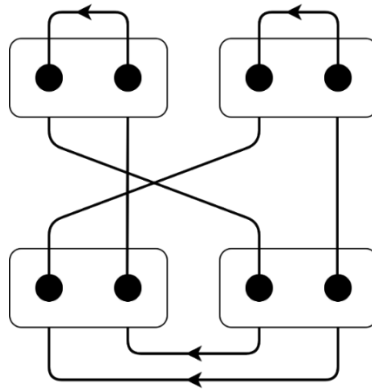


Figura 4.14: Diagrama de transición de fase normal a fase topológica para un estado $|00\rangle$.

Fuente: Elaboración propia.

Numéricamente se puede visualizar en la figura 4.15.

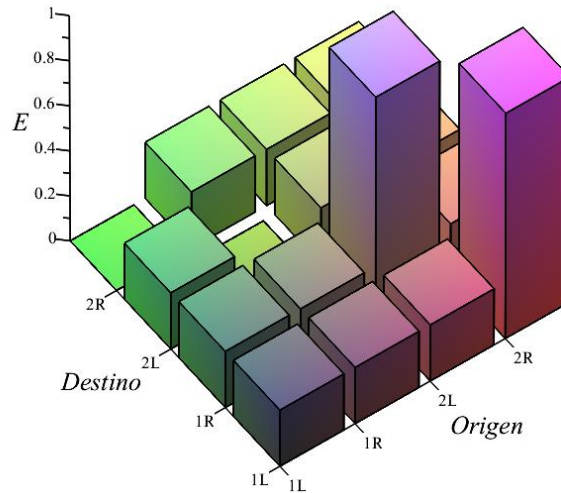


Figura 4.15: Gráfica de fase normal y fase topológica para un estado $|00\rangle$.

Fuente: Elaboración propia.

Para calcular las correlaciones entre los qubits en intervalos de tiempo específicos se emplearon técnicas numéricas en Python. Para este ejemplo, se comienza con un estado inicial de los dos qubits $|01\rangle$. Para visualizar los resultados de las mediciones se marca un paso en el tiempo $t = \pi$.

Se realizan mediciones en la base σ^z para ambos qubits. Esto significa que se están calculando los valores esperados de σ^z para cada qubit. Los resultados de las mediciones serán los autovalores de σ^z , que son +1 o -1.

En la figura 4.16 se observa la evolución del qubit del estado σ_1^z :

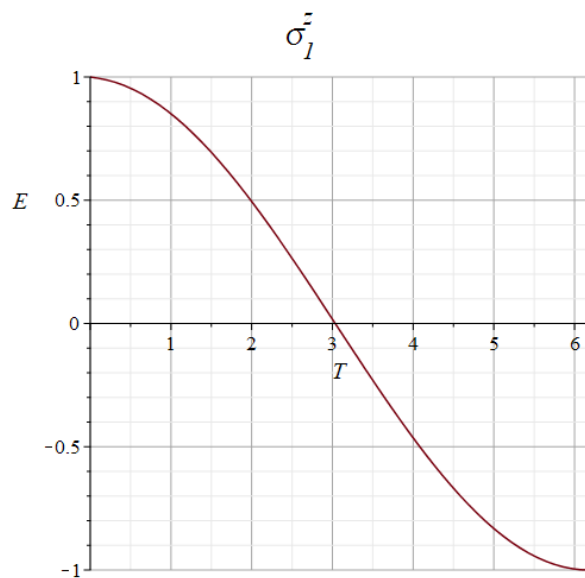


Figura 4.16: σ_1^z al evolucionar con el tiempo.

En la figura 4.17 se observa la evolución del qubit del estado σ_2^z :

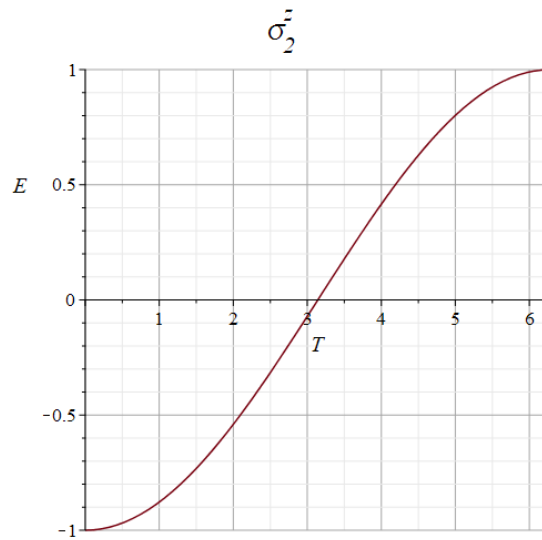


Figura 4.17: σ_2^z al evolucionar con el tiempo.

Para los qubits de Majorana se utilizarán los operadores abstractos artificiales llamados S_1^z y S_2^z para medir nanocables en su base lógica en el eje z. En la figura 4.18 se observa la evolución del qubit del estado S_1^z .

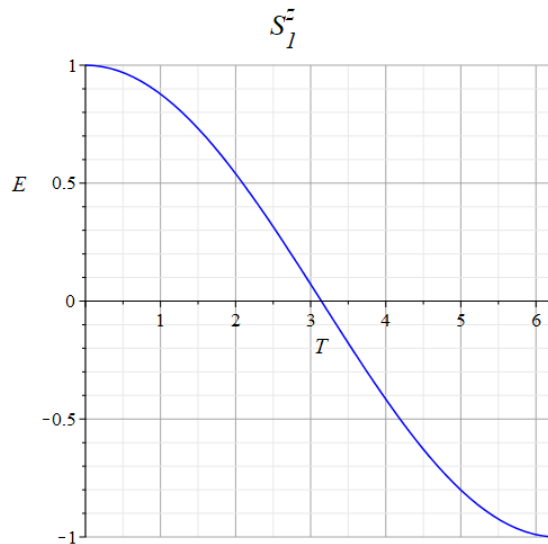


Figura 4.18: S_1^z al evolucionar con el tiempo.

En la figura 4.19 se observa la evolución del qubit del estado S_2^z :

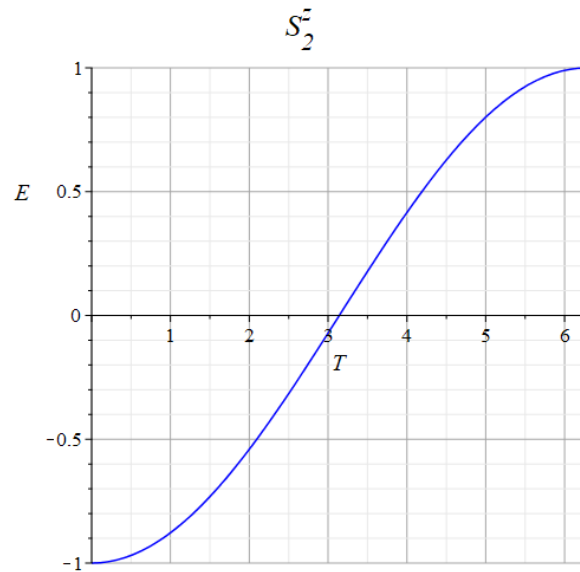


Figura 4.19: S_2^z al evolucionar con el tiempo.

Con base en estos resultados preliminares, se puede inferir que el sistema de dos qubits de Majorana exhibe características consistentes con un sistema simple de dos qubits. Estos hallazgos apuntan a la posibilidad de que los qubits de Majorana son efectivos para la construcción de computadoras cuánticas.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Los resultados de la simulación revelan una notable correspondencia entre los comportamientos de un sistema y otro. Se observaron patrones similares en la evolución temporal, así como similitudes en las mediciones de σ^z y S^z . El análisis realizado se enfoca en múltiples aspectos cuánticos, incluyendo la dinámica temporal de las amplitudes de probabilidad, la evolución de las correlaciones cuánticas entre los qubits y la respuesta a mediciones.

Según las investigaciones realizadas por Alicea, Oreg, Refael, Von Oppen y Fisher (2011) quienes proponen la capacidad de almacenar y manipular información cuántica utilizando los fermiones de Majorana. Se reafirma la idea al evidenciar cómo las características únicas de los fermiones de Majorana los convierten en un recurso válido para la construcción de qubits.

Recordando las características fundamentales de los qubits, se concluye que los fermiones de Majorana pueden comportarse como qubits por las siguientes propiedades:

- Superposición: Se dice que los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ están en superposición por lo que se puede describir como $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Los fermiones de Majorana puedan formar estados cuánticos que estén en superposición de diferentes configuraciones. Esto se debe a la naturaleza especial de los fermiones de Majorana “ γ ”, que pueden existir en una superposición de estar (operador fermiónico de creación c^\dagger) y no estar (operador fermiónico de aniquilación c) en el mismo tiempo y espacio, lo que permite la codificación de información cuántica de manera similar a los qubits convencionales.
- Entrelazamiento: La información codificada en un qubit afecta instantáneamente el estado de otro. En la simulación de los qubits de Majorana se observó que el cambio simultáneo entre los pasos de tiempo entre los qubits con los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

- Medición. Cuando se aplica una medición sobre el sistema de qubits, el estado de superposición colapsa en uno de los estados posibles, 0 o 1. En el caso de la simulación del sistema de fermiones de Majorana, se calcularon las expectativas de las proyecciones del espín en el eje Z para los dos qubits a lo largo del tiempo, donde se observaron los cambios de en ambos estados.
- Operaciones con puerta cuántica: Al igual que los qubits convencionales, se pueden realizar operaciones cuánticas en los fermiones de Majorana utilizando puertas lógicas cuánticas que manipulan su estado cuántico. En este caso se comprobó que los estados de los qubits de Majorana cambian al ejecutar el operador de Pauli X (puerta NOT cuántica).

CAPÍTULO 6

TRABAJOS A FUTURO

En la computación cuántica experimental, es necesario la disposición de laboratorios criogénicos altamente especializados capaces de mantener las temperaturas extremadamente bajas necesarias para los qubits de Majorana. Este proceso de enfriamiento implica que las propiedades superconductoras de los fermiones de Majorana emergen de manera notable. Esto tendría importancia considerable dado que la estabilidad térmica se convierte en un pilar fundamental para preservar la coherencia de los qubits y por ende aumenta la fidelidad de estos.

El uso de técnicas de integración avanzadas de control cuántico e interconexiones entre qubits es uno de los retos para la fabricación de qubits superconductores de Majorana. Esto involucra el uso de puertas cuánticas para manipular los estados de los qubits de Majorana. La aplicación de tecnologías tales como microondas cuánticas o acoplamientos magnéticos haría posible el control cuántico de estos. Para ello, sería necesario contar con equipamiento especializado destinado a la manipulación y medición de qubits, así como con herramientas avanzadas de nanofabricación diseñadas para crear estructuras superconductoras con un alto nivel de precisión. La importancia de poder manipular la mayor cantidad de qubits dentro de un sistema permitiría la escalabilidad de estos dispositivos.

Derivado de lo anterior, los fermiones Majorana en contextos prácticos y teóricos podrían tener contribuciones significativas en la física de partículas y la termodinámica cuántica que son áreas de conocimiento emergentes de la computación cuántica. Es por ello que los siguientes aspectos podrían darle seguimiento al presente trabajo:

1. Estudiar el diseño y desarrollo de chips cuánticos que aprovechen las propiedades únicas de los fermiones Majorana.
2. Estudiar la complejidad del tiempo cuántico al utilizar fermiones Majorana como elementos fundamentales.

3. Estudiar cómo los fermiones de Majorana afectan a los procesos termodinámicos, como la transferencia de energía y la evolución de la entropía en sistemas cuánticos.

REFERENCIAS

- Acín, A. (2006). Procesamiento cuántico de la información. Recuperado el 07 de mayo de 2021 de <https://goo.su/pMkx>.
- Aguado, R. y Kouwenhoven, L. (2020). Majorana qubits for topological quantum computing. *American Institute of Physics*, (73), 45-50.
- Alicea, J. (2012). New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems. *Reports on Progress in Physics*, 75 (7), 076501.
- Alicea, J., Oreg, Y., Refael, G., Von Oppen, F. y Fisher, M. P. A. (2011). Non-Abelian statistics and topological quantum information processing in 1D wire networks. *Nature Physics*, 7 (5), 412-417. <https://doi.org/10.1038/nphys1915>.
- Barusio, M., Gutiérrez, C., Herrero, C. y Lens, A. (2016). Introducción a la computación cuántica. Recuperado el 03 de mayo de 2021 de <https://goo.su/zXpM>.
- Berggren, K. (2004). Quantum Computing with Superconductors. *Proceedings of the IEEE*, (92), 1630 - 1638.
- Born, M. (1926). Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Zeitschrift für Physik*, (37), 863-867. <https://doi.org/10.1007/BF01397477>.
- Cererols, R. y De la Torre, T. (2018). *La ciencia de The Big Bang Theory*. España: Fundación Dr. Antoni Esteve.
- Chen, S. (2018). The Hunt for the Elusive Majorana Qubit. Recuperado el 21 de septiembre de 2022 de <https://goo.su/8HgSJ>.

- Chon, A. (2015). More evidence to support quantum theory's 'spooky action at a distance'. Recuperado el 23 de septiembre de 2022 de <https://goo.su/zV6L0t>.
- De la Peña, L. (1991). *Introducción a la mecánica cuántica*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Devoret, M. H., Wallraff, A. y Martinis, J. M. (2004). Superconducting Qubits: A Short Review. *arXiv: Mesoscale and Nanoscale Physics*.
- Diaz, C. (2018). Introducción a la computación cuántica y fundamentos de lenguajes de programación. Recuperado el 02 de mayo de 2021 de <https://goo.su/ZUXd5>.
- Dylla, H. y Corneliussen, S. (2005). John Ambrose Fleming and the beginning of electronics. *Journal of Vacuum Science Technology*, (23), 1244-1251.
- Gamble, J. (2008). *Foundations of Quantum Decoherence*. Licenciatura en Artes en Física y Matemáticas. The College of Wooster, Estados Unidos
- González, P. M. (2021). IBM presenta un procesador cuántico cuya potencia ya no puede ser simulada por ordenadores convencionales. Recuperado el 11 de marzo de 2021 de <https://goo.su/JzFX>
- Hassler, F. (2014). Majorana Qubits. Institute for Quantum Information RWTH Aachen University. *Quantum Information Processing. Lecture Notes of the 44th IFF Spring School 2013*.
- Hecht, J. (2005). *Fundamentos de la computación cuántica*. Argentina: Eae Editorial Academia Española.
- Irastorza, A. (2016). *Quantum Computation With Superconductors*. Trabajo final de grado en física. Universidad del País Vasco, España.

- Kitaev, A. (2001). Unpaired Majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, 44(10), 131-136.
- Kitaev, A. (2003). Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1), 2-30.
- Kjaergaard, M., Schwartz, M. E., Braumüller, J., Krantz, P., Wang, J. I. J., Gustavsson, S., y Oliver, W. D. (2020). Superconducting qubits: Current state of play. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, (11), 369-395.
- Kouwenhoven, L. (2019). Majorana Qubits. *International Electron Devices Meeting*, (2018-December), 6.6.1-6.6.4.
- Ladd, T. D., Jelezko, F., Laflamme, R., Nakamura, Y., Monroe, C. y O'Brien, J. L. (2010). Quantum computers. *Nature*, 464(7285), 45-53.
- Leijnse, M. y Flensberg, K. (2012). Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions. *Semiconductor Science and Technology*, 27(12), 124003. <https://doi.org/10.1088/0268-1242/27/12/124003>
- Lutchyn, R. M., Sau, J. D. y Das Sarma, S. (2010). Majorana fermions and a topological phase transition in semiconductor-superconductor heterostructures. *Physical Review Letters*, 105(7), 077001.
- Lutenberg, A. y Venturino, G. (2010). El progreso tecnológico, atado a la evolución de la electrónica. Universidad de Buenos Aires. 50.
- López, J. (2019). En qué estado actual se encuentra la computación cuántica y qué podemos esperar. Recuperado el 14 de mayo de 2021 de <https://goo.su/psaCM>
- Makhlin, Y., Backens, S. y Shnirman, A. (2018). Two-Qubit Operation on Majorana Qubits in Ordinary-Qubit Chains. *JETP Letters*, (108), 763-767.

- McMahon, D. (2007). *Quantum computing explained*. Estados Unidos: John Wiley & Sons.
- Martín, D. (2019). El sueño de la computación cuántica. *¿Cómo ves?*, (253), 8-13.
- Nakahara, M. y Ohmi T. (2008). *Quantum Computing: From Linear Algebra to Physical Realizations*. Estados Unidos: CRC Press.
- Nakamura, Y., Pashkin, Y. A. y Tsai, J. S. (1999). Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box. *Nature*, 398(6730), 786-788.
- Nayak, C., Steven, S., Stern, A., Freedman, M., Das Sarma, S. (2008). Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation. *Reviews of Modern Physics*, (80).
- Narożniak, M., Dartailh, M. C., Dowling, J. P., Shabani, J., y Byrnes, T. (2021). Quantum gates for Majoranas zero modes in topological superconductors in one-dimensional geometry. *Physical Review B*, 103(20), 205429. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.205429>
- Nielsen, M. A., y Chuang, I. L. (2010). *Quantum computation and quantum information*. Estados Unidos: Cambridge University Press.
- Nieves, J. (2021). Logran con éxito el entrelazamiento cuántico de objetos macroscópicos. Recuperado el 17 de septiembre del 2022 de <https://goo.su/7M4hadl>
- Pachos, J. K. (2012). *Introduction to topological quantum computation*. Estados Unidos: Cambridge University Press.

- Pastor, J. (2018). Esta es la partícula con la que Microsoft quiere ganar la guerra de la computación cuántica. Recuperado el 08 de mayo de 2021 de <https://goo.su/XrbpM>
- Pérez, C. (2004). *Fundamentos de televisión analógica y digital*. España: Editorial Universidad de Cantabria.
- Pérez, E. (2021). Los transistores más pequeños jamás creados: estas son las soluciones para miniaturizar la electrónica más allá de los 2 nanómetros. Recuperado el 08 de septiembre de 2021 de <https://goo.su/khOHcT>
- Sarma, S., Freedman, M. y Nayak, C. (2015) Majorana zero modes and topological quantum computation. *npj Quantum Information*, (15001).
- Soto, M. (2017). *Correlaciones Cuánticas en Teleportación y Teoría Cuántica de Juegos*. Tesis doctoral. Universidad de Concepción, Chile.
- Reilly, D. J. (2019). Challenges in Scaling-up the Control Interface of a Quantum Computer. [Preprint]. *arXiv:1912.05114*.
- Rúa, J. y Branch, J. (2009). Estado del arte de la computación cuántica. *Avances en sistemas e informática*. (6) 235-248
- Varona, B. (2020). Tecnologías de las computadoras cuánticas - parte I. Recuperado el 07 de mayo de 2021 de <https://goo.su/XLSw>.