

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Ingeniería



Propuesta de un dispositivo de aislamiento sísmico para puentes basado en un sistema de rocking controlado (estudio analítico)

TESIS POR ARTÍCULO ESPECIALIZADO

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias de la Ingeniería
(acentuación en ingeniería estructural)

Presenta:

Ing. Ricardo Álvarez Acosta

Director de tesis:

Dr. Jesús Valdés González

Resumen

Este trabajo presenta un estudio analítico de un dispositivo de aislamiento sísmico novedoso para la superestructura de puentes basado en un movimiento oscilante (rocking). El dispositivo, que pretende proporcionar un buen desempeño sísmico de puentes, es un aislador sísmico de bajo costo y con una geometría similar a la de los utilizados convencionalmente.

El aislamiento del puente se logra con un conjunto de bloques oscilantes ubicados entre la superestructura y la subestructura. El modelo del sistema de aislamiento consiste en bloques de rocking apoyados en el cabezal que dan soporte a las cargas del puente. El amortiguamiento viscoso se incluye en el modelo analítico para controlar los desplazamientos laterales.

Los resultados de los análisis de vibración libre indican que el periodo fundamental de vibración del dispositivo depende de las condiciones iniciales de vibración. Además, el periodo de vibración no depende de la masa sino únicamente de su geometría.

La efectividad del aislamiento del dispositivo se evaluó en términos de la reducción de las aceleraciones de la superestructura del puente durante los movimientos del suelo, en comparación con las aceleraciones del movimiento del suelo.

Para las estaciones sísmicas analizadas se logra una efectividad mayor al 72% para algunos casos en términos de la aceleración pico y de la Intensidad de Arias. En promedio, comparado con un aislador convencional de neopreno, el dispositivo propuesto tiene una mayor efectividad de hasta un 20% y una reducción de desplazamientos de hasta un 25%.

Abstract

This study presents an analytical study of a novel seismic isolation device for the superstructure of bridges based on a rocking motion. The device, which is intended to provide a good seismic performance of bridges, is a low-cost seismic isolator with geometry similar to that of those used conventionally.

The bridge isolation is achieved with a set of basic rocking blocks located between the substructure and the superstructure. The isolation-system model consists of rocking blocks resting on the pier cap and giving support to the bridge loads. Viscous damping is included in the analytical model to control the lateral displacements.

Free-vibration results indicate that the fundamental vibration period of the device depends on the vibration initial conditions. The vibration period does not depend on the mass but only on its geometry.

The effectiveness of the device was assessed in terms of the reduction of the bridge superstructure accelerations during the ground motions, as compared to the ground motion accelerations.

For the seismic stations analyzed, an effectiveness greater than 72% is achieved in terms of the peak acceleration and the Arias intensity for some cases. On average, compared to a conventional neoprene isolator, the proposed device has a higher effectiveness of up to 20% and it has a reduction of displacements up to 25%.

Presentación

En los puentes es fundamental que se mantengan en condiciones de operación después de un sismo ya que forman parte de la infraestructura de transporte. Las fallas en los puentes pueden estar asociados con el daño en topes sísmicos que restringen el desplazamiento lateral de la superestructura, fallas por cortante debido a la relación de esbeltez de las pilas y a la escasa cuantía del refuerzo transversal, e incluso, el colapso de tableros completos debido a la pérdida de asiento de la superestructura sobre los cabezales. Estas fallas han ocurrido, por ejemplo, en Northridge, Kobe y México. Los puentes son estructuras en las que se requiere un alto grado de seguridad, por ello, la mayoría de ellos son diseñados bajo estrictos estándares sismorresistentes.

Los aisladores entre la subestructura y la superestructura se han utilizado ampliamente para reducir los efectos sísmicos en los puentes. El aislamiento sísmico es una técnica que modifica la respuesta estructural, ya que desacopla el movimiento de la superestructura de las componentes horizontales del movimiento del suelo, conduciendo a una reducción de las fuerzas sísmicas que deben resistir las estructuras. Esto se consigue colocando dispositivos de baja rigidez horizontal entre la superestructura y la subestructura.

Varios investigadores han sugerido el uso de elementos de movimiento oscilante (rocking) como técnica de aislamiento sísmico ya que el levantamiento del elemento (bloque rígido) limita las fuerzas de diseño de la subestructura. Los sistemas han sido propuestos para ser incorporados en los extremos de los elementos resistentes a sismo como las columnas de edificios o las pilas en el caso de puentes.

Se presenta la propuesta de un modelo analítico de un dispositivo basado en un movimiento de rocking controlado para ser usado como un aislador de la superestructura de los puentes. La efectividad del aislamiento sísmico corresponde a la reducción de las aceleraciones de la superestructura del puente durante los movimientos del suelo, en comparación con las aceleraciones del movimiento del suelo. Las distintas geometrías de los dispositivos, con dimensiones similares a los neoprenos usados convencionalmente, se analizaron en vibración libre y vibración forzada (armónica y sismos reales) para identificar las variables que afectan la efectividad del aislamiento.

Este documento se organiza de la siguiente manera: en el Parte 1 se presenta el protocolo de tesis en donde se describe el problema de estudio, los objetivos de la investigación y la metodología para la cual se obtiene los resultados.

En la parte 2 se presenta el artículo de investigación enviado. En el artículo se describe la metodología llevada a cabo en la investigación, los resultados obtenidos y las conclusiones.

En el apéndice 1 se presenta la derivación de la ecuación de equilibrio dinámico del modelo del dispositivo de aislamiento propuesto para cada fase del movimiento del sistema.

Por último, en el apéndice 2 se presenta el desarrollo de la derivación de la ecuación de la respuesta fuerza-desplazamiento para cada fase del movimiento del sistema.

Contenido

Resumen	3
Abstract	3
Presentación	4
Parte 1: Protocolo de tesis	6
1 Antecedentes generales.....	7
2 Problema de estudio.....	10
3 Justificación	11
4 Objetivos	11
4.1 Objetivo general.....	11
4.2 Objetivos específicos	11
5 Hipótesis	11
6 Variables	11
7 Revisión bibliográfica y estado del arte.....	12
8 Recursos para llevar a cabo la investigación.....	14
9 Alcances y limitaciones	14
10 Metodología.....	14
11 Cronograma.....	16
12 Referencias.....	16
Parte 2: Artículo de investigación	19
Abstract.....	22
1. INTRODUCTION	22
2. DESCRIPTION OF THE DEVICE	23
3. DYNAMIC RESPONSE TO INITIAL CONDITIONS	26
4. DYNAMIC RESPONSE TO FORCED VIBRATION.....	27
5. RESPONSE TO GROUND-MOTION RECORDS.....	29
6. BRIDGE SYSTEM RESPONSE COMPARISON: NEOPRENE BEARINGS VS ROCKING DEVICE.....	31
7. CONCLUSIONS.....	33
REFERENCES	33
APPENDIX 1: Derivation of the equation of motion	35
APPENDIX 2: Derivation of the force–displacement response of the system.....	40

Parte 1: Protocolo de tesis

1 Antecedentes generales

Los eventos sísmicos ocasionan pérdidas considerables debido a las fallas estructurales de las construcciones. De ahí la importancia de contar con herramientas que minimicen sus efectos. En el caso de los puentes es fundamental que se mantengan en condiciones de operación después de un sismo, ya que forman parte de la infraestructura crítica que permite el transporte de recursos.

La República Mexicana tiene zonas de alta sismicidad, por lo que gran parte de la infraestructura carretera se encuentra en estas regiones. En la *Fig. 1* se muestra una gráfica de los Puentes en la Red Federal de Conservación de Carreteras (SIPUMEX, 2019). En el eje horizontal se observan los Estados de la República Mexicana y aquellos que se encuentran en zonas sísmicas se identifican con barras de color negro. En el eje vertical se aprecia el número de puentes construidos hasta el año de 2019 en cada estado. Los puentes son estructuras en las que se requiere un grado de seguridad alto, por lo cual, la mayoría de los puentes que se construyen tienen que diseñarse bajo estrictos estándares sismorresistentes. En este contexto, la sociedad requiere puentes que sean capaces de mantener su funcionamiento tras un evento sísmico a largo plazo y que se minimicen los costos de mantenimiento durante condiciones de peligro ordinarias y extremas.

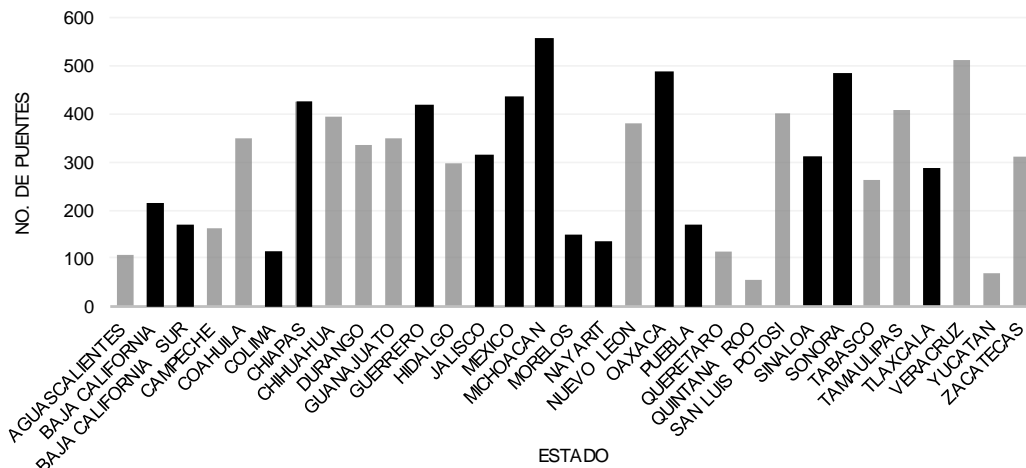


Fig. 1. Puentes en la Red Federal de Conservación de Carreteras.

Debido a la actividad sísmica de las últimas décadas, se ha puesto de manifiesto la vulnerabilidad de los puentes ante este fenómeno, la cual ha dejado constancia de los grandes costos derivados de las fallas que se producen. Las principales fallas detectadas incluyen el daño en topes sísmicos que restringen el desplazamiento lateral de la superestructura de los puentes, fallas por cortante debido a la relación de esbeltez de las pilas y a la escasa cuantía del refuerzo transversal, e incluso, el colapso de tableros completos debido a la pérdida de asiento de la superestructura sobre los cabezales (Jara, et al., 2006).

Por estas razones, el uso del aislamiento sísmico entre la superestructura y la subestructura se ha convertido en una herramienta ampliamente utilizada para reducir los efectos que un sismo tiene sobre una estructura. El aislamiento sísmico es una técnica que modifica la respuesta de las estructuras, debido a que desacopla el movimiento de la superestructura de las componentes horizontales del movimiento del suelo, conduciendo a la reducción sustancial de las fuerzas generadas por un sismo (Buckle, et al., 2006). El aislamiento se logra colocando dispositivos mecánicos con baja rigidez horizontal entre la superestructura y la subestructura. En la *Fig. 2* se muestra la sección transversal de la superestructura y subestructura de un puente cuando está sujeto a un sismo. En la *Fig. 2 (a)* se aprecia un puente convencional donde la deformación ocurre en la subestructura. Mientras que en la *Fig. 2 (b)* se observa un puente aislado sísmicamente donde la deformación ocurre en el aislador. Cuando un puente con aislamiento sísmico es

sujeto a un sismo, la deformación ocurre en el dispositivo en lugar de los elementos de la subestructura. Esto en gran medida reduce las fuerzas sísmicas y los desplazamientos transmitidos de la superestructura a la subestructura.

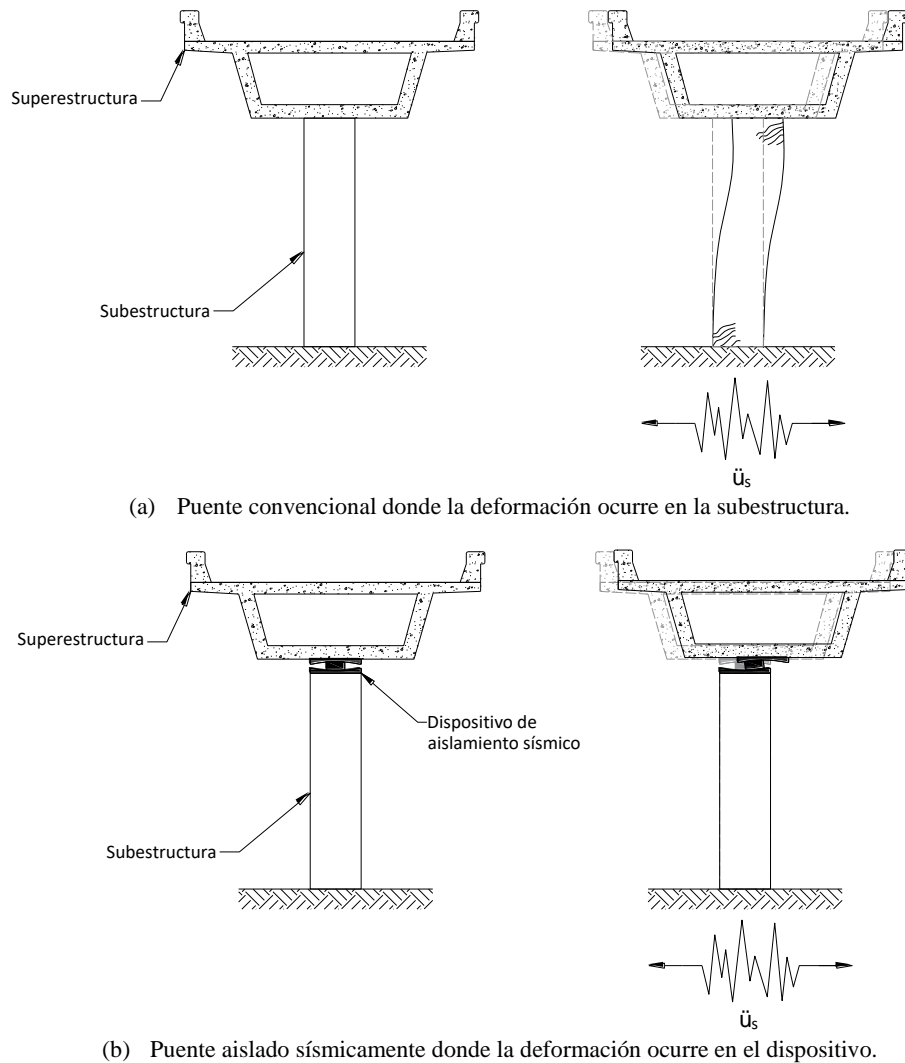


Fig. 2. Comparación de un puente convencional y uno aislado sísmicamente.

Las principales propiedades de los dispositivos de aislamiento sísmico son las siguientes:

- **Capacidad de carga y rigidez vertical:** el dispositivo debe transferir y resistir las cargas verticales de manera segura, tanto en condición de servicio como en condición sísmica.
- **Rigidez horizontal baja ante carga sísmica:** el dispositivo debe desacoplar el movimiento de la estructura del movimiento del suelo. Esto con el fin de alargar el periodo de vibración y reducir las fuerzas sísmicas en la subestructura.
- **Recentrar la estructura:** el dispositivo debe ser capaz de regresar a su configuración original después de que ocurre el sismo.
- **Proporcionar amortiguamiento:** el dispositivo debe proporcionar un nivel de amortiguamiento que reduzca la respuesta de la estructura.

También es importante verificar que el comportamiento del aislador no se vea afectado por las condiciones ambientales y del entorno durante su vida útil (Buckle, et al., 2006).

En general, la característica más importante del aislamiento sísmico es alargar el periodo fundamental de vibración del sistema asociado con el incremento de la flexibilidad del sistema de aislamiento. Este cambio de periodo controla la cantidad de fuerzas inducidas a la subestructura, mientras que los desplazamientos excesivos son controlados por el suministro de amortiguamiento adicional al sistema de aislamiento sísmico (Christopoulos & Filiatrault, 2006).

Esta técnica se ha utilizado para la protección y rehabilitación de estructuras en zonas sísmicas. Inicialmente algunas técnicas de construcción antiguas revelan prácticas que se asemejan con los principios del aislamiento de base. Algunas estrategias de aislamiento han conducido al uso de elementos naturales, tales como capas granulares deformables de caucho-arena. Algunos de estos ejemplos se sitúan en la Antigua Grecia, donde se usaron capas de piedra, algas marinas, capas de arcilla gruesas combinadas con capas de piedras pequeñas y bloques de piedra entre la base y la cimentación (Carpani, 2017). En Japón, el aislamiento sísmico se utilizó en las construcciones tradicionales a base de troncos de madera. Después, esta propuesta se hizo formal al final del siglo XIX (Pinto-Carvalho, 2020). En el año de 1909 en Inglaterra, J. A. Calantarients aplicó para una patente británica un enfoque del diseño resistente a sismo, en la cual propuso la separación del edificio de la cimentación con una capa de talco. Esto con el fin de crear una superficie lubricada en la cual la edificación podía deslizarse durante un sismo (Carpani, 2017). La primera implementación conocida de aislamiento sísmico en tiempos modernos se le atribuye a Frank Lloyd Wright en el diseño del Hotel Imperial en Tokio, Japón en 1921. En el sitio del hotel había una capa de 240 cm de lodo con mínima resistencia a cortante. Después de su construcción el Hotel se comportó extremadamente bien durante el terremoto de Kwanto Tokio en 1923 (Makris, 2018). Por lo que se refiere a México, las aplicaciones iniciales se dieron principalmente por la intervención directa de los desarrolladores de las tecnologías nacionales. Tal es el caso del Ing. Manuel González Flores y su sistema deslizante con base en balines metálicos. Este sistema se aplicó a un par de estructuras en la década de los años setenta. Por otra parte, está el Ing. Federico Garza Tamez y su sistema pendular GT-BIS, cuyas aplicaciones se hicieron durante la segunda mitad de la década de los años noventa.

En las últimas dos décadas el aislamiento de base ha emergido como una opción estructural en zonas sísmicas, gracias al gran esfuerzo que durante los últimos cuarenta años ha realizado la comunidad estructural en todo el mundo, particularmente en países como Nueva Zelanda, Estados Unidos, Japón e Italia (CFE, 2018).

Los dispositivos de aislamiento sísmico generalmente son clasificados en dos categorías, aquellos que usan componentes elastoméricos y aquellos que usan componentes deslizantes.

Dentro de los dispositivos con componentes elastoméricos, los de mayor uso son los apoyos de neopreno, los cuales consisten en placas de neopreno vulcanizadas y reforzadas con placas de acero. Estos se usan en puentes para permitir deformaciones por temperatura (CFE, 2015). Existen otro tipo de apoyos, los cuales además de tener placas de acero y elastómero intercaladas tienen un núcleo de plomo para disipar energía (Lead-Rubber Bearing LRB). En este tipo de apoyos, el plomo es estable bajo las deformaciones y tiene un comportamiento controlado. Adicionalmente es uno de los dispositivos más probados. Sin embargo, estos tienen un cambio de propiedades con el tiempo. De igual manera su desempeño depende de la temperatura y debido al proceso de vulcanización los errores de fabricación son una “caja negra” (NZSEE, 2019; Pinto-Carvalho, 2020).

Por otro lado, los dispositivos deslizantes más comunes son los apoyos friccionantes pendulares (Friction Pendulum Bearing FPS). Este es un sistema de aislamiento friccionante que combina la acción deslizante con una fuerza restauradora debido a su geometría. La fricción entre el deslizador y la superficie esférica genera amortiguamiento. Por otra parte, la rigidez efectiva del aislador y el periodo de la estructura aislada es controlada por el radio de curvatura de la superficie cóncava y la fricción entre las placas (Naeim & Kelly, 1999). Estos apoyos son aptos para cargas y deslizamientos grandes y tienen un mejor control de

calidad. Sin embargo, para cargas y desplazamientos pequeños son relativamente caros. Tampoco tienen capacidad a tensión y requieren un alto control de fabricación en geometría y materiales (NZSEE, 2019; Pinto-Carvalho, 2020).

En la *Tabla 1* se muestran las propiedades que los componentes proveen al sistema de aislamiento sísmico. En la primera columna se observan las propiedades que poseen estos dispositivos. En la segunda y tercera columna se presentan los componentes que proporcionan y adicionan propiedades a cada sistema.

Tabla 1. Componentes de dispositivos de aislamiento sísmico más comunes.

Propiedad	Dispositivos elastoméricos	Dispositivos por deslizamiento
<i>Rigidez</i>	Caucho	Radio de la concavidad
<i>Amortiguamiento</i>	Plomo/Caucho	Fricción
<i>Capacidad axial</i>	Placas de acero/Caucho	Acero

Otro tipo de mecanismo no convencional y que no corresponde a los presentados anteriormente es el basado en un sistema de balanceo (rocking). El mecanismo de rocking puede apreciarse desde las estructuras de la Antigua Grecia, por ejemplo, el Templo de Aphaia en la Isla de Aegina cerca de Atenas. Este templo es una estructura formada por elementos masivos y pesados posicionados de forma horizontal apoyados sobre grandes columnas autoportantes. A más de 2.5 milenios de haberse construido, este tipo de estructuras han resistido sismos de gran magnitud por lo que ha sido notable su estabilidad sísmica (Makris & Vassiliou, 2015).

Varios investigadores han sugerido utilizar el rocking como estrategia de diseño sísmico porque el levantamiento del elemento (bloque rígido) actúa como un fusible mecánico y limita las fuerzas de diseño de la subestructura (Vassiliou, et al., 2020). Esto se puede apreciar en estructuras esbeltas con cargas grandes en la parte superior, las cuales, inevitablemente desarrollan momentos de volteo que producen fuerzas de tensión al nivel de su cimentación. Como alternativa es posible permitir que las columnas, o pilas en el caso de puentes, tengan un movimiento oscilante y de levantamiento en su base, es decir que los apoyos estén articulados. Esta forma de aislamiento reduce las fuerzas sísmicas, particularmente las fuerzas de tensión generadas en las columnas (Naeim & Kelly, 1999). Este sistema fue incorporado en edificaciones existentes y en puentes ubicados en Nueva Zelanda. Como un ejemplo de este tipo de aislamiento se tiene al Puente ferroviario del Río South Rangitikei, el cual tiene pilas de 69 m de altura que fueron diseñadas para levantarse de la cimentación bajo cargas sísmicas. Este concepto ha sido estudiado y evaluado experimentalmente como una técnica para lograr un nivel de desempeño sísmico objetivo de nuevas estructuras, e incluso de estructuras que son susceptibles a reforzarse. Tal es el caso del edificio de alojamiento para estudiantes de la Universidad de Wellington en Nueva Zelanda, en donde el sistema de rocking está incorporado en los marcos de acero con arriostramiento concéntrico y columnas articuladas en su base (Wiebe, 2015).

La aplicación del sistema de rocking en proyectos y trabajos de investigación ha sido a un nivel macro en estructuras de puentes y edificaciones, es decir, sistemas que se incorporan y forman parte de los elementos estructurales resistentes a sismo. En este trabajo se propone el desarrollo teórico de un dispositivo de aislamiento sísmico basado en un movimiento de rocking controlado, el cual sea de dimensiones y características similares a los apoyos de neopreno que convencionalmente se colocan entre la subestructura y la superestructura de los puentes.

2 Problema de estudio

Para lograr un mejor desempeño sísmico en los puentes se han utilizado comúnmente dispositivos de aislamiento con distintas configuraciones y materiales. Sin embargo, por las patentes relacionadas con estos

dispositivos su costo es alto. Por lo cual, se busca desarrollar un nuevo dispositivo de aislamiento sísmico que sea de bajo costo y tenga un desempeño similar a los convencionales.

3 Justificación

Con la aplicación de dispositivos de aislamiento sísmico se busca tener una infraestructura de puentes que tengan una capacidad de mantener su nivel funcional tras un evento sísmico a largo plazo y que minimice los costos de mantenimiento durante condiciones sísmicas y de servicio. El uso de aislamiento sísmico conduce a una disminución de daños causados por los sismos.

En este trabajo se pretende desarrollar el modelo analítico de un dispositivo de aislamiento basado en rocking, el cual tenga características similares a las de los dispositivos actuales, pero que sea de bajo costo y que garantice el buen desempeño sísmico de los puentes.

4 Objetivos

4.1 Objetivo general

Estudiar analíticamente la propuesta de un dispositivo de aislamiento sísmico de bajo costo para puentes a base de un sistema de rocking controlado, con el fin de garantizar una disminución de la respuesta sísmica similar a la de los dispositivos utilizados actualmente.

4.2 Objetivos específicos

- Formular un modelo analítico representativo del dispositivo de aislamiento sísmico.
- Resolver la dinámica estructural del modelo analítico formulado.
- Evaluar la solución para distintas configuraciones geométricas del dispositivo ante fuerzas armónicas mediante métodos computacionales para obtener desplazamientos, velocidades y aceleraciones en función del tiempo.
- Evaluar el comportamiento dinámico del dispositivo ante acciones sísmicas reales.
- Identificar las principales variables que afectan el comportamiento del dispositivo de aislamiento.
- Comparar los resultados con el desempeño de dispositivos actuales para valorar el porcentaje de amortiguamiento proporcionado y reducción de aceleraciones.

5 Hipótesis

El dispositivo de aislamiento sísmico propuesto, basado en un movimiento de rocking, disminuye la respuesta sísmica de los puentes en al menos 70% respecto al caso en el que no se tiene un aislador sísmico.

6 Variables

Características dinámicas y geométricas del dispositivo.

- Por lo que se refiere a las características geométricas se variarán las dimensiones en planta y elevación y en su caso el número de componentes del dispositivo.

- Por lo que se refiere a las características dinámicas se estudiara la rigidez, periodo fundamental, amortiguamiento, respuestas en función del tiempo (aceleración, velocidades, desplazamientos) del dispositivo sometido a ciertas acciones sísmicas.

7 Revisión bibliográfica y estado del arte

Con el fin de reducir los efectos que los sismos tienen sobre las estructuras, se han hecho diferentes investigaciones en las que se han propuesto modelos analíticos y modelos experimentales. En estos trabajos se estudian técnicas que fueron aplicadas en construcciones antiguas y materiales que pueden ser accesibles en países en desarrollo.

El aislamiento sísmico ha conducido a estrategias de bajo costo para regiones con limitados materiales y recursos financieros como el uso de mezclas de suelos con caucho, tal es el caso del proyecto de Hernández et al. (2020). Este proyecto tiene como objetivo desarrollar un sistema de cimentación caracterizado por mezclas granulares de caucho y gravas para ser colocados bajo la estructura. Esto debido a los terremotos de Christchurch de 2010 y 2011 donde se demostró que es necesario un cambio en la práctica actual de diseño de estructuras para lograr un mejor desempeño sísmico. Asimismo, las preocupaciones ambientales han llevado a los ingenieros civiles a identificar formas viables de reutilizar llantas de desecho a través de proyectos de ingeniería. Con ello, varios análisis numéricos llevados a cabo por la comunidad investigadora indican que al utilizar estas técnicas las aceleraciones y las fuerzas de inercia sísmicas se reducirán drásticamente.

Otro estudio similar fue realizado por Tsiavos et al. (2019). Este estudio consistió en el uso de una capa formada por una mezcla granular de caucho y arena en la base de la cimentación de la estructura. En este trabajo se realizaron dos tipos de pruebas experimentales. Primero, las pruebas estáticas consistieron en pruebas de corte directo para cuantificar la relación óptima de tamaño de grano de una mezcla de caucho y arena. Esto para obtener la minimización de la fricción contra una interfaz de madera. Por otro lado, la configuración experimental de la mesa vibratoria uniaxial se utilizó para la investigación de la dinámica de un bloque deslizante rígido y la cuantificación de la fricción cinética de diferentes interfaces deslizantes contra dos mezclas diferentes de arena y caucho de dos espesores de capa diferentes. Las conclusiones obtenidas de ambos conjuntos de pruebas confirmaron la necesidad de un enfoque híbrido estático y dinámico para la evaluación del comportamiento de deslizamiento de estructuras basadas en mezclas de suelos.

Otras estrategias de aislamiento sísmico han tomado como base el movimiento de rocking. A continuación se presentan algunos trabajos de investigación en los que se han enfocado en validar analítica y experimentalmente modelos que predicen los efectos del comportamiento de rocking.

Makris & Vassiliou (2015) profundizaron en la respuesta de la estabilidad del rocking en el plano de un arreglo de columnas articuladas donde se apoya una viga rígida. Esto se desarrolló debido al concepto de diseño sísmico que está tomando relevancia de permitir que el sistema de un marco se levante y se balancee a lo largo de su plano con el fin de reducir los elementos mecánicos. Siguiendo una formulación variacional, los resultados indicaron que la respuesta de un arreglo de columnas es idéntica a la respuesta de una columna con la misma esbeltez; con un tamaño más grande la configuración es más estable. Además, entre más pesada sea la viga la respuesta del rocking es más estable.

Thiers-Moggia & Málaga-Chuquitaype (2018) investigaron las ventajas potenciales del uso de inercia rotacional suplementaria para mitigar los efectos de los sismos sobre las estructuras de rocking como tanques de almacenamiento, columnas postensadas o muros. La evaluación del sistema se hizo bajo excitaciones reales e hipotéticas del movimiento del terreno tipo armónicas de corta duración. Se demostró que la inclusión de un inerter reduce efectivamente los parámetros de frecuencia de un bloque, resultando

en menores demandas rotacionales sísmicas y mejorando la estabilidad debido a los efectos de rocking. Además, se reveló que las estructuras equipadas con inerters experimentan bajas probabilidades de volteo en comparación con cuerpos no controlados y que la adición de un clutch mejora la estabilidad sísmica.

Bachmann et al. (2019) propusieron una forma débil de la validación del modelo del análisis de la respuesta sísmica de un bloque en rocking. En este trabajo se realizaron 600 pruebas de la respuesta sísmica en mesa vibratoria utilizando una estructura oscilante bien definida y repetible, así como 600 simulaciones numéricas de estas pruebas. Se compararon tanto la respuesta de prueba individual como los resultados estadísticos de estas respuestas enfocados en predecir estados límite como el volteo o el ángulo de inclinación máximo. Esto se hizo para proponer una aplicación más amplia de modelos de validación débiles y delinear posibles criterios de aceptación consistentes con los objetivos de desempeño sísmico probabilístico para el diseño y evaluación de estructuras. Los hallazgos indican que, aunque la respuesta de un bloque oscilante rígido a un solo movimiento del suelo es caótica, las estadísticas de la respuesta a conjuntos de movimientos del suelo son predecibles con suficiente precisión para el diseño y evaluación sísmicos.

Froli et al. (2019) desarrollaron un dispositivo novedoso de aislamiento sísmico para proteger estructuras esbeltas principalmente históricas, Tribological Rocking Seismic Isolation Device (TROCKSISD). El dispositivo está concebido para permitir un balanceo suave, controlado y amortiguado gracias a las superficies de contacto esféricas, resortes elásticos que aseguran el recentrado, capas de fricción y amortiguadores elásticos viscosos que son los que disipan la energía. En este trabajo se analizó el marco conceptual del dispositivo y se obtuvieron las ecuaciones de movimiento para el sistema equivalente de dos grados de libertad. El análisis dinámico se hizo bajo movimientos del suelo compatibles con espectros. Esto se hizo para evaluar la contribución principal de la fricción desarrollada por el deslizamiento relativo de las dos superficies cóncavas. Los resultados obtenidos mostraron que el dispositivo cumple con los objetivos de disipación de energía y el control de desplazamientos. También concluyeron que un estudio más detallado relacionado con los efectos P-Delta ocasionados por el rocking es necesario.

Vassiliou et al. (2020) revisaron la predictibilidad de la respuesta sísmica del movimiento de rocking en el diseño sísmico. En un sentido estadístico se diseñó una prueba experimental para obtener observaciones de la respuesta sísmica de una estructura 3D oscilante sin deslizamiento. Para esta prueba se utilizaron dos conjuntos de acelerogramas. El objetivo de este estudio fue revisar si las pruebas sísmicas de estructuras de rocking en 3D son replicables y en su caso si las respuestas observadas son predecibles usando modelos numéricos. Se encontró que la función de distribución acumulada (CDF) de los desplazamientos obtenidos experimentalmente es estadísticamente estable. Posteriormente, se organizó un concurso de predicción a ciegas donde se pudieron predecir el CDF de desplazamiento de la losa relativamente bien. De los modelos utilizados no se encontró un patrón claro ya que el desempeño depende de los parámetros de entrada utilizados y de las suposiciones realizadas. También se observó que los concursantes que no utilizaron el amortiguamiento tipo Rayleigh en sus modelos produjeron mejores predicciones.

Veeraraghavan et al. (2020) realizaron un algoritmo de la dinámica de cuerpos rígidos para simular la interacción entre dos cuerpos, un objeto autoportante y un pedestal que tiene masa infinita, en presencia de fuerzas de fricción estáticas y cinéticas. Los algoritmos condujeron a diferentes soluciones para las fuerzas de contacto cuando se cambian parámetros externos, como el orden de los puntos de contacto. La capacidad del algoritmo para simular modos de respuesta de balanceo puro, deslizamiento puro y balanceo-deslizamiento acoplado de un bloque rectangular se validó mediante resultados analíticos. También este algoritmo validado se utilizó para identificar los diversos modos de respuesta de un bloque rectangular, al que se le da una inclinación inicial y luego se libera.

Por último, Berto et al. (2021) realizaron pruebas experimentales para caracterizar las condiciones del rocking de un elemento autoportante enfocándose en la mínima aceleración para activar el mecanismo. Las pruebas experimentales se realizaron con 11 muestras prismáticas con alturas hasta de 23 cm, y relaciones de esbeltez B/H de 0.20 y 0.33. El material de los especímenes fue de madera, mármol y acero. En estas pruebas se utilizaron señales armónicas (continuas y tipo pulsos) aplicadas a más de 300 casos. Esto se hizo con el objetivo de definir una aceleración límite segura para la evaluación de la vulnerabilidad de elementos autoportantes. Actualmente el límite definido toma en cuenta las condiciones reales del comportamiento de

rocking, tal es el caso de las imperfecciones del elemento, condiciones de rigidez del elemento y del apoyo e incluso imperfecciones en las superficies de contacto. Los resultados mostraron que el rocking ocurre a una aceleración menor a la aceleración límite asumida, que es proporcional a la aceleración de la gravedad por la relación de esbeltez.

8 Recursos para llevar a cabo la investigación

Se cuenta con los recursos necesarios como equipo de cómputo, software para efectuar la programación del análisis (Matlab), bibliografía, bases de datos y artículos científicos.

9 Alcances y limitaciones

- El trabajo corresponde a un estudio analítico del modelo de dispositivo de aislamiento propuesto.
- Las dimensiones del dispositivo propuesto serán similares a las de los dispositivos convencionales de neopreno.
- Las cargas verticales corresponderán a puentes convencionales con claros que varían entre 20 y 40 m.
- El tipo de simulación que se realizará corresponde a una prueba hipotética donde el dispositivo es el que se prueba.
- Se analizarán acelerogramas correspondientes a terreno duro.

10 Metodología

Inicialmente se hará la revisión bibliográfica de investigaciones relacionadas directamente con el tema propuesto, por ejemplo, sistemas de control de la respuesta sísmica, fallas estructurales debido a eventos sísmicos en puentes vehiculares y las características de los dispositivos que se ofrecen actualmente. La bibliografía será consultada con el fin de profundizar aquellas áreas que definirán las bases del tema de investigación. Posteriormente se ampliarán los antecedentes y marco teórico describiendo los trabajos relacionados, conceptos y términos para dar mayor comprensión y referencia al tema. Por ejemplo, trabajos de investigación sobre el estudio de la dinámica del movimiento de rocking, desarrollo de propuestas analíticas y experimentales de dispositivos de aislamiento en estructuras convencionales y no convencionales e incluso la normativa aplicable a sistemas de protección sísmica.

Después se formulará el modelo analítico representativo del dispositivo de aislamiento sísmico. Con ello, se resolverá la dinámica estructural basado en el concepto del movimiento de rocking. Consecutivamente esta solución se evaluará para distintas configuraciones geométricas ante fuerzas tipo armónicas mediante métodos computacionales para obtener su respuesta en función del tiempo (desplazamientos, velocidades, aceleraciones). De igual manera, se evaluará el comportamiento dinámico del dispositivo ante acciones sísmicas reales registradas para valorar la reducción de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y fuerzas.

Una vez realizadas las simulaciones que corresponden a pruebas hipotéticas donde el dispositivo es el que se prueba se identificarán las variables que afectan su comportamiento. Con los resultados obtenidos se compararán con el desempeño de dispositivos actuales para valorar la reducción de aceleraciones y el porcentaje de amortiguamiento proporcionado bajo condiciones definidas. De esta manera se verificará la hipótesis formulada. Por último, se presentarán los resultados de esta investigación.

En la *Fig. 3* se muestra un diagrama de flujo de la metodología de este trabajo de investigación.

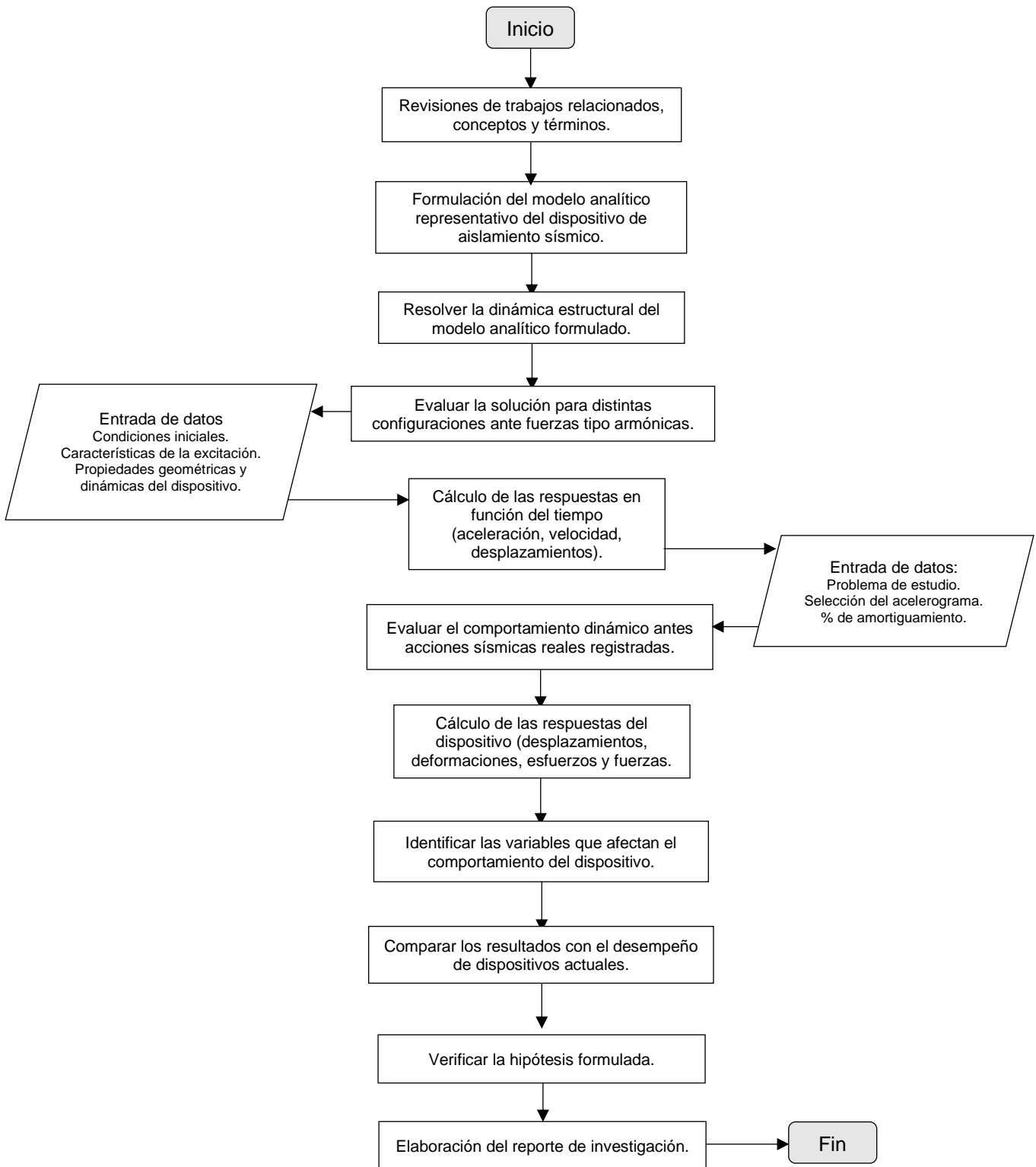


Fig. 3. Diagrama de flujo de la metodología del trabajo de investigación.

11 Cronograma

Tabla 2. Programa de actividades calendarizado.

Tiempo Actividad	Semestre			
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Revisión bibliográfica.	■			
Revisión de antecedentes para ampliar el marco teórico.	■			
Formulación del modelo analítico representativo del dispositivo de aislamiento sísmico.		■		
Resolver la dinámica estructural del modelo formulado.		■		
Evaluación de la solución para distintas configuraciones ante fuerzas tipo armónicas.			■	
Evaluación del comportamiento dinámico del dispositivo ante acciones sísmicas reales registradas.			■	
Identificar las principales variables que afectan el comportamiento del dispositivo de aislamiento sísmico.			■	
Comparar los resultados obtenidos con el desempeño de dispositivos actuales.				■
Elaboración del reporte de investigación.			■	

12 Referencias

Bachmann J. A., Vassiliou M. F., Broccardo M. & Stojadinović B. (2019). Modelling of rocking structures: Are our models good enough? *2nd International Conference on Natural Hazards & Infrastructure 23-26 June 2019*.

Berto L., Meroi E., Rocca I. & Saetta A. (2021). Rocking activation of free standing elements in real conditions: A safe experimentally-based acceleration limit. *Engineering Structures*, 226 (2021), 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111331>

Buckle I., Constantinou M., Dicleli M. & Ghasemi H. (2006). Seismic isolation of highway bridges. *Federal Highway Administration*.

Carpani B. (2017). Base isolation from a historical perspective. *16th World Conference on Earthquake, 16WCEE 2017*.

- Christopoulos C. & Filiatrault A. (2006). Principles of passive supplemental damping and seismic isolation. *Istituto Universitario di Studi Superiori di Pavia*.
- Comisión Federal de Electricidad (CFE). (2015). Capítulo C.1.3. Diseño por sismo – Comentarios. *Manual de Diseño de Obras Civiles*. Comisión Federal de Electricidad.
- Comisión Federal de Electricidad (CFE). (2018). Capítulo C.3.2. Diseño de estructuras con aislamiento de base. *Manual de Diseño de Obras Civiles*. Comisión Federal de Electricidad.
- Froli M., Giresini L. & Laccone F. (2019). Dynamics of a new seismic isolation device based on tribological smooth rocking (TROCKSISD). *Engineering Structures*, 193 (2019), 154-169. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.05.014>
- Hernández E., Palermo A., Granello G., Chiaro G. & Banasiak L. J. (2020). Eco-rubber seismic-isolation foundation systems: A sustainable solution for the New Zealand context. *Structural Engineering International*, 30 (2), 192-200. <https://doi.org/10.1080/10168664.2019.1702487>
- Jara D. M., Álvarez S. J. J. & Jara G. J. M. (2006). Algunas deficiencias de puentes sísmicamente vulnerables. *Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural*.
- Makris N. & Vassiliou M. F. (2015). The dynamics of the rocking frame. In: *Psycharis I., Pantazopoulou S., Papadrakakis M. (eds) Seismic Assessment, Behavior and Retrofit of Heritage Buildings and Monuments. Computational Methods in Applied Sciences*, 37(2015), 37-59. https://doi.org/10.1007/978-3-319-16130-3_2
- Makris N. (2018). Seismic isolation: Early history. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 48 (2), 269-283. <https://doi.org/10.1002/eqe.3124>
- New Zealand Society for Earthquake Engineering (NZSEE). (2019). Guideline for the design of seismic isolation systems for buildings – Draft June 2019. *New Zealand Society for Earthquake Engineering (NZSEE)*.
- Naeim F., & Kelly J. M. (1999). Design of seismic isolated structures: from theory to practice. *John Wiley & Sons, Inc.*
- Sistema de Puentes de México (SIPUMEX). (2019). Puentes en la red federal de conservación de carreteras. *Secretaría de Comunicaciones y Transportes*.
- Pinto-Carvalho L. (2020). Seminario de aislamiento sísmico: Introducción al aislamiento. *Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica. Mesa Directiva 2020-2021*.
- Thiers-Moggia R. & Málaga-Chuquitaype C. (2018). Seismic protection of rocking structures with inerters. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 48 (5), 528-547. <https://doi.org/10.1002/eqe.3147>
- Tsiavos A., Alexander N. A., Diambra A., Ibraim E., Vardanega P. J., Gonzalez-Buelga A. & Sextos A. (2019). A sand-rubber deformable granular layer as a low-cost seismic isolation strategy in developing countries: Experimental investigation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 125 (2019), 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2019.105731>

Vassiliou M. F., Broccardo M., Cengiz C., Dietz M., Dihoru L., Gunay., Mosalam K. M., Mylonakis G., Sextos A. & Stojadinović B. (2020). Shake table testing of a rocking podium: Results of a blind prediction contest. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. <https://doi.org/10.1002/eqe.3386>

Veeraraghavan S., Hall J. F. & Krishnan S. (2020). Modeling the rocking and sliding of free-standing objects using rigid body dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 146 (16), 1-17. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001739](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001739)

Wiebe L. D. A. (2015). Design and construction of controlled rocking steel braced frames in New Zealand. *Second ATC & SEI Conference on Improving the Seismic Performance of Existing Buildings and Other Structures December 10–12, 2015 / San Francisco, California*. <https://doi.org/10.1061/9780784479728.067>

Parte 2: Artículo de investigación

Seismic-isolation device for bridges based on a controlled-rocking system

Ricardo Álvarez-Acosta, Jesús Valdés-González and Jaime De-la-Colina

Universidad Autónoma del Estado de México, Facultad de Ingeniería, Cerro de Coatepec S/N, Ciudad Universitaria, C.P. 50110 Toluca, México.

Abstract

This paper presents an analytical study of a novel seismic isolation device for the superstructure of bridges based on a rocking motion. The device, which is intended to provide a good seismic performance of bridges, is a low-cost seismic isolator with geometry similar to that of those used conventionally. The bridge isolation is achieved with a set of rocking blocks located between the substructure and the superstructure. The isolation-system model consists of rocking blocks resting on the pier cap and giving support to the bridge loads. Viscous damping is included in the analytical model to control the lateral displacements. Free-vibration results indicate that the fundamental vibration period of the device depends on the vibration initial conditions. The vibration period does not depend on the mass but only on its geometry. The effectiveness of the device was assessed in terms of the reduction of the bridge superstructure accelerations during the ground motions, as compared to the ground motion accelerations. For the seismic stations analyzed, an effectiveness greater than 72% is achieved in terms of the peak acceleration and the Arias intensity for some cases. On average, compared to a conventional neoprene isolator, the proposed device has a higher effectiveness of up to 20% and it has a reduction of displacements up to 25%.

Keywords: seismic isolation device, controlled-rocking system, bridges.

1. INTRODUCTION

For bridges, it is fundamental that they remain in operating condition after an earthquake since they are part of the transportation infrastructure. Seismic bridge damage can be associated with the lateral seismic restrainers failure, pier shear failure and even the collapse of the complete desks due to the lack of seat of the superstructure. These cases have been occurred in Northridge, Kobe, and Mexico. Bridges are structures in which a high degree of safety is required, therefore, most of them are designed under strict seismic resistance standards. Isolators between the substructure and the superstructure have been widely used to reduce the seismic effects on bridges. Seismic isolation is a technique that modifies the structural response, since it uncouples the movement of the superstructure from the horizontal components of the ground motion, leading to a reduction of the seismic forces that the structures must resist [1]. This is also achieved by placing devices with low horizontal stiffness between the superstructure and the substructure. Several researchers have suggested the use of oscillating motion (rocking) elements as a seismic isolation technique since the uplift of the element (rigid block) limits the design forces of the substructure [2].

This idea has led to propose and develop seismic response control systems for buildings and bridges. For example, in Russia more than 500 buildings have been built with rocking columns located on the first floor of the buildings and during an earthquake they have a rocking motion. These elements are known as kinematic bearings and full-scale tests have been carried out with satisfactory results [3]. In the same way, Ríos-García and Benavent-Climent [4] proposed an analytical model of oscillating columns located on the bottom floor of reinforced concrete buildings with inner steel bars. To have a rocking motion in the structure, the sliding is between the steel bars and the end of the columns in a given range of displacements. These structures are more commonly referred to as rocking podium structures.

In the case of bridges, different alternatives have been proposed where the piers are allowed to rock. For example, In New Zealand, the piers of the South Rangitikei bridge were designed to rock under seismic loading along with energy dissipation devices to control the forces. [5]. Moreover, Makris and Vassiliou [6] concluded that a heavy element on tall and slender piers enhances the stability of the structure. In that research, sliding of the blocks during their impact is restricted in the lower and upper part of the piers by the foundation and by the superstructure.

Thiers-Moggia & Málaga-Chuquitaype [7] proposed an analytical model of a rocking block including an inerter. An inerter is a device in which the relative acceleration between the ends is proportional to the forces applied at the ends. Hence, the rotation and acceleration demands are diminished as the frequency parameter of the rocking block decreases. They concluded that with the addition of these devices the probabilities of overturning are reduced and, together with a clutch, the effect of adding an inerter is controlled so that it only opposes to the rocking motion.

Bachmann et al. [8] developed an analytical model of an arrangement of rolling and rocking blocks with curved elements that improves its stability such as the case in which post-tensioning cables are included. They concluded that

adding a curved part, the rotation or deformation capacity is increased while controlling the initial stiffness without having a greater uplifting acceleration.

Reggiani et al. [9] developed an analytical and experimental model for a rocking system of precast concrete bridges that included unbonded cables in the piers. The addition of the cables increases the stability of the system while keeping its flexibility and works as a seismic isolator. They conclude that a simpler model than the 3D rocking one is good enough to estimate the displacement of the slab center of mass under a set of ground motions records. Nevertheless, it is not capable of estimating the observed torsional rotation due to the imperfections of the experiment. He et al. [10] proposed a bidirectional rocking isolation bearing system for the bridge superstructure using the 3D rocking motion. They investigated the effects of the angle and size of the bearing, the mass ratio and the damping property at the support interface on controlling the seismic response of the bridge. In the analyses, the PGA was scaled to evaluate the response control effectiveness through the pier displacements. They concluded that effectiveness becomes more significant as the seismic intensity increases.

Seismic isolation based on rocking motion has been used as part of the main elements of bridge and building structures. These systems have been proposed to be incorporated into the ends of the earthquake-resistant elements such as columns or piers in the case of bridges. In this research a proposal of a device based on a controlled-rocking motion is proposed and used as an isolator for the bridge superstructure. This is done through a device with dimensions similar to the conventional elastomeric bearings used in bridges. The proposed isolator is also located between the superstructure and substructure of the bridges.

To achieve a better seismic performance in bridges, seismic isolation devices with different configurations and materials have been used. However, due to the issue of patents, their cost is high. In this work it has been conceptualized a new seismic isolation device that is low-cost and has a performance similar to the conventional ones. With the application of seismic isolation devices, the aim is to have a bridge infrastructure that has the capacity to maintain its functional level during earthquakes with minimal cost of maintenance. In general, the use of seismic isolation leads to a decrease in damage caused by earthquakes.

The objective of this work is to study a proposal of a low-cost seismic-isolation device for bridges based on a controlled-rocking system to reduce the seismic response which has a similar performance to the current devices regardless of its type.

2. DESCRIPTION OF THE DEVICE

Fig. 1(a) shows the cross section of a conventional bridge. The superstructure (beams and slab) rests on the neoprene bearings, which are supported on the pier cap. These neoprene bearings are commonly used in bridges to allow deformations due to temperature changes [11]. On the other hand, Fig. 1(b) shows the cross section of a bridge with the proposed isolation devices, where each beam rests on the proposed device. Even within this proposal, neoprene bearings would also be placed for service conditions (temperature changes, braking forces, and low intensity earthquakes). The device can be used for bidirectional analysis, however, in this work unidirectional analysis is studied.

The analytical model of the proposed device is similar to the one developed by Bachmann et al. [8]. Their model has extended curved elements at the ends of a rigid block and was applied to rocking podium structures. In this study a viscous damping is added to the model with similar geometries to neoprene bearings. Fig. 2a shows the device that consists of N rigid blocks with a total mass Nm_c and a rigid plate with mass m_b . The rigid plate corresponds to the discharge of the tributary permanent load of one of the bridge beams. The ratio $\gamma = m_b/Nm_c$ is equal to the rigid-plate mass (tributary permanent mass) divided by the device mass. The tilt angle θ is the degree of freedom of the system and defines the rotated configuration of the blocks. In the model, c is the viscous-damping coefficient.

The geometry of each block is defined with the following parameters (Fig. 2b): a) the radius of curvature (r), b) the total height ($2H$), c) the width of the flat base ($2B$), d) the total width ($2B'$), e) the width of the curved part (b), f) the semidiagonal to the center of mass (R), g) the angle α that defines the slenderness of the block such that $\tan \alpha = 2B/2H$, and h) the angle β which defines each phase of the motion.

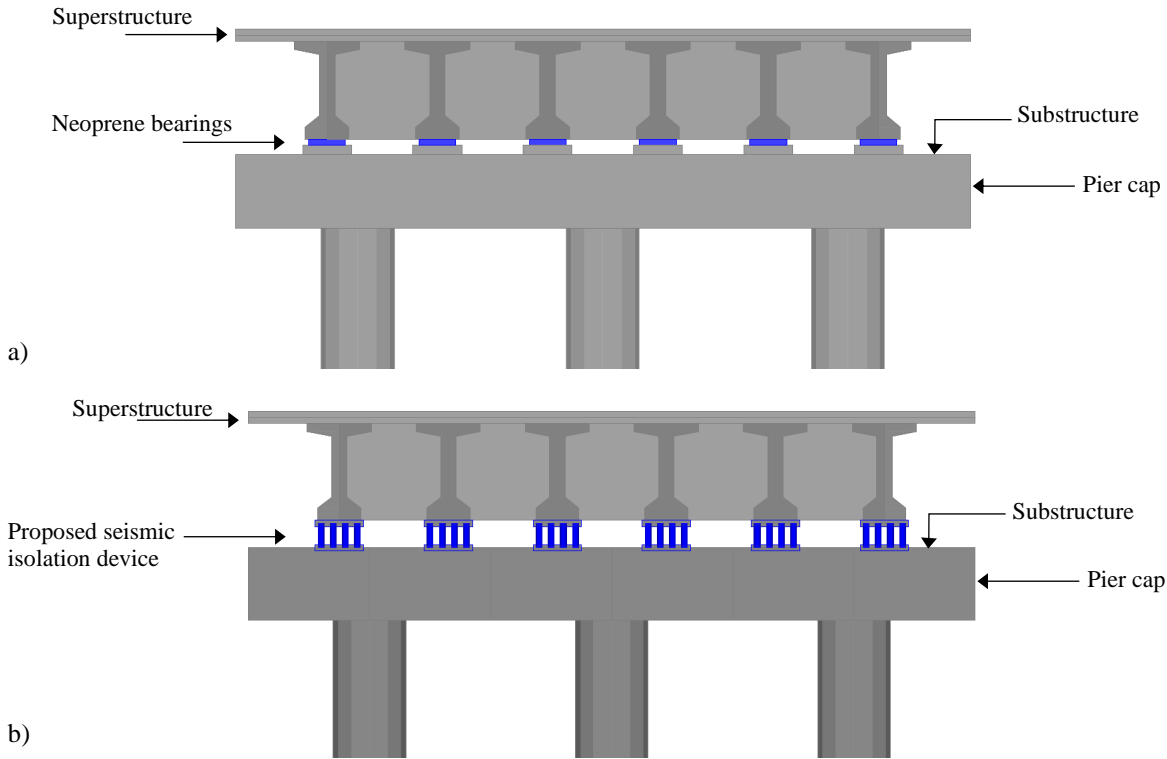


Fig. 1. Comparison of a conventional bridge and a seismically isolated one. a) Common bridge cross-section. b) Bridge cross-section with the proposed seismic isolation device

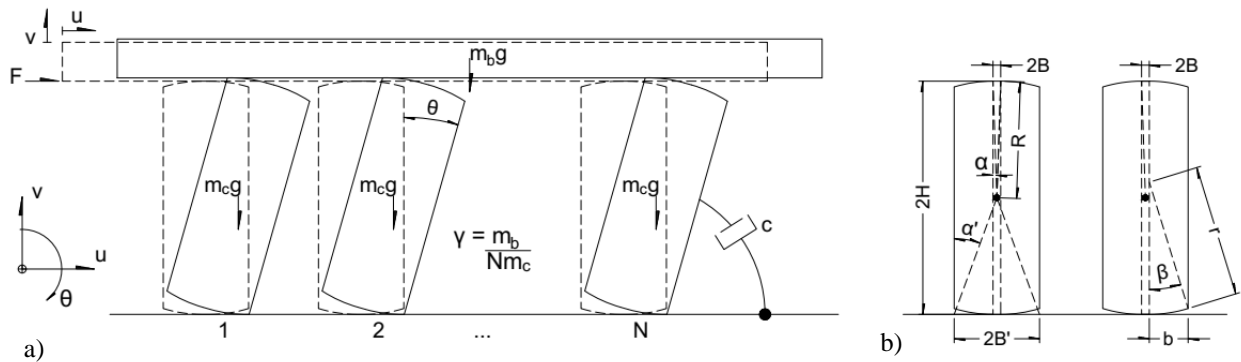


Fig. 2. Controlled-rocking seismic isolation device. a) Arrangement of the blocks of the system. b) Geometric parameters of a single block.

Depending on the support conditions of the blocks, two phases of the movement are identified which are described as follows (Fig. 3). In Phase I, once the motion has started ($\theta > 0$), each block starts to roll over the convex part up to the contact point reaches the edge of the curved part. In Phase II ($\theta > \beta$), the block starts to rock around the edge of the curved part, which only has one contact point. Then it returns to phase I or the block overturns (numerically this is defined for a rotation $\theta = \pi/2$).

The dynamics of the system is based on the following assumptions:

- The block is rigid and homogeneous.
- The block and the support surface always remain pointwise contact.
- The friction between the block and the support surface is sufficient to prevent sliding.
- The support surface is rigid.

- The ground motion acceleration is considered in one direction.
- The device has viscous damping only.

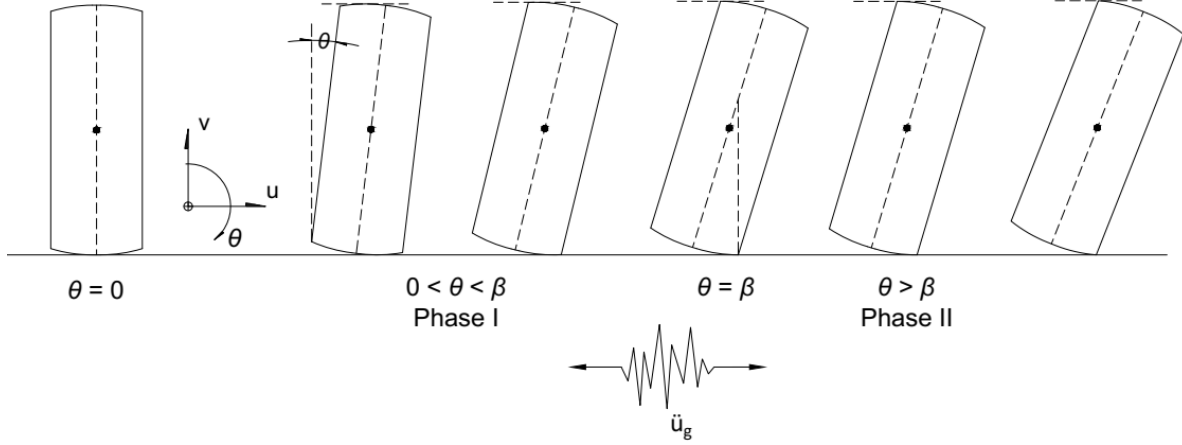


Fig. 3. Phases of the dynamic motion.

An equivalent viscous damping is added to the system to stabilize its oscillations. Under this assumption, damping is idealized as a moment that varies linearly as a function of the angular velocity, $f_d = c\dot{\theta}$ where c is the damping coefficient. The dissipation of energy through impact, commonly represented as the coefficient of restitution, is neglected since it depends only on the slenderness of the block. For the device geometries studied, small values of α are obtained. Therefore, in the equation of motion the damping is in terms of the damping coefficient and the rotational velocity.

$$c = 2\xi\omega_n m = 2\xi\omega_n(1 + \gamma) \quad (1)$$

where ω_n is the undamped angular natural frequency of the system, ξ is the damping ratio and $m = m_b + Nm_c = I + \gamma$. Physically, the damping mechanism is around the blocks. Eq. 1 is the total value for the N blocks as they are connected in parallel. Since the blocks are rigid, there is no inelastic behavior; however, the system is nonlinear because the stiffness varies. Thus, there is no energy dissipation due to the inelastic behavior.

Following the Lagrange approach [14] the equation of motion, for each phase, is derived including the equivalent viscous damping and omitting the energy loss by the impact (once having slender blocks). Given these assumptions, the model has 1 degree of freedom: the tilt angle θ . The derivation of the equation is presented in appendix 1. The equation of motion results:

$$A\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C = D\ddot{u}_g \quad (2)$$

Phase I ($\theta < \beta$)

$$A = \frac{1}{3} + (1 + 4\gamma)(1 + 8\rho^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos \theta) + 4\rho \cos \alpha (\cos(\pm\alpha - \theta) - \cos \alpha))$$

$$B = (1 + \gamma) \frac{2\xi\omega_n}{R^2} + \dot{\theta}(1 + 4\gamma)(4\rho^2 \cos^2 \alpha \sin \theta + 2\rho \cos \alpha \sin(\pm\alpha - \theta))$$

$$C = \frac{g}{R}(1 + 2\gamma)(2\rho \cos \alpha \sin \theta + \sin(\pm\alpha - \theta))$$

$$D = -\frac{1}{R}(1 + 2\gamma)(\cos(\pm\alpha - \theta) - 2\rho \cos \alpha (\cos \theta - 1))$$

Phase II ($\theta \geq \beta$)

$$A = \frac{1}{3} + (1 + 4\gamma)(1 + 8\rho^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos \beta) + 4\rho \cos \alpha (\cos \alpha - \beta - \cos \alpha))$$

$$B = (1 + \gamma) \frac{2\xi \omega_n}{R^2}$$

$$C = \frac{g}{R}(1 + 2\gamma)(\sin(\pm\alpha - \theta) + 2\rho \cos \alpha (\sin \theta + \sin(\pm\beta - \theta)))$$

$$D = -\frac{1}{R}(1 + 2\gamma)(\cos(\pm\alpha - \theta) - 2\rho \cos \alpha (\cos \theta - \cos(\pm\beta - \theta)))$$

To have a pre-dimension parameter and define the device stiffness as an elastic oscillator, the dimensionless parameter $\rho = r/2H = r/2R\cos(\alpha)$ must be $\rho > 0.5$ which gives a positive stiffness in phase I. The stiffness of phase I, k_I , is defined in Eq. 3. It can be seen that the term r/R must be greater than 1.0. The derivation of this equation is presented in appendix 2.

$$k_I = \frac{1}{2R} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) Nm_c g \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \quad (3)$$

3. DYNAMIC RESPONSE TO INITIAL CONDITIONS

Considering the dimensions of conventional neoprene bearings, different device geometries are analyzed in free vibration. For a bridge with a span length of $L_c = 30$ m and a permanent beam load of $DL = 26.5$ KN/m, the mass results $m_b = 40.2$ KN-s²/m. For a total device mass $Nm_c = 0.14$ KN-s²/m and with $N = 9$ blocks, then $\gamma = 300$. Table 1 presents the parameters that define the geometry of each device. Each block has a total height equal to $2H$, the width of the flat base $2B$, the width of the convex part b , and the radius of curvature r . Two different values separated by commas are presented for each variable under study.

Table 1. Geometric parameters of the device model

$2B$ (cm)	$2H$ (cm)	b (cm)	r (cm)	γ
1, 5	40	10	21	300
1	30, 40	10	21	300
1	40	10, 15	21	300
1	40	10	21, 31	300
1	40	10	21	100, 300

Fig. 4 presents the dynamic response for each pair of values in free vibration. The rotation is shown in the vertical axis and the time is in the abscissas. It was considered a damping ratio $\zeta = 5\%$.

Fig. 4a shows the response for two values of the height $2H$. It can be appreciated that the duration of the first cycle is 2.5 times longer than the one with $2H = 30$ cm. On the other hand, for the case of $2H = 30$ cm, the device returns to the displaced configuration at $t = 2.5$ s, while for $2H = 40$ the motion continues until $t = 10$ s. Thus, by having a greater height, $2H$, the period of the device increases. Additionally, in the first cycle the amplitude is reduced to almost zero when $2H = 30$ cm while with $2H = 40$ cm the amplitude is reduced after 3 cycles in a larger time.

Fig. 4b shows the response for two values of the flat base $2B$. For $2B = 1.0$ cm, the duration of the first cycle is 1.6 times greater than with $2B = 5.0$ cm. On the other hand, in the interval from 0.0 to 10.0 seconds there are approximately 7 cycles if $2B = 1$ cm while for $2B = 5$ cm there are approximately 14 cycles. Then, by decreasing the width of the flat base, $2B$, the period of the device increases. For both values of $2B$, it is appreciated that after the first cycle the peak amplitude value is reduced almost linearly.

Fig. 4c shows the response for two values of the width of the convex part b . For an initial rotation $\theta_0 = 0.8$ rad the device with $b = 10$ cm overturns, while with $b = 15$ cm the device continues oscillating. This is because with $b = 10$ cm the value of $\tan(\alpha') = (2B+2b)/2H = 0.52$ and with $b = 15$ cm the value of $\tan(\alpha') = 0.77$, hence, the slenderness value is less than the first case resulting in a device with a higher rotation capacity. However, if the value of b is increased, the plan dimensions of the device increases.

Fig. 4d shows the response for two values of the radius of curvature r . It is observed that if the value of r is increased, the device has a shorter period. For example, in the first cycle the period is reduced by 32%. Therefore, having small values of r results in a longer period of the device.

Fig. 4e shows the response for two mass ratio values γ . It can be seen that the dynamic response is the same. Consequently, the device is similar to a pendulum frictional bearing where the period does not depend on the mass but only on its geometry. This can be defined by the height $2H$, the base $2B$, the radius of curvature r or the semidiagonal R of a block.

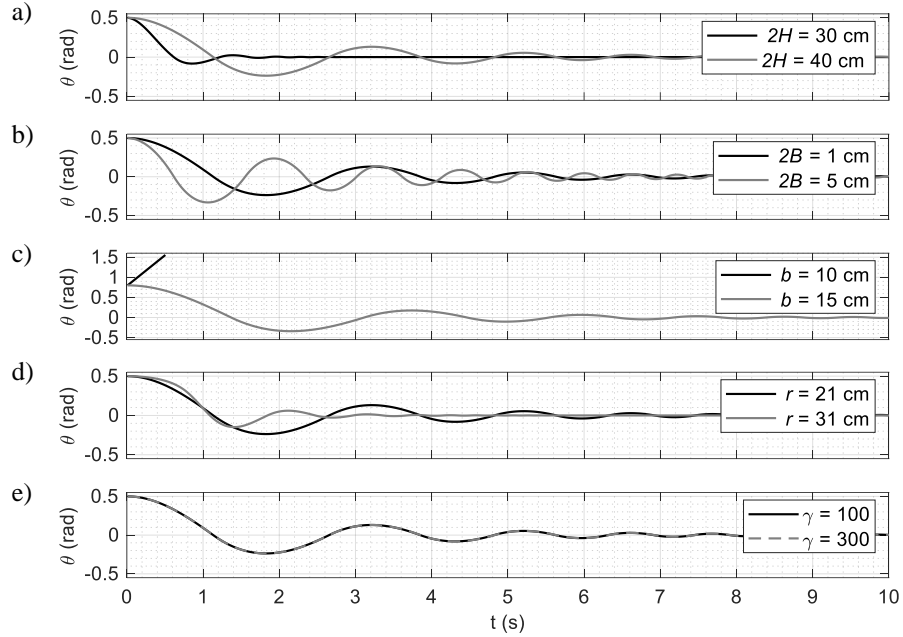


Fig. 4. Free vibration analysis

4. DYNAMIC RESPONSE TO FORCED VIBRATION

The dynamic response of a device with $T_d = 5.6$ s subjected to a sine-pulse loading with $T_g = 0.5$ s and $u_g/g = 0.54$, for two levels of damping is shown in Fig. 5. The contrast of period is $T_d/T_g = 11$.

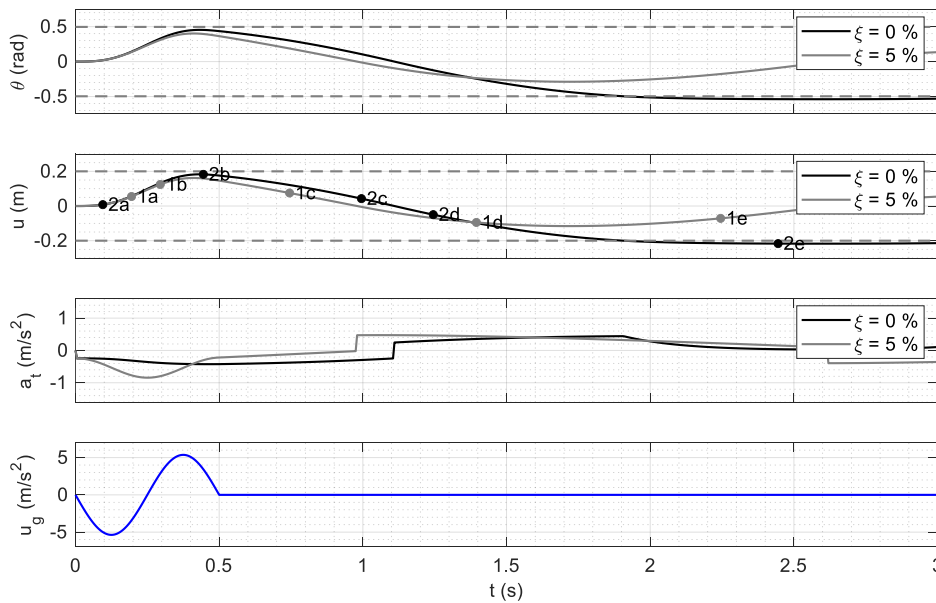


Fig. 5. Dynamic response to forced vibration.

The rotation, the horizontal displacement, the absolute acceleration, and the sine-pulse acceleration are presented. For the time interval studied, the rotation amplitude reduces by 50% when $t = 3.0$ s with a damping ratio $\zeta = 5\%$. With a damping ratio $\zeta = 0\%$, there is no reduction of the movement amplitude. Conversely, the absolute acceleration amplitude increases with a damping ratio $\zeta = 5\%$, albeit a shorter period of vibration.

If F denotes the force at the top level of the device resulted from the absolute acceleration, a_t , by the tributary permanent mass ($m_b + Nm_c$). The horizontal displacement, u , and the force F are shown in Fig. 2. Fig. 6 presents the force-displacement curve for each level of damping. It can be seen the sequence of the hysteric curve. For $\zeta = 0\%$, the device continues oscillating since there is no energy dissipation, the curve repeats itself during the whole interval of time. However, for $\zeta = 5\%$ the curve diminishes to zero.

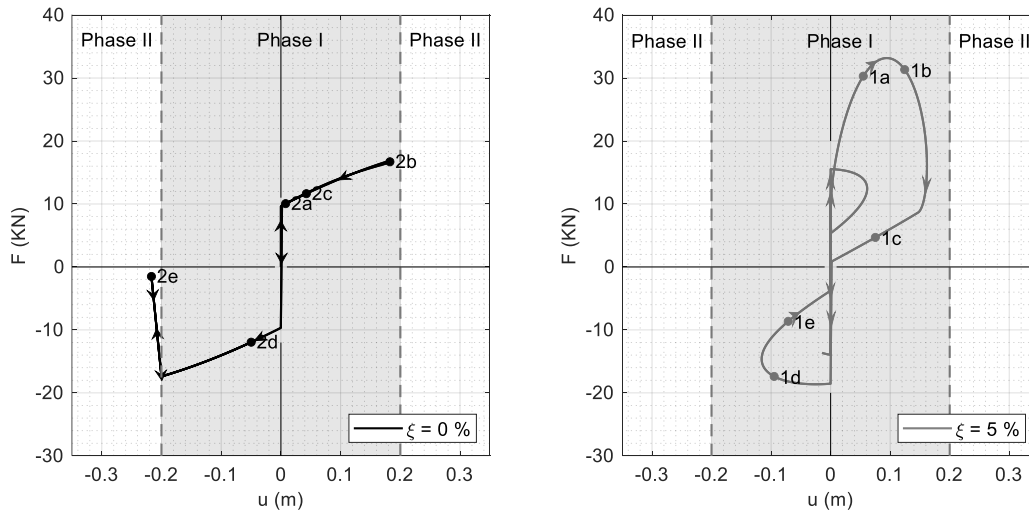


Fig. 6. Force-displacement curve

Fig. 7 shows the comparison for both levels of damping. It is observed that for $\zeta = 0\%$ there is a maximum displacement of 21 cm while for $\zeta = 5\%$ the displacements are reduced by 25%. On the other hand, with $\zeta = 5\%$ the force-displacement loop takes a characteristic flag shape while with $\zeta = 0\%$ the curve does not enclose any area since energy is not dissipated through impact nor viscous damping.

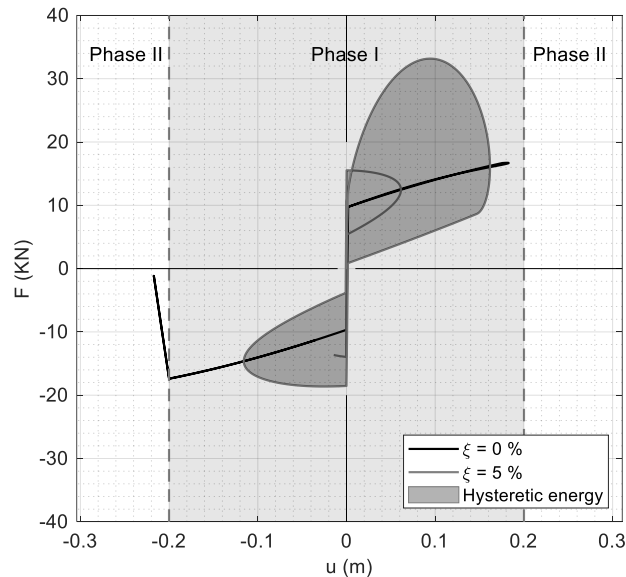


Fig. 7. Comparison of two levels of damping

5. RESPONSE TO GROUND-MOTION RECORDS

The effectiveness of the isolation device can be measured with numerical simulations wherein the bottom of the device is subjected to both a constant vertical load (DL) and a dynamic lateral load. Fig. 8 shows the location where the earthquake acceleration enters the system. The absolute superstructure acceleration, \ddot{u}_{device} , is computed at the device top level and the substructure acceleration, \ddot{u}_{input} , at the bottom device level. Since the substructure is stiffer than the device, it is assumed that the substructure acceleration is equal to the ground acceleration, $\ddot{u}_{input} = \ddot{u}_{ground}$.

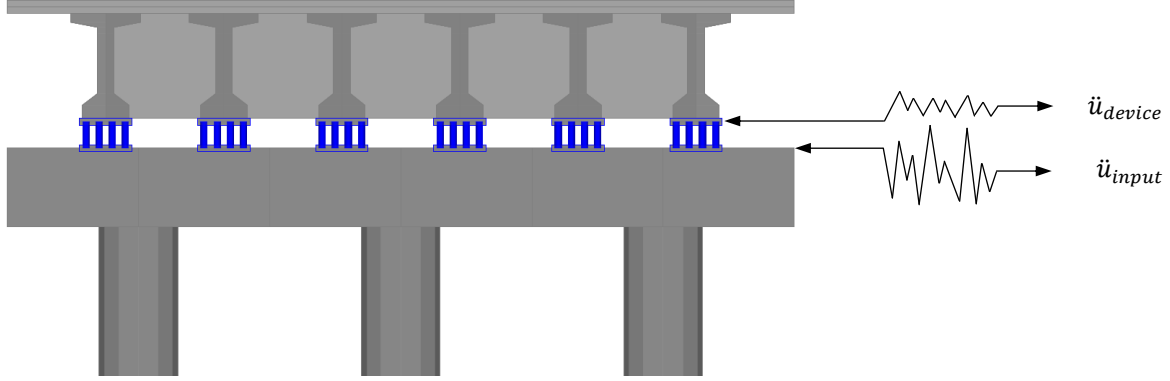


Fig. 8. Bridge acceleration

The effectiveness of the device is calculated by the isolation degree (ID), which is defined as:

$$ID_1 = 1 - \frac{PA_{device}}{PA_{input}} \quad (4)$$

$$ID_2 = 1 - \frac{AI_{device}}{AI_{input}} \quad (5)$$

In Eq. 4, PA_{device} is the peak acceleration at the top level of the device or bridge superstructure and PA_{input} is the peak substructure bridge acceleration. Eq. 5 is in terms of the Arias intensity (AI) which is a parameter that allows assessing the amount of energy contained in a ground motion record in a given time interval. In both equations, a value greater than zero means that the device works as a seismic isolation device, for example, $ID = 0.70$ means that it will isolate 70% of the input acceleration and 30% will be transmitted to the substructure. A negative value means that the device will amplify the seismic excitation that will be transmitted to the substructure, and it will not work as a seismic isolation device.

Ground motion of three stations were considered for this part of the study. Table 2 shows the data of each event and for each analyzed station. For each station, 5 ground motion records were studied to analyze the device for different frequency content, and one device geometry was defined. The highlighted ground motion identifies the record with maximum peak ground acceleration (PGA), among the records of the station. To obtain a dominant period of the ground motion, the ratio T_g defined by Rathje et al. [15] was used. The period T_g is an excellent simplified frequency content characterization parameter, being estimated with Eq. 6, where C_i are the Fourier amplitudes, and f_i represents the discrete Fourier transform frequencies between 0.25 and 20 Hz.

$$T_g = \frac{\sum C_i^2 / f_i}{\sum C_i^2} \quad (6)$$

With the period of the design ground motion record (maximum PGA), T_g , the period of the device, T_d , and the device geometry can be conveniently selected with Eq. 3. In the case of the proposed devices for each station, there are contrasts of periods (T_d/T_g) greater than 20. In comparison with the conventional neoprene bearings, it does not mean

that they will have large displacements, but rather a greater rotation capacity must be given so that the device does not overturn. For each record, the component with the maximum PGA was chosen.

Table 2. Ground motions used for the dynamic response analysis.

Station name	Year	Event location	Time record (s)	T_g (s)	PGA (g)
Caseta IDEI, CU	2011	Gral. Heliodoro C., Gro.	100	0.45	0.02
	2013	Tuliman, Guerrero	100	0.63	0.02
	2014-1	The coast of Guerrero	100	1.59	0.02
	2014-2	The coast of Guerrero	150	1.13	0.01
	2017	Puebla, Mexico	100	0.83	0.06
Caleta de Campos	1985	The coast of Michoacan	50	0.44	0.14
	1986	The coast of Michoacan	25	0.37	0.10
	1997-1	The coast of Michoacan	50	0.25	0.40
	1997-2	The coast of Michoacan	30	0.51	0.07
	2000	The coast of Michoacan	50	0.31	0.15
El Centro #11	1979-1	Imperial Valley-06	40	0.42	0.38
	1979-2	Imperial Valley-07	11	0.40	0.19
	2001-1	Gulf of California	88	0.82	0.02
	2001-2	Anza, CA	42	0.41	0.02
	2002	CA/Baja Border Area	90	0.30	0.13

Table 3 shows the geometric characteristics of the designed devices as well as the stiffness and the obtained period analytically (T_d). For the 3 devices, a damping ratio of $\zeta = 5\%$ was considered. Moreover, in column 7 it can be seen the minimum uplifting acceleration for each device. This value is proportional to the slenderness value equal to $\tan(\alpha)$ (column 4), which the motion will initiate once the input acceleration is greater than that value. These geometries were obtained considering a bridge with a span length $L_c = 30$ m, a permanent beam load of $DL = 26.5$ KN/m, $m_b = 40.2$ tf-s²/m, $Nm_c = 0.14$ KN-s₂/m, $N = 9$ blocks and $\gamma = 300$.

Table 3. Device geometries selected for each seismic station.

Station	$2H$ (cm)	$2B$ (cm)	$\tan \alpha$	b (cm)	r (cm)	$\ddot{u}_{g,up}$	k_I (KN/m)	T_d (s)
Caleta de Campos	40.0	0.8	0.020	10.0	21.0	0.020 g	24.5	8.03
Caseta IDEI, CU	45.0	0.5	0.011	10.0	23.0	0.011 g	21.7	8.51
El Centro	40.0	1.0	0.025	10.0	21.0	0.025 g	24.5	8.03

The isolation degree was computed for each station. For the Caseta IDEI station, a single seismic record activated the device. In the case of the Caleta de Campos station, the average for ID_1 is 0.77 and for ID_2 is 0.78, with a coefficient of variation (COV) of 13% and 11%, respectively. For the El Centro station, the average for ID_1 is 0.83 and for ID_2 is 0.77, with a COV of 5% and 8% respectively. For two seismic records, the proposed device was not activated.

Table 4 shows the obtained results for each device considering a scale factor (SF) to match the design PGA of each station, so all the records activate the device at all stations. This value is presented in column 3. Column 4 shows the maximum rotation, column 5 the maximum horizontal displacement, and columns 6 and 7 the degree of isolation in terms of PA and AI, respectively. For example, it can be seen that by applying the scale factor, the device is activated for the 5 records for the Caseta IDEI station. The average for ID_1 is 0.71 and for ID_2 is 0.80, giving a COV of 10% and 4%, respectively. In the case of the Caleta de Campos station, the average for ID_1 is 0.90 and for ID_2 is 0.91, with a COV of 4% and 1%, respectively. For the El Centro station, the average for ID_1 is 0.89 and for ID_2 is 0.85, with a COV of 2% and 5%, respectively.

Table 4. Results of the devices.

Station name	Year	SF	u_{max} (cm)	ID-1	ID-2
Caseta IDEI, CU	2011	2.87	2.1	0.78	0.82
	2013	2.92	2.4	0.76	0.83
	2014-1	4.51	15.9	0.58	0.75
	2014-2	4.98	8.5	0.70	0.78
	2017	1.00	6.11	0.72	0.82
Caleta de Campos	1985	2.89	20.8	0.83	0.91
	1986	4.04	10.7	0.90	0.90
	1997-1	1.00	5.54	0.92	0.94
	1997-2	5.94	5.3	0.90	0.91
	2000	2.63	6.1	0.92	0.92
El Centro #11	1979-1	1.00	16.94	0.88	0.84
	1979-2	1.97	3.2	0.89	0.91
	2001-1	17.25	15.2	0.86	0.78
	2001-2	25.13	6.1	0.91	0.85
	2002	2.88	3.4	0.92	0.85

Fig. 9 shows the time history results for the ground motion of El Centro 1979-1. The rotation, the horizontal displacement, the absolute acceleration, and the seismic record to which the device was subjected are also plotted. If β is the rotation limit between phase I and II, it is observed that once the tilt angle θ is greater than β , the motion is rocking. This behavior can be seen in Fig. 9a, where a displacement greater than $u = u(\beta)$ causes the device to change the phase. Moreover, it can be seen in Fig. 9b that most of the dissipated energy occurs in phase I.

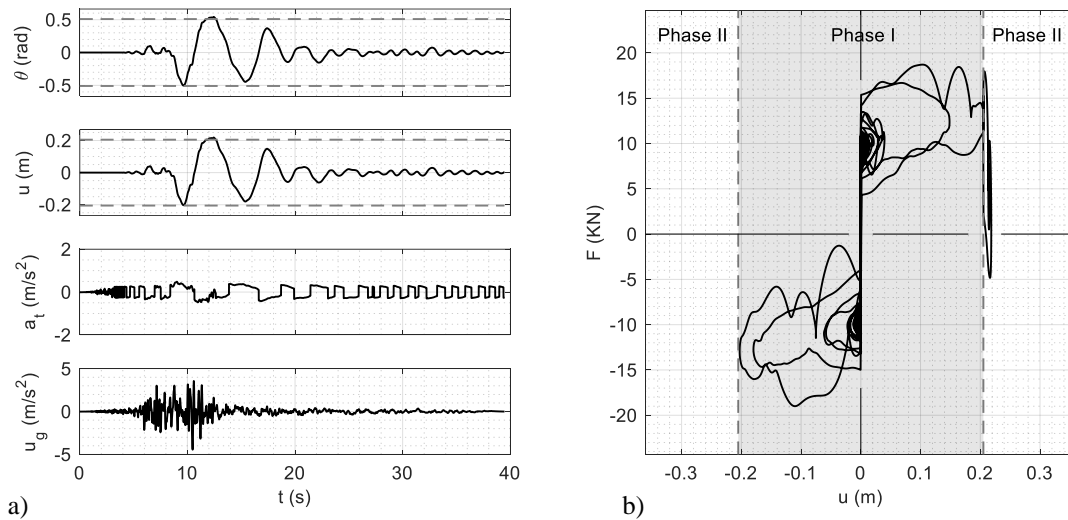


Fig. 9. Dynamic results for the El Centro #11 1979-1

6. BRIDGE SYSTEM RESPONSE COMPARISON: NEOPRENE BEARINGS VS ROCKING DEVICE

For the Caleta de Campos record 1997-1, the results are compared with a conventional neoprene bearing in terms of the isolation degree and the maximum horizontal displacement. The conventional isolator was designed according to the AASHTO Specification [16] to ensure its stability and to obtain its stiffness. The conventional isolator has a

stiffness $k_n = 451.2$ KN/m and a damping ratio of 4% while the proposed isolator has a stiffness $k_l = 24.5$ KN/m and a damping ratio of 5%. The contrasts of periods (T_d/T_g) are 7.5 and 32, respectively.

Table 5 presents the comparison of both isolators for the same ground motion. For the neoprene bearing, an average of 0.65 is obtained for the ID_1 and for the ID_2 is 0.37, and a COV equals to 35% and 157%, respectively. On average for the rocking device, ID_1 is 0.77, for the ID_2 is 0.78 and the COV is 13% and 11%, respectively. In terms of the horizontal displacement for the design ground motion it is essentially the same. The maximum displacement for the neoprene isolator is 8.7 cm and for the rocking device the displacement is 25% smaller, both displacements correspond to the 1985 ground motion.

Table 5. Comparison of peak displacement and isolation degrees between neoprene and the rocking device isolators

Ground motion	PGA (g)	Neoprene isolator			Rocking device		
		u_{max} (cm)	ID_1	ID_2	u_{max} (cm)	ID_1	ID_2
1985	0.14	8.7	0.23	-0.69	6.5	0.76	0.48
1986	0.10	3.5	0.58	0.20	2.6	0.73	0.45
1997-1	0.40	5.4	0.84	0.87	5.5	0.92	0.94
1997-2	0.07	1.3	0.78	0.63	1.9	0.63	0.16
2000	0.15	2.6	0.80	0.84	2.2	0.84	0.74

Fig. 10 presents the comparison of the computed absolute acceleration for the conventional and the rocking isolator. For the rocking device, the period is greater in the interval from 7 to 25 seconds than the interval from 25 to 35.0 seconds when the input acceleration is lower the device period is decreased.

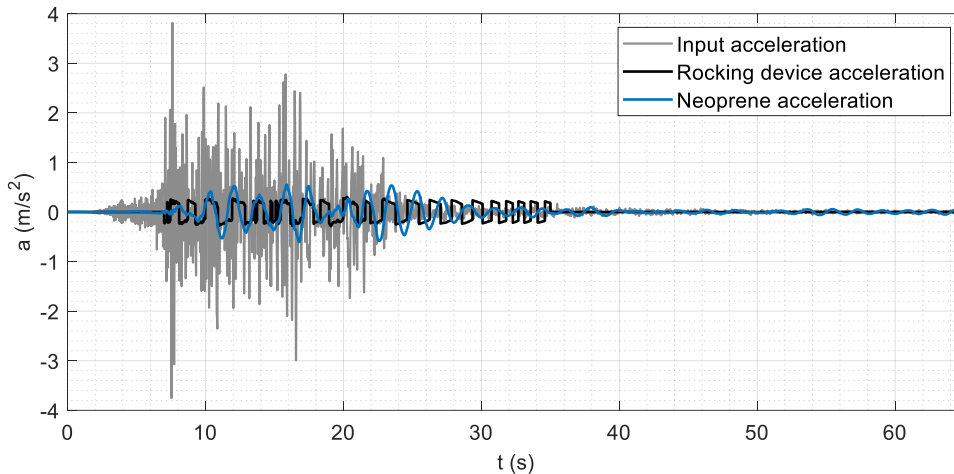


Fig. 10. Comparison of the obtained device accelerations

In case of the failure of either the neoprene bearings or the rocking isolator, there are two scenarios. For the neoprene isolator, once the displacement is higher than its lateral displacement capacity, the neoprene fails. This failure consists of the combination of the axial load, rotation, and shear, consequently the superstructure is supported directly on the pier cap and the lateral seismic restrainers are the only elements that prevent the lateral displacement of the entire superstructure. However, there are no additional elements that can uncouple the movement of the superstructure from the horizontal components of the ground motion. For the rocking device, once the rotation capacity (lateral displacement) is exceeded there are restrainers on each side of the device. These elements prevent the overturning. Moreover, as mentioned in chapter 2, the rocking device along with the neoprene bearings would also be placed for service conditions (temperature changes, braking forces, and low intensity earthquakes). These additional elements can uncouple the movement and even the lateral seismic restrainers prevent the excessive lateral displacement of the superstructure and continue working as an isolator.

7. CONCLUSIONS

An analytical model of a seismic isolation device for bridges based on rocking motion was proposed. This device consists of an arrangement of blocks with a convex extended base supporting a rigid plate and with an equivalent linear viscous damping ratio of 5%. Free vibration and forced vibration (harmonic and ground motion records) analysis were performed for different geometric configurations, varying the geometry of the device (height, width, dimension of the convex part, and the radius of curvature). The isolation efficiency of the device was computed with the isolation-degree coefficient (ID) defined as the ratio between the output and input responses. The ID was computed using the peak accelerations (PA) and the Arias intensities (IA). Finally, the behavior of one of the designed devices was compared with a conventional neoprene isolator.

As a result of the free vibration analysis, it was found that the vibration period depends on the geometry of the device. The parameter γ (mass ratio) does not represent a significant change in the dynamic response of the device. Consequently, the period is independent of the mass on the device. For a larger value of the convex part, b , the rotation or displacement capacity is increased without increasing the value of the minimum uplifting acceleration required, $\ddot{u}_{g,up}$, to initiate the motion. However, increasing b results in more robust devices since the total width is equal to $2B' = 2B + 2b$.

From the forced vibration analysis with sine-pulses and the sets of recorded ground motions, modeling the viscous damping with a damping ratio $\zeta = 5\%$ allows to describe the decreasing response as an elastic oscillator once the energy dissipation through impact is neglected and k_I remains positive with $r/R > 1$. This damping ratio is similar to the neoprene used conventionally. Besides, the effectiveness increased with small values of the blocks slenderness, which is defined as $\tan(\alpha) = 2B/2H$. The highest degree of isolation, ID , was obtained for those records with the highest PGA. Moreover, when scaling the records, it was obtained an isolation degree greater than 70% with a coefficient of variation (COV) less than 10%. Although large values of the contrast of periods, T_d/T_g , were obtained for the designed rocking devices, this does not mean that there are excessive displacements like those ones of an elastic oscillator. This was observed when comparing the neoprene isolator with the rocking one.

REFERENCES

1. Buckle I, Constantinou M, Dicleli M & Ghasemi H. *Seismic isolation of highway bridges*. Federal Highway Administration. 2006.
2. Vassiliou MF, Broccardo M, Cengiz C, Dietz M, Dihoru L, Gunay, Mosalam KM, Mylonakis G, Sextos A & Stojadinović B. Shake table testing of a rocking podium: Results of a blind prediction contest. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* 2020; 50(4):1043-1062. <https://doi.org/10.1002/eqe.3386>
3. Semenov S. Seismic isolation reliable protection against earthquakes. YouTube. 2017. <https://www.youtube.com/watch?v=E2n-umGRH4E>
4. Ríos-García G & Benavent-Climent A. New rocking column with control of negative stiffness displacement range and its application to RC frames. *Engineering Structures.* 2020; 206(2020):1-13. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.110133>
5. Makris N. Seismic isolation: Early history. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* 2018; 48(2):269-283. <https://doi.org/10.1002/eqe.3124>
6. Makris N & Vassiliou MF. *Seismic Assessment, Behavior and Retrofit of Heritage Buildings and Monuments: The dynamics of the rocking frame*. Springer Cham. 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-16130-3_2
7. Thiers-Moggia R & Málaga-Chuquitaype C. Seismic protection of rocking structures with inerters. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* 2018; 48(5):528-547. <https://doi.org/10.1002/eqe.3147>
8. Bachmann JA, Vassiliou MF & Stojadinovic B. Rolling and rocking of rigid uplifting structures. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* 2019; 48(14):1556-1574. <https://doi.org/10.1002/eqe.3213>
9. Reggiani M. N., Vassiliou M. F., Mouzakis H. & Badogiannis E. Shaking table tests of a resilient bridge system with precast reinforced concrete columns equipped with springs. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* 2021; 51(1):213-239. <https://doi.org/10.1002/eqe.3563>
10. He X, Unjoh S, Yamazaki S & Noro T. Development of a bidirectional rocking isolation bearing system (Bi-RIBS) to control excessive seismic response of bridge structures. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* 2021; 52(10):3074-3096. <https://doi.org/10.1002/eqe.3913>
11. Comisión Federal de Electricidad (CFE). *Manual de Diseño de Obras Civiles: Capítulo C.1.3. Diseño por sismo – Comentarios*. Instituto de Investigaciones Eléctricas. 2015.
12. Housner GW. The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America.* 1963; 53(2):404-417. <https://doi.org/10.1785/BSSA0530020403>

13. Zhang Y, Thiers-Moggia R & Málaga-Chuquitaype C. Impact and clutch nonlinearities in the seismic response of inerto-rocking systems. *Bull Earthquake Eng.* 2022; 21:1713–1745. <https://doi.org/10.1007/s10518-022-01355-6>
14. Clough RW & Penzien J. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill. 1993.
15. Rathje EM, Abrahamson NA and Bray JD. Simplified frequency content estimates of earthquake ground motions. *J. Geotech. Eng.* 1998;124(2):150–159. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1998\)124:2\(150\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(1998)124:2(150))
16. American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO). *LRFD Bridge design specifications*. 9th Ed.; 2020.

APPENDIX 1: Derivation of the equation of motion

The equations of motion of the system are derived by applying the Lagrange equations [15] to the degrees of freedom of the dynamic system.

For each degree of freedom of the system with generalized coordinates, q_n , it is possible to formulate the Lagrangian $L = T - V$ where T is the kinetic energy and V is the potential energy. The potential energy depends on the relative position of various parts of a system. A spring has more potential energy when it is stretched or compressed. While kinetic energy is a form of energy that an object or a particle has due to its motion, and it depends not only on its motion but also on its mass. The type of movement can be translational (movement along a path from one place to another) or rotational around an axis or any combination of movements.

The Lagrangian is a function of the generalized coordinates q_n and the generalized velocities:

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (\text{A.1})$$

where n is the number of degrees of freedom.

The Lagrange equations are:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} + \frac{dD}{dq_n} = Q_n \quad (\text{A.2})$$

where Q_n are the generalized external forces and q_n the generalized coordinates.

The generalized coordinates of a mechanical system are the group of parameters with which the configuration of the system can be completely defined. They are called generalized because they are not restricted to Cartesian coordinates or even are not required to be measured from an inertial reference frame. On the other hand, generalized coordinates are used to express the kinetic energy and potential energy of rigid bodies that form a dynamic system and must be calculated with respect to an inertial reference frame. Therefore, generalized coordinates must be able to express the velocity and displacement of rigid bodies with respect to an inertial frame of reference.

To obtain the equations of motion of a dynamic system using Lagrange's equations, the number of degrees of freedom must be determined and then the group of generalized coordinates which form a complete and independent set must be chosen, that is, they are capable of locate all parts of a system at the same time and when at least one of the coordinates is fixed the others maintain a continuous range of values for that coordinate.

The selection of a set of generalized coordinates and the evaluation of the virtual displacements in terms of those quantities are major aspects of the Lagrangian approach to the derivation of equations of motion for a system. It is necessary to recognize which parameters are appropriate for the kinematic description. By doing so, we create the model on which the rest of the analysis will be based. The kinematics phase of the formulation is essentially complete when the physical velocities and virtual displacements have been related to the generalized coordinates.

Once each non-conservative force has been identified, the virtual work associated with the virtual displacement for a generalized coordinate is calculated as

$$Q_n \delta q_n = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n} \right) \delta q_n \quad (\text{A.3})$$

where F_i is the force vector applied at point i and r_i is the position vector of point i , measured with respect to the inertial reference frame. The index n corresponds to each generalized coordinate. The sum over i considers that it could be more than one force, F_i , which does work when a virtual displacement δq_n occurs. So that is the total of all contributions that form the generalized force, Q_n .

Forces that are not included in the calculation of potential energy must be expressed as generalized nonconservative forces in Lagrange's formulation. Examples include dissipative forces from dampers and external excitations as the ground motion record.

Lagrange's equations give n equations of motion for the n degrees of freedom of the system. In terms of T and V one obtains the following:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} + \frac{dD}{dq_n} = Q_n \quad (\text{A.4})$$

For mechanical systems, potential energy is not a function of time or velocity, so the second term of the above equation is zero.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} + \frac{dD}{dq_n} = Q_n \quad (\text{A.5})$$

The rocking device is formed by N rigid blocks with mass m_c on which rests a rigid support plate with a mass value m_b corresponding to the tributary discharge of a girder.

The made assumptions for the dynamic system are as follows:

- The block is rigid and homogeneous.
- The contact between the block and the surface is pointwise.
- The block is constrained not to roll out of its initial position.
- The block is always in contact with the support (contact force is always in compression).
- The friction between the block and the surface is large enough to prevent sliding.
- The support surface is rigid.
- Ground motion acceleration is considered in one direction.
- The damping mechanism is viscous damping and dissipation of energy through impact is neglected.

The motion of the system is described by the angle $\theta(t)$. Therefore, the equation is derived from:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}(t)} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta(t)} + \frac{\partial V}{\partial \theta(t)} + \frac{dD}{d\dot{\theta}(t)} = Q_\theta \quad (\text{A.6})$$

The potential energy, V , of the top plate and blocks is

$$V = g \left(m_b + \frac{Nm_c}{2} \right) v \quad (\text{A.7})$$

where g is the value of gravitational acceleration and v is the vertical displacement.

The kinetic energy, T , of the blocks and the top plate is

$$T = \frac{1}{2} N I_{cm} \dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2} \left(m_b + \frac{1}{4} N m_c \right) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \quad (\text{A.8})$$

where I_{cm} is the rotational inertia of the block with respect to its center of mass and v and u are the vertical and horizontal displacements, respectively.

Q is the non-conservative generalized force due to ground motion

$$Q_\theta = - \left(m_b + \frac{Nm_c}{2} \right) \dot{u}_g \frac{du}{d\theta} \quad (\text{A.9})$$

D is the dissipated energy that is related to the angular velocity of the system (Rayleigh's dissipation function) and considered as a linear viscous damper.

$$D = \frac{1}{2} c \dot{\theta}^2 \quad (\text{A.10})$$

where c is the damping coefficient, $c = 2(m_b + Nm_c)\zeta\omega_n$

The monitoring of the response at the top plate depends on the geometry of the rigid blocks, so Phase I corresponds to values of $\theta < \beta$ and Phase II for values of $\theta \geq \beta$.

The formulation of the equations of motion by the general Lagrange's equations procedure is illustrated for the rigid-body assemblage shown in Fig. 11.

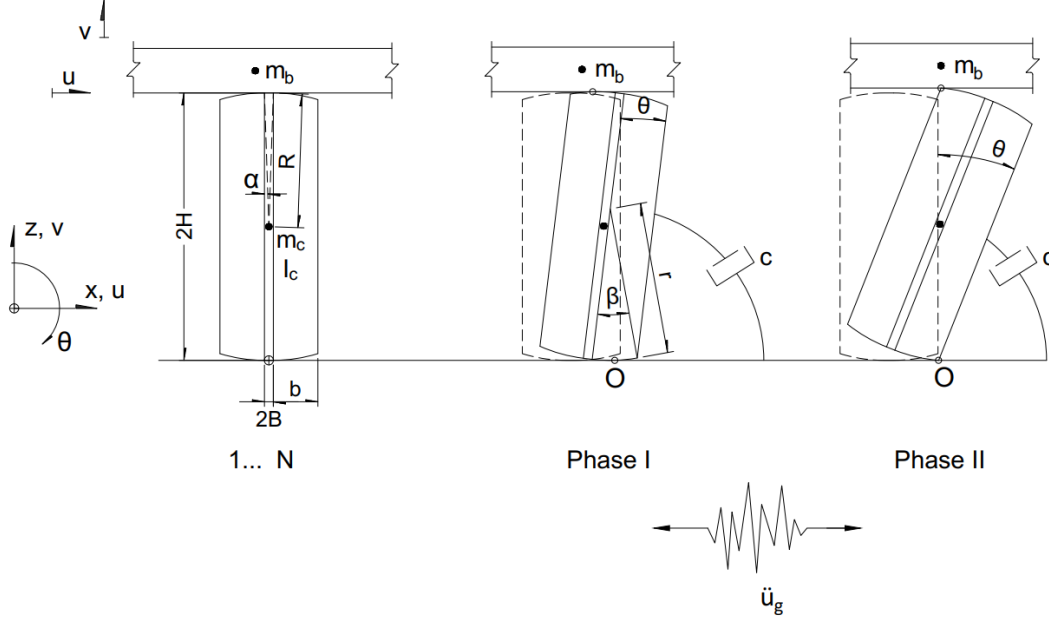


Fig. 11. Controlled-rocking system rigid-body assemblage.

Phase I ($\theta < \beta$)

Horizontal response

$$u = 2(R[\sin(\pm\alpha) - \sin(\pm\alpha - \theta)] + r(\theta - \sin \theta)) \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{u} = 2(R \cos(\pm\alpha - \theta) + r(1 - \cos \theta))\dot{\theta} \quad (\text{A.12})$$

$$\ddot{u} = 2(R[\sin(\pm\alpha - \theta)\dot{\theta}^2 + \cos(\pm\alpha - \theta)\ddot{\theta}] + r(\sin \theta \dot{\theta}^2 + (1 - \cos \theta)\ddot{\theta})) \quad (\text{A.13})$$

Vertical response

$$v = 2(R[\cos(\pm\alpha - \theta) - \cos(\pm\alpha)] + r(1 - \cos \theta)) \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{v} = 2(R \sin(\pm\alpha - \theta) + r \sin \theta)\dot{\theta} \quad (\text{A.15})$$

$$\ddot{v} = 2(R[\sin(\pm\alpha - \theta)\ddot{\theta} - \cos(\pm\alpha - \theta)\dot{\theta}^2] + r(\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta})) \quad (\text{A.16})$$

Phase II ($\theta \geq \beta$)

Horizontal response

$$u = 2(R[\sin(\pm\alpha) - \sin(\pm\alpha - \theta)] + r[\pm\beta - \sin(\pm\beta - \theta) - \sin \theta]) \quad (\text{A.17})$$

$$\dot{u} = 2(R \cos(\pm\alpha - \theta) - r[\cos \theta - \cos(\pm\beta - \theta)])\dot{\theta} \quad (\text{A.18})$$

$$\ddot{u} = 2 \left(\begin{array}{l} R[\sin(\pm\alpha - \theta) \dot{\theta}^2 + \cos(\pm\alpha - \theta) \ddot{\theta}] \\ + r((\sin\theta + \sin(\pm\beta - \theta))\dot{\theta}^2 + (\cos(\pm\beta - \theta) - \cos\theta)\ddot{\theta}) \end{array} \right) \quad (\text{A.19})$$

Vertical response

$$v = 2(R[\cos(\pm\alpha - \theta) - \cos(\pm\alpha)] + r[\cos(\pm\beta - \theta) - \cos(\theta)]) \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{v} = 2(R \sin(\pm\alpha - \theta) + r(\sin\theta + \sin(\pm\beta - \theta)))\dot{\theta} \quad (\text{A.21})$$

$$\ddot{v} = 2 \left(\begin{array}{l} R[\sin(\pm\alpha - \theta) \ddot{\theta} - \cos(\pm\alpha - \theta) \dot{\theta}^2] \\ + r((\sin\theta + \sin(\pm\beta - \theta))\ddot{\theta} + (\cos\theta - \cos(\pm\beta - \theta))\dot{\theta}^2) \end{array} \right) \quad (\text{A.22})$$

Applying Lagrange's equations, the dynamic equilibrium equation is obtained for each phase of the motion.

Phase I ($\theta < \beta$)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}R^2Nm_c + (4m_b + Nm_c) \left(R^2 + 2Rr(\sin\theta \sin(\pm\alpha - \theta) + \cos(\pm\alpha - \theta)(1 - \cos\theta)) + 2r^2(1 - \cos\theta) \right) \right) \ddot{\theta} \\ & + (4m_b + Nm_c)(r^2 \sin\theta + Rr \sin(\pm\alpha - \theta))\dot{\theta}^2 \\ & + c\dot{\theta} \\ & + g \left(m_b + \frac{1}{2}Nm_c \right) (2R \sin(\pm\alpha - \theta) + 2r \sin\theta) \\ & = -\ddot{u}_g \left(m_b + \frac{1}{2}Nm_c \right) (2R \cos(\pm\alpha - \theta) - 2r(\cos\theta - 1)) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

with $\gamma = \frac{m_b}{Nm_c}$, $\rho = \frac{r}{2R \cos\alpha}$ and $c = 2(m_b + Nm_c)\xi\omega_n = 2(1 + \gamma)\xi\omega_n$ the Eq. 23 becomes

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} \left(\frac{1}{3} + (1 + 4\gamma)(1 + 8\rho^2 \cos^2\alpha (1 - \cos\theta) + 4\rho \cos\alpha (\cos(\pm\alpha - \theta) - \cos\alpha)) \right) = \\ & -\dot{\theta}^2(1 + 4\gamma)(4\rho^2 \cos^2\alpha \sin\theta + 2\rho \cos\alpha \sin(\pm\alpha - \theta)) \\ & -\dot{\theta}(1 + \gamma) \frac{2\xi\omega_n}{R^2} \\ & -\frac{g}{R} (1 + 2\gamma)(2\rho \cos\alpha \sin\theta + \sin(\pm\alpha - \theta)) \\ & -\frac{\ddot{u}_g}{R} (1 + 2\gamma)(\cos(\pm\alpha - \theta) - 2\rho \cos\alpha (\cos\theta - 1)) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Phase II ($\theta \geq \beta$)

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{3} R^2 N m_c + (4m_b + N m_c) (R^2 + 2Rr(\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha) + 2r^2(1 - \cos \beta)) \right) \ddot{\theta} \\
& + c \dot{\theta} \\
& + g \left(m_b + \frac{1}{2} N m_c \right) (2R \sin(\pm \alpha - \theta) + 2r(\sin \theta + \sin(\pm \beta - \theta))) \\
& = -\ddot{u}_g \left(m_b + \frac{1}{2} N m_c \right) (2R \cos(\pm \alpha - \theta) - 2r(\cos \theta - \cos(\pm \beta - \theta))) \tag{A.25}
\end{aligned}$$

with $\gamma = \frac{m_b}{N m_c}$, $\rho = \frac{r}{2R \cos \alpha}$ and $c = 2(m_b + N m_c) \xi \omega_n = 2(1 + \gamma) \xi \omega_n$ the Eq. 25 becomes

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta} \left(\frac{1}{3} + (1 + 4\gamma)(1 + 8\rho^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos \beta) + 4\rho \cos \alpha (\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha)) \right) = \\
& -\dot{\theta}(1 + \gamma) \frac{2\xi \omega_n}{R^2} \\
& - \frac{g}{R} (1 + 2\gamma) (\sin(\pm \alpha - \theta) + 2\rho \cos \alpha (\sin \theta + \sin(\pm \beta - \theta))) \\
& - \frac{\ddot{u}_g}{R} (1 + 2\gamma) (\cos(\pm \alpha - \theta) - 2\rho \cos \alpha (\cos \theta - \cos(\pm \beta - \theta))) \tag{A.26}
\end{aligned}$$

Eq. A.24 and A.26 are the equations of motion for the system in each phase and for the degree of freedom θ .

APPENDIX 2: Derivation of the force–displacement response of the system

If a structure is in static equilibrium, using the virtual work principle, the equations of static equilibrium can be derived by calculating the virtual work done during an infinitesimal displacement. So, this principle is that the work done by all forces during a virtual displacement is zero. In this way, the relationship between externally applied forces and internal forces is directly deduced. Fig. 12 shows the lateral load-displacement response of the system when subjected to a lateral load F at the level of the upper plate. This is derived as follows:

$$F \cdot \delta u - \left(m_b g + \frac{1}{2} N m_c g \right) \cdot \delta v = 0 \quad (\text{A.27})$$

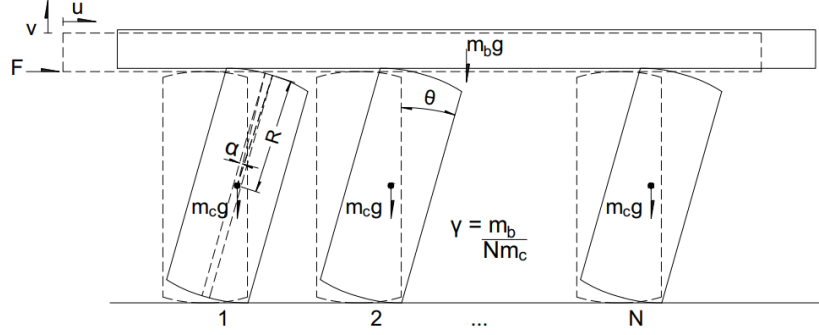


Fig. 12. System subjected to a lateral force F .

Assuming that there is no sliding of the rigid blocks, the virtual work of the horizontal (δu) and vertical (δv) displacements are:

$$\delta u = \frac{du}{d\theta} \delta\theta \quad (\text{A.28})$$

$$\delta v = \frac{dv}{d\theta} \delta\theta \quad (\text{A.29})$$

Phase I

$$\delta u = 2(R \cos(\alpha - \theta) - r(\cos \theta - 1))\delta\theta \quad (\text{A.30})$$

$$\delta v = 2(R \sin(\alpha - \theta) + r \sin \theta)\delta\theta \quad (\text{A.31})$$

$$2F(R \cos(\alpha - \theta) - r(\cos \theta - 1)) - 2\left(m_b g + \frac{1}{2} N m_c g\right)(R \sin(\alpha - \theta) + r \sin \theta) = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$F = \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) N m_c g \frac{R \sin(\alpha - \theta) + r \sin \theta}{R \cos(\alpha - \theta) + r(1 - \cos \theta)} \quad (\text{A.33})$$

The stiffness k can be computed via the derivation of

$$k = \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (\text{A.34})$$

$$k_I = \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) N m_c g \left[\frac{r \cos \theta - R \cos(\alpha - \theta)}{R \cos(\alpha - \theta) + r(1 - \cos \theta)} - \left(\frac{r \sin \theta + R \sin(\alpha - \theta)}{R \cos(\alpha - \theta) + r(1 - \cos \theta)} \right)^2 \right] \quad (\text{A.35})$$

Linearizing for α and θ the Eq. A35 simplifies to

$$k_I = \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) N m_c g \left(\frac{r}{R} - 1\right) \quad (\text{A.36})$$

and in KN/m units Eq. A36 becomes

$$k_I = \frac{1}{2R} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) N m_c g \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \quad (\text{A.37})$$

Eq. A37 is the stiffness of the system when the motion has initiated, and for values $r/R > 0$ one will have a positive stiffness value the oscillator will exhibit an effective period and respond as an elastic oscillator.

Phase II

$$\delta u = 2(R \cos(\alpha - \theta) - r(\cos \theta - \cos(\beta - \theta))) \delta \theta \quad (\text{A.38})$$

$$\delta v = 2(R \sin(\alpha - \theta) + r(\sin \theta + \sin(\beta - \theta))) \delta \theta \quad (\text{A.39})$$

$$2F(R \cos(\alpha - \theta) - r(\cos \theta - \cos(\beta - \theta))) - 2 \left(m_s g + \frac{1}{2} N m_c g \right) (R \sin(\alpha - \theta) + r(\sin \theta + \sin(\beta - \theta))) = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$F = \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) N m_c g \frac{R \sin(\alpha - \theta) + r(\sin \theta + \sin(\beta - \theta))}{R \cos(\alpha - \theta) - r(\cos \theta - \cos(\beta - \theta))} \quad (\text{A.41})$$

The stiffness k_{II} can be computed applying Eq. A34

$$k_{II} = \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) N m_c g \left[- \left(\frac{r(\sin \theta + \sin(\beta - \theta)) + R \sin(\alpha - \theta)}{R \cos(\alpha - \theta) - r(\cos \theta - \cos(\beta - \theta))} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{A.42})$$

Linearizing for α and θ the Eq. A42 simplifies to

$$k_{II} = \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) N m_c g (-1) \quad (\text{A.43})$$

Eq. A43 is the stiffness of the system when starts rocking, and regardless of the geometry of the system the device has a negative value. This is illustrated in Fig. 13.

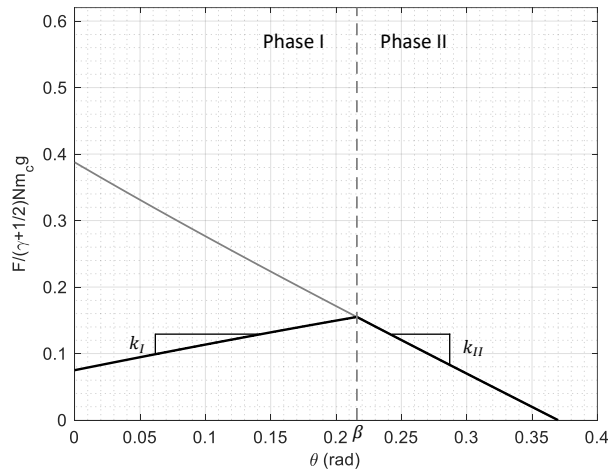


Fig. 13. Static nonlinear pushover response curves