



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO**



FACULTAD DE CIENCIAS

**SOLITONES NO AUTÓNOMOS DE LA ECUACIÓN NO
LINEAL DE SCHRÖDINGER DE CUARTO ORDEN
CON POTENCIALES EXTERNOS.**

MODALIDAD

TESIS POR ARTICULOS ESPECIALIZADOS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

FÍS. ISAAC MARGARITO MÉNDEZ ZÚÑIGA

DIRECTORES DE TESIS:

TUTORA ACADÉMICA: Dra. TATYANA BELYAEVA LEONIDOVNA

TUTOR ADJUNTO: Dr. MÁXIMO AUGUSTO AGÜERO GRANADOS

TUTOR ADJUNTO: Dr. VLADIMIR SERKIN

Índice general

Índice general	2
Resumen	4
1 Introducción	5
1.1. Ecuaciones no lineales y los sistemas integrables	5
1.2. Sistemas Integrables	6
1.3. Jerarquía AKNS	14
2 La Ecuación no lineal de Schrödinger	19
2.1. La Ecuación no lineal de Schrödinger	19
2.2. La jerarquía AKNS para la ecuación no lineal de Schrödinger	20
2.3. Soluciones solitónicas de la ecuación no lineal de Schrödinger	24
3 La Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden	30
3.1. La Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden	30
3.2. Soluciones para la Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden	31
3.3. Discusión sobre las soluciones para la NLSE y la NLSE de cuarto orden	35
4 La Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden no autónoma completamente integrable	38
4.1. Ecuaciones tipo NLSE de ordenes mayores no autónomas	38
4.2. La jerarquía AKNS para la Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden no autónoma completamente integrable	39
4.3. Solitones no autónomos de la Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden con potenciales externos	51

4.4. Soluciones tipo respirador para el modelo LPDE generalizado	61
5 Conclusiones	66
A Códigos de Programas para calculo y gráficas de n-solitones	68
B Articulo Publicado	75
Bibliografía	87

Resumen

Comenzamos con una breve introducción a los sistemas integrables y explicamos cómo, mediante la teoría de la jerarquía AKNS, es posible construir ecuaciones completamente integrables en el sentido de Lax. A partir de la jerarquía AKNS, construimos la ecuación no lineal de Schrödinger y obtenemos soluciones solitónicas para dicha ecuación. Consideramos una generalización de la ecuación no lineal de Schrödinger mediante la adición de un término de dispersión de cuarto orden. Estudiamos las condiciones necesarias para hallar soluciones a esta ecuación, así como las razones por las cuales esta ecuación no es completamente integrable en el sentido de Lax. Finalmente, encontramos un modelo integrable en el sentido de Lax en el caso no-isoespectral para una ecuación tipo Schrödinger no lineal de cuarto orden. Estudiamos un caso particular de esta ecuación cuando la dispersión y los potenciales externos son únicamente de orden par y $D_3 = R_3 = 0$, obteniendo así el modelo generalizado de Lakshmanan–Porsezian–Daniel. Encontramos las soluciones n -solitónicas y de tipo "breather" para el modelo, así como las condiciones necesarias para que este tipo de soluciones se den.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Ecuaciones no lineales y los sistemas integrables

La mayoría de fenómenos que se observan en diversas áreas de la ciencias (Física, Economía, Biología, etc.) son no lineales [1]. Debido a que el principio de superposición no se aplica en dichos sistemas, encontrar soluciones analíticas suele ser complicado, por lo que se recurre a técnicas numéricas o métodos perturbativos para encontrar soluciones aproximadas. Sin embargo, existe un conjunto de sistemas no lineales que presenta un tipo de solución particular, la cual, en algunos casos, puede ser encontrada de manera analítica. Estas soluciones, llamados solitones, tienen la característica de propagarse manteniendo su forma incluso después de una colisión con otro soliton (véase la Figura 1.1). Los solitones pueden aparecer en una amplia variedad de fenómenos físicos, como en la descripción de un fluido de poca profundidad [2], en una fibra óptica [3], en un condensado de Bose Einstein [4], en un plasma [5] entre muchos otros [6–9, 11]. Los sistemas más conocidos que cuentan con soluciones de este tipo en 1+1 dimensiones son las ecuaciones de Korteweg de Vries (KdV), Sine-Gordon, y la ecuación no lineal Schrödinger (NLSE). Estos sistemas suelen denominarse integrables en el sentido de Lax [11], ya que pueden ser representados en términos de un sistema de ecuaciones lineales mediante un conjunto de operadores llamados pares de Lax.

La posibilidad de expresar estas ecuaciones mediante un conjunto de ecua-

ciones lineales, o como un problema espectral, ha ampliado el estudio de los sistemas integrables a ecuaciones de campo. Lo anterior ha llevado tanto a investigar nuevos modelos completamente integrables como a desarrollar métodos para resolverlos [10–16].

El campo de los sistemas integrables es un área fascinante que une de manera extraordinaria la física con las matemáticas puras, por lo que su estudio es de gran importancia en la actualidad para el avance de ambas disciplinas.

1.2. Sistemas Integrables

Los sistemas integrables son una clase especial de sistemas dinámicos que se pueden resolver de manera exacta, es decir, su evolución en el tiempo o en algún otro parámetro puede describirse completamente mediante soluciones analíticas. Estos sistemas poseen propiedades muy particulares que los distinguen de otros sistemas dinámicos, como la existencia de suficientes constantes de movimiento (también conocidas como integrales de movimiento), que permiten la resolución exacta del sistema. Un sistema se considera integrable si tiene tantas constantes de movimiento independientes como grados de libertad. Estas constantes de movimiento, que son funciones independientes en involución bajo el corchete de Poisson, permiten integrar las ecuaciones que describen el sistema, es decir, resolverlas de manera directa. Esto hace que los sistemas integrables sean más accesibles para obtener soluciones precisas y comprensibles. En muchas ocasiones, los sistemas integrables están asociados a simetrías o conservaciones de cantidades físicas fundamentales, como la energía, el momento o la carga. Estos sistemas pueden describir desde el movimiento de partículas hasta la evolución de campos continuos. Un ejemplo clásico de sistema integrable es el problema de los dos cuerpos en mecánica clásica, donde la conservación de la energía y el momento angular permite resolver exactamente las ecuaciones de movimiento. También existen ejemplos más complejos en sistemas continuos, como la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), la ecuación de sine-Gordon y la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE).

Los sistemas integrables permiten obtener soluciones exactas y analíticas, como las famosas soluciones solitónicas, que describen ondas estables que se propagan sin cambiar de forma. Para resolver estos sistemas, se emplean técnicas avanzadas como el método de dispersión inversa (IST), el método

de Bäcklund y la transformada de Darboux que permiten encontrar soluciones exactas y caracterizar propiedades clave de las ondas solitónicas.

Integrabilidad Clásica

Recordemos de la mecánica clásica que las trayectorias de una partícula pueden obtenerse mediante el principio de mínima acción, $\delta S = 0$, en donde S es la acción definida como

$$S = \int L dt, \quad (1.1)$$

donde L es el Lagrangiano del sistema, usualmente definido como la energía cinética menos la energía potencial, es decir, $L = \frac{1}{2}mv^2 - V$.

A partir del Lagrangiano, se definen los momentos generalizados como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.2)$$

y el Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L, \quad (1.3)$$

esta función satisface las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.4)$$

que permiten encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema.

Una función $F(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\})$ que depende de las coordenadas y de los momentos yace en el espacio fase. La derivada temporal de esta función está dada por

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (1.5)$$

usando las ecuaciones de Hamilton, podemos reescribir esta función en términos del Hamiltoniano:

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \{F, H\}, \quad (1.6)$$

donde la cantidad dentro de los paréntesis en esta última expresión es el corchete de Poisson de F con H , $\{F, H\}$. Entonces toda función de q_i y p_i en el espacio tendrá su evolución dada mediante la ecuación (1.6).

Lo anterior nos permite afirmar que cualquier cantidad F que satisface la ecuación $\{F, H\} = 0$ es conservada. El Hamiltoniano independiente del tiempo (la energía), por ejemplo, es la cantidad más obvia que se conserva:

$$\dot{H} = \{H, H\} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \Rightarrow H = \text{constante}. \quad (1.7)$$

La importancia de estos sistemas proviene del hecho de que estos son completamente integrables, como consecuencia del teorema de Liouville.

Teorema 1 (Teorema de Liouville) *Las ecuaciones de movimiento de un sistema integrable de Liouville siempre pueden ser resueltas por cuadraturas.*

Por cuadraturas nos referimos a que las soluciones del sistema se pueden expresar en términos de integrales. En otras palabras, las ecuaciones diferenciales que describen el sistema se pueden integrar directamente para obtener una solución analítica o explícita. Resolver por cuadraturas implica reducir el problema a una forma en la que la solución se obtiene al realizar un número finito de integraciones.

El teorema de Liouville implica que, si para un sistema con $2n$ grados de libertad existen n constantes de movimiento en involución (cantidades conservadas), entonces es posible resolver las ecuaciones del sistema mediante métodos analíticos en lugar de aproximaciones numéricas. Sin embargo, surge un problema cuando nos enfrentamos a sistemas donde los grados de libertad dejan de ser finitos, pasando a sistemas continuos como es el caso de la ecuación de onda, la ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica, las ecuaciones de la mecánica de fluidos, las ecuaciones de las teorías de campo. En estos casos, la dinámica del sistema está contenida en funciones que dependen tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo, $q(\vec{r}, t)$, y no solo del vector posición \vec{r} como en los sistemas con grados de libertad finitos. En los sistemas continuos, no se puede aplicar directamente el teorema de Liouville, lo que limita la utilidad de la teoría Hamiltoniana clásica para resolver estos problemas. Por lo tanto, se requiere una formulación diferente para extender el concepto de integrabilidad a estos sistemas de dimensión infinita.

Problemas espectrales, Pares de Lax y integrabilidad

Históricamente una de las primeras ecuaciones no lineales en ser resueltas de manera analítica fue la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV),

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.8)$$

formulada en 1895 por los matemáticos holandeses D. J. Korteweg y G. de Vries [17] para modelar las ondas en un canal de agua poco profundo. Esta ecuación no fue resuelta hasta 1960 por el matemático ruso Mikhail Z. Shabat y el físico Vladimir E. Zakharov aplicando el método de la transformada de dispersión inversa (IST) para resolver la ecuación de KdV.

El método IST es una técnica fundamental en matemáticas y física matemática para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. El cual se basa en el análisis espectral y proporciona un enfoque sistemático para encontrar soluciones exactas de ecuaciones no lineales.

El problema de dispersión directa implica estudiar cómo una onda incidente interactúa con un potencial $V(x)$ dado, que se puede relacionar con la función $q(x)$ en una ecuación de tipo Sturm-Liouville [14].

La ecuación de Sturm-Liouville es una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] \psi(x) = 0, \quad (1.9)$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones dadas, λ es un parámetro espectral, y $\psi(x)$ es la función propia correspondiente a λ .

Este tipo de ecuaciones aparecen en problemas de valores propios, donde el objetivo es determinar los valores de λ (los autovalores) para los cuales existe una solución no trivial $\psi(x)$ (la función propia). En el contexto del problema de dispersión, la ecuación de Sturm-Liouville puede interpretarse como un modelo para entender cómo las ondas se propagan y se dispersan en un medio.

El resultado de esta interacción es una onda dispersada, y el objetivo del problema de dispersión directa es determinar cómo se modifica la onda debido al potencial.

El problema de dispersión inversa, por otro lado, busca resolver el problema inverso: dado el comportamiento de la onda dispersada, se intenta reconstruir el potencial $V(x)$ o la función $q(x)$. Este problema es particularmente interesante porque permite determinar las propiedades internas de

un sistema (como su estructura o inhomogeneidades) a partir de mediciones externas.

El método de dispersión inversa es crucial para entender la dinámica de sistemas no lineales y ha sido aplicado en múltiples áreas, desde la teoría de solitones hasta la mecánica cuántica [18]. La transformación de la ecuación original en un problema de Sturm-Liouville es lo que hace que este enfoque sea tan poderoso y ampliamente utilizado en la resolución de ecuaciones no lineales complejas.

En lugar de trabajar con una ecuación de tipo Sturm Liouville como la de la ecuación (1.9), es posible demostrar que es equivalente trabajar con el siguiente problema de dispersión:

$$\begin{aligned}\psi_{1x} + i\xi\psi_1 &= q\psi_2, \\ \psi_{2x} - i\xi\psi_2 &= r\psi_1,\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde $r = -q^*$ actúa como el potencial del problema de dispersión, ξ es un valor propio, y $\psi_1(x, t)$, $\psi_2(x, t)$ son funciones dependientes tanto del tiempo como del espacio. Además, se asume que la dependencia temporal de $\psi_1(x, t)$ y $\psi_2(x, t)$ es tal que se satisface el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}\psi_{1t} &= A\psi_1 + B\psi_2, \\ \psi_{2t} &= C\psi_1 + D\psi_2,\end{aligned}\tag{1.11}$$

los subíndices x y t en ψ denotan las derivadas correspondientes a estas variables. Mostremos la relación entre el par de ecuaciones (1.10)–(1.11) y el problema de Sturm-Liouville (1.9), primero diferenciamos la segunda ecuación de (1.10) con respecto a x

$$\psi_{2xx} = i\xi\psi_{2x} + r_x\psi_1 + r\psi_{1x},\tag{1.12}$$

sustituyendo las ecuaciones necesarias de (1.10) y (1.11) en (1.12) obtenemos:

$$\begin{aligned}\psi_{2xx} &= i\xi\psi_{2x} + r_x\psi_1 + r(-i\xi\psi_1 + q\psi_2) = i\xi\psi_{2x} + \psi_1(r_x - ir\xi) + qr\psi_2 \\ &= i\xi\psi_{2x} + (r_x - ir\xi)\frac{(\psi_{2x} - i\xi\psi_2)}{r} + qr\psi_2,\end{aligned}\tag{1.13}$$

$$\psi_{2xx} - \frac{r_x}{r}\psi_{2x} - \left(qr - i\xi\frac{r_x}{r} - \xi^2\right)\psi_2 + (i\xi\psi_{2x} - i\xi\psi_{2x}) = 0, \quad (1.14)$$

$$\psi_{2xx} - \frac{r_x}{r}\psi_{2x} - \left(qr - i\xi\frac{r_x}{r} - \xi^2\right)\psi_2 = 0, \quad (1.15)$$

con la elección esférica $r = -1$ nos da entonces el problema de Sturm-Liouville

$$\psi_{2xx} + (\xi^2 + q)\psi_2 = 0, \quad (1.16)$$

el cual es un caso particular de (1.9) con $P(x) = 1$, $\lambda = \xi^2$ y $r(x) = 1$, en particular el problema de Sturm-Liouville obtenido es el asociado a la ecuación de KdV.

Ahora reescribamos el problema de dispersión (1.10)–(1.11) de dos maneras más compactas mediante el uso de operadores, para ello denotaremos por Ψ el vector:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Problema de operadores 1:

Considerando la matriz

$$U = \begin{pmatrix} i\xi & q \\ r & -i\xi \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

el problema de dispersión (1.10) puede ser reescrito como

$$\Psi_x = U\Psi, \quad (1.19)$$

por otro lado, definiendo la matriz

$$V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

la condición (1.11) puede ser reescrita como

$$\Psi_t = V\Psi, \quad (1.21)$$

obteniendo así nuestro primer problema de operadores é autovalores

$$\Psi_x = U\Psi, \quad (1.22a)$$

$$\Psi_t = V\Psi, \quad (1.22b)$$

Problema de operadores 2:

Considerando la matriz

$$L = \begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial x} & iq \\ -ir & i\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

entonces el problema de dispersión (1.10) puede ser reescrito como

$$L\Psi = \xi\Psi, \quad (1.24)$$

ahora definiendo la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

la condición (1.11) puede ser reescrita como

$$\Psi_t = A\Psi, \quad (1.26)$$

obteniendo así nuestro segundo problema de operadores y autovalores

$$L\Psi = \xi\Psi, \quad (1.27a)$$

$$\Psi_t = A\Psi, \quad (1.27b)$$

Para finalizar mencionemos algunos detalles de las condiciones de integrabilidad de los dos problemas anteriores y las ecuaciones que estas satisfacen; por un lado tenemos que si, en el problema (1.11), $\Psi(x, t)$ es suficientemente suave para que el orden de diferenciación con respecto a x y t no afecten el resultado entonces tendremos la condición $\Psi_{xt} = \Psi_{tx}$ llamada comúnmente como la condición de integrabilidad. Entonces, si

$$\Psi_{xt} = U_t\Psi + U\Psi_t = U_t\Psi + U(V\Psi), \quad (1.28)$$

y

$$\Psi_{tx} = V_x \Psi + V \Psi_x = V_x \Psi + V(U\Psi), \quad (1.29)$$

la condición de integrabilidad $\Psi_{xt} = \Psi_{tx}$ implicará:

$$U_t \Psi + U(V\Psi) = V_x \Psi + V(U\Psi), \quad (1.30)$$

entonces

$$U_t - V_x = VU - UV, \quad (1.31)$$

por lo tanto

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \quad (1.32)$$

en donde $[U, V] = UV - VU$ es el conmutador de U con V . La ecuación (1.32) suele ser llamada condición de cero curvatura por su relación con problemas en geometría diferencial. Particularmente cuando se consideran conexiones en fibrados principales y su curvatura asociada. Si se impone que la curvatura es cero, significa que la conexión es plana esto tiene implicaciones geométricas y físicas, ya que una conexión plana generalmente implica que el espacio asociado es trivializable o que el sistema es integrable [19]. Veremos mediante la ecuación (1.32) que podemos encontrar los valores (A, B, C, D) de la matriz (1.20), y con ello obtener el modelo integrable de cuarto orden con el que vamos a trabajar.

Por otro lado si para el problema (1.27) nosotros consideramos el caso isopectral esto es $\xi_t = 0$, y la derivada con respecto a t de la primera ecuación de (1.27), entonces tenemos que lado izquierdo de la ecuación:

$$(L\Psi)_t = L_t \Psi + L\Psi_t = L_t \Psi + L(A\Psi), \quad (1.33)$$

y en el lado derecho de la primera ecuación de (1.27)

$$(\xi\Psi)_t = \xi_t \Psi + \xi\Psi_t = \xi\Psi_t = \xi(A\Psi) = A(\xi\Psi) = AL\Psi, \quad (1.34)$$

igualando ambos términos tendremos

$$L_t \Psi + L(A\Psi) = A(\xi\Psi) = AL\Psi, \quad (1.35)$$

por lo tanto

$$L_t = AL - LA, \quad (1.36)$$

llegando así a la ecuación

$$L_t = [A, L], \quad (1.37)$$

donde $[A, L]$ denota el conmutador de A con L . La ecuación (1.37) es conocida como la ecuación de Lax. Al igual que la ecuación de cero curvatura (1.32), la ecuación (1.37) es una herramienta valiosa para identificar sistemas completamente integrables. Los operadores L , A , V , y U son comúnmente referidos como pares de Lax.

Por lo tanto, las ecuaciones (1.22) y (1.27) representan distintas formulaciones lineales para ecuaciones (o modelos de campos) no lineales. Aquellas ecuaciones que pueden ser expresadas de esta manera se denominan *sistemas integrables en el sentido de Lax*.

En esta tesis, trabajaremos únicamente con problemas de la forma (1.22) y con la condición (1.32), ya que esta formulación no se restringe solo al caso isoespectral, lo que nos permite generar modelos integrables no isoespectrales, es decir, aquellos en los que $\xi(t)$ puede variar con el tiempo.

1.3. Jerarquía AKNS

Consideremos el problema de eigenvalores similar a (1.22)

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U\Psi, \\ \Psi_t &= V\Psi, \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde, como ya hemos visto,

$$U = \begin{pmatrix} i\xi & q \\ r & -i\xi \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

y

$$V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

con A , B , C y D siendo funciones de x y t que deben determinarse para cada ecuación no lineal.

Buscamos construir ecuaciones que sean completamente integrables en el sentido de Lax, para lo cual utilizamos la ecuación de cero curvatura:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \quad (1.41)$$

Los primeros en seguir este procedimiento (o al menos una versión más primitiva) para encontrar ecuaciones que pudieran resolverse mediante el método de la transformada inversa de dispersión fueron Mark J. Ablowitz, David J. Kaup, Alan C. Newell y Harvey Segur, en su revolucionario trabajo *Nonlinear-Evolution Equations of Physical Significance* [20]. De ahí proviene el nombre de Jerarquía AKNS, derivado de las iniciales de los autores.

En particular, ellos tomaron que los elementos de la matriz V tenían la forma:

$$V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

algo notable es que esta matriz tiene la forma de un elemento del álgebra afín $\mathfrak{sl}(2)$, aunque también es interesante mencionar que se puede trabajar con operadores o matrices pertenecientes a otras estructuras de grupos de Lie (como los grupos de Kac-Moody), lo que conduciría a diferentes tipos de jerarquías integrables, cada una con su propio conjunto de ecuaciones diferenciales completamente integrables [15].

En esta tesis, solo trabajaremos con la forma de V perteneciente al álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ y no profundizaremos más en este tema. Sin embargo, esta conexión entre matemáticas puras y física me resulta fascinante, por lo que merece la pena mencionarlo. Para aquellos interesados en explorar más sobre este asunto, pueden consultar las siguientes referencias [11, 12, 15, 21].

Regresando entonces a nuestro problema de encontrar ecuaciones diferenciales integrables mediante la condición de cero curvatura si sustituimos las matrices (1.39) y (1.40) en la ecuación (1.41), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= qC - Br, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial x} + 2qA + 2i\xi B, \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial x} - 2rA - 2i\xi C, \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde se propone que los elementos A, B, C pueden ser expresados como funciones analíticas, es decir, como series de potencias del parámetro espectral ξ :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=0}^n A_i \xi^i = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \dots, \\
B &= \sum_{i=0}^n B_i \xi^i = A_0 + B_1 \xi + B_2 \xi^2 + B_3 \xi^3 + \dots, \\
C &= \sum_{i=0}^n C_i \xi^i = C_0 + A_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3 + \dots
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Sustituyendo (1.44) en (1.43) e igualando los términos con la misma potencia de ξ , obtenemos una serie de ecuaciones (jerarquía de ecuaciones) que, al resolverse, nos darán la forma precisa de A, B y C . Resultan de particular interés físico las siguientes ecuaciones de evolución obtenidas como casos especiales de esta jerarquía:

- i)* Tomando $n = 3$, $A_0 = A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = -4i$, $r = -1$, obtenemos la ecuación de Kdv:

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0. \tag{1.45}$$

- ii)* Tomando $n = 3$, $A_0 = A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = -4i$, $r = \pm q$, obtenemos la ecuación de Kdv modificada (Mkdv):

$$q_t \pm 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0. \tag{1.46}$$

- iii)* Tomando $n = 2$, $A_0 = A_1 = 0$, $A_2 = -2i$, $r = \pm q^*$, obtenemos la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE):

$$q_t \pm 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0. \tag{1.47}$$

El calculo detallado de este caso se realiza en el siguiente capitulo de la tesis, y su extension correspondiente se llevara a cabo en el capitulo 4 para encontrar un modelo de cuarto orden de dispersión no autónomo.

iv) Tomando $n = 3$ $A_0 = A_1 = A_3 = 0$, $A_2 = -2$, $u_x = qr = \left(\frac{q_x}{q}\right)_x$, obtenemos la ecuación de Burgers:

$$u_t = 2uu_x - u_{xx}. \quad (1.48)$$

También podemos desarrollar A , B y C en potencias negativas de ξ :

$$A = \frac{a}{\xi} \quad B = \frac{b}{\xi} \quad C = \frac{c}{\xi}, \quad (1.49)$$

obteniendo así, por ejemplo, la ecuación de Sine-Gordon(SG):

$$u_{xt} = \text{sen}(u). \quad (1.50)$$

Como ya mencionamos, el método de la jerarquía AkNS sera la herramienta principal que utilizaremos para construir nuestro modelo integrable de cuarto orden con parámetro espectral no constante y coeficientes de dispersión dependientes del tiempo (sistema autónomo). Antes de ello, estudiaremos un poco el caso mas simple de la ecuación NLSE con una no linealidad no cúbica y encontraremos algunas soluciones de esta.

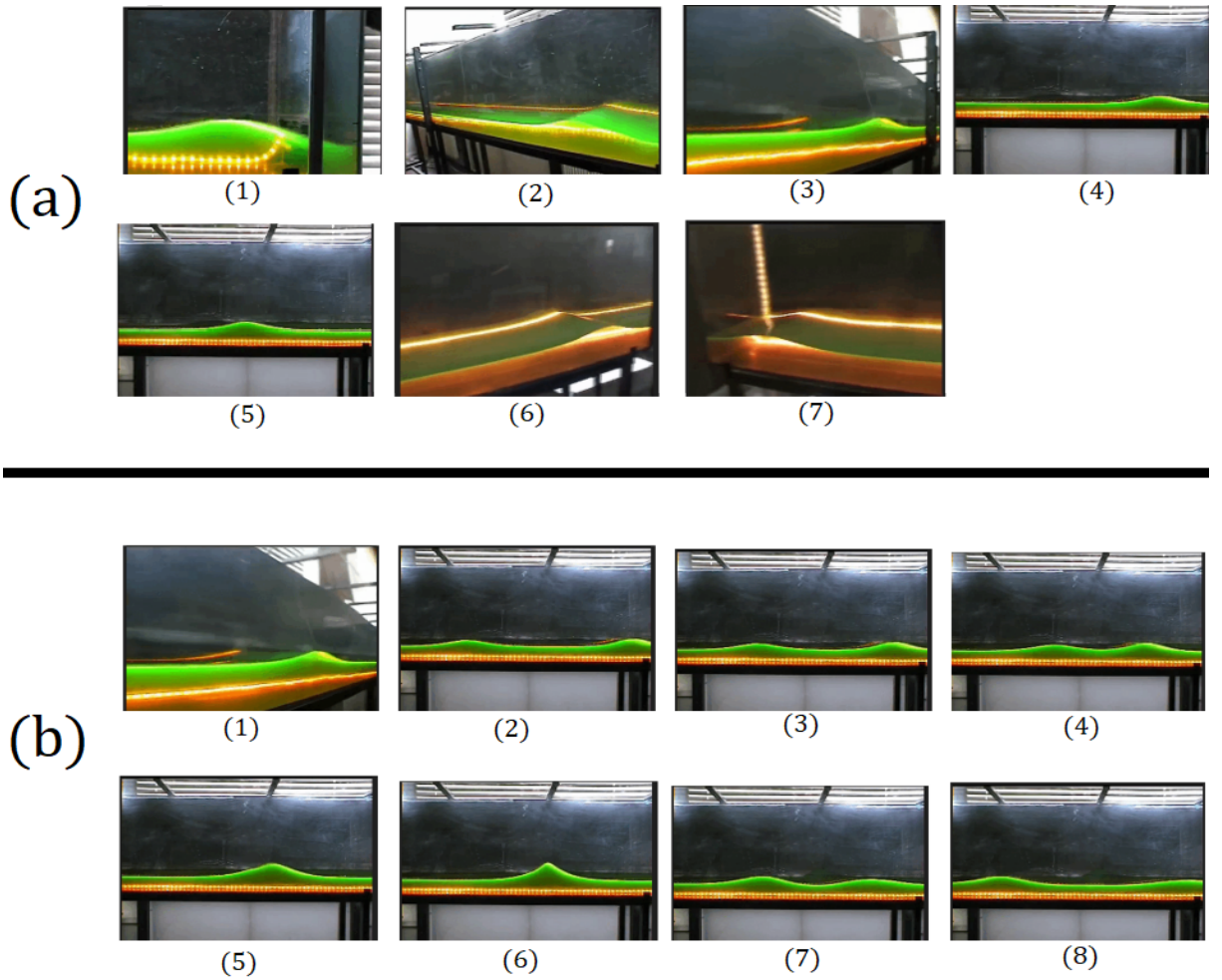


Figura 1.1: Capturas de un experimento sobre la generación de solitones en un fluido de poca profundidad. (a) Muestra la generación de un solitón que se propaga hacia la izquierda manteniendo su forma. (b) Ilustra la dinámica de dos solitones generados y su colisión, en la cual se observa cómo estos mantienen su forma después de la colisión. Fuente: [YouTube - Collision of KdV solitons](#).

Capítulo 2

La Ecuación no lineal de Schrödinger

2.1. La Ecuación no lineal de Schrödinger

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) por sus siglas en ingles, con no linealidad cubica [22] se encuentra comúnmente en la literatura en la forma:

$$i\frac{\partial q}{\partial t} \pm \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \sigma|q|^2q = 0, \quad (2.1)$$

donde σ es una constante real y $q(x, t)$ es una función compleja. La NLSE es la base de muchos modelos teóricos históricamente esta ecuación a sido usada para modelar condensados de Bose-Einstein de gases ultra fríos [23], fibras ópticas no lineales y conjuntos de guías de ondas [24], así como ondas de agua profundas [25].

En los condensados de Bose-Einstein, que son sistemas cuánticos, la ecuación de Schrödinger no lineal es el límite de campo clásico de la ecuación de campo cuántica análoga. La función $q(x, t)$ es la función de onda del sistema macroscópico de muchas partículas. Para lograr la condensación de Bose-Einstein, se requiere un potencial magnético y óptico confinante (atrapante).Lo cual se logra añadiendo un término de potencial, $V(x)q(x, t)$, a la ecuación NLSE, que luego se convierte en la ecuación de Gross-Pitaevskii [26, 27].

En óptica no lineal, la NLSE describe la propagación de pulsos en medios no lineales como fibras ópticas, cristales fotónicos o arreglos de guías de onda [28]. La NLSE se puede derivar a partir de las ecuaciones de Maxwell,

donde $q(x, t)$ corresponde a la envolvente de la intensidad del campo eléctrico (o magnético) modulado del pulso propagante [29]. El término no lineal corresponde a la modulación del índice de refracción del medio en respuesta al pulso de luz propagante, fenómeno conocido en la óptica no lineal como efecto Kerr. La constante σ representa, en este contexto, la intensidad del efecto Kerr, que puede ser positiva o negativa, conduciendo a la NLSE de enfoque o desfocalización, respectivamente. Aquí, el término de la segunda derivada q_{xx} corresponde a la dispersión del pulso.

La NLSE también describe ondas en la superficie del agua, donde $q(x, t)$ corresponde a la intensidad y fase de las ondas. Esta descripción se limita a las ondas en aguas profundas con una longitud de onda mucho menor que la profundidad del agua. Las ondas en aguas poco profundas no son descritas por la NLSE. La no linealidad se origina a partir de la ecuación de Bernoulli, su intensidad depende de la profundidad del agua, y es siempre negativa para las ondas en aguas profundas.

La NLSE es una ecuación completamente integrable en el sentido de Lax, lo que significa que admite, en principio, un número infinito de soluciones independientes [30]. Fue resuelta por primera vez por Zakharov y Shabat [31] mediante el uso de la transformada de dispersión inversa aplicado a un problema espectral de la forma (1.10). Desde entonces, este sistema ha sido conocido como el sistema de Zakharov-Shabat, y el método ha sido adoptado para encontrar otras soluciones de la NLSE y sus variaciones. Con el desarrollo de la teoría de los pares de Lax y los correspondientes problemas de operadores (1.22) y (1.27), se ha desarrollado un vasto arsenal de técnicas para resolver la NLSE y estudiar sus propiedades. Entre estas técnicas destacan la transformada de Miura, el método de Hirota, la transformada de Bäcklund, la transformada de Darboux y por supuesto la jerarquía AKNS.

2.2. La jerarquía AKNS para la ecuación no lineal de Schrödinger

El procedimiento para obtener la ecuación no lineal de Schrödinger mediante la jerarquía AKNS es análogo al descrito de manera general en la sección

1.3. En este contexto, definimos los pares de Lax de la forma

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(x,t) \\ r(x,t) & i\lambda \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

y

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Teniendo entonces el problema de operadores y eigenvalores:

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \hat{L}\Psi, \\ \Psi_t &= \hat{M}\Psi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

En este contexto $r(x,t)$ y $q(x,t)$ representan las funciones que describen el sistema en la ecuación de evolución, el valor propio λ es un parámetro que depende únicamente de t , y A, B, C son funciones que dependen tanto de x como de t y que deben determinarse.

Como se mencionó en la sección 1.3, debemos sustituir las ecuaciones (2.2) y (2.3) en la condición de cero curvatura

$$\hat{L}_t - \hat{M}_x + [\hat{L}, \hat{M}] = 0, \quad (2.5)$$

para así obtener el conjunto de ecuaciones :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= qC - Br, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial x} + 2qA + 2i\xi B, \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial x} - 2rA - 2i\xi C, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las funciones A, B , y C se expresan como series de potencias del parámetro λ de la siguiente forma:

$$A = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^3 + \dots, \quad (2.7)$$

$$B = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + B_3\lambda^3 + \dots, \quad (2.8)$$

$$C = C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + C_3\lambda^3 + \dots \quad (2.9)$$

Para obtener la NLSE, truncaremos las series a segundo orden en λ y sustituiremos estas expresiones en el sistema de ecuaciones (2.6). Luego, separaremos los términos según el grado de λ (ya que cada término es linealmente independiente de los demás). Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que debemos resolver para encontrar los valores de A , B , y C y las ecuaciones diferenciales correspondientes a la NLSE.

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = qc_2 - rB_2, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = qc_1 - rB_1, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} = qc_0 - rB_0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = -2qA_1 - 2iB_0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = -2qA_2 - 2iB_1, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = 2rA_1 + 2ic_0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = 2rA_2 + 2ic_1, \quad (2.16)$$

$$2iB_2 = 0, \quad (2.17)$$

$$2ic_2 = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial B_0}{\partial x} + 2A_0q, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial C_0}{\partial x} - 2A_0r. \quad (2.20)$$

Las ecuaciones (2.10)–(2.18) determinan los valores de los coeficientes A_i , B_i y C_i . Al resolver estas ecuaciones, obtenemos las funciones A , B y C , y por lo tanto, se define completamente el par de Lax \hat{M} . En este caso, los coeficientes A_i , B_i y C_i son los siguientes:

$$B_2 = 0, \quad (2.21)$$

$$C_2 = 0, \quad (2.22)$$

$$A_2 = a_2(t), \quad (2.23)$$

$$B_1 = iqa_2, \quad (2.24)$$

$$C_1 = ira_2, \quad (2.25)$$

$$A_1 = a_1(t), \quad (2.26)$$

$$B_0 = -\frac{1}{2}a_2 \frac{\partial q}{\partial x} + ia_1q, \quad (2.27)$$

$$C_0 = \frac{1}{2}a_2 \frac{\partial r}{\partial x} + ia_1r, \quad (2.28)$$

$$A_0 = \frac{1}{2}a_2qr. \quad (2.29)$$

Entonces los elementos de la matriz \hat{M} son:

$$A = \left(\frac{1}{2}a_2qr \right) + (a_1)\lambda + (a_2)\lambda^2, \quad (2.30)$$

$$B = \left(-\frac{1}{2}a_2 \frac{\partial q}{\partial x} + ia_1q \right) + (iqa_2)\lambda, \quad (2.31)$$

$$C = \left(\frac{1}{2}a_2 \frac{\partial r}{\partial x} + ia_1r \right) + (ira_2)\lambda, \quad (2.32)$$

Por otra parte, al sustituir los valores de A_0 , B_0 y C_0 en las ecuaciones (2.19) y (2.20), junto con las condiciones $r = -q^*$, $a_1 = 0$ y $a_2 = -i$, obtenemos la ecuaciones de evolución para las funciones $r(x, t)$ y $q(x, t)$, la cual son:

$$i \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q = 0, \quad (2.33)$$

y

$$i \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + |r|^2 r = 0, \quad (2.34)$$

la cual, como se puede observar, es la ecuación no lineal de Schrödinger. Finalmente, la matriz \hat{M} bajo las condiciones impuestas es:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}|q|^2 - i\lambda^2 & \frac{i}{2}\frac{\partial q}{\partial x} + q\lambda \\ \frac{i}{2}\frac{\partial q^*}{\partial x} - q^*\lambda & -\frac{i}{2}|q|^2 + i\lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

2.3. Soluciones solitónicas de la ecuación no lineal de Schrödinger

Uno puede obtener las soluciones solitónicas para la ecuación (2.33) aplicando la transformada de Auto-Bäcklund [32] y utilizando la relación de recurrencia

$$q_n = -q_{n-1}(x, t) - 4\frac{\eta_n \Gamma_{n-1}(x, t)}{1 + |\Gamma_{n-1}(x, t)|^2}, \quad (2.36)$$

en donde

$$\Gamma_{n-1}(x, t) = \frac{\psi_1}{\psi_2}, \quad (2.37)$$

es un pseudo-potencial para la función de dispersión Ψ . La ecuación (2.36) nos permite obtener la solución n -solitónica si la solución $(n-1)$ y la función $\Gamma_{n-1}(x, t) = \psi_1(x, t)/\psi_2(x, t)$ son conocidas. Para calcular soluciones solitónicas en el estado base, el proceso recurrente comienza con los potenciales evaluados en cero, es decir, $q(x, t) = 0$ (solución semilla). Si esta condición es utilizada en los coeficientes A , B , y C de (2.35), obtenemos los siguientes valores para estos:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= -i\lambda^2, \\ B^{(0)} &= 0, \\ C^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

El superíndice en este caso implica el orden en el que se tomó la solución semilla, que en este caso es $n - 1 = 0$. Entonces, tenemos que el problema de eigenvalores (2.4) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \psi_{1x} + i\lambda\psi_1 &= 0, \\ \psi_{2x} - i\lambda\psi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

y

$$\begin{aligned}\psi_{1t} &= A^{(0)}\psi_1, \\ \psi_{2t} &= A^{(0)}\psi_2,\end{aligned}\tag{2.40}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= e^{-i\lambda x} \\ \psi_2(x) &= e^{i\lambda x} \\ \psi_1(t) &= e^{\int A^{(0)} dt} = e^{-i\lambda^2 t + \phi_{10}} \\ \psi_2(t) &= e^{-\int A^{(0)} dt} = e^{i\lambda^2 t + \phi_{20}}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Así, obtenemos $\psi_1 = \psi_1(x)\psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(x)\psi_2(t)$. El primer pseudo-potencial es entonces

$$\Gamma_{n-1}(x, t) = \psi_1(x, t)/\psi_2(x, t) = e^{-2i\lambda x - 2i\lambda^2 t + \phi_0} = e^{\xi_1 - i\chi_1},\tag{2.42}$$

la última igualdad se utiliza ya que el argumento de la exponencial es un número complejo. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos descomponerlo en una parte real y una imaginaria. Sustituyendo este pseudo-potencial en la ecuación de recurrencia (2.36) y usando las identidades de funciones hiperbólicas en términos de exponenciales, obtenemos la solución 1-solitónica:

$$q_1 = -2\eta_1 \operatorname{sech}(\xi_1) e^{-i\chi_1},\tag{2.43}$$

donde, al asociar la parte real y la parte imaginaria del argumento de la exponencial, obtenemos

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 2(x\eta_0 + \kappa_0\eta_0 t), \\ \chi_1 &= 2(\kappa_0 x - (\kappa_0^2 - \eta_0^2)t),\end{aligned}\tag{2.44}$$

en donde su uso que $\lambda = \kappa_0 + i\eta_0$. Las cantidades κ_0 y η_0 suelen ser asociadas con la velocidad y la amplitud del solitón, respectivamente. La figura 2.1 muestra la gráfica de la norma al cuadrado de (4.73). Esta norma al cuadrado se calcula para obtener una función real, dado que q_1 es una función compleja. La norma al cuadrado se asocia con la intensidad del solitón. Encontrar expresiones analíticas para solitones de ordenes superiores utilizando la fórmula de recurrencia (2.36) es posible; sin embargo, obtener estas ecuaciones para los solitones y manejar el número de parámetros asociados

puede ser una tarea complicada. En el apéndice [A](#) se presenta un programa que permite calcular solitones de cualquier orden utilizando la fórmula de recurrencia (2.36), ajustando los parámetros necesarios. La figura 2.2 muestra un solitón de segundo orden calculado y graficado con este programa, mientras que la figura 2.3 ilustra la dinámica de un solitón de tercer orden.

En las figuras, se puede observar que, en el caso de un solitón, este se comporta como una onda que viaja en el espacio y el tiempo manteniendo su forma constante. En contraste, para las soluciones con 2 y 3 solitones, se puede notar que los solitones iniciales se encuentran en diferentes posiciones. Al interactuar, estos solitones experimentan un pico de intensidad en el punto de colisión. Después de la interacción, continúan propagándose manteniendo su forma inicial.

En la siguiente sección discutiremos una generalización de la NLSE que incluye un término de dispersión de cuarto orden. Motivaremos el estudio de casos con términos de dispersión de órdenes superiores y abordaremos las soluciones asociadas con este modelo.

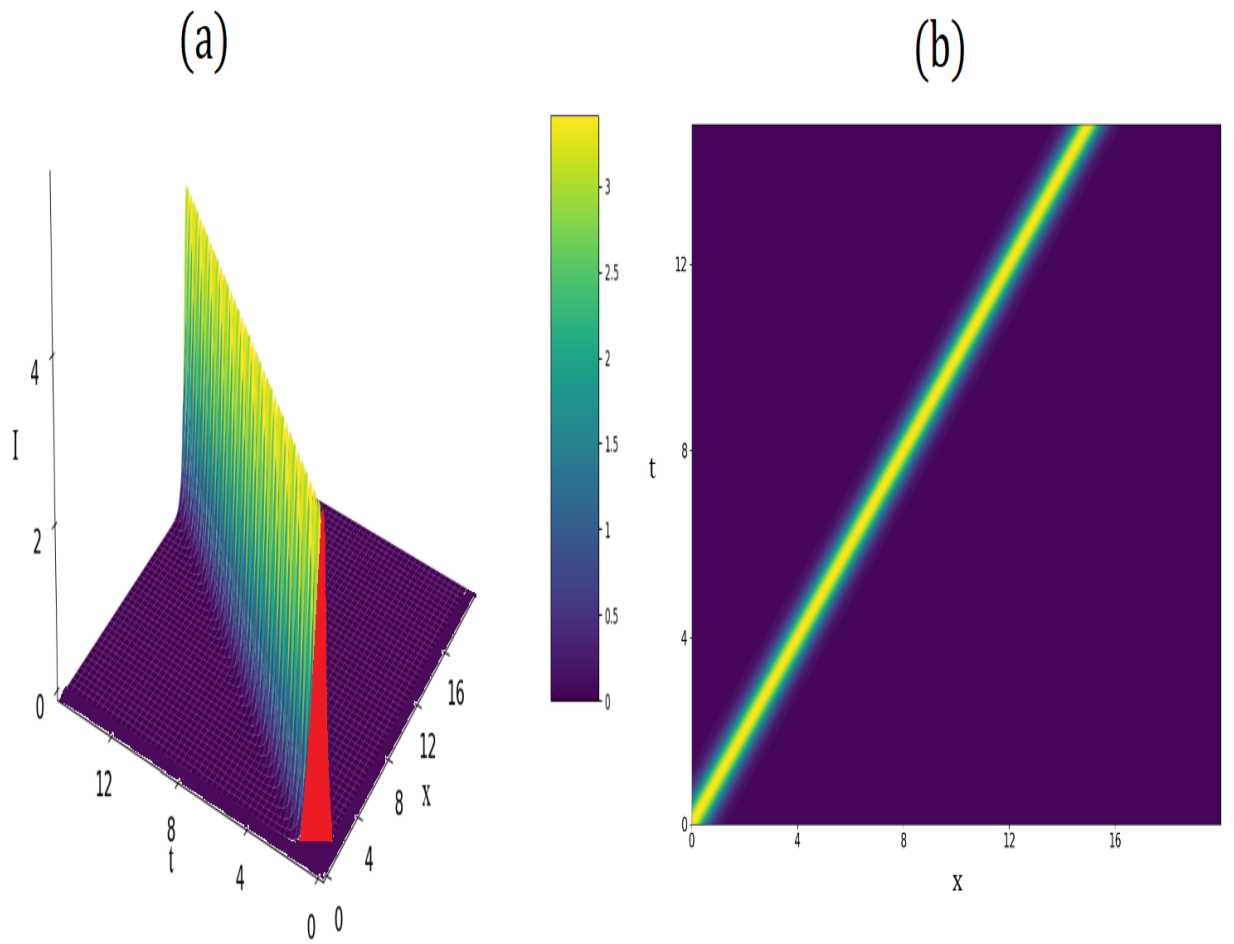


Figura 2.1: Dinámica de un 1-soliton de la ecuación (2.33), $I = |q|^2$. La amplitud y la velocidad inicial del soliton es: $\eta_{01} = 1$; $\kappa_{01} = -0,5$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

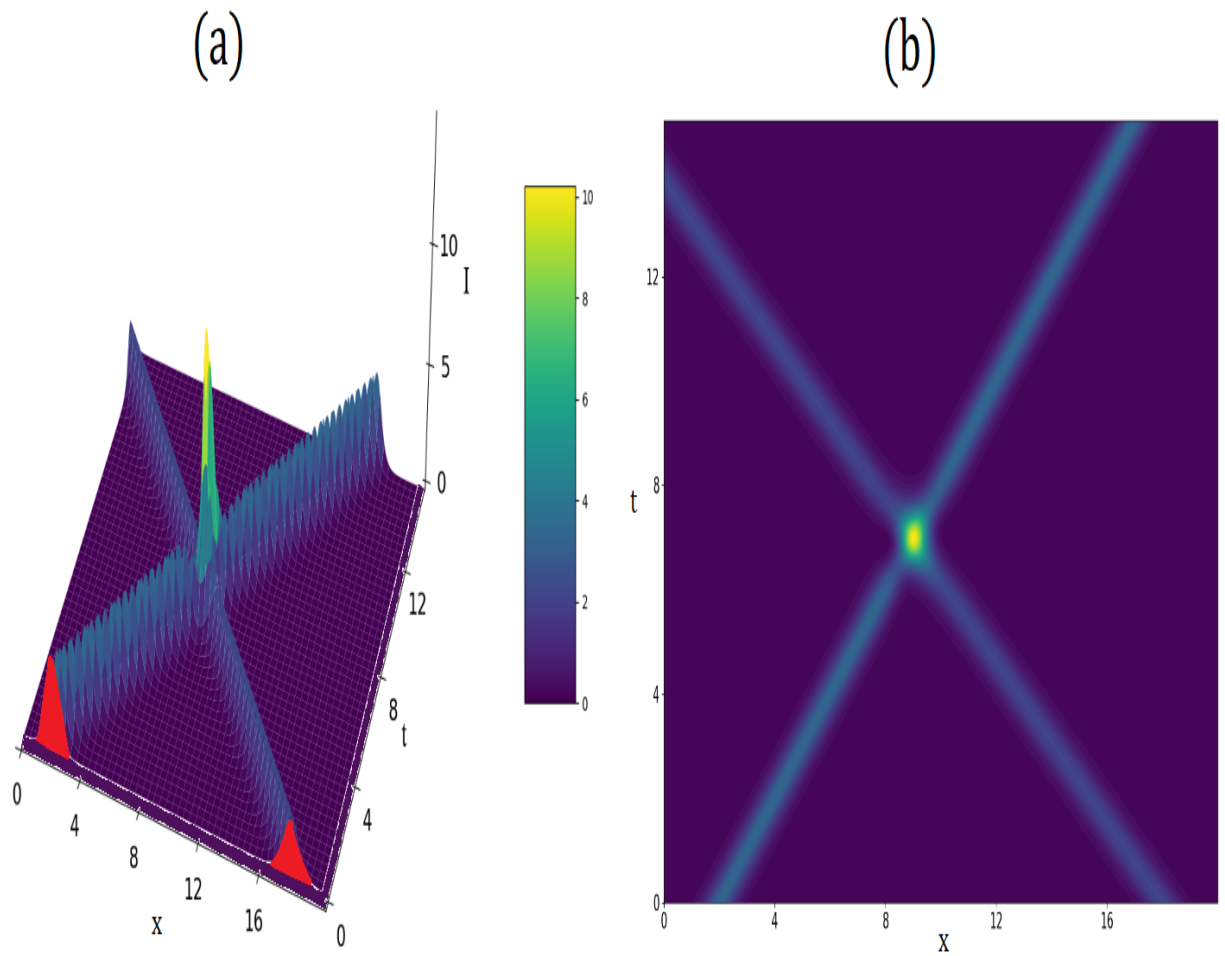


Figura 2.2: Dinámica de un 2-soliton de la ecuación (2.33), $I = |q|^2$. Las amplitudes y velocidades iniciales de los solitones son: $\eta_{01} = 1$ y $\eta_{02} = 0,8$; $\kappa_{01} = -0,5$ y $\kappa_{02} = 0,65$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

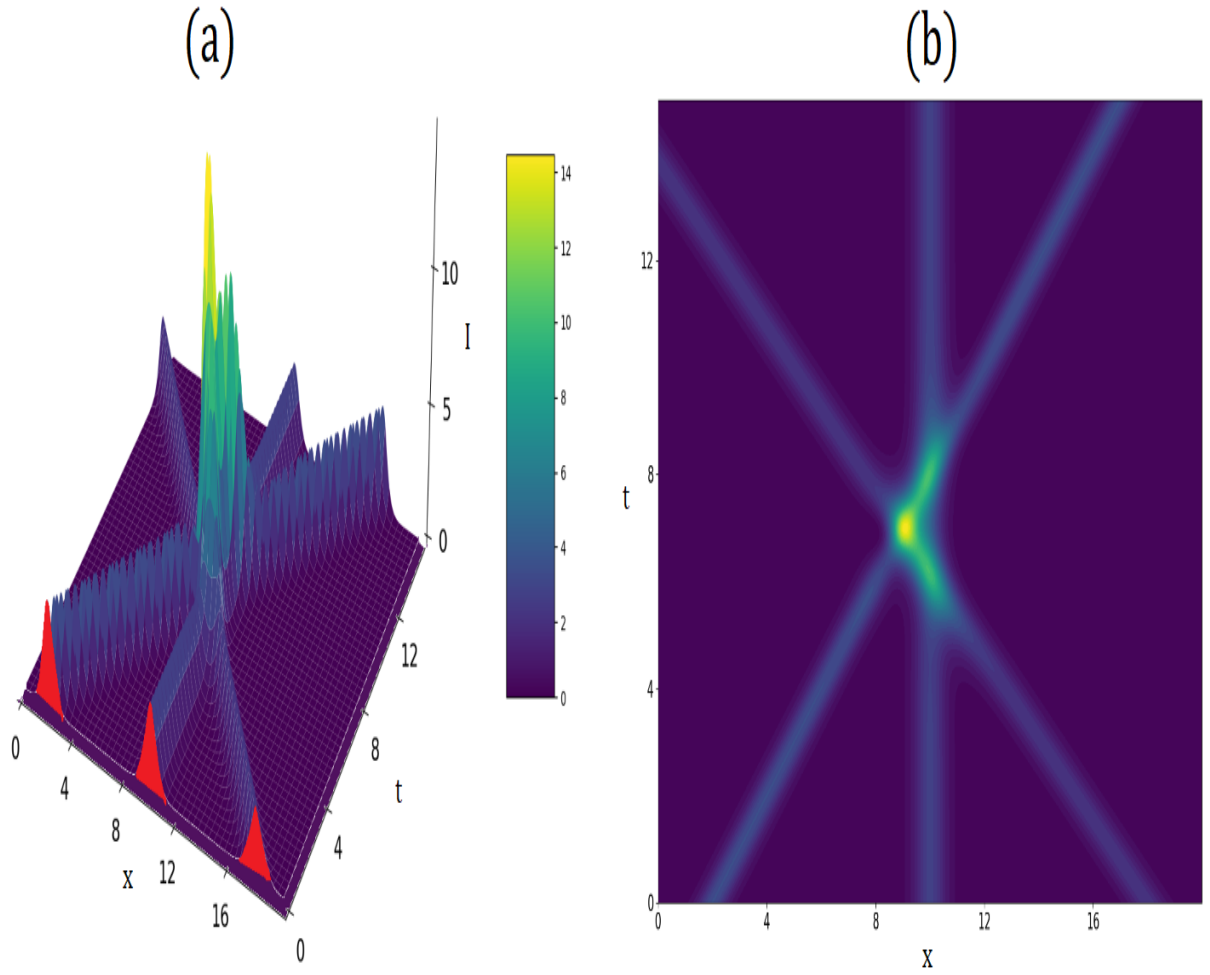


Figura 2.3: Dinámica de un 3-soliton de la ecuación (2.33), $I = |q|^2$. Las amplitudes y velocidades iniciales de los solitones son: $\eta_{01} = 1, \eta_{02} = 0,8$ y $\eta_{03} = 0,9$; $\kappa_{01} = -0,5, \kappa_{02} = 0,65$ y $\kappa_{03} = 0$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

Capítulo 3

La Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden

3.1. La Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden

La NLSE de primer orden pueden describir fenómenos como los solitones y las ondas estacionarias, pero a menudo no capturan adecuadamente efectos más complejos, como la dispersión anómala, el manejo de señales en sistemas ópticos, o la dinámica de pulsos ultracortos en fibras ópticas [33,34]. Al introducir términos de dispersión de orden superior, las ecuaciones se vuelven capaces de modelar una gama más amplia de fenómenos, incluyendo la dispersión de orden más alto y las interacciones no triviales entre solitones. Por ejemplo, la ecuación de Schrödinger no lineal de cuarto orden (cuya dispersión es de orden superior) es crucial en la descripción de la dinámica de pulsos en fibras ópticas donde la dispersión cromática de tercer orden y otros efectos de dispersión de alto orden son significativos [35,36].

Nuestro primer modelo para una ecuación no lineal de Schrödinger con dispersión de cuarto orden (4NLSE) es:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c|u|^2u = 0. \quad (3.1)$$

Queremos investigar si la ecuación (3.1) admite soluciones solitónicas. En trabajos previos [37,38], se ha demostrado que esta ecuación no es comple-

tamente integrable mediante el método de la Transformada de Dispersión Inversa (IST). Por lo tanto, es necesario recurrir a otras metodologías para obtener soluciones de la ecuación (3.1). En la siguiente sección, abordaremos esto utilizando el método tanh, propuesto por Abdul-Majid Wazwaz.

3.2. Soluciones para la Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden

Podemos encontrar soluciones a esta ecuación siguiendo la metodología del método tanh presentada en [39]. Esta metodología consiste en transformar una ecuación diferencial parcial de la forma

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3.2)$$

en una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$Q(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi), \dots) = 0, \quad (3.3)$$

mediante la introducción de una nueva variable $\xi(x, t) = x - ct$.

En el siguiente paso, se introduce a la ecuación una nueva variable mediante:

$$y = \tanh(\mu\xi), \quad (3.4)$$

donde μ toma el papel del número de onda en la solución, usando este cambio de variable es posible reescribir los operadores diferenciales $\frac{d^n}{d\xi^n}$ de

la ecuación diferencial ordinaria como :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\xi} &= \mu(1-y^2) \frac{d}{dy}, \\
 \frac{d^2}{d\xi^2} &= -2\mu^2 y(1-y^2) \frac{d}{dy} + \mu^2(1-y^2)^2 \frac{d^2}{dy^2}, \\
 \frac{d^3}{d\xi^3} &= 2\mu^3(1-y^2)(2y^2-1) \frac{d}{dy} \\
 &\quad -6\mu^3(1-y^2)^2 \frac{d^2}{dy^2} + \mu^3(1-y^2)^3 \frac{d^3}{dy^3}, \\
 \frac{d^4}{d\xi^4} &= 12\mu^4 y(1-y^2) \frac{d}{dy} \\
 &\quad -\mu^4(1-y^2)^2(8y-34y^2) \frac{d^2}{dy^2} \\
 &\quad -12\mu^4 y(1-y^2)^3 \frac{d^3}{dy^3} + \mu^4(1-y^2)^4 \frac{d^4}{dy^4}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

La hipótesis principal del método consiste en considerar que la función $u(\mu\xi)$ se puede descomponer como serie de potencias de \tanh

$$u(\mu\xi) = S(y) = \sum_{k=0}^M a_k y^k,
 \tag{3.6}$$

Donde M es un entero positivo que, en la mayoría de los casos, se determinará en el proceso. Sin embargo, si M no es un entero, se suele utilizar una fórmula de transformación para superar esta dificultad. Al sustituir (3.5) y (3.6) en la EDO (3.3) , se obtiene una ecuación algebraica en términos de potencias de y . Para determinar el parámetro M , normalmente se equilibran los términos lineales de mayor orden en la ecuación resultante con los términos no lineales de mayor orden.

$$\begin{aligned}
 u &\rightarrow M \\
 u^2 &\rightarrow 2M \\
 \dots\dots\dots \\
 u^n &\rightarrow nM
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
u' &\rightarrow M + 1 \\
u'' &\rightarrow M + 2 \\
&\dots\dots\dots \\
u^{(r)} &\rightarrow M + r
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

Una vez determinado M , se recogen todos los coeficientes de las potencias de y en la ecuación resultante, los cuales deben anularse. Esto conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas que involucra los parámetros $a_k, (k = 0, \dots, M), \mu$ y c . Una vez determinados estos parámetros, y sabiendo que M es un entero positivo en la mayoría de los casos, se puede obtener una solución analítica $u(x, t)$ en forma cerrada usando (3.6).

Ahora apliquemos esta metodología a la NLSE (3.1), primero consideremos la transformación

$$u = W(x)e^{i\alpha t}, \tag{3.9}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, mediante esta transformación la NLSE (3.1) se reduce a una ecuación ordinaria en la forma :

$$bW^{(4)} - aW'' + \alpha W - cW^3 = 0. \tag{3.10}$$

A esta ecuación podemos aplicar el método tanh descrito anteriormente. Para ello, realizamos el cambio de variable $y = \tanh(\mu x)$ y utilizamos los correspondientes operadores diferenciales (3.5), que en este caso particular toman la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} &= -2\mu^2 y(1 - y^2) \frac{d}{dy} + \mu^2(1 - y^2)^2 \frac{d^2}{dy^2}, \\
\frac{d^4}{dx^4} &= -8\mu^4 y(1 - y^2)(3y^2 - 2) \frac{d}{dy} \\
&\quad + 4\mu^4(1 - y^2)^2(9y^2 - 2)^2 \frac{d^2}{dy^2} \\
&\quad - 12\mu^4 y(1 - y^2)^3 \frac{d^3}{dy^3} + \mu^4(1 - y^2)^4 \frac{d^4}{dy^4},
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

De esta manera, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned}
& -a[-2\mu^2y(1-y^2)\frac{d}{dy} + \mu^2(1-y^2)^2\frac{d^2}{dy^2}]S(y) \\
& \quad + b[-8\mu^4y(1-y^2)(3y^2-2)\frac{d}{dy} \\
& \quad \quad + 4\mu^4(1-y^2)^2(9y^2-2)^2\frac{d^2}{dy^2} \\
& \quad - 12\mu^4y(1-y^2)^3\frac{d^3}{dy^3} + \mu^4(1-y^2)^4\frac{d^4}{dy^4}]S(y) \\
& \quad + \alpha S(y) - cS^3(y) = 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $S(y) = W(\mu x)$. Usando la suposición principal del método

$$W(\mu x) = S(y) = \sum_{k=0}^M a_k y^k, \tag{3.13}$$

encontramos que para este caso, $3M = M + 4$ y por lo tanto $M = 2$, así la serie solo contiene los primeros tres términos

$$S(y) = W(\mu x) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2. \tag{3.14}$$

Sustituyendo la ecuación (3.14) en la ecuación (3.10) y realizando las derivadas correspondientes obtenemos una ecuación algebraica mediante la cual llegamos al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
& -16ba_2\mu^4 - 2aa_2\mu^2 - ca_0^3 + \alpha a_0 = 0, \\
& 16ba_1\mu^4 + 2aa_1\mu^2 - 3ca_0^2a_1 + \alpha a_1 = 0, \\
& 136ba_2\mu^4 + 8aa_2\mu^2 + \alpha a_2 - 3ca_0a_1^2 + 3ca_0^2a_2 = 0, \\
& -40ba_1\mu^4 - 2aa_1\mu^2 - ca_1^3 - 6ca_0a_1a_2 = 0, \\
& -240ba_2\mu^4 - 6aa_2\mu^2 - 3ca_0a_2^2 - 3ca_1^2a_2 = 0, \\
& \quad 24ba_1\mu^4 - 3ca_1a_2^2 = 0, \\
& \quad 120ba_2\mu^4 - ca_2^3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

El sistema (3.15) se resuelve para encontrar el valor de los coeficientes a_0, a_1, a_2, μ y α . Finalmente, encontramos que estos coeficientes tienen los

valores:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\sqrt{\frac{3a^2}{10bc}}, \\
a_1 &= 0, \\
a_2 &= -a_0 = \sqrt{\frac{3a^2}{10bc}}, \\
\mu &= \sqrt{\frac{a}{20b}}, \\
\alpha &= \frac{4a^2}{25b}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Regresando a las variables iniciales, tenemos soluciones que dependen de los signos de los coeficientes a y b :

Si $a/b < 0$ tenemos el siguiente par de soluciones:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{3a^2}{10bc}} \sec^2 \left(\sqrt{-\frac{a}{20b}} x \right) e^{i\alpha t}, \tag{3.17}$$

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{3a^2}{10bc}} \csc^2 \left(\sqrt{-\frac{a}{20b}} x \right) e^{i\alpha t}. \tag{3.18}$$

Si $a/b > 0$ encontramos el siguiente par de soluciones:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{3a^2}{10bc}} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{a}{20b}} x \right) e^{i\alpha t}, \tag{3.19}$$

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{3a^2}{10bc}} \operatorname{csch}^2 \left(\sqrt{\frac{a}{20b}} x \right) e^{i\alpha t}. \tag{3.20}$$

3.3. Discusión sobre las soluciones para la NLSE y la NLSE de cuarto orden

Como hemos mencionado anteriormente, la ecuación de Schrödinger no lineal de cuarto orden (3.1), no puede resolverse mediante el método de dispersión inversa (IST). Sin embargo, hemos demostrado que bajo ciertas

condiciones para los parámetros a y b , la 4NLSE admite soluciones analíticas. Una de estas soluciones, dada por (3.19), presenta una forma similar al 1-soliton de la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE). Esta similitud puede observarse en la figura 3.1, donde la solución tiene la forma característica de un pulso solitónico. A pesar de la similitud estructural entre ambas soluciones, la presencia del término de cuarto orden en la 4NLSE introduce modificaciones significativas en la solución. En particular, la amplitud y la anchura del pulso están influenciadas por el parámetro b , que controla la dispersión de orden superior. Esto contrasta con el 1-soliton de la NLSE, donde la dispersión es únicamente de segundo orden, y la forma del pulso es menos susceptible a modificaciones en la dinámica. Otra diferencia crucial radica en la estabilidad de las soluciones. Mientras que los solitones en la NLSE son conocidos por su estabilidad robusta frente a pequeñas perturbaciones, la introducción de un término de dispersión de cuarto orden podría afectar esta estabilidad. Estudios previos han sugerido que, en algunos casos, la estabilidad de solitones en ecuaciones de orden superior puede ser más delicada, lo que podría llevar a dinámicas más complejas o incluso a la desestabilización del soliton [40].

Desde una perspectiva física, los términos de cuarto orden pueden interpretarse como correcciones de dispersión más finas, que son relevantes en sistemas donde los efectos no lineales y dispersivos de orden superior no pueden ser ignorados, como en la propagación de pulsos en fibras ópticas con anchos de banda muy amplios o en la dinámica de fluidos en condiciones extremas. Esta complejidad adicional también se refleja en la distribución de energía en el sistema. Comparando las energías asociadas a ambas soluciones, la 4NLSE (3.1) muestra una distribución más compleja, con potenciales diferencias en la energía total y su concentración en el pulso.

En el siguiente capítulo, avanzaremos aún más en nuestra investigación utilizando la jerarquía AKNS para construir un modelo de cuarto orden de la ecuación de Schrödinger no lineal, no isoespectral y no autónoma, que satisfaga la propiedad de integrabilidad. Este enfoque nos permitirá explorar cómo la integrabilidad completa afecta las soluciones de la ecuación. Obtendremos soluciones explícitas para esta versión integrable de la 4NLSE y realizaremos una comparación con las soluciones de la NLSE de segundo orden.

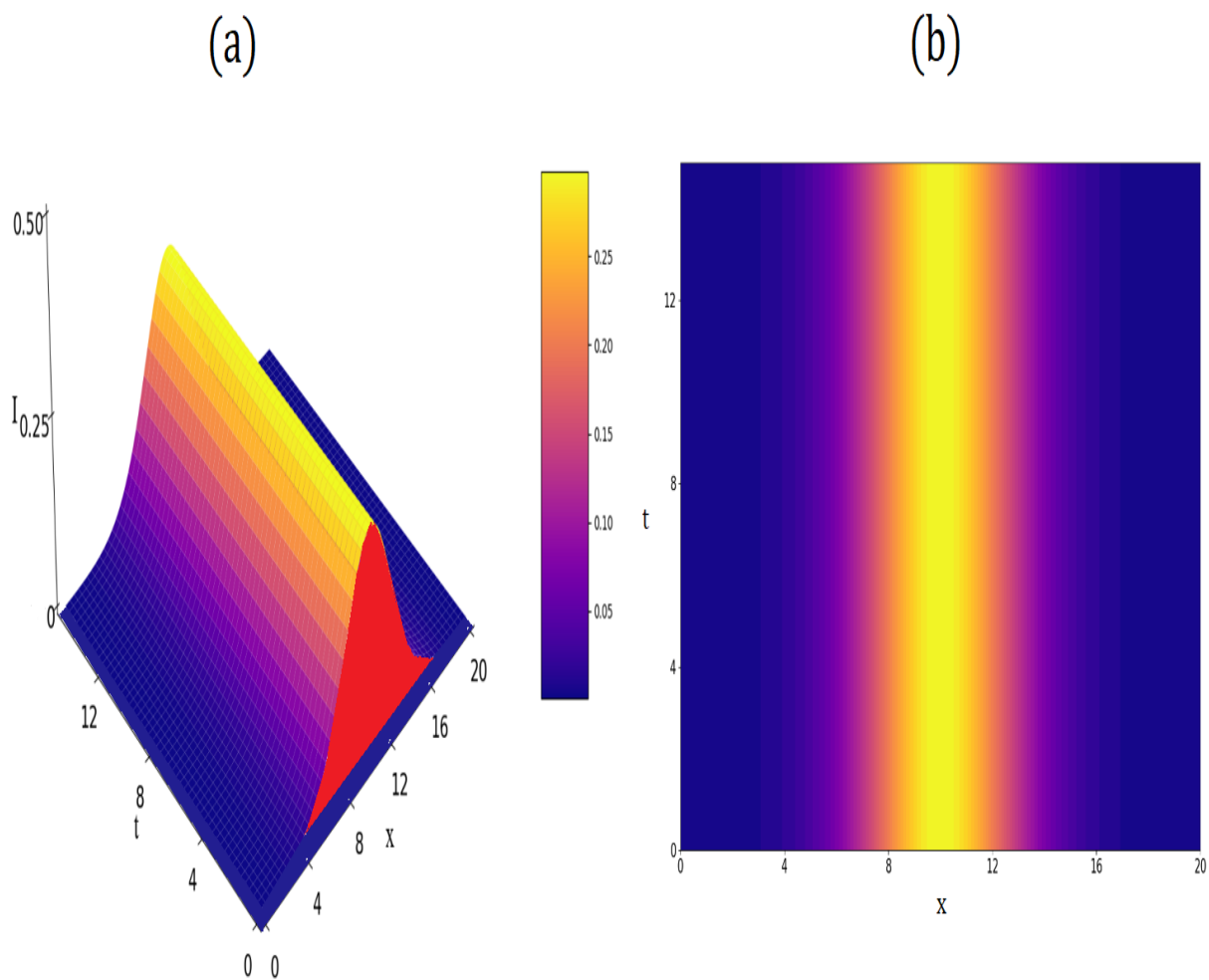


Figura 3.1: Dinámica de la solución (3.19), $I = |q|^2$. Los valores para los coeficientes son; $a = b = c = 2$, $\alpha = 4/25$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

Capítulo 4

La Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden no autónoma completamente integrable

4.1. Ecuaciones tipo NLSE de ordenes mayores no autónomas

En muchos sistemas físicos, los parámetros que describen la evolución de las ondas o partículas no son constantes en el tiempo, sino que varían debido a influencias externas o cambios en las condiciones del sistema. Los sistemas no autónomos permiten modelar estas variaciones temporales o espaciales de los parámetros del sistema, lo cual es esencial para describir fenómenos como la modulación de amplitud o la generación de ondas en medios con parámetros que cambian con el tiempo. Por ejemplo, en fibras ópticas cuyo índice de refracción varía en el tiempo o el espacio, o en sistemas de plasma donde las propiedades del medio cambian debido a interacciones externas, una ecuación no autónoma es necesaria para describir adecuadamente la evolución de los solitones u otros fenómenos.

La inclusión de términos de orden superior y la consideración de sistemas no autónomos en las NLSE abre la puerta al descubrimiento de nuevas soluciones y estructuras matemáticas, como solitones no autónomos, breathers,

y ondas periódicas moduladas. Estas soluciones pueden tener aplicaciones directas en la física, como en la generación y control de pulsos ópticos, la teoría de la información cuántica, y en el estudio de las propiedades de materiales novedosos como los metamateriales [41–53].

4.2. La jerarquía AKNS para la Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden no autónoma completamente integrable

Como se mencionó en el capítulo 1, es posible utilizar la teoría de sistemas integrables, y en particular la jerarquía AKNS, para derivar ecuaciones dispersivas integrables. Consideremos la siguiente definición para los pares de Lax:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} -i\Lambda & \sqrt{\sigma}F(t)^\gamma e^{i/2\varphi(x,t)}q(x,t) \\ \sqrt{\sigma}F(t)^\gamma e^{-i/2\varphi(x,t)}r(x,t) & i\Lambda \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

y

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Haciendo uso de la condición de cero curvatura:

$$\partial_t \hat{F} - \partial_x \hat{G} + [\hat{F}, \hat{G}] = 0, \quad (4.3)$$

se obtiene la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} -i\Lambda_t - A_x & \sqrt{\sigma} \left[F_t^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} + F^\gamma q_t e^{\frac{i}{2}\varphi} + \frac{i}{2} F^\gamma q \varphi_t e^{\frac{i}{2}\varphi} \right] - B_x \\ \sqrt{\sigma} \left[F_t^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} + F^\gamma r_t e^{-\frac{i}{2}\varphi} - \frac{i}{2} F^\gamma r \varphi_t e^{-\frac{i}{2}\varphi} \right] - C_x & i\Lambda_t + A_x \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma} \left[-F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C + F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B \right] & 2i\Lambda B + 2\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A \\ -2i\Lambda C - 2\sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A & \sqrt{\sigma} \left[-F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B + F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C \right] \end{pmatrix},$$

por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
-i\Lambda_t - A_x &= \sqrt{\sigma} \left[-F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C + F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B \right], \\
\sqrt{\sigma} \left[F_t^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} + F^\gamma q_t e^{\frac{i}{2}\varphi} + \frac{i}{2} F^\gamma q \varphi_t e^{\frac{i}{2}\varphi} \right] - B_x &= 2i\Lambda B + 2\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A, \\
\sqrt{\sigma} \left[F_t^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} + F^\gamma r_t e^{-\frac{i}{2}\varphi} - \frac{i}{2} F^\gamma r \varphi_t e^{-\frac{i}{2}\varphi} \right] - C_x &= -2i\Lambda C - 2\sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A, \\
i\Lambda_t + A_x &= \sqrt{\sigma} \left[-F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B + F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C \right].
\end{aligned}$$

Entonces

$$A_x = \sqrt{\sigma} \left[F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C - F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B \right] - i\Lambda_t, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
B_x &= \sqrt{\sigma} \left[F_t^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} + F^\gamma q_t e^{\frac{i}{2}\varphi} + \frac{i}{2} F^\gamma q \varphi_t e^{\frac{i}{2}\varphi} \right] \\
&\quad - 2i\Lambda B + 2\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A,
\end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
C_x &= \sqrt{\sigma} \left[F_t^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} + F^\gamma r_t e^{-\frac{i}{2}\varphi} - \frac{i}{2} F^\gamma r \varphi_t e^{-\frac{i}{2}\varphi} \right] \\
&\quad + 2i\Lambda C + 2\sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A.
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Como hemos mencionado en 1.3 considerando el ansatz de que A, B, C , y para este caso consideramos que también Λ_t puede ser escrito como serie de potencias de Λ . Para poder obtener una ecuación dispersiva de orden cuarto

necesitamos tomar términos hasta orden cuatro en la serie para A, B, C y a termino cuadrático en Λ_t ;

$$\begin{aligned}
A &= A_0 + A_1\Lambda + A_2\Lambda^2 + A_3\Lambda^3 + A_4\Lambda^4, \\
B &= B_0 + B_1\Lambda + B_2\Lambda^2 + B_3\Lambda^3 + B_4\Lambda^4, \\
C &= C_0 + C_1\Lambda + C_2\Lambda^2 + C_3\Lambda^3 + C_4\Lambda^4, \\
\Lambda_t &= \lambda_0 + \lambda_1\Lambda + \lambda_2\Lambda^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Introduciendo los desarrollos en series (4.7) en el conjunto de ecuaciones (4.4)–(4.6), obtenemos las siguientes tres ecuaciones

$$\begin{aligned}
A_x &= \frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x}\Lambda + \frac{\partial A_2}{\partial x}\Lambda^2 + \frac{\partial A_3}{\partial x}\Lambda^3 + \frac{\partial A_4}{\partial x}\Lambda^4 \\
&= \sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} (C_0 + C_1\Lambda + C_2\Lambda^2 + C_3\Lambda^3 + C_4\Lambda^4) \\
&\quad - \sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} (B_0 + B_1\Lambda + B_2\Lambda^2 + B_3\Lambda^3 + B_4\Lambda^4) \\
&\quad - i(\lambda_0 + \lambda_1\Lambda + \lambda_2\Lambda^2),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\partial B_0}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial x}\Lambda + \frac{\partial B_2}{\partial x}\Lambda^2 + \frac{\partial B_3}{\partial x}\Lambda^3 + \frac{\partial B_4}{\partial x}\Lambda^4 \\
&= -2i (B_0\Lambda + C_1\Lambda^2 + B_2\Lambda^3 + B_3\Lambda^4 + B_4\Lambda^5) \\
&\quad - 2\sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} (A_0 + A_1\Lambda + A_2\Lambda^2 + A_3\Lambda^3 + A_4\Lambda^4) \\
&\quad + \sqrt{\sigma}F_t^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} + \sqrt{\sigma}F^\gamma q_t e^{\frac{i}{2}\varphi} + \sqrt{\sigma}\frac{i}{2}F^\gamma q \varphi_t e^{\frac{i}{2}\varphi},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
C_x &= \frac{\partial C_0}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial x}\Lambda + \frac{\partial C_2}{\partial x}\Lambda^2 + \frac{\partial C_3}{\partial x}\Lambda^3 + \frac{\partial C_4}{\partial x}\Lambda^4 \\
&= 2i (C_0\Lambda + C_1\Lambda^2 + C_2\Lambda^3 + C_3\Lambda^4 + C_4\Lambda^5) \\
&\quad + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} (A_0 + A_1\Lambda + A_2\Lambda^2 + A_3\Lambda^3 + A_4\Lambda^4) \\
&\quad + \sqrt{\sigma}F_t^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} + \sqrt{\sigma}F^\gamma r_t e^{-\frac{i}{2}\varphi} - \sqrt{\sigma}\frac{i}{2}F^\gamma q \varphi_t e^{-\frac{i}{2}\varphi}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Asociando cada uno de los términos con la misma potencia de Λ en las tres ecuaciones anteriores, obtenemos el siguiente sistema de 17 ecuaciones

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} = \sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_0 - \sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_0 - i\lambda_0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = \sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_1 - \sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_1 - i\lambda_1, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = \sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_2 - \sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_2 - i\lambda_2, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial x} = \sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_3 - \sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_3, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial x} = \sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_4 - \sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_4, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial x} = & -2\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_0 + \sqrt{\sigma} F_t^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} + \sqrt{\sigma} F^\gamma q_t e^{\frac{i}{2}\varphi} \\ & + \sqrt{\sigma} \frac{i}{2} F^\gamma q \varphi_t e^{\frac{i}{2}\varphi}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = -2iB_0 - 2\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_1, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = -2iB_1 - 2\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_2, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial x} = -2iB_2 - 2\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_3, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial B_4}{\partial x} = -2iB_3 - 2\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_4, \quad (4.20)$$

$$-2iB_4 = 0, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_0}{\partial x} = & 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_0 + \sqrt{\sigma}F_t^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} + \sqrt{\sigma}F^\gamma r_t e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ & - \sqrt{\sigma}\frac{i}{2}F^\gamma r \varphi_t e^{-\frac{i}{2}\varphi}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = 2iC_0 + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_1, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = 2iC_1 + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_2, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial x} = 2iC_2 + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_3, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial x} = 2iC_3 + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_4, \quad (4.26)$$

$$2iC_4 = 0. \quad (4.27)$$

Las cuales tenemos que resolver de manera iterada para determinar A_i, B_i, C_i con $i = 1, \dots, 4$. Y así poder determinar la forma de A, B, C en el para de Lax. De las ecuaciones (4.21) y (4.27) se obtiene de inmediato que

$$C_4 = B_4 = 0, \quad (4.28)$$

ahora substituyendo los valores de B_4 y C_4 en (4.15) obtenemos que:

$$\frac{\partial A_4}{\partial x} = 0, \quad (4.29)$$

por lo tanto

$$A_4 = cte = a_4. \quad (4.30)$$

Con este valor de A_4 y $B_4 = 0$ podemos calcular B_3 mediante la ecuación (4.20), tenemos entonces que

$$\frac{\partial B_4}{\partial x} = -2iB_3 - 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} a_4 = 0, \quad (4.31)$$

por lo tanto

$$B_3 = i\sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} qa_4, \quad (4.32)$$

de manera similar con A_4 y $C_4 = 0$ podemos calcular C_3 mediante la ecuación (4.26),

$$\frac{\partial C_4}{\partial x} = 2iC_3 + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma e^{-\frac{i}{2}\varphi} a_4 r = 0, \quad (4.33)$$

entonces

$$C_3 = i\sqrt{\sigma}F^\gamma e^{-\frac{i}{2}\varphi} ra_4, \quad (4.34)$$

con estos valores de B_3 y C_3 calculamos A_3 mediante (4.14),

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial x} &= \sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_3 - \sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_3 \\ &= i\sqrt{\sigma}F^{2\gamma} qra_4 - i\sqrt{\sigma}F^{2\gamma} qra_4 = 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

así tenemos que

$$A_3 = cte = a_3. \quad (4.36)$$

Ahora, mediante (4.19) y los valores de B_3 , A_3 podemos calcular B_2 ,

$$\frac{\partial B_3}{\partial x} = -2iB_2 - 2\sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_3, \quad (4.37)$$

entonces

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{i}{2} \frac{\partial B_3}{\partial x} + i\sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} qA_3 \\ &= \frac{i}{2} \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} \left(ia_4 q_x - \frac{1}{2} a_4 q \varphi_x + 2qa_3 \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

por lo tanto

$$B_2 = \frac{i}{2} \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} \left(ia_4 q_x - \frac{1}{2} a_4 q \varphi_x + 2qa_3 \right) \quad (4.39)$$

de manera similar mediante C_3 , A_3 y (4.25) podemos calcular C_2 , tenemos que

$$\frac{\partial C_3}{\partial x} = 2iC_2 + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_3, \quad (4.40)$$

entonces

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{i}{2} \frac{\partial C_3}{\partial x} + i\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_3 \\ &= \frac{i}{2} \sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} \left(-ia_4 r_x - \frac{1}{2}a_4 r \varphi_x + 2ra_3 \right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

así

$$C_2 = \frac{i}{2} \sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} \left(-ia_4 r_x - \frac{1}{2}a_4 r \varphi_x + 2ra_3 \right), \quad (4.42)$$

calculados B_2 y C_2 ahora podemos calcular A_2 mediante la ecuación (4.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial x} &= \sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_2 - \sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_2 - i\lambda_2 \\ &= \sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} \left[\frac{i}{2} \sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} \left(-ia_4 r_x - \frac{1}{2}a_4 r \varphi_x + 2ra_3 \right) \right] \\ &\quad - \sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} \left[\frac{i}{2} \sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} \left(ia_4 q_x - \frac{1}{2}a_4 q \varphi_x + 2qa_3 \right) \right] - i\lambda_2 \\ &= \frac{1}{2} \sigma F^{2\gamma} a_4 \frac{d(rq)}{dx} - i\lambda_2, \end{aligned} \quad (4.43)$$

por lo que tenemos que

$$A_2 = \frac{1}{2} \sigma F^{2\gamma} a_4 \int \frac{d(rq)}{dx} dx - \int i\lambda_2 dx = \frac{1}{2} \sigma F^{2\gamma} a_4 r q - i\lambda_2 x + a_2, \quad (4.44)$$

y con esto

$$A_2 = \frac{1}{2} \sigma F^{2\gamma} a_4 r q - i\lambda_2 x + a_2. \quad (4.45)$$

Ahora, mediante (4.18) y los valores de B_2, A_2 podemos calcular B_1 ,

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = -2iB_1 - 2\sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_2,$$

entonces

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{i}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x} + i\sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_2 \\ &= \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} \times \\ &\quad \left[\frac{1}{4}a_4\varphi_x q_x + \frac{i}{16}a_4q\varphi_x^2 - \frac{i}{4}a_3q\varphi_x - \frac{i}{4}a_4q_{xx} + \frac{1}{8}a_4q\varphi_{xx} - \frac{1}{2}a_3q_x + ia_2q + \frac{i}{2}a_4\sigma F^{2\gamma} q^2 r + \lambda_2 x q \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

de manera similar mediante C_2, A_2 y (4.24) podemos calcular C_1 , tenemos que

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = 2iC_1 + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_2,$$

así

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{i}{2} \frac{\partial C_2}{\partial x} + i\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_2 \\ &= \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{-\frac{i}{2}\varphi} \times \\ &\quad \left[-\frac{1}{4}a_4\varphi_x r_x + \frac{i}{16}a_4r\varphi_x^2 - \frac{i}{4}a_3r\varphi_x - \frac{i}{4}a_4r_{xx} - \frac{1}{8}a_4r\varphi_{xx} + \frac{1}{2}a_3r_x + ia_2r + \frac{i}{2}a_4\sigma F^{2\gamma} r^2 q + \lambda_2 x r \right]. \end{aligned}$$

Con estos valores dados podemos entonces calcular A_1 de (4.12) ;

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = \sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_1 - \sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_1 - i\lambda_1,$$

entonces

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma F^{2\gamma} \left[-\frac{1}{4}a_4 \int \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_x q r) dx + \frac{i}{4}a_4 \int \frac{\partial}{\partial x} (q_x r) dx - \frac{i}{4}a_4 \int \frac{\partial}{\partial x} (r_x q) dx + \frac{1}{2}a_3 \int \frac{\partial}{\partial x} (q r) dx \right] \\ &\quad - i\lambda_1 \int dx, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$A_1 = a_1 - i\lambda_1 x + \frac{1}{4}\sigma F^{2\gamma} [-a_4\varphi_x q r + ia_4(q_x r - q r_x) + 2a_3 q r].$$

Ahora, mediante B_1, A_1 y la ecuación (4.17)

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = -2iB_0 - 2\sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_1,$$

podemos calcular B_0 , en donde tenemos entonces que

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{i}{2}\frac{\partial B_1}{\partial x} + i\sqrt{\sigma}F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} A_1 \\ &= \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} a_4 \left[\frac{3}{16}iq_{xx}\varphi_x + \frac{3}{16}iq_x\varphi_{xx} + \frac{1}{8}q_{xxx} + \frac{i}{16}q\varphi_{xxx} - \frac{3}{32}q_x\varphi_x^2 - \frac{i}{64}q\varphi_x^3 - \frac{3}{32}q\varphi_x\varphi_{xx} \right] \\ &\quad + \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} a_3 \left[\frac{i}{16}q\varphi_x^2 + \frac{1}{4}q_x\varphi_x + \frac{1}{8}q\varphi_{xx} - \frac{i}{4}q_{xx} \right], \\ &\quad + \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} a_2 \left[-\frac{1}{2}q_x - \frac{i}{4}q\varphi_x \right] + \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} \lambda_2 \left[\frac{i}{2}q + \frac{i}{2}xq_x - \frac{1}{4}xq\varphi_x \right] \\ &\quad + \sqrt{\sigma}F^\gamma e^{\frac{i}{2}\varphi} [ia_1 + \lambda_1 x] q + \sigma^{3/2}F^{3\gamma} e^{\frac{i}{2}\varphi} \left[-\frac{3}{8}iq^2 r\varphi_x a_4 - \frac{3}{4}qq_x r a_4 + \frac{i}{2}q^2 r a_3 \right] \end{aligned}$$

similarmente, mediante el uso de C_1, A_1 y la ecuación (4.55)

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = 2iC_0 + 2\sqrt{\sigma}F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_1,$$

podemos calcular C_0 , mediante

$$\begin{aligned}
C_0 &= -\frac{i}{2} \frac{\partial C_1}{\partial x} + i\sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{-\frac{i}{2}\varphi} A_1 \\
&= \sqrt{\sigma} F^\gamma e^{-\frac{i}{2}\varphi} a_4 \left[\frac{3}{16} i r_{xx} \varphi_x + \frac{3}{16} i r_x \varphi_{xx} + \frac{1}{8} r_{xxx} + \frac{i}{16} r \varphi_{xxx} - \frac{3}{32} r_x \varphi_x^2 - \frac{i}{64} r \varphi_x^3 + \frac{3}{32} r \varphi_x \varphi_{xx} \right] \\
&\quad + \sqrt{\sigma} F^\gamma e^{-\frac{i}{2}\varphi} a_3 \left[\frac{i}{16} r \varphi_x^2 + \frac{1}{4} r_x \varphi_x - \frac{1}{8} r \varphi_{xx} + \frac{i}{4} r_{xx} \right], \\
&\quad + \sqrt{\sigma} F^\gamma e^{-\frac{i}{2}\varphi} a_2 \left[\frac{1}{2} r_x - \frac{i}{4} r \varphi_x \right] + \sqrt{\sigma} F^\gamma e^{-\frac{i}{2}\varphi} \lambda_2 \left[-\frac{i}{2} r - \frac{i}{2} x r_x - \frac{1}{4} x r \varphi_x \right] \\
&\quad + \sqrt{\sigma} F^\gamma e^{-\frac{i}{2}\varphi} [i a_1 + \lambda_1 x] r + \sigma^{3/2} F^{3\gamma} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \left[-\frac{3}{8} i r^2 q \varphi_x a_4 + \frac{3}{4} r r_x q a_4 + \frac{i}{2} r^2 q a_3 \right]
\end{aligned}$$

gracias a estos valores de B_0 y C_0 podemos calcular A_0 mediante la ecuación (4.11)

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} = \sqrt{\sigma} F^\gamma q e^{\frac{i}{2}\varphi} C_0 - \sqrt{\sigma} F^\gamma r e^{-\frac{i}{2}\varphi} B_0 - i\lambda_0,$$

con lo que

$$\begin{aligned}
A_0 &= i\gamma_0 - i\lambda_0 x + 3i\sigma^2 \frac{R_4^2}{D_4} |q|^4 + \frac{i}{2} \lambda_2 \sigma F^{2\gamma} \left[x |q|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dx' \right] \\
&\quad + i\sigma R_4 [q q_{xx}^*] + q^* q_{xx} - |q_x|^2 - \frac{3}{4} |q|^2 \varphi_x^2 - i \frac{3}{2} \varphi_x [q q_x^* - q_x q^*] \\
&\quad - i\sigma R_3 \left[\varphi_x |q|^2 + i(q q_x^* - q_x q^*) + \frac{i}{2} \sigma R_2 |q|^2 \right].
\end{aligned}$$

en donde para la obtención de esta ecuación se considero la hipótesis principal de la Jerarquía AKNS $r = q^*$ y $a_4 = 8iD_4$.

Entonces, las formas completas de A , B y C son:

$$\begin{aligned}
A = & i\gamma_0 - i\lambda_0 x + \frac{i}{2}\lambda_2\sigma F \int_{-\infty}^x |q|^2 dx' + \frac{i}{2}\sigma F\lambda_2 x |q|^2 + \frac{i}{2}\sigma R_2 |q|^2 \\
& + iR_3\sigma \left[-\varphi_x |q|^2 + i(-qq_x^* + q_x q^*) \right] + 3iF^2 |q|^4 \\
& - iR_4\sigma \left[(-qq_{xx}^* - q_{xx}q^* + q_x q_{xx}^*) + i\frac{3}{2}\varphi_x (qq_x^* - q_x q^*) + \frac{3}{4}\varphi_x^2 |q|^2 \right] \quad (4.47) \\
& + i\Lambda \left\{ -\lambda_1 x + 2\sigma R_3 |q|^2 + 2\sigma R_4 \left[\varphi_x |q|^2 + (qq_x^* - q_x q^*) \right] \right\} \\
& - i\Lambda^2 \left(4\sigma R_4 |q|^2 + D_2 - \lambda_2 x \right) - 4iD_3\Lambda^3 + 8iD_4\Lambda^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & i\sqrt{\sigma}F^{1/2} \exp(i\varphi/2) \left\{ D_4 \left[q_{xxx} + \frac{3i}{2}\varphi_x q_{xx} + \frac{3}{4}(2i\varphi_{xx} - \varphi_x^2) q_x + \left(-\frac{i}{8}\varphi_x^3 + \frac{i}{2}\varphi_{xxx} - \frac{3}{4}\varphi_{xx}\varphi_x \right) q \right] \right. \\
& + D_3 \left(iq_{xx} - \varphi_x q_x - \frac{1}{2}\varphi_{xx}q - \frac{i}{4}\varphi_x^2 q \right) + \frac{1}{2}D_2 \left(q_x + \frac{i}{2}\varphi_x q \right) + \frac{1}{2}\lambda_2 \left(q + xq_x + \frac{i}{2}\varphi_x q \right) - i\lambda_1 xq \\
& + \sigma F \exp(i\varphi/2) \left(3D_4 |q|^2 q_x + 3iD_4 |q|^2 q \varphi_x + 2iD_3 |q|^2 q \right) \\
& + \left[-i(D_2 + \lambda_2 x)q - 4i\sigma F D_4 |q|^2 q + D_4 \left(-2iq_{xx} + 2\varphi_x q_x + \frac{i}{2}\varphi_x^2 q + \varphi_{xx}q \right) + D_3(2q_x + i\varphi_x q) \right] \Lambda \\
& \left. - (4D_4 q_x + 2iD_4 \varphi_x q + 4iD_3 q) \Lambda^2 + 8iD_4 q \Lambda^3 \right\},
\end{aligned}$$

$$C_0 = -B_0^*. \quad (4.48)$$

Finalmente, estamos en condiciones para poder calcular la ecuación de movimiento, esta se obtiene al sustituir todos los valores obtenidos anteriormente en (4.16) y (4.22), obteniendo:

$$\begin{aligned}
i q_t + [D_2 - 3(D_3 + 4D_4\theta_x)\theta_x] \hat{D}_{2x} + i(D_3 + 4D_4\theta_x)\hat{D}_{3x} \\
+ D_4\hat{D}_{4x} + 6iD_4\theta(q_{xx} + \sigma F|q|^2 q) + 4D_4\theta^3 x^3 q_x \\
+ \sigma R_4(8q_{xx}|q|^2 + 2q^2 q_{xx}^* + 4|q_x|^2 q + 6(q_x)^2 q^*) \quad (4.49) \\
+ 3\sigma R_3\theta_q \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dx' - U(x, t)q = i\Gamma(t)q.
\end{aligned}$$

en donde tenemos que los operadores \hat{D}_{2x} , \hat{D}_{3x} y \hat{D}_{4x} corresponden a las siguientes ecuaciones,

$$\hat{D}_{2x} = \frac{1}{2}q_{xx} + \sigma F|q|^2 q, \quad (4.50)$$

el cual representa el operador NLSE,

$$\hat{D}_{3x} = q_{xxx} + 6\sigma F|q|^2 q_x, \quad (4.51)$$

el cual representa el operador complejo mKdv, y

$$\hat{D}_{4x} = q_{xxxx} + 6F^2|q|^4 q, \quad (4.52)$$

el cual representa el operador de cuarto orden de una ecuación lineal. La condición de integrabilidad es establecida mediante las relaciones

$$-\frac{-F_t}{F} = \frac{W(R_4, D_4)}{R_4 D_4} = \frac{W(R_3, D_3)}{R_3 D_3} = \frac{W(R_2, D_2)}{R_2 D_2}, \quad (4.53)$$

donde en estas últimas ecuaciones la notación

$$R_2(t) = F(t)D_2(t), \quad R_3(t) = F(t)D_3(t), \quad R_4(t) = F(t)D_4(t), \quad (4.54)$$

fue introducida, y $W(R, D) = RD_t - DR_t$ es el Wronskiano de las funciones R y D .

La ecuación (4.54) automáticamente relaciona los parámetros de la ecuación (4.49) mediante la ligadura de Hirota [54]

$$\frac{R_2(t)}{D_2(t)} = \frac{R_3(t)}{D_3(t)} = \frac{R_4(t)}{D_4(t)} = F(t). \quad (4.55)$$

El potencial externo complejo que aparece en la ecuación (4.49) toma la forma de :

$$\begin{aligned} U(x, t) = & (-2\gamma_0 + 3D_4\Theta^2) + \left(2\lambda_0 + i\frac{3}{2}D_3\Theta^2\right) x \\ & + \left[\frac{1}{2}(\Theta_t - D_2\Theta^2) + 12D_4\Theta^3 - 6iD_4\Theta^3\right] x^2 + \frac{1}{2}D_3\Theta^3 x^3 - D_4\Theta^4 x^4, \end{aligned} \quad (4.56)$$

y el coeficiente de ganancia (ó absorción) es:

$$\gamma(x, t) = -\gamma \frac{F_t}{F} + \frac{1}{2}D_2\Theta - 12D_4\Theta^2. \quad (4.57)$$

En vista de cierta arbitrariedad en la elección de la fase $\varphi(x, t)$, se define una fase cuadrática autoinducida de acuerdo con los resultados de estudios previos sobre la NLSE, cmKdV y las ecuaciones de Hirota [50–52]

$$\varphi(x, t) = \Theta(t)x^2 + \varphi_0(t = 0). \quad (4.58)$$

Para esta elección de $\varphi(x, t)$, obtenemos relaciones entre los principales parámetros de la dispersión, el perfil de fase del solitón autoinducido $\Theta(t)$ y los parámetros λ relacionados con el parámetro espectral $\Lambda(t)$.

El potencial externo aparece en la Ecuación (4.49) como una serie polinómica de la forma de una función cuártica

$$U_{\text{ext}}(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)x^2 + \alpha_3(t)x^3 + \alpha_4(t)x^4, \quad (4.59)$$

donde los coeficientes $\alpha_n(t)$ están dados por

$$\alpha_0(t) = -2\gamma_0 + 3D_4\Theta^2, \quad (4.60)$$

$$\alpha_1(t) = 2\lambda_0 + i\frac{3}{2}D_3\Theta^2, \quad (4.61)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{2}\Theta_t - \frac{1}{2}D_2\Theta + 12D_4\Theta^3 - 6iD_4\Theta^3, \quad (4.62)$$

$$\alpha_3(t) = \frac{1}{2}D_3\Theta^3, \quad (4.63)$$

$$\alpha_4(t) = -D_4\Theta^4, \quad (4.64)$$

debido a la acción conjunta de la modulación de fase autoinducida, el parámetro espectral variable (que define la variación en el tiempo de las amplitudes y velocidades del solitón), y las dispersiones de orden superior.

4.3. Solitones no autónomos de la Ecuación no lineal de Schrödinger de cuarto orden con potenciales externos

Como ya se menciona en 2.3, se obtienen soluciones solitónicas para ecuaciones tipo NLSE provenientes de la jerarquía ANKS aplicando la transformada de Auto-Bäcklund y utilizando la relación de recurrencia

$$q_n = -q_{n-1}(x, t) - 4F^{-1/2}(t) \frac{\eta_n \Gamma_{n-1}(x, t)}{1 + |\Gamma_{n-1}(x, t)|^2}. \quad (4.65)$$

La ecuación 4.65 permite obtener la solución n-solitonica si la solución $(n - 1)$ y la función $\Gamma_{n-1}(x, t) = \psi_1(x, t)/\psi_2(x, t)$ $(n - 1)$ son conocidas. Con el fin de calcular soluciones solitónicas en el estado base el proceso recurrente empieza con la solución trivial $q(x, t) = 0$ (solución semilla), si esta condición es utilizada en los coeficientes $A, B, y C$, obtenemos los siguientes valores

$$\begin{aligned} A_0 &= i\gamma_0 - i\lambda_0x - i\Lambda\lambda_1x - i\Lambda^2D_2 + i\Lambda^2\lambda_2x - 4iD_3\Lambda^3 + 8iD_4\Lambda^4 \\ B_0 &= 0 \\ C_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

el subíndice en este caso implica el orden al que se tomo la solución semilla que en este caso en $n - 1 = 0$, entonces nosotros podemos calcular $\psi_1(x, t)$ y $\psi_2(x, t)$ mediante la resolución del sistema de ecuaciones obtenido mediante el problema de eigenvalores

$$\partial_x\psi(x, t) = \hat{F}\psi(x, t) \quad y \quad \partial_t\psi(x, t) = \hat{G}\psi(x, t),$$

que en este caso conllevaría a al sistema

$$\begin{aligned} \psi_{10,x}(x, t) &= -i\lambda\psi_{10}, \\ \psi_{20,x}(x, t) &= i\lambda\psi_{20}, \\ \psi_{10,x}(x, t) &= A_0\psi_{10}, \\ \psi_{20,x}(x, t) &= -A_0\psi_{20}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde los subíndices 10 ó 20 indica que es la función 1 ó 2 a orden 0 en la solución, y el subíndice x la derivada con respecto a esta variable. Este sistemas de ecuaciones tiene por solución entonces las siguientes funciones para $\psi_1(x, t)$ y $\psi_2(x, t)$

$$\begin{aligned} \psi_{10}(x, t) &= e^{-i\lambda x + \int_0^t A_0 d\tau}, \\ \psi_{20}(x, t) &= e^{i\lambda x - \int_0^t A_0 d\tau}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

por lo tanto tendríamos que

$$\Gamma_0(x, t) = \frac{\psi_{10}(x, t)}{\psi_{20}(x, t)} = e^{-2i\lambda x + 2\int_0^t A_0 d\tau}, \quad (4.69)$$

se propone que además que $\Gamma_0(x, t)$ tiene la forma exponencial $e^{-i\chi_1 + \xi_1}$, entonces

$$\Gamma_0(x, t) = \frac{\psi_{10}(x, t)}{\psi_{20}(x, t)} = e^{-2i\lambda x + 2\int_0^t A_0 d\tau} = e^{-i\chi_1 + \xi_1}, \quad (4.70)$$

lo siguiente por hacer es calcular los valores de χ_1 y ξ_1 esto se hace separando la parte real e imaginaria de la expresión $-2i\lambda x + 2 \int_0^t A_0 d\tau$, así obteniendo los siguientes valores

$$\begin{aligned} \xi_i(x, t) = & 2(x - x_{o1})\eta_1(t) + 4 \int_0^t \eta_1(\tau)\kappa_1(\tau)D_2(\tau)d\tau - \\ & 8 \int_0^t \eta_1(\tau) [\eta_i^2(\tau) - 3\kappa_1^2(\tau)] D_3(\tau)d\tau + \\ & 64 \int_0^t \eta_1(\tau)\kappa_1(\tau) [\eta_1^2(\tau) - \kappa_1^2(\tau)] D_4(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \chi_1(x, t) = & 2(x - x_{o1})\kappa_i(t) + 2 \int_0^t [\kappa_1^2(\tau) - \eta_1^2(\tau)] D_2(\tau)d\tau + \\ & 8 \int_0^t \kappa_1(\tau) [\kappa_1^2(\tau) - 3\eta_1^2(\tau)] D_3(\tau)d\tau \\ & - 16 \int_0^t [\kappa_1^4(\tau) - 6\kappa_1^2(\tau)\eta_1^2(\tau) + \eta_1^4(\tau)] D_4(\tau)d\tau + \chi_{10}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Y con esto el 1-solitón

$$q_1 = -2\eta_1(t) \operatorname{sech}(\xi_1(x, t)) e^{-1/2\varphi(x, t) - i\chi_1(x, t)}, \quad (4.73)$$

El modelo LPDE generalizado

Consideremos el modelo LPDE generalizado con dispersión y potenciales externos de orden par solamente. Tomando en cuenta solamente la fase del solitón auto inducida dada por la ecuación $\varphi(x, t) = \theta(t)x^2 + \varphi_0$, nosotros obtenemos un parámetro $\lambda_1(t)$

$$\lambda_1(t) = D_2\theta - 12D_4\theta(t)^2 \quad (4.74)$$

donde el parámetro $\lambda_2(t) = 0$. En el marco de este modelo, cuando $D_3(t) = R_3(t) = 0$, la ecuación 4.49 se reduce a la siguiente forma

$$\begin{aligned} & i q_t + (D_2 - 12D_4\Theta^2 x^2) \left(\frac{1}{2} q_{xx} + \sigma \frac{R_2}{D_2} |q|^2 q \right) + \\ & i D_4 \Theta \left[6 \left(q_{xx} + \sigma \frac{R_4}{D_4} |q|^2 q \right) + 4x \left(q_{xxx} + 6\sigma \frac{R_4}{D_4} |q|^2 q_x \right) \right] + \\ & D_4 \left[q_{xxxx} + 6 \left(\frac{R_4}{D_4} \right)^2 |q|^4 q + 4\Theta^3 x^3 q_x \right] + \\ & \sigma R_4 \left(8q_{xx} |q|^2 + 2q^2 q_{xx}^* + 4|q_x|^2 q + 6(q_x)^2 q^* \right) - U(x, t)q = i\gamma(x, t)q, \end{aligned} \quad (4.75)$$

con el potencial externo dado por

$$U(x, t) = (-2\gamma_0 + 3D_4\Theta^2) + 2\lambda_0x + \left[\frac{1}{2} (\Theta_t - D_2\Theta^2) + 12D_4\Theta^3 - 6iD_4\Theta^3 \right] x^2 - D_4\Theta^4x^4, \quad (4.76)$$

y el coeficiente de absorción dado por

$$\gamma(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{F_t}{F} + \frac{1}{2} D_2\Theta, -12D_4\Theta^2. \quad (4.77)$$

La ecuación anterior puede ser vista como una generalización de un modelo conocido en la literatura como ecuación de Lakshmanan-Prosezain-Daniel (LPDE, por sus siglas en inglés) [55].

$$iq_t + aq_{xx} + bq_{xt} + cF(|q|^2)q = \sigma q_{xxxx} + \alpha(q_x)^2q^* + \beta|q_x|^2q + \gamma|q|^2q_{xx} + \lambda q^2q_{xx}^* + \delta|q|^4q \quad (4.78)$$

La condición de integrabilidad para (4.75) es

$$-\frac{-F_t}{F} = \frac{W(R_4, D_4)}{R_4D_4} = \frac{W(R_2, D_2)}{R_2D_2}, \quad (4.79)$$

Ahora las amplitudes de los solitones η_i y κ_i son determinadas por la solución de la ecuación

$$\Lambda_t(t) = \lambda_1(t)\Lambda(t), \quad (4.80)$$

la cual es

$$\Lambda(t) = \kappa(t) + i\eta(t) = \Lambda_0(t=0)\exp\left(\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau\right). \quad (4.81)$$

Para nuestro caso, nosotros obtenemos :

$$\eta(t) = \eta_0\exp\left(\int_0^t (D_2\theta - 12D_4\theta^2)d\tau\right), \quad (4.82)$$

$$\kappa(t) = \kappa(t)_0\exp\left(\int_0^t (D_2\theta - 12D_4\theta^2)d\tau\right). \quad (4.83)$$

donde η_0 y $\kappa(t)_0$ son la amplitud y velocidad iniciales.

Consideremos la dinámica de un solitones no autónomos gobernados por la ecuación (4.88) con coeficientes de dispersión constantes $D_2 = D_{20}$ y $D_4 = D_{40}$. El parámetro $\lambda_0(t)$ define un potencial externo lineal y en este caso es considerado como $\lambda_0(t) = 0$. Consideremos el caso mas simple cuando el perfil de fase del solitón auto inducido $\theta(t)$ es constante y esta definido por su valor inicial $\theta(t) = \theta_0$. Entonces el parámetro $\lambda_1(t)$ se considera como

$$\lambda_{10} = (D_{20}\theta_0 - 12D_{40}\theta_0^2), \quad (4.84)$$

el cual define el parámetro espectral

$$\Lambda(t) = \Lambda_0(t = 0) [\exp(\lambda_{10}t)], \quad (4.85)$$

con las amplitudes y velocidades del solitón

$$\eta(t) = \eta_0 \exp[\exp(\lambda_{10}t)], \quad (4.86)$$

$$\kappa(t) = \kappa_0 \exp[\exp(\lambda_{10}t)], \quad (4.87)$$

donde η_0 y κ_0 denota la amplitud y velocidad iniciales.

El modelo LPDE generalizado con coeficientes variantes (4.75) es reducido a la ecuación no autónoma con coeficientes constantes y los potenciales de segundo y cuarto orden en x .

$$\begin{aligned} & i q_t + (D_{20} - 12D_{40}\theta_0^2 x^2) \left(\frac{1}{2} q_{xx} + \sigma \frac{R_{20}}{D_{20}} |q|^2 q \right) + \\ & i D_{40} \theta_0 \left[6 \left(q_{xx} + \sigma \frac{R_{40}}{D_{40}} |q|^2 q \right) + 4x \left(q_{xxx} + 6\sigma \frac{R_{40}}{D_{40}} |q|^2 q_x \right) \right] + \\ & D_{40} \left[q_{xxxx} + 6 \left(\frac{R_{40}}{D_{40}} \right)^2 |q|^4 q + 4\theta_0^3 x^3 q_x \right] + \\ & \sigma R_{40} (8q_{xx}|q|^2 + 2q^2 q_{xx}^* + 4|q|^2 q + 6(q_x)^2 q^*) - \\ & \left[3D_{40}\theta_0 + \left(-\frac{1}{2}D_{20} + 12D_{40}\theta_0 - 6iD_{40}\theta_0 \right) \theta_0^2 x^2 - D_{40}\theta_0^4 x^4 \right] q \\ & = i \left[\frac{1}{2}D_{20} - 12D_{40}\theta_0 \right] \theta_0 q. \end{aligned} \quad (4.88)$$

El comportamiento de los solitones de (4.88) esta definida mediante la dependencia espacio-temporal de los parametros del solitón $\chi_i(x, t)$ y $\xi_i(x, t)$ ecuaciones (4.71) y (4.72) los cuales para este caso toman la forma :

$$\begin{aligned} \xi_i(x, t) = & 2(x - x_{oi})\eta_{i0} \exp(\lambda_{10}t) + 2\eta_{i0}\kappa_{i0}D_{20} [\exp(2\lambda_{10}t) - 1] / \lambda_{10} \\ & + 16\eta_{i0}\kappa_{i0} [\eta_{i0}^2 - \kappa_{i0}^2] D_{40} [\exp(4\lambda_{10}t) - 1] / \lambda_{10}, \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\chi_i(x, t) = 2(x - x_{oi})\kappa_{i0} \exp(\lambda_{10}t) + [\kappa_{i0}^2 - \eta_{i0}^2] D_{20} [\exp(2\lambda_{10}t) - 1] / \lambda_{10} - 4(\kappa_{i0}^4 - 6\kappa_{i0}^2\eta_{i0}^2 + \eta_{i0}^4) D_{40} [\exp(4\lambda_{10}t) - 1] / \lambda_{10} + \chi_{0i} \quad (4.90)$$

como ya mencionamos el 1-solitón para el modelo (4.88) estará dado por

$$q_1^+(x, t) = 2\eta_1(t)F^{-1/2}(t) \text{Sech} [\xi_1(x, t)] \exp \left[-\frac{i}{2}\varphi(x, t) - i\chi_1(x, t) \right], \quad (4.91)$$

solitones a ordenes mayores pueden ser obtenidos, aplicando recurrentemente la ecuación (4.65), para el caso del dos solitón se tiene:

$$q_2^+(x, t) = 4F^{-1/2}(t) \frac{N(x, t)}{D(x, t)} \exp \left[-\frac{i}{2}\varphi(x, t) \right], \quad (4.92)$$

donde el numerador $N(x, t)$ esta dado mediante

$$N = \eta_1 \cosh(\xi_2) \exp(-i\chi_1) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + 2i\eta_2(\kappa_2 - \kappa_1) \tanh(\xi_2^2) + (\eta_1^2 - \eta_2)] + \eta_2 \cosh(\xi_1) \exp(-i\chi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 - 2i\eta_1(\kappa_2 - \kappa_1) \tanh(\xi_1) - (\eta_1^2 - \eta_2^2)], \quad (4.93)$$

y el denominador $D(x, t)$ esta, dado por

$$D = \cosh(\xi_1 + \xi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2] + \cosh(\xi_1 - \xi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + (\eta_2 + \eta_1)^2] - 4\eta_1\eta_2 \cos(\chi_2 - \chi_1). \quad (4.94)$$

Una propiedad interesante de la solución solitónica de la ecuación (4.88) consiste en el hecho de que el solitón se mueve con una aceleración e un incremento (o decrecimiento) de amplitud en el medio con dispersión constante y no linealidad. Debido a los potenciales resultantes y a un cambio de fase autoinducido, el soliton adquiere una modulación en la aceleración y en la amplitud.

En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3, se muestra la dinámica de un 1,2 y 3-solitón no autónomos con $D_{40} = R_{40} = \frac{1}{24}$. Uno puede observar las diferencias de la dinámica en comparación con las soluciones solitónicas de la NLSE (2.33), el cambio en la amplitud y la anchura del solitón para el modelo LPDE generalizado es debido a la dependencia de los coeficientes de dispersión así como a la dependencia temporal del parámetro espectral. Estos solitones varían en el tiempo, adaptándose tanto a los potenciales externos como al

desplazamiento de fase autoinducido, incluso en un medio con dispersión y no linealidad constantes. La influencia de la dispersión de cuarto orden reduce la acción de la dispersión de segundo orden y actúa como una perturbación del término principal de segundo orden. Además, la influencia de los potenciales externos conduce a la aceleración del solitón y a la dispersión en ángulos mayores en comparación con los solitones de la NLSE de segundo orden.

Las graficas de los solitones y el calculo de estos fueron echas mediante un código en python, el cual puede ser consultado en el apéndice [A](#).

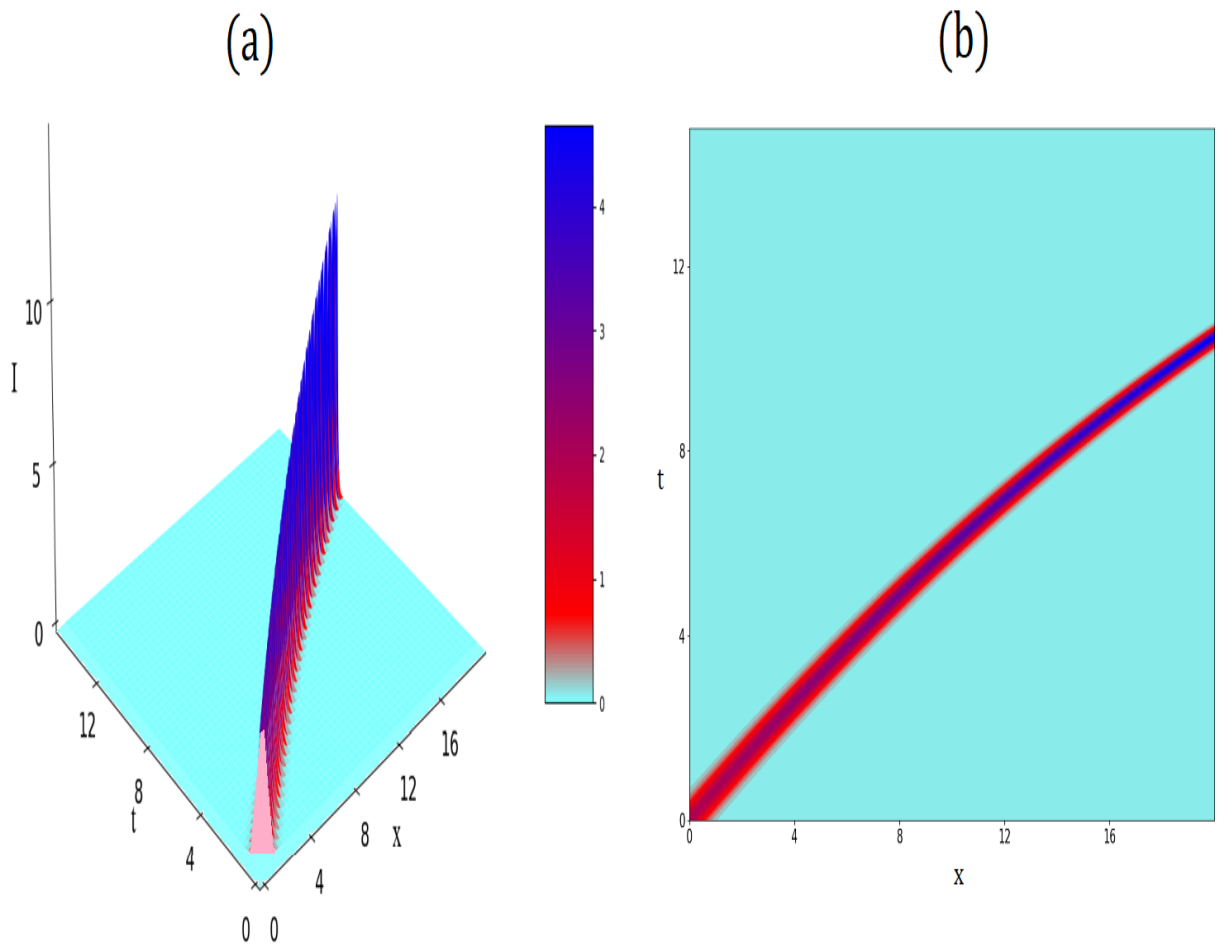


Figura 4.1: Dinámica de un 1-soliton de la ecuación (4.88) , $I = |q|^2$. La amplitud y velocidad inicial del solitón es: $\eta_{01} = 1$; $\kappa_{01} = -0,5$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

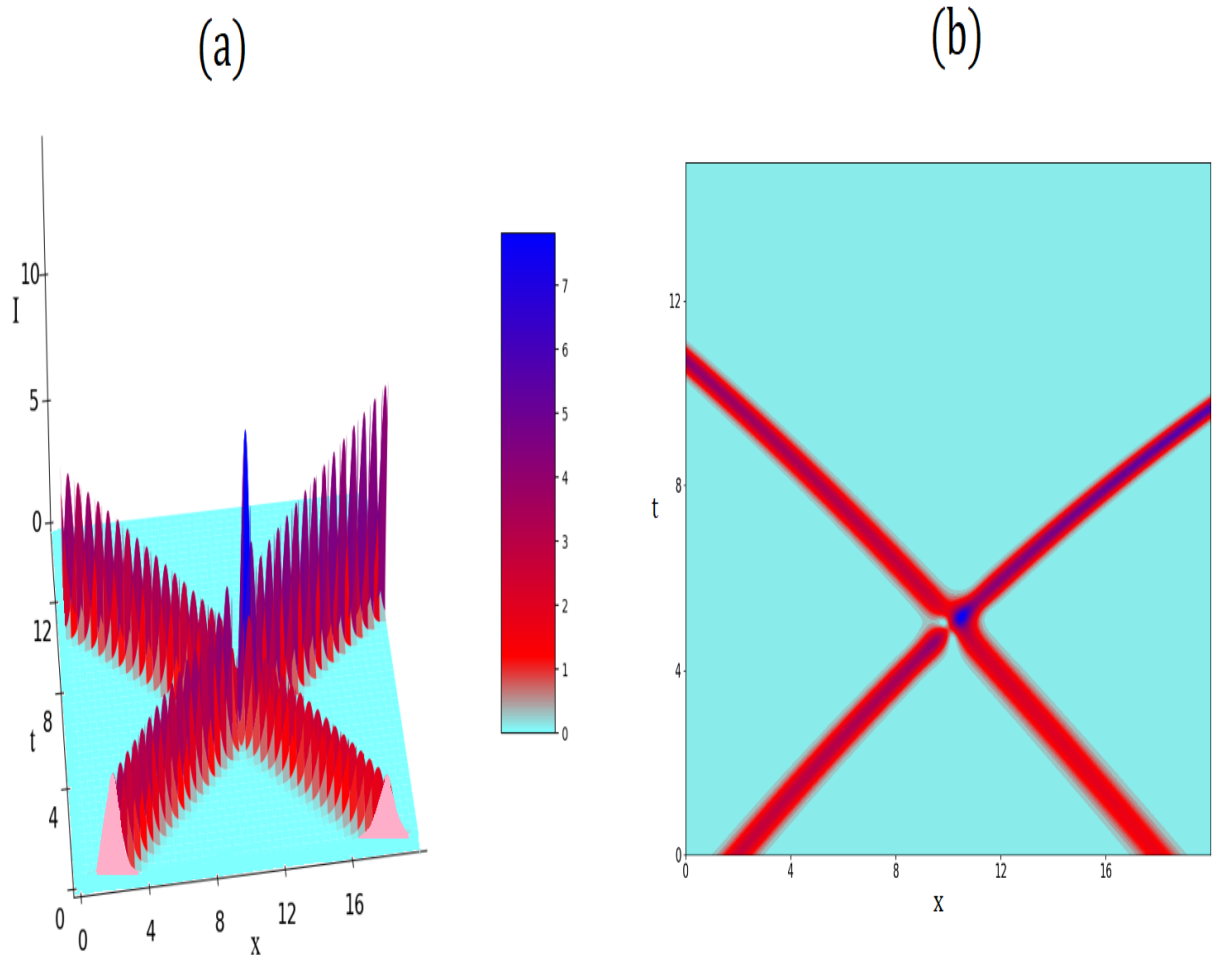


Figura 4.2: Dinámica de un 2-soliton de la ecuación (4.88), $I = |q|^2$. Las amplitudes y velocidades iniciales de los solitones son: $\eta_{01} = 1$ y $\eta_{02} = 0,8$; $\kappa_{01} = -0,5$ y $\kappa_{02} = 0,65$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

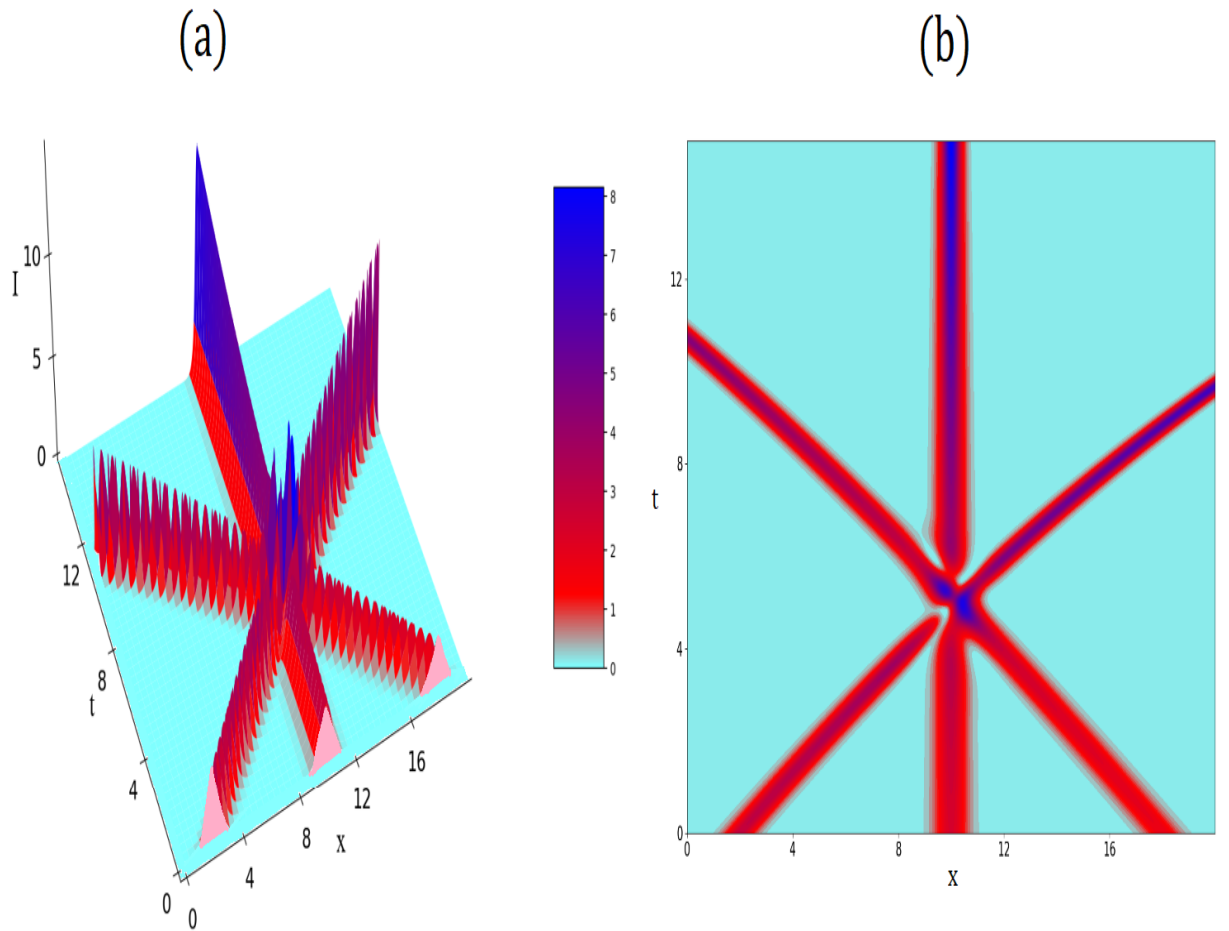


Figura 4.3: Dinámica de un 3-soliton de la ecuación (4.88), $I = |q|^2$. Las amplitudes y velocidades iniciales de los solitones son: $\eta_{01} = 1$, $\eta_{02} = 0,8$ y $\eta_{03} = 0,9$; $\kappa_{01} = -0,5$, $\kappa_{02} = 0,65$ y $\kappa_{03} = 0$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

4.4. Soluciones tipo respirador para el modelo LPDE generalizado

Existe un tipo de solución dada por el estado ligado de n -solitones estas soluciones tienen el nombre de respirador (breather) y tiene la característica de ser un tipo de solución periódica en el tiempo y, a menudo, también en el espacio, que describe una onda cuya amplitud oscila periódicamente. A diferencia de un soliton convencional, que mantiene una forma y velocidad constantes durante la propagación, un respirador muestra un comportamiento oscilatorio, es decir, su perfil (respira) mientras se propaga. Para el caso de la ecuación NLSE y sus generalizaciones se ha demostrado la existencia de diversos tipos de respiradores [38] y [56–58], algunos tipos de respiradores son por ejemplo el respirador de tipo Akhmediev la cual es una solución periódica en el espacio y pulsante en el tiempo que se origina de una perturbación modulada de un fondo de onda continua, su amplitud máxima se alcanza en un momento particular, después de lo cual vuelve a la amplitud inicial, mostrando una estructura de tipo pulso. El respirador de Kuznetsov-Ma, el cual es una solución que es periódica en el tiempo pero localizada en el espacio, que se forma como una perturbación de un fondo de onda continua que desarrolla una estructura pulsante, a diferencia del respirador de Akhmediev, este respira en el tiempo en lugar del espacio, con la amplitud de la onda creciendo y decreciendo periódicamente. Una onda peregrina la cual es una solución localizada tanto en el espacio como en el tiempo y que es una solución límite de los respiradores de Akhmediev y Kuznetsov-Ma, donde la periodicidad espacial y temporal tiende a infinito. Se caracteriza por un único pico de amplitud máxima en el tiempo y el espacio antes de decaer.

Nosotros mostraremos que la ecuación (4.88) también tiene soluciones tipo respirador y las condiciones necesarias para que estas, surjan. Partiendo de trabajos anteriores en donde se mostró la existencia de solitones para ecuaciones del tipo Hirota, Kdv y NLSE de ordenes mayores [38] y [56–58], se considera la condición necesaria para la formación de respiradores.

$$\xi_1(x, t) = P_1 \xi_2(x, t) = P_2 \xi_3(x, t) = \dots, \quad (4.95)$$

donde P_i son constantes arbitrarias positivas. Estas condiciones toman la forma específica

$$\begin{aligned} \eta_{01} &= P_1 \eta_{02} = P_2 \eta_{03}, \\ 8\varepsilon \exp(2\lambda_1 t) &= (\kappa_{01} - \kappa_{02}) - 8\varepsilon [(\kappa_{01}^3 - \kappa_{02}^3) + \eta_2^2(\kappa_{02} - P_1^2 \kappa_{01})] \quad (4.96) \\ &= (\kappa_{01} - \kappa_{03}) - 8\varepsilon [(\kappa_{01}^3 - \kappa_{03}^3) + \eta_{03}^2(\kappa_{03} - P_2^2 \kappa_{01})]. \end{aligned}$$

Con $\varepsilon = D_{40}/D_{20}$, si nosotros consideramos el 2 y 3 respirador de la ecuación (4.88) con coeficientes de dispersión constantes. Las condiciones (4.96) solo pueden cumplirse si las velocidades iniciales de los solitones son iguales a cero. En las Figuras 4.4– 4.5 se ilustran las soluciones tipo respirador de la ecuación (4.88) con coeficientes constantes D_2 y D_4 , formadas por dos y tres solitones con velocidades nulas. Las amplitudes η_1 y η_2 de los solitones que forman el respirador se calculan mediante la Ecuación (4.89). La amplitud del respirador aumenta exponencialmente de acuerdo con la Ecuación (4.82). En la figura 4.6 se muestra la dinámica de un respirador formado por dos solitones análogo al de la figura 4.4, con $D_{20} = 0$, donde se puede observar la pérdida del incremento de la amplitud del solitón al propagarse.

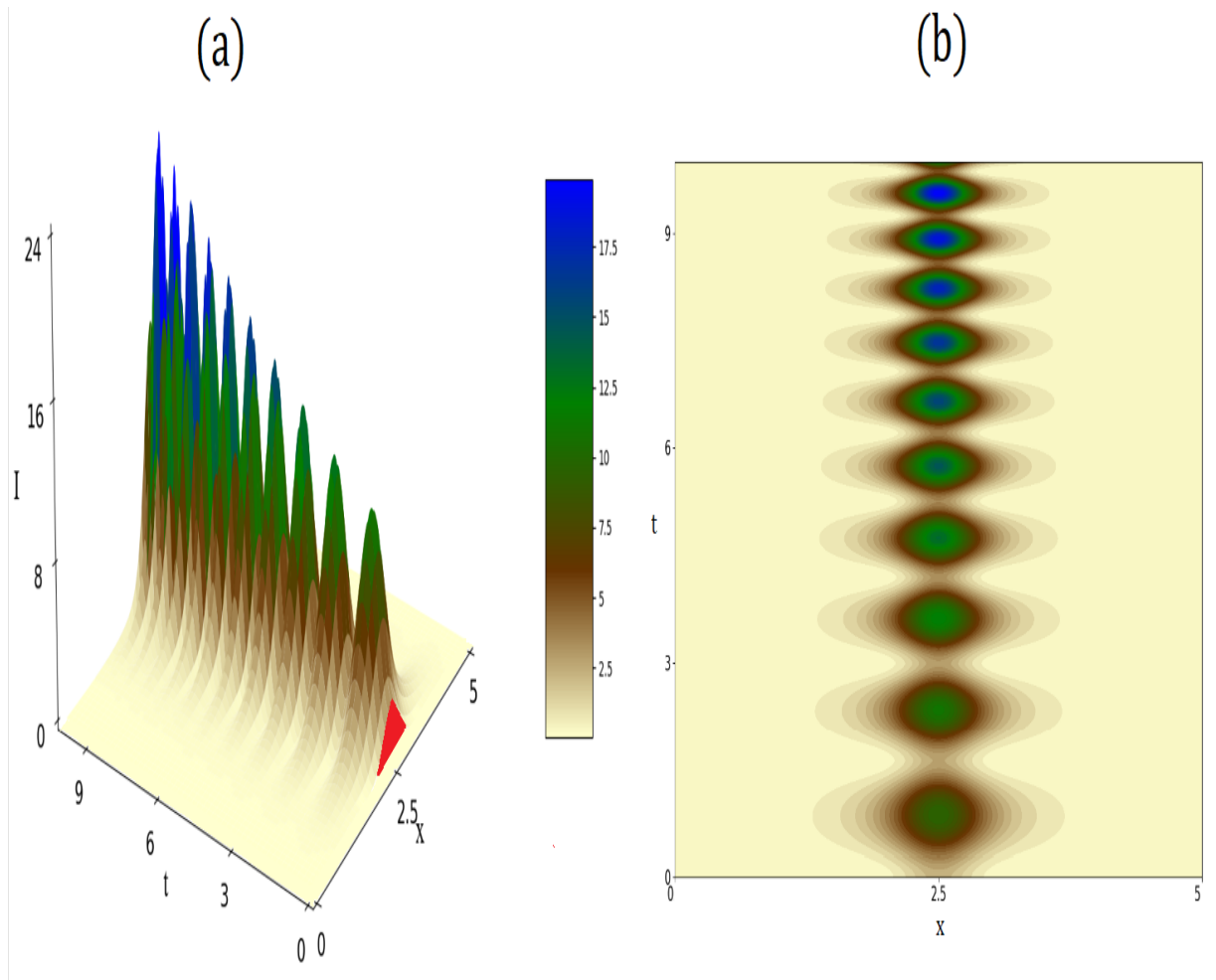


Figura 4.4: Dinámica de un 2-respirador de la ecuación (4.88), con $D_{20} = R_{20} = 1$, $D_{40} = R_{40} = 1/24$, $\lambda_{10} = 1/24$, $I = |q|^2$. Las amplitudes y velocidades iniciales de los solitones son: $\eta_{01} = 1,25$ y $\eta_{02} = 0,41$; $\kappa_{01} = 0$ y $\kappa_{02} = 0$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

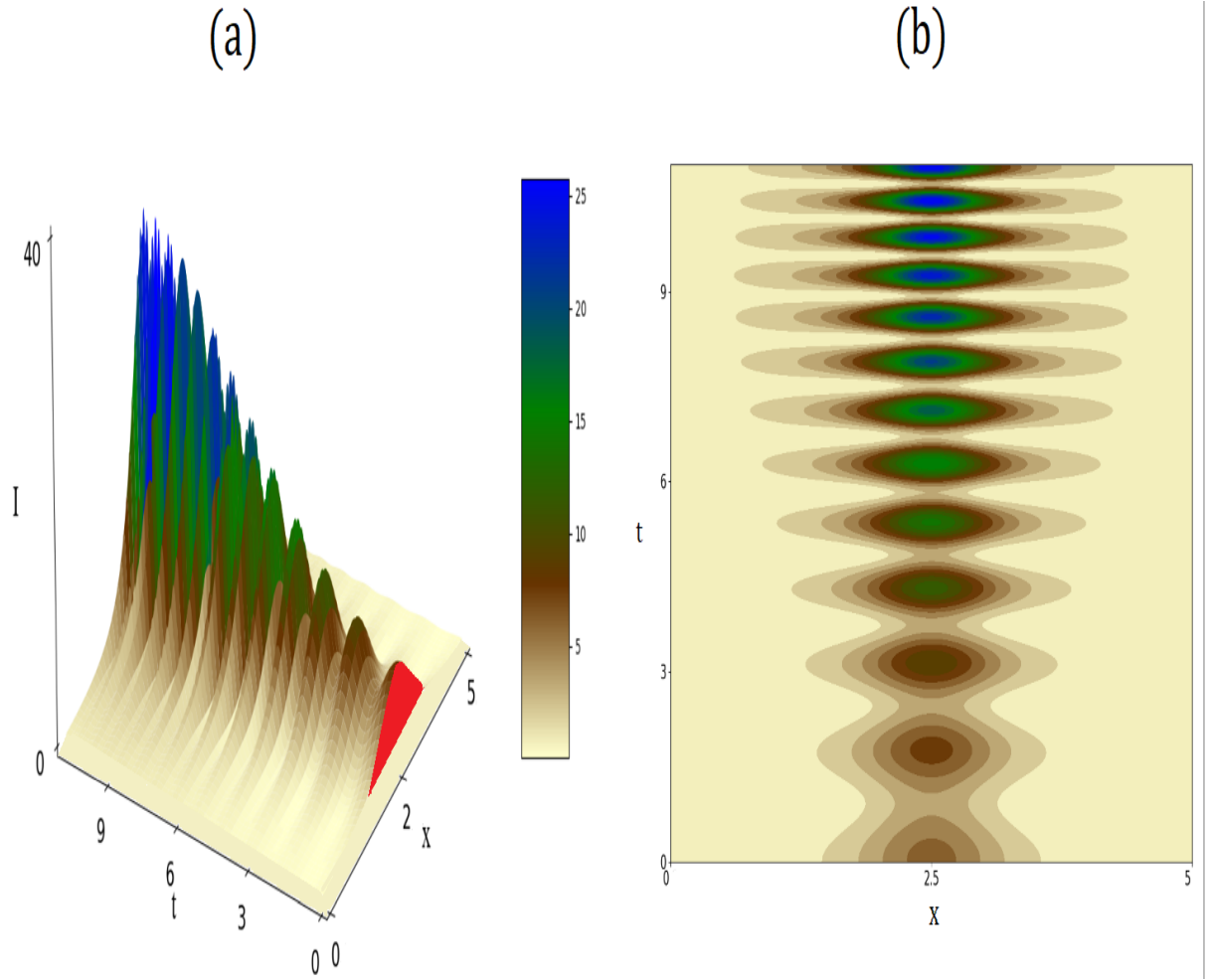


Figura 4.5: Dinámica de un 3-respirador de la ecuación (4.88), con $D_{20} = R_{20} = 1$, $D_{40} = R_{40} = 1/24$, $\lambda_{10} = 1/24$, $I = |q|^2$. Las amplitudes y velocidades iniciales de los solitones son: $\eta_{01} = 1,25, \eta_{02} = 0,41$ y $\eta_{03} = 0,25$; $\kappa_{01} = 0$, $\kappa_{02} = 0$ y $\kappa_{03} = 0$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

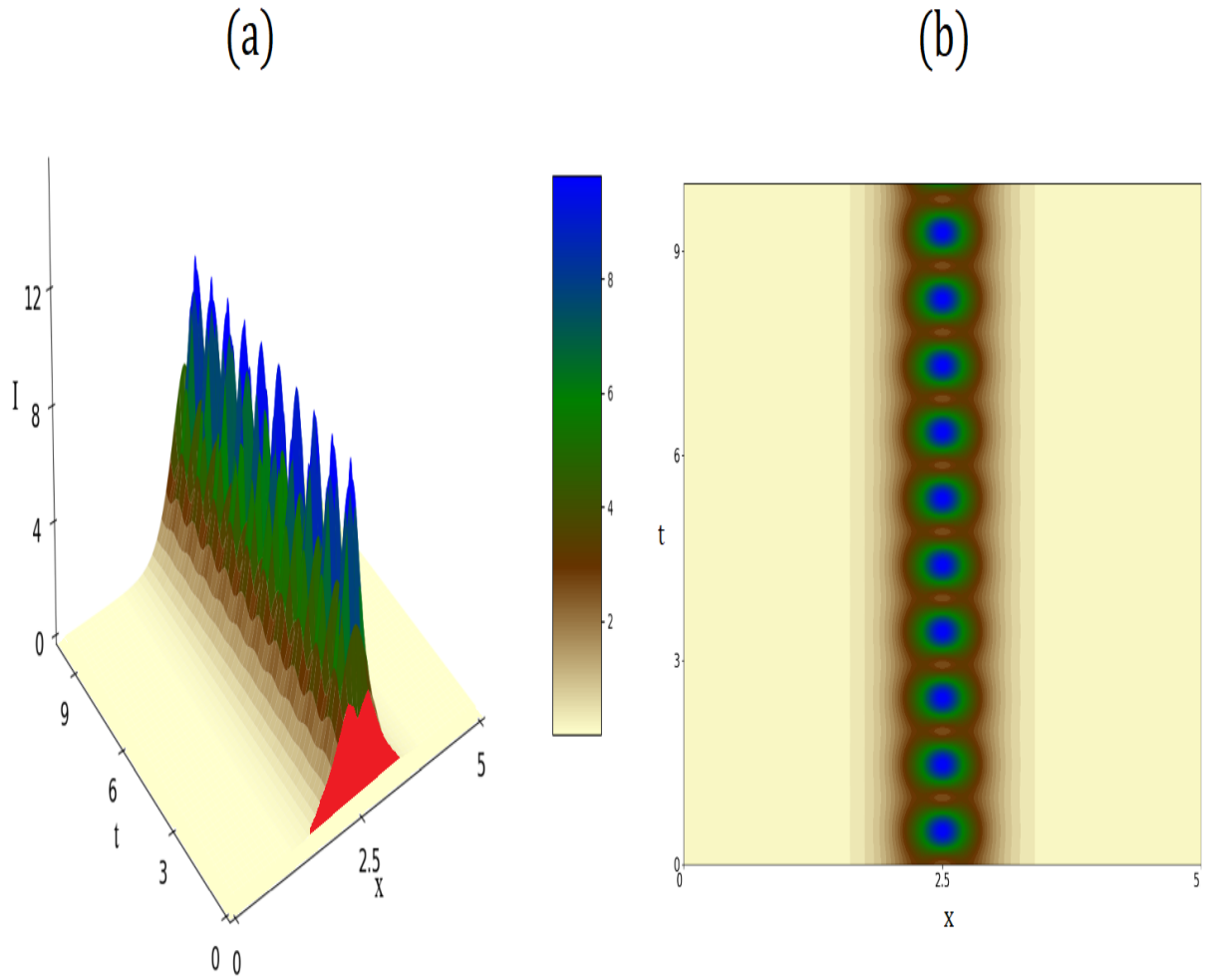


Figura 4.6: Dinámica de un 2-respirador de la ecuación (4.88), con $D_{20} = R_{20} = 0$, $D_{40} = R_{40} = 1/6$, $\lambda_{10} = 1/10000000$, $I = |q|^2$. Las amplitudes y velocidades iniciales de los solitones son: $\eta_{01} = 1,25$ y $\eta_{02} = 0,41$; $\kappa_{01} = 0$, $\kappa_{02} = 0$ y $\kappa_{03} = 0$. (a) Dinámica espacio-temporal, (b) Gráfica de contorno.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo principal de nuestra investigación fue estudiar modelos de dispersión de cuarto orden para la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE), enfocándonos particularmente en la obtención de soluciones tipo solitón. Inicialmente, consideramos un modelo simple de una NLSE de cuarto orden, al agregar un término dispersivo representado por la derivada de cuarto orden, $b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, a la NLSE estándar. Este modelo ha sido previamente estudiado por diversos investigadores, como se menciona en esta tesis, y siguiendo las metodologías propuestas y los estudios bibliográficos consultados, se comprobó que el modelo admite soluciones bajo ciertas condiciones. Sin embargo, también se concluyó que este modelo no es completamente integrable en el sentido de Lax.

Con el fin de identificar un modelo con cuarto orden de dispersión que fuera completamente integrable, utilizamos la metodología de la jerarquía AKNS. A partir del modelo general de cuarto orden derivado, establecimos condiciones adicionales para garantizar su completa integrabilidad y, dentro de este marco, identificamos un caso particular en el que surgen potenciales externos. Este caso puede interpretarse como una generalización del modelo LPDE. Para este modelo LPDE generalizado, logramos construir soluciones tipo n-solitón, cumpliendo con una de nuestras metas principales, que era encontrar modelos de cuarto orden del tipo NLSE con soluciones solitónicas. Además, observamos cómo estas soluciones difieren de las de la NLSE estándar. Finalmente, también identificamos la aparición de otro tipo de soluciones, como las soluciones tipo respirador, dentro del modelo LPDE

generalizado.

Estos resultados no solo amplían la comprensión de los modelos con dispersión de cuarto orden, sino que también abren nuevas perspectivas para futuras investigaciones en el campo de las ecuaciones de evolución no lineales.

Durante el desarrollo del proyecto de investigación, se alcanzó uno de los objetivos más significativos: la culminación y publicación de un artículo científico basado en los resultados obtenidos en esta investigación. Este logro no sólo refuerza la validez de los métodos aplicados, sino que también contribuye al avance del conocimiento en el campo de los solitones en ecuaciones no lineales. El artículo en cuestión se encuentra detallado en el Apéndice [B](#).

Apéndice A

Códigos para calcular y graficar n-solitones

Se incluyen los códigos para el cálculo y la gráfica de n-solitones para la NLSE y el modelo LPDE generalizado, las gráficas están elaboradas en el lenguaje python en su version 3.11.3.

Los programa para los n-solitones muestran en particular el caso $n = 3$, pero es fácil manipular el código para extender o disminuir el numero de solitones para ello a que definir las correspondientes funciones $q_i(x, t)$ sus correspondientes pseudo-potenciales $\Gamma_i(x, t)$ y sus correspondientes constantes.

Código para calcular el 3-solitón y realizar sus correspondiente gráficas en 3-D y de Contorno para la ecuación NLSE :

```
1 #Paqueterias
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5
6 #Valores numericos para las funciones de q1
7 a2_1 = -1j
8 eta0_1 = 1
9 kappa0_1 = -0.5
10 lambda0_1 = kappa0_1 + 1j * eta0_1
11 A0_1 = a2_1 * lambda0_1**2
12 x01=2
13
14 # Valores numericos para las funciones de q2
15 a2_2 = -1j
16 eta0_2 = 0.8
```

```

17 kappa0_2 = 0.65
18 lambda0_2 = kappa0_2 + 1j * eta0_2
19 A0_2 = a2_2 * lambda0_2**2
20 x02=18
21
22 # Valores numericos para las funciones de q3
23 a2_3 = -1j
24 eta0_3 = 0.9
25 kappa0_3 = 0
26 lambda0_3 = kappa0_3 + 1j * eta0_3
27 A0_3 = a2_3 * lambda0_3**2
28 x03=10
29
30 #Definicion de la Funcion Gamma1 para q2
31 def Gamma1_1(x, t):
32     psi11 = np.exp(-1j * lambda0_1 * (x - x01) + A0_1 * t)
33     psi21 = np.exp(1j * lambda0_1 * (x - x01) - A0_1 * t)
34     return psi11 / psi21
35
36 #Definicion de la Funcion Gamma2 para q2
37 def Gamma1_2(x, t):
38     psi12 = np.exp(-1j * lambda0_2 * (x - x02) + A0_2 * t)
39     psi22 = np.exp(1j * lambda0_2 * (x - x02) - A0_2 * t)
40     return psi12 / psi22
41
42 #Definicion de la Funcion Gamma3 para q3
43 def Gamma1_3(x, t):
44     psi13 = np.exp(-1j * lambda0_3 * (x - x03) + A0_3 * t)
45     psi23 = np.exp(1j * lambda0_3 * (x - x03) - A0_3 * t)
46     return psi13 / psi23
47
48 #Definicion de la Funcion q1
49 def q1(x, t):
50     q0 = 0
51     return - q0 + 4 * eta0_1 * Gamma1_1(x, t) / (1 + np.abs(Gamma1_1(x, t))
52         **2)
53
54 #Definicion de la Funcion q2
55 def q2(x, t):
56     q1_value = q1(x, t)
57     return - q1_value + 4 * eta0_2 * Gamma1_2(x, t) / (1 + np.abs(Gamma1_2(
58         x, t))**2)
59
60 #Definicion de la Funcion q3
61 def q3(x, t):
62     q2_value = q2(x, t)
63     return - q2_value + 4 * eta0_3 * Gamma1_3(x, t) / (1 + np.abs(Gamma1_3(
64         x, t))**2)
65
66 #Rango de los valores de x y t y numero de puntos para graficar
67 x = np.linspace(0, 20, 2000)
68 t = np.linspace(0, 15, 2000)
69
70 #Renombrar las funciones q1,q2,q3 para poderles calcular el valor absoluto
71 y graficaras
72 X, T = np.meshgrid(x, t)
73 Q1 = q1(X, T)

```

```

70 Q2 = q2(X, T)
71 Q3 = q3(X, T)
72
73 # Calculo la norma al cuadrado de q1,q2 y q3
74 norma_cuadrado_q1 = np.abs(Q1)**2
75 norma_cuadrado_q2 = np.abs(Q2)**2
76 norma_cuadrado_q3 = np.abs(Q3)**2
77
78 # Grafica en 3D de q3 (cambiar a q1,q2 etc. si se quiere graficar las
    correspondientes)
79 fig = plt.figure()
80 ax1 = fig.add_subplot(111, projection='3d')
81 surface =ax1.plot_surface(X, T, norma_cuadrado_q3, cmap='viridis')
82 ax1.set_xlabel('x', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
83 ax1.set_ylabel('t', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
84 ax1.set_zlabel('I', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
85 # Agregar una barra de color a la grafica
86 cbar = fig.colorbar(surface, shrink=0.5, aspect=5)
87 # Establecer los limites de los ejes x y t en la grafica de 3D
88 ax1.set_xlim([0, 20])
89 ax1.set_ylim([0, 15])
90 ax1.set_zlim([0, 15])
91 # Especificar los valores de los ticks para x y t n la grafica de 3D
92 ax1.set_xticks([0,4,8,12,16])
93 ax1.set_yticks([0,4,8,12])
94 ax1.set_zticks([0,5,10])
95 # Cambiar el tamaño de los números en los ejes para la grafica en 3D y
    detalles estéticos de la misma
96 ax1.grid(False)
97 color_amarillo_claro =(1.0, 1.0, 1.0, 1.0)
98 ax1.zaxis.set_panel_color(color_amarillo_claro)
99 ax1.xaxis.set_panel_color((1.0, 1.0, 1.0, 1.0)) # Blanco
100 ax1.yaxis.set_panel_color((1.0, 1.0, 1.0, 1.0)) # Blanco
101 ax1.set_facecolor('white')
102 ax1.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=16)
103 cbar.ax.tick_params(labelsize=10)
104 cbar.ax.yaxis.label.set_fontsize(12)
105 cbar.ax.yaxis.label.set_fontname('Times New Roman')
106
107 #Hacer la Grafica de contorno
108 fig_contour = plt.figure()
109 ax_contour = fig_contour.add_subplot(111)
110 # Establecer los limites de los ejes x y t para la grafica de contorno
111 ax_contour.set_xlim([0, 20])
112 ax_contour.set_ylim([0, 15])
113 # Especificar los valores de los ticks para x y t para la grafica de
    contorno
114 ax_contour.set_xticks([0,4,8,12,16])
115 ax_contour.set_yticks([0,4,8,12])
116 # Cambiar el tamaño de los números en los ejes para la grafica de contorno
    y detalles estéticos de la misma
117 ax_contour.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=16)
118 contour_levels = np.linspace(np.min(norma_cuadrado_q3), np.max(
    norma_cuadrado_q3), 40)
119 contour = ax_contour.contourf(X, T, norma_cuadrado_q3,levels=contour_levels
    , cmap='viridis')
120 plt.colorbar(contour, ax=ax_contour)

```

```

121 ax_contour.set_xlabel('x', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
122 ax_contour.set_ylabel('t', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
123
124 plt.show()

```

Listing A.1: Código en Python para calculo y gráfica del 3-soliton para la ecuación NLSE

Código para calcular el 3-soliton y realizar sus correspondiente gráficas en 3-D y de Contorno para el modelo LPDE generalizado :

```

1 #Paqueterias
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5 from matplotlib.colors import LinearSegmentedColormap
6
7 # Crear un mapa de colores personalizado para la grafica
8 colors = [(0.5, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)] # Colores aproximados (cyan,
9         rojo, azul)
10 nodes = [0.0, 0.15, 1.0]
11 cmap_name = 'custom_cmap'
12 cm = LinearSegmentedColormap.from_list(cmap_name, list(zip(nodes, colors)))
13
14 #valores para las funciones de dispersion
15 D20 = 1
16 D40 = 1/24
17 lambda10 = 1/24
18
19 #Valores numericos para las funciones de q1
20 eta10 = 1
21 kappa10 = -0.5
22 x01=2
23
24 # Valores numericos para las funciones de q2
25 eta20 = 0.8
26 kappa20 = 0.65
27 x02=18
28
29 # Valores numericos para las funciones de q3
30 eta30 = .9
31 kappa30 = 0
32 x03=10
33
34 #Definicion de la Funcion Gamma1 para q1
35 def Gamma1(x, t):
36     xi1 = (2 * (x - x01) * eta10 * np.exp(lambda10 * t)
37           + 2 * eta10 * kappa10 * D20 * (np.exp(2 * lambda10 * t) - 1) * (1/
38           lambda10)
39           + 16 * eta10 * kappa10 * D40 * (eta10**2 - kappa10**2) * (np.exp(4 *
40           lambda10 * t) - 1) * (1/ lambda10) )
41     chi1= (2 * (x - x01) * kappa10 * np.exp(lambda10 * t)

```

```

41 + (kappa10**2 - eta10**2) * D20 * (np.exp(2 * lambda10 * t) - 1) * (1/
42 lambda10)
43 - 4 * (kappa10**4 - 6 * kappa10**2 * eta10**2 + eta10**4) * D40 * (np.
44 exp(4 * lambda10 * t) - 1) * (1/ lambda10))
45
46 return np.exp(-1j * chi1 + xi1)
47
48 #Definicion de la Funcion q1
49 def q1(x, t):
50     return -4 * eta10 * (np.exp(lambda10 * t)) * Gamma1(x, t) / (1 + np.
51         abs(Gamma1(x, t))**2)
52
53 #Definicion de la Funcion Gamma2 para q2
54 def Gamma2(x, t):
55     xi2 = (2 * (x - x02) * eta20 * np.exp(lambda10 * t)
56 + 2 * eta20 * kappa20 * D20 * (np.exp(2 * lambda10 * t) - 1) * (1/
57 lambda10)
58 + 16 * eta20 * kappa20 * (eta20**2 - kappa20**2) * D40 * (np.exp(4 *
59 lambda10 * t) - 1) * (1/ lambda10) )
60
61     chi2 = (2 * (x - x02) * kappa20 * np.exp(lambda10 * t)
62 + (kappa20**2 - eta20**2) * D20 * (np.exp(2 * lambda10 * t) - 1) *
63 (1/ lambda10)
64 - 4 * (kappa20**4 - 6 * kappa20**2 * eta20**2 + eta20**4) * D40 * (np
65 .exp(4 * lambda10 * t) - 1) * (1/ lambda10) )
66
67     return np.exp(-1j * chi2 + xi2)
68
69 #Definicion de la Funcion q2
70 def q2(x, t):
71     q1_value=q1(x, t)
72     return -q1_value - 4 * eta20 * (np.exp(lambda10 * t)) * Gamma2(x, t) /
73 (1 + np.abs(Gamma2(x, t))**2)
74
75 #Definicion de la Funcion Gamma2 para q3
76 def Gamma3(x, t):
77     xi3 = (2 * (x - x03) * eta30 * np.exp(lambda10 * t)
78 + 2 * eta30 * kappa30 * D20 * (np.exp(2 * lambda10 * t) - 1) * (1/
79 lambda10)
80 + 16 * eta30 * kappa30 * (eta30**2 - kappa30**2) * D40 * (np.exp(4 *
81 lambda10 * t) - 1) * (1/ lambda10) )
82
83     chi3 = (2 * (x - x03) * kappa30 * np.exp(lambda10 * t)
84 + (kappa30**2 - eta30**2) * D20 * (np.exp(2 * lambda10 * t) - 1) *
85 (1/ lambda10)
86 - 4 * (kappa30**4 - 6 * kappa30**2 * eta30**2 + eta30**4) * D40 * (np
87 .exp(4 * lambda10 * t) - 1) * (1/ lambda10) )
88
89     return np.exp(-1j * chi3 + xi3)
90
91 #Definicion de la Funcion q3
92 def q3(x, t):
93     q2_value=q2(x, t)
94     return -q2_value - 4 * eta30 * (np.exp(lambda10 * t)) * Gamma3(x, t) /

```



```

      (1 + np.abs(Gamma3(x, t))**2)
86
87 #Rango de los valores de x y t y numero de puntos para graficar
88 x = np.linspace(0, 20, 2000)
89 t = np.linspace(0, 15, 2000)
90
91 #Renombrar las funciones q1,q2,q3 para poderles calcular el valor absoluto
  y graficaras
92 X, T = np.meshgrid(x, t)
93 Q1 = q1(X, T)
94 Q2 = q2(X, T)
95 Q3 = q3(X, T)
96
97 # Calculo la norma al cuadrado de q1,q2 y q3
98 norma_cuadrado_q1 = np.abs(Q1)**2
99 norma_cuadrado_q2 = np.abs(Q2)**2
100 norma_cuadrado_q3 = np.abs(Q3)**2
101
102 # Grafica en 3D de q3 (cambiar a q1,q2 etc. si se quiere graficar las
  correspondientes)
103 fig = plt.figure()
104 ax1 = fig.add_subplot(111, projection='3d')
105 surface = ax1.plot_surface(X, T, norma_cuadrado_q3, cmap=cm)
106 ax1.set_xlabel('x', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
107 ax1.set_ylabel('t', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
108 ax1.set_zlabel('I', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
109 # Agregar una barra de color a la grafica
110 cbar = fig.colorbar(surface, shrink=0.5, aspect=5)
111 # Establecer los limites de los ejes x y t en la grafica de 3D
112 ax1.set_xlim([0, 20])
113 ax1.set_ylim([0, 15])
114 ax1.set_zlim([0, 15])
115 # Especificar los valores de los ticks para x y t en la grafica de 3D
116 ax1.set_xticks([0,4,8,12,16])
117 ax1.set_yticks([0,4,8,12])
118 ax1.set_zticks([0,5,10])
119 # Cambiar el tamaño de los números en los ejes para la grafica en 3D y
  detalles estéticos de la misma
120 ax1.grid(False)
121 color_amarillo_claro =(1.0, 1.0, 1.0, 1.0)
122 ax1.zaxis.set_panel_color(color_amarillo_claro)
123 ax1.xaxis.set_panel_color((1.0, 1.0, 1.0, 1.0)) # Blanco
124 ax1.yaxis.set_panel_color((1.0, 1.0, 1.0, 1.0)) # Blanco
125 ax1.set_facecolor('white')
126 ax1.tick_params(axis='both', which='major', labelsz=16)
127 cbar.ax.tick_params(labelsz=10)
128 cbar.ax.yaxis.label.set_fontsz(12)
129 cbar.ax.yaxis.label.set_fontname('Times New Roman')
130
131 #Hacer la Grafica de contorno
132 fig_contour = plt.figure()
133 ax_contour = fig_contour.add_subplot(111)
134 # Establecer los limites de los ejes x y t para la grafica de contorno
135 ax_contour.set_xlim([0, 20])
136 ax_contour.set_ylim([0, 15])
137 # Especificar los valores de los ticks para x y t para la grafica de
  contorno

```

```

138 ax_contour.set_xticks([0,4,8,12,16])
139 ax_contour.set_yticks([0,4,8,12])
140 # Cambiar el tamaño de los números en los ejes para la gráfica de contorno
    y detalles estéticos de la misma
141 ax_contour.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=16)
142 contour_levels = np.linspace(np.min(norma_cuadrado_q3), np.max(
    norma_cuadrado_q3), 40)
143 contour = ax_contour.contourf(X, T, norma_cuadrado_q3, levels=contour_levels
    , cmap=cm)
144 plt.colorbar(contour, ax=ax_contour)
145 ax_contour.set_xlabel('x', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
146 ax_contour.set_ylabel('t', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
147
148 plt.show()

```

Listing A.2: Código en Python para cálculo y gráfica del 3-soliton para el modelo LPDE generalizado

Apéndice B

Artículo Publicado



Contents lists available at ScienceDirect

Optik - International Journal for Light and Electron Optics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijleo

Original research article

Emergence of polynomial external potentials in solitonic hierarchies: Applications to the nonisospectral LPDE model

I.M. Mendez-Zuñiga^a, T.L. Belyaeva^a, M.A. Agüero^a, V.N. Serkin^{b,*}^a Universidad Autonoma del Estado de Mexico, Av. Instituto Literario 100, C. P. 50000, Toluca, Mexico^b Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Av. 4 Sur 104, C. P. 72001, Puebla, Mexico

ARTICLE INFO

Keywords:

Dynamics of phase-modulated nonautonomous solitons in quartic polynomial potentials
Nonisospectral Lakshmanan–Porseizian–Daniel equation model (LPDE)

ABSTRACT

Inspired by the work of Akira Hasegawa, recently published in Optik 279 (2023) 170769, we set ourselves the task of explaining in detail how external nonstationary polynomial potentials appear in the nonisospectral NLSE hierarchy. We consider possible applications for observing solitonic regimes of propagation of ultrashort laser pulses in optical fibers. Our main goal is pedagogical, and our central point is the detailed derivation of new equations resulting from the application of the concept of nonautonomous solitons. It is revealed that complex potentials arise as polynomial series of the fourth degree of the spatial coordinate $U_{\text{ext}}(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)x^2 + \alpha_3(t)x^3 + \alpha_4(t)x^4$, if the derivative of the spectral parameter is also expanded into a polynomial series of the spectral parameter up to the second order $\Lambda_j(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\Lambda + \lambda_2(t)\Lambda^2$. It is predicted that new fourth-order nonlinear models arise if and only if the NLSE operator, the mKdV complex operator, and the fourth-order LPDE operators are connected by the extended Hirota constraint. We focus on exact analytical solutions and basic dynamic regimes of formation and interaction of new phase-modulated nonautonomous solitons of the nonisospectral LPDE model with fourth-order and time-dependent polynomial potentials.

1. Introduction

The field of optical fibers has seen an exponential growth in research, with more and more scientists being drawn to the beauty of the various nonlinear phenomena and solitons that can be observed. The existence of solitons in optical fibers was first predicted by Hasegawa and Tappert in 1973 [1,2], and was experimentally discovered by Stolen, Mollenauer and Gordon in 1980 [3]. The work of Hasegawa and Tappert is of utmost importance, as it involved averaging the light beam over the fiber cross section, which resulted in the derivation of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation (NLSE). Additionally, they were the first to apply the split-step Fourier method to the numerical solution of the NLSE.

Our work focuses on studying nonautonomous solitons with varying phase modulation in the generalized higher-order equations of the NLSE hierarchy, with external potentials. This article is written exclusively for the special issue “Golden Jubilee of Solitons in Optical Fibers” dedicated to the discovery by Hasegawa and Tappert of both bright and dark solitons in the nonlinear regime of laser pulse propagation in optical fibers.

Solitons, which are highly coherent and strongly localized nonlinear waves, are universal objects found in various media with dispersion and nonlinearity. They provide a framework for understanding nonlinear phenomena in different media and spatial scales [4–10]. The interaction of nonlinear waves and soliton dynamics in external potentials is a fertile field of research in soliton physics,

* Corresponding author.

E-mail address: vserkin@yahoo.com (V.N. Serkin).

<https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170904>

Received 25 March 2023; Received in revised form 21 April 2023; Accepted 21 April 2023

Available online 27 April 2023

0030-4026/© 2023 Elsevier GmbH. All rights reserved.

which finds applications in nonlinear optics, femtosecond pulse generation, Bose–Einstein condensates, hydrodynamics, and more [1–11].

We note that the inverse scattering transform (IST) method with a time-varying spectral parameter (nonisospectral IST) has been developed since 1976 when Chen and Liu [12] were the first who applied this method to the accelerated motion of the NLSE soliton in the linear x -dependent potential. Then other nonlinear evolution equations and their soliton solutions were generalized by applying the nonisospectral IST method [13–17].

The concept of nonautonomous solitons was introduced in Refs. [18–20] to characterize the exact solutions of the nonlinear evolution equations with varying in time or space coefficients and potentials (known in mathematical physics as nonautonomous equations). This concept greatly expanded the canonical concept of classical solitons and generalized it to elastically interacting nonautonomous solitons moving with varying amplitudes, velocities, and spectra and adapted both to external potentials and to changes in dispersion and nonlinearity.

Now nonautonomous solitons of various evolution equations are extensively studied (see, for example, Refs. [21–31] and references therein), and this concept is extended to the higher-order nonlinear evolution equations.

Last years generalized models of evolution equations with higher-order dispersion and nonlinearity terms have been developed. The fourth-order integrable evolution equations attracted considerable interest due to their possible physical applications, in particular, in ultra-short nonlinear optics. The fourth-order integrable nonlinear equation of the Ablowitz–Kaup–Newell–Segur (AKNS) hierarchy [32], known today as the Lakshmanan–Porsezian–Daniel equation (LPDE) [33], represents one of the earliest significant contribution to the search of integrability conditions for a one-dimensional Heisenberg ferromagnetic spin chain by including different kinds of magnetic interactions. The LPDE can be applied to describe nonlinear spin waves that arise as collective excitations of atomic spins in ferromagnetic metals. Systems that possess these nonlinear properties are considered as potential data carriers for computing devices of nanometer scale. Modern studies of the LPDE include various analytical and numerical methods and integration techniques presented in a number of works (see, for example, [34–53] and references therein).

Our work focuses on studying nonautonomous chirped solitons in the generalized higher-order equations of the NLSE hierarchy with external potentials. The objective of our paper is to propose a generalized nonautonomous fourth-order nonlinear evolution equation of the NLSE hierarchy, which describes dynamics of nonautonomous solitons in external potentials presented in the form of a quartic function of the spatial coordinate x :

$$U_{\text{ext}}(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x^1 + \alpha_2(t)x^2 + \alpha_3(t)x^3 + \alpha_4(t)x^4.$$

To construct this novel integrable higher-order equation, we apply the nonisospectral IST method with varying spectral parameter considered in our previous works [29–31], where the integrable nonautonomous evolution equations with external potentials: the NLSE, the modified Korteweg–de Vries equation (mKdV), and the Hirota type equation, were introduced. In this paper, we develop solutions of the proposed equation in the form of bright nonautonomous chirped solitons and soliton breathers applying the auto-Bäcklund transformation. Finally, we consider a special form of the proposed equation corresponding to the nonautonomous LPDE model with external potentials in the form of a quartic function and study dynamics of its soliton solutions.

2. Nonautonomous fourth-order nonlinear Schrödinger equation with external quartic polynomial potentials

Following the AKNS method [32] and Refs. [20,25], we study the (2×2) linear eigenvalue problem with the varying spectral parameter $\Lambda(t)$

$$\Psi_x = \hat{F}\Psi(x, t), \quad \Psi_t = \hat{G}\Psi(x, t), \tag{1}$$

where $\Psi(x, t) = \{\psi_1, \psi_2\}^T$ is a 2-component complex function. The complex-valued (2×2) matrices

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} -i\Lambda(t) & \sqrt{\sigma}F^{1/2}(t)q(x, t)\exp[\frac{i}{2}\varphi(x, t)] \\ \sqrt{\sigma}F^{1/2}(t)r(x, t)\exp[-\frac{i}{2}\varphi(x, t)] & i\Lambda(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

and

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \tag{3}$$

are written by introducing the gauge-transformed scattering potentials $q(x, t)$ and $r(x, t)$, the arbitrary positive amplitude function $F(t)$, and the parameter $\sigma = \pm 1$ separates the positive and negative GVD spectral regions.

The nonlinear integrable equations arise as the compatibility condition of the system of the linear matrix differential equations

$$\hat{F}_t - \hat{G}_x + [\hat{F}, \hat{G}] = 0. \tag{4}$$

The matrix elements $G \equiv A, B, C$ of the \hat{G} matrix are expanded in the powers of the spectral parameter $\Lambda(t)$:

$$\hat{G}(x, t) = \sum_{k=0}^{k=4} G_k \Lambda^k, \tag{5}$$

whereas a derivative of the spectral parameter is varying in accordance with the Riccati equation

$$\Lambda_t(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\Lambda + \lambda_2(t)\Lambda^2. \tag{6}$$

The exact values of \hat{G} -matrix elements are presented in [Appendix A](#).

The solution of the matrix Eq. (4) leads to the nonautonomous fourth-order nonlinear equation of the Schrödinger hierarchy with external quartic polynomial potentials

$$\begin{aligned}
 & i q_t + [D_2 - 3(D_3 + 4D_4\Theta x)\Theta x] \hat{D}_{2x} + i(D_3 + 4D_4\Theta x) \hat{D}_{3x} + D_4 \hat{D}_{4x} \\
 & + 6i\Theta(D_4 q_{xx} + \sigma R_4 |q|^2 q) + 4D_4 \Theta^3 x^3 q_x + \sigma R_4 (8q_{xx} |q|^2 + 2q^2 q_{xx}^* + 4|q_x|^2 q + 6(q_x)^2 q^*) \\
 & + 3\sigma R_3 \Theta q \int_{-\infty}^x |q|^2 dx' - U(x, t)q = i\gamma(t)q
 \end{aligned} \tag{7}$$

written down in terms of the time-dependent dispersion $D_i(t)$ and nonlinearity $R_i(t)$ coefficients, $i = 2, 3, 4$; and the self-induced soliton phase profile $\Theta(t)$.

In Eq. (7) we introduced notations:

$$\hat{D}_{2x} = \frac{1}{2} q_{xx} + \sigma \frac{R_2}{D_2} |q|^2 q, \tag{8}$$

represented the NLSE operator,

$$\hat{D}_{3x} = q_{xxx} + 6\sigma \frac{R_3}{D_3} |q|^2 q_x \tag{9}$$

represented the complex mKdV operator, and

$$\hat{D}_{4x} = q_{xxxx} + 6 \left(\sigma \frac{R_4}{D_4} \right)^2 |q|^4 q \tag{10}$$

corresponding to the fourth-order nonlinear equation operator.

The integrability conditions are established by the relationships

$$-\frac{F_t}{F} = \frac{W(R_4, D_4)}{R_4 D_4} = \frac{W(R_3, D_3)}{R_3 D_3} = \frac{W(R_2, D_2)}{R_2 D_2}, \tag{11}$$

where notations

$$R_2(t) = F(t)D_2(t), \quad R_3(t) = F(t)D_3(t), \quad R_4(t) = F(t)D_4(t), \tag{12}$$

are introduced in Eqs. (7)–(12) and $W(R, D) = RD_t - DR_t$ is the Wronskian of the functions R and D .

Eq. (12) automatically relates the main parameters of Eq. (7) by the extended Hirota constrain [54]

$$\frac{R_2(t)}{D_2(t)} = \frac{R_3(t)}{D_3(t)} = \frac{R_4(t)}{D_4(t)} = F(t). \tag{13}$$

The complex external potential that appears in Eq. (7) takes a form

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & (-2\gamma_0 + 3D_4\Theta^2) + \left(2\lambda_0 + i\frac{3}{2}D_3\Theta^2\right)x \\
 & + \left[\frac{1}{2}(\Theta_t - D_2\Theta^2) + 12D_4\Theta^3 - 6iD_4\Theta^3\right]x^2 + \frac{1}{2}D_3\Theta^3x^3 - D_4\Theta^4x^4,
 \end{aligned} \tag{14}$$

and the gain (absorption) coefficient reads as

$$\gamma(x, t) = -\gamma \frac{F_t}{F} + \frac{1}{2}D_2\Theta - 12D_4\Theta^2. \tag{15}$$

In view of some arbitrariness in the choice of $\varphi(x, t)$ phase, a quadratic self-induced phase is defined in accordance with the results of the previous studies of the NLSE, cmKdV, and Hirota equations [28–30]:

$$\varphi(x, t) = \Theta(t)x^2 + \varphi_0(t = 0). \tag{16}$$

For this choice of $\varphi(x, t)$, we obtain relationships between the main parameters of the dispersion, the self-induced soliton phase profile $\Theta(t)$ and parameters λ related to the spectral parameter $\Lambda(t)$ Eq. (6) (see [Appendix B](#)):

$$\lambda_1(t) = D_2\Theta - 12D_4\Theta^2, \tag{17}$$

$$\lambda_2(t) = 3D_3\Theta, \tag{18}$$

and $\lambda_0(t)$ is an arbitrary function.

The external potential emerges in Eq. (7) as a polynomial series of a quartic function form

$$U_{\text{ext}}(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)x^2 + \alpha_3(t)x^3 + \alpha_4(t)x^4, \tag{19}$$

where the coefficients $\alpha_n(t)$ are given by

$$\alpha_0(t) = -2\gamma_0 + 3D_4\Theta^2,$$

$$\alpha_1(t) = 2\lambda_0 + i\frac{3}{2}D_3\Theta^2,$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) &= \frac{1}{2}\Theta_t - \frac{1}{2}D_2\Theta + 12D_4\Theta^3 - 6iD_4\Theta^3, \\ \alpha_3(t) &= \frac{1}{2}D_3\Theta^3, \\ \alpha_4(t) &= -D_4\Theta^4, \end{aligned} \tag{20}$$

because of joint action of the self-induced phase modulation, varying spectral parameter (which defines varying in time soliton amplitudes and velocities), and higher-order dispersions.

3. Soliton solutions

Soliton solutions of order n of Eq. (7) can be obtained by applying the auto-Bäcklund transformation [55–57] and the recurrent relation [25]

$$q_n(x, t) = -q_{n-1}(x, t) - 4F^{-1/2}(t) \frac{\eta_n \tilde{\Gamma}_{n-1}(x, t)}{1 + |\tilde{\Gamma}_{n-1}(x, t)|^2}. \tag{21}$$

Eq. (21) allows one to obtain the n soliton solution if the $(n - 1)$ solution and the function $\tilde{\Gamma}_{n-1}(x, t) = \psi_1(x, t)/\psi_2(x, t)$ for the $(n - 1)$ soliton scattering functions $\Psi(x, t) = (\psi_1 \psi_2)^T$ are known. In order to calculate soliton solutions on a zero background, the recurrent process starts at the zero-valued potential $q(x, t) = 0$.

The bright ($\sigma = +1$) one-soliton $q_1^+(x, t)$ and two-soliton $q_2^+(x, t)$ solutions of Eq. (7) take the forms:

$$q_1^+(x, t) = 2\eta_1(t)F^{-1/2}(t)\text{sech} [\xi_1(x, t)] \exp \left[-\frac{i}{2}\varphi(x, t) - i\chi_1(x, t) \right], \tag{22}$$

$$q_2^+(x, t) = 4F^{-1/2}(t) \frac{\mathbb{N}(x, t)}{\mathbb{D}(x, t)} \exp \left[-\frac{i}{2}\varphi(x, t) \right], \tag{23}$$

where the numerator $\mathbb{N}(x, t)$ is given by

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \eta_1 \cosh \xi_2 \exp(-i\chi_1) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + 2i\eta_2(\kappa_2 - \kappa_1) \tanh \xi_2 + (\eta_1^2 - \eta_2^2)] \\ &+ \eta_2 \cosh \xi_1 \exp(-i\chi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 - 2i\eta_1(\kappa_2 - \kappa_1) \tanh \xi_1 - (\eta_1^2 - \eta_2^2)], \end{aligned} \tag{24}$$

and the denominator $\mathbb{D}(x, t)$ is represented by

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \cosh(\xi_1 + \xi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2] \\ &+ \cosh(\xi_1 - \xi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + (\eta_2 + \eta_1)^2] - 4\eta_1\eta_2 \cos(\chi_2 - \chi_1). \end{aligned} \tag{25}$$

The soliton parameters $\xi_i(x, t)$ and $\chi_i(x, t)$ with indexes $i = 1$ and 2 are written as

$$\begin{aligned} \xi_i(x, t) &= 2(x - x_{0i}) \eta_i(t) + 4 \int_0^t \eta_i(\tau) \kappa_i(\tau) D_2(\tau) d\tau \\ &- 8 \int_0^t \eta_i(\tau) [\eta_i^2(\tau) - 3\kappa_i^2(\tau)] D_3(\tau) d\tau + 64 \int_0^t \eta_i(\tau) \kappa_i(\tau) [\eta_i^2(\tau) - \kappa_i^2(\tau)] D_4(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \chi_i(x, t) &= 2(x - x_{0i}) \kappa_i(t) + 2 \int_0^t [\kappa_i^2(\tau) - \eta_i^2(\tau)] D_2(\tau) d\tau \\ &+ 8 \int_0^t \kappa_i(\tau) [\kappa_i^2(\tau) - 3\eta_i^2(\tau)] D_3(\tau) d\tau - 16 \int_0^t [\kappa_i^4(\tau) - 6\kappa_i^2(\tau)\eta_i^2(\tau) + \eta_i^4(\tau)] D_4(\tau) d\tau + \chi_{0i}, \end{aligned} \tag{27}$$

where the soliton amplitudes $\eta_i(t)$ and velocities $\kappa_i(t)$ are determined by solutions of the Riccati Eq. (6). This important step of determining the varying spectral parameter $\Lambda(t)$ is related to correct solution of Eq. (6).

4. Dynamics of nonautonomous chirped solitons of the generalized LPDE model

Let us consider the generalized LPDE model with dispersion and external potentials of the even orders only. Taking into account the self-induced soliton phase giving by Eq. (16): $\varphi(x, t) = \Theta(t)x^2 + \varphi_0$, we obtain a parameter $\lambda_1(t)$

$$\lambda_1(t) = D_2\Theta - 12D_4\Theta^2, \tag{28}$$

whereas a parameter $\lambda_2(t)$ vanishes, $\lambda_2(t) = 0$.

In the framework of this model, when $D_3(t) = R_3(t) \equiv 0$, Eq. (7) is reduced to the following form:

$$\begin{aligned} iq_t + (D_2 - 12D_4\Theta^2x^2) \left(\frac{1}{2}q_{xx} + \sigma \frac{R_2}{D_2} |q|^2 q \right) + iD_4\Theta \left[6 \left(q_{xx} + \sigma \frac{R_4}{D_4} |q|^2 q \right) + 4x \left(q_{xxx} + 6\sigma \frac{R_4}{D_4} |q|^2 q_x \right) \right] \\ + D_4 \left[q_{xxxx} + 6 \left(\frac{R_4}{D_4} \right)^2 |q|^4 q + 4\Theta^3 x^3 q_x \right] + \sigma R_4 \left(8q_{xx} |q|^2 + 2q^2 q_{xx}^* + 4|q_x|^2 q + 6(q_x)^2 q^* \right) \end{aligned} \tag{29}$$

$$- U(x, t)q = i\gamma(x, t)q,$$

where the complex external potential takes a form

$$U(x, t) = (-2\gamma_0 + 3D_4\Theta^2) + 2\lambda_0x + \left[\frac{1}{2} (\Theta_t - D_2\Theta^2) + 12D_4\Theta^3 - 6iD_4\Theta^3 \right] x^2 - D_4\Theta^4x^4, \tag{30}$$

and the gain (absorption) coefficient is

$$\gamma(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{F_t}{F} + \frac{1}{2} D_2\Theta - 12D_4\Theta^2. \tag{31}$$

The integrability conditions are the follows:

$$-\frac{F_t}{F} = \frac{W(R_4, D_4)}{R_4D_4} = \frac{W(R_2, D_2)}{R_2D_2}. \tag{32}$$

Now the soliton amplitudes $\eta_i(t)$ and velocities $\kappa_i(t)$ are determined by the solution of the equation

$$\Lambda_i(t) = \lambda_1(t) \Lambda, \tag{33}$$

which takes the form

$$\Lambda(t) = \kappa(t) + i\eta(t) = \Lambda_0(t=0) \exp \left(\int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau \right). \tag{34}$$

Exactly, we have

$$\eta(t) = \eta_0 \exp \left(\int_0^t (D_2\Theta - 12D_4\Theta^2) d\tau \right), \tag{35}$$

$$\kappa(t) = \kappa_0 \exp \left(\int_0^t (D_2\Theta - 12D_4\Theta^2) d\tau \right), \tag{36}$$

where η_0 and κ_0 are the initial amplitude and velocity.

4.1. Example. Soliton dynamics at constant dispersion

Let us consider the dynamics of nonautonomous chirped solitons governed by Eq. (29) with constant dispersion coefficients $D_2 = D_{20}$ and $D_4 = D_{40}$. A parameter $\lambda_0(t)$ defines a linear external potential and, in this example, eventually can be accepted as $\lambda_0(t) = 0$. Let us consider a simplest case when the self-induced soliton phase profile $\Theta(t)$ is a constant defined by its initial value $\Theta(t) = \Theta_0$. Then, a parameter $\lambda_1(t)$ becomes equal to a constant

$$\lambda_{10} = (D_{20}\Theta_0 - 12D_{40}\Theta_0^2), \tag{37}$$

which defines the spectral parameter

$$\Lambda(t) = \Lambda_0(t=0) [\exp(\lambda_{10}t) - 1] \tag{38}$$

and the soliton amplitude and velocity

$$\eta(t) = \eta_0 \exp [\exp(\lambda_{10}t) - 1], \tag{39}$$

$$\kappa(t) = \kappa_0 \exp [\exp(\lambda_{10}t) - 1], \tag{40}$$

where η_0 and κ_0 denote the initial soliton amplitude and velocity.

The generalized LPDE with varying coefficients (29) is reduced to the nonautonomous equation with constant coefficients and the potentials of the second and fourth degrees on x :

$$\begin{aligned} & i q_t + (D_{20} - 12D_{40}\Theta_0^2x^2) \left(\frac{1}{2} q_{xx} + \sigma \frac{R_{20}}{D_{20}} |q|^2 q \right) \\ & + i D_{40}\Theta_0 \left[6 \left(q_{xx} + \sigma \frac{R_{40}}{D_{40}} |q|^2 q \right) + 4x \left(q_{xxx} + 6\sigma \frac{R_{40}}{D_{40}} |q|^2 q_x \right) \right] \\ & + D_{40} \left[q_{xxxx} + 6 \left(\frac{R_{40}}{D_{40}} \right)^2 |q|^4 q + 4\Theta_0^3x^3q_x \right] + \sigma R_{40} \left(8q_{xx} |q|^2 + 2q^2q_{xx}^* + 4|q_x|^2 q + 6(q_x)^2 q^* \right) \\ & - \left[3D_{40}\Theta_0 + \left(-\frac{1}{2}D_{20} + 12D_{40}\Theta_0 - 6iD_{40}\Theta_0 \right) \Theta_0^2x^2 - D_{40}\Theta_0^4x^4 \right] q = i \left[\frac{1}{2}D_{20} - 12D_{40}\Theta_0 \right] \Theta_0 q. \end{aligned} \tag{41}$$

Behavior of solitons of Eq. (41) is defined by the spatio-temporal dependence of the soliton parameters $\xi_i(x, t)$ and $\chi_i(x, t)$ (Eqs. (26) and (27)), which in this case become

$$\begin{aligned} \xi_i(x, t) = & 2(x - x_{0i}) \eta_{i0} \exp(\lambda_{10}t) + 2\eta_{i0}\kappa_{i0} D_{20} [\exp(2\lambda_{10}t) - 1] / \lambda_{10} \\ & + 16\eta_{i0}\kappa_{i0} [\eta_{i0}^2 - \kappa_{i0}^2] D_{40} [\exp(4\lambda_{10}t) - 1] / \lambda_{10}, \end{aligned} \tag{42}$$

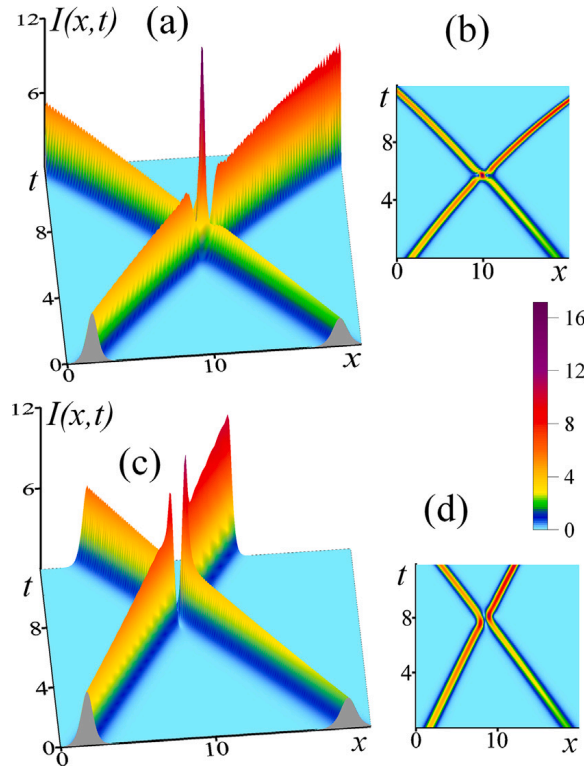


Fig. 1. Comparative dynamics of two solitons of (a,b) Eq. (41) and (c,d) Eq. (44) with $\lambda_{10} = 1/24$ and $I = |q|^2$. (a, b) $D_{20} = R_{20} = 1.0$, $D_{40} = R_{40} = 1/24$, (c, d) $D_{20} = R_{20} = 1.0$, $D_{40} = R_{40} = 0$. Initial soliton amplitudes and velocities are: $\eta_{01} = 1.0$ and $\eta_{02} = 0.75$; $\kappa_{01} = -0.4$ and $\kappa_{02} = 0.6$. (a,c) Spatio-temporal dynamics, (b,d) contour plot.

$$\chi_i(x, t) = 2(x - x_{0i}) \kappa_{i0} \exp(\lambda_{10}t) + [\kappa_{i0}^2 - \eta_{i0}^2] D_{20} [\exp(2\lambda_{10}t) - 1] / \lambda_{10} - 4(\kappa_{i0}^4 - 6\kappa_{i0}^2 \eta_{i0}^2 + \eta_{i0}^4) D_{40} [\exp(4\lambda_{10}t) - 1] / \lambda_{10} + \chi_{0i}. \tag{43}$$

An interesting property of soliton solutions of Eq. (41) consists in the fact that a soliton moves with an accelerated velocity and increased (or decreased) amplitude in the medium with constant dispersion and nonlinearity. Due to appeared potentials and a self-induced phase shift, a soliton acquires an acceleration and amplitude modulation.

In Fig. 1, we show the comparative dynamics of two nonautonomous chirped solitons of Eq. (41) with $D_{40} = R_{40} = 1/24$, and the nonautonomous NLSE

$$iq_t + D_{20} \left(\frac{1}{2} q_{xx} + \sigma \frac{R_{20}}{D_{20}} |q|^2 q + \frac{1}{2} D_2 \Theta_0^2 x^2 q \right) = \frac{i}{2} D_{20} \Theta_0 q, \tag{44}$$

which follows from Eq. (41) when $D_4 = R_4 = 0$. Solitons with initial amplitudes $\eta_{01} = 1.0$ and $\eta_{02} = 0.75$ initially located at $x_{01} = 1.0$ and $x_{02} = 0.75$, move with initial velocities $\kappa_{01} = -0.4$ and $\kappa_{02} = 0.6$ and interact elastically. The spatio-temporal dynamics presented in Fig. 1(a,c) indicates an increase of the soliton amplitudes. On the contour plots shown in Fig. 1(b,d), one can see that the nonautonomous solitons move with time-varying amplitudes and velocities adapted both to external potentials and to a self-induced phase shift. A comparison of graphs (a,b) and (c,d) in Fig. 1 shows that the influence of the fourth-order dispersion reduces an action of the second-order dispersion and serves as a perturbation of the main second-order term. On the other hand, the influence of the external potentials results in the soliton acceleration and the scattering on larger angles.

Fig. 2 shows (a) spatio-temporal dynamics and (b) a contour plot of the two-soliton solutions of Eq. (41) with $D_{40} = R_{40} = 1/24$ and $D_{20} = R_{20} = 1.0$ corresponding to the standing nonautonomous breather with the initial amplitudes of solitons: $\eta_{01} = 1.0$ and $\eta_{02} = 0.5$, and zero initial velocities, $\kappa_{01} = \kappa_{02} = 0$. In accordance with Eq. (37), the initial value of $\lambda_{10} = 1/24$ leads to the constant initial soliton phases $\Theta_0 = 0.043$ or $\Theta_0 = 1.957$. The dynamics of the breather is characterized by an increase in the amplitude and frequency of oscillations as a result of the action of the external potential and self-induced phase shift at constant dispersion and nonlinearity.

Fig. 3 presents two nonautonomous solitons of Eq. (41) with the constant second- and fourth-order dispersion coefficients, $D_{20} = R_{20} = 1.0$ and $D_{40} = R_{40} = 1/24$. Solitons with initial amplitudes $\eta_{01} = 1.2$ and $\eta_{02} = 0.4$, zero initial velocities, $\kappa_{01} = \kappa_{02} = 0$, and the constant initial soliton phase $\Theta_0 = 0.043$ (or $\Theta_0 = 1.957$) are separated by an initial distance $\Delta x_0 = 5$ and move along parallel trajectories, exponentially increasing their amplitudes.

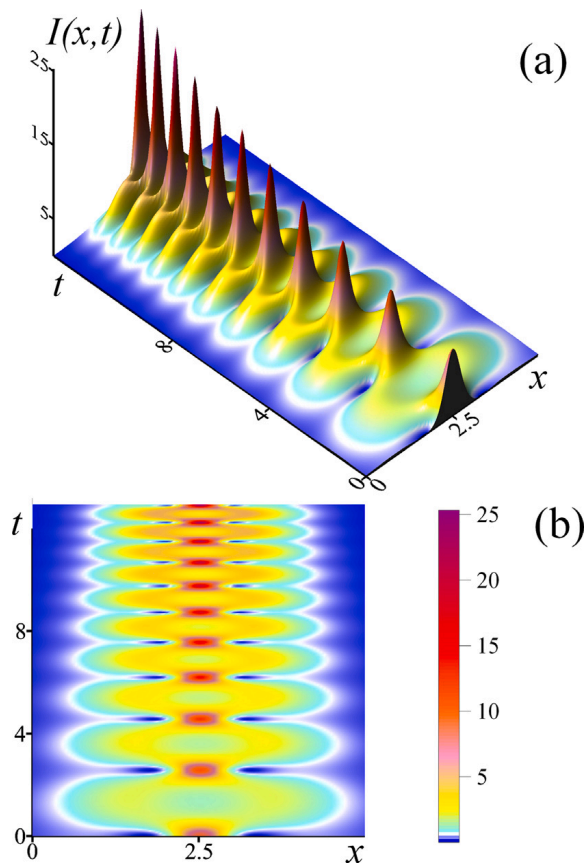


Fig. 2. Dynamics of the nonautonomous two-soliton breather of Eq. (41) with $D_{20} = R_{20} = 1.0$, $D_{40} = R_{40} = 1/24$, $\lambda_{10} = 1/24$, and $I = |q|^2$. Initial soliton amplitudes and velocities are: $\eta_{01} = 1.0$ and $\eta_{02} = 0.50$; $\kappa_{01} = \kappa_{02} = 0$. (a) Spatio-temporal dynamics, (b) contour plot.

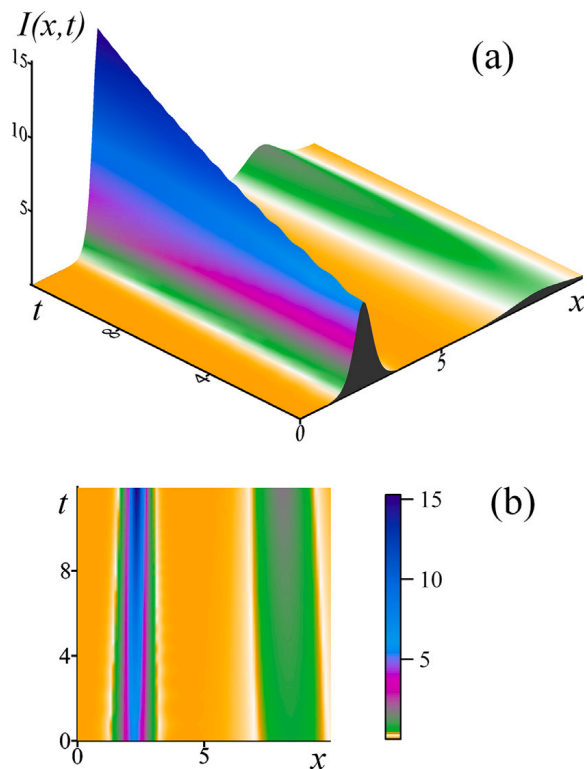


Fig. 3. Dynamics of the standing two-soliton solution of Eq. (41) with $D_{20} = R_{20} = 1.0$, $D_{40} = R_{40} = 1/24$, $\lambda_{10} = 1/24$, and $I = |q|^2$. Initial soliton amplitudes and velocities are: $\eta_{01} = 1.2$ and $\eta_{02} = 0.40$; $\kappa_{01} = \kappa_{02} = 0$. (a) Spatio-temporal dynamics, (b) contour plot.

5. Conclusion

This article was written exclusively for the special issue “Golden Jubilee of Solitons in Optical Fibers” dedicated to the discovery by Hasegawa and Tappert of solitonic nonlinear regimes of laser pulses propagation in optical fibers.

Inspired by the work of Akira Hasegawa, recently published in Optik [58], we have set ourselves the goal of explaining in detail how external nonstationary polynomial potentials appear in the NLSE nonisospectral hierarchy. We have revealed that complex potentials arise as polynomial series of the fourth degree of the spatial coordinate $U_{\text{ext}}(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)x^2 + \alpha_3(t)x^3 + \alpha_4(t)x^4$, if the derivative of the spectral parameter is also expanded into a polynomial series of the spectral parameter up to the second order $\Lambda_t(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\Lambda + \lambda_2(t)\Lambda^2$. We have predicted that new fourth-order nonlinear models arise if and only if the NLSE operator, the mKdV complex operator, and the fourth-order LPDE operators are connected by the extended Hirota constraint.

We have introduced the generalized nonautonomous fourth-order nonlinear Schrödinger equation with varying dispersion, nonlinearity, and external potentials represented by the polynomial series up to the fourth order applying the modified AKNS method and constructing a pair of the Lax matrices. The exact analytical solutions of the proposed equation were obtained in the form of bright nonautonomous chirped solitons and soliton breathers.

We have focused on the special form of the proposed equation corresponding to the nonautonomous LPDE model with external potentials in the form of a quartic function of the spatial coordinate x and have studied basic dynamic regimes of formation and interaction of new phase-modulated nonautonomous solitons of this model. We have showed that nonautonomous solitons of the nonisospectral LPDE model move with varying in time amplitudes and velocities adapted both to the external potentials and to the self-induced phase shift even in a media with constant dispersion and nonlinearity. The influence of the fourth-order dispersion reduces the action of the second-order dispersion and serves as a perturbation of the main second-order term. Also, the influence of external potentials leads to soliton acceleration and the scattering on the larger angles in comparison with solitons of the second-order NLSE.

In conclusion, we would like to accentuate that the higher-order AKNS hierarchy has a wide range of applicability and opens advantageous new possibilities to investigate “in parallels” many physical phenomena in nonlinear optics, ferromagnetic spin chain dynamics, and rogue wave dynamics in the ocean. As the father of optical solitons, Akira Hasegawa, underlines, a soliton is more than one bit [58]. Due to their remarkable properties, solitons can act as idealized mathematical structures for describing “soliton models of atoms”, “nonlinear vacuum”, and extended “elementary” particles [59–62].

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

No data was used for the research described in the article.

Acknowledgments

The authors are very grateful to two anonymous reviewers for their careful study of the manuscript, which improved its clarity. The authors thank the CONACyT, Mexico for providing partial financial support under Project No. CF-MI-20191008164427672-86390.

Appendix A. Nonisospectral modification of the AKNS method

The elements of the \hat{G} -matrix obtained in the framework of our nonisospectral approach are calculated by solving Eq. (4) and using Eq. (5) for expanding these elements in the powers of the spectral parameter $\Lambda(t)$.

Exactly, the \hat{G} -matrix elements take the following forms:

$$\begin{aligned} A_4 &= a_4(t), B_4 = 0, C_4 = 0, \\ A_3 &= a_3(t), B_3 = i\sqrt{\sigma}F^{1/2} \exp\left[\frac{i}{2}\varphi(x, t)\right] a_4q, C_3 = i\sqrt{\sigma}F^{1/2} \exp\left[-\frac{i}{2}\varphi(x, t)\right] a_4r, \\ A_2 &= a_2(t) - i\lambda_2x + \frac{1}{2}\sigma F a_4qr, \\ B_2 &= \sqrt{\sigma}F^{1/2} \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\right) \left(-\frac{1}{2}a_4q_x - \frac{i}{4}a_4\varphi_xq + ia_3q\right), \\ C_2 &= \sqrt{\sigma}F^{1/2} \exp\left(-\frac{i}{2}\varphi\right) \left(\frac{1}{2}a_4r_x - \frac{i}{4}a_4\varphi_xr + ia_3r\right), \\ A_1 &= a_1(t) - i\lambda_1x + \frac{1}{4}\sigma F [-a_4\varphi_xqr + ia_4(q_xr - qr_x) + 2a_3qr], \\ B_1 &= \sqrt{\sigma}F^{1/2} \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\right) \left[\frac{i}{2}a_4\sigma F q^2r + \frac{a_4}{4}(-iq_{xx} + \varphi_xq_x + \frac{i}{4}\varphi_x^2q + \frac{1}{2}\varphi_{xx}q)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{a_3}{2} \left(q_x + \frac{i}{2} \varphi_x q \right) + \lambda_2 x q + i a_2 q \Big], \\
 C_1 = & \sqrt{\sigma} F^{1/2} \exp\left(-\frac{i}{2} \varphi\right) \left[\frac{i}{2} a_4 \sigma F q r^2 + \frac{a_4}{4} \left(-i r_{xx} - \varphi_x r_x + \frac{i}{4} \varphi_x^2 r - \frac{1}{2} \varphi_{xx} r \right) \right. \\
 & \left. + \frac{a_3}{2} \left(r_x - \frac{i}{2} \varphi_x r \right) + \lambda_2 x r + i a_2 r \right], \\
 A_0 = & a_0 - i \lambda_0 x - \frac{i}{2} \lambda_2 \sigma F \int_{-\infty}^x q r d x' - \frac{i}{2} \lambda_2 \sigma F x q r + \frac{1}{2} \sigma F a_2 q r \\
 & - \frac{1}{4} a_3 \sigma F \left[\varphi_x q r + i \left(q r_x - q_x r \right) \right] + \frac{3}{8} a_4 F^2 \left(q r \right)^2 \\
 & - \frac{1}{8} a_4 \sigma F \left[\left(q r_{xx} + q_{xx} r - q_x r_x \right) - \frac{3}{4} \varphi_x^2 q r - i \frac{3}{2} \varphi_x \left(q r_x - q_x r \right) \right], \\
 B_0 = & \sigma^{3/2} F^{3/2} \exp(i \varphi / 2) \left(-\frac{3}{8} i a_4 \varphi_x q^2 r - \frac{3}{4} a_4 q_x q r + \frac{i}{2} a_3 q^2 r \right) + \sqrt{\sigma} F^{1/2} \exp(i \varphi / 2) \\
 & \times \left\{ \frac{a_4}{64} \left[8 q_{xxx} + 12 i \varphi_x q_{xx} + 6 \left(2 i \varphi_{xx} - \varphi_x^2 \right) q_x + \left(-i \varphi_x^3 + 4 i \varphi_{xxx} - 6 \varphi_{xx} \varphi_x \right) q \right] \right. \\
 & + \frac{a_3}{16} \left(-4 i q_{xx} + 4 \varphi_x q_x + 2 \varphi_{xx} q + i \varphi_x^2 q \right) - \frac{a_2}{2} \left(q_x + \frac{i}{2} \varphi_x q \right) + \left(i a_1 + \lambda_1 x \right) q \\
 & \left. + \lambda_2 \left(-\frac{1}{4} \varphi_x x q + \frac{i}{2} q + \frac{i}{2} x q_x \right) \right\}, \\
 C_0 = & -B_0^*.
 \end{aligned}$$

We apply the redaction procedure accepted in the AKNS scheme: $r = -q^*$ [32] and obtain the evolution equations for the scattering potentials $q(x, t)$ and $r(x, t)$ in the same form of Eq. (7) only if all integration functions $a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, 4$, appeared within the integration of Eq. (4) have imaginary values, and so can be defined in the following manner:

$$a_0(t) = i \gamma_0(t), \quad a_1(t) = 0, \quad a_2(t) = -i D_2(t), \quad a_3(t) = -4 i D_3(t), \quad a_4(t) = 8 i D_4(t).$$

Finally, the \hat{G} -matrix elements are written as follows:

$$\begin{aligned}
 A = & i \gamma_0 - i \lambda_0 x + \frac{i}{2} \lambda_2 \sigma F \int_{-\infty}^x |q|^2 d x' + \frac{i}{2} \sigma F \lambda_2 x |q|^2 + \frac{i}{2} \sigma R_2 |q|^2 \\
 & + i R_3 \sigma \left[-\varphi_x |q|^2 + i \left(-q q_x^* + q_x q^* \right) \right] + 3 i F^2 |q|^4 \\
 & - i R_4 \sigma \left[\left(-q q_{xx}^* - q_{xx} q^* + q_x q_x^* \right) + i \frac{3}{2} \varphi_x \left(q q_x^* - q_x q^* \right) + \frac{3}{4} \varphi_x^2 |q|^2 \right] \\
 & + i \Lambda \left\{ -\lambda_1 x + 2 \sigma R_3 |q|^2 + 2 \sigma R_4 \left[\varphi_x |q|^2 + \left(q q_x^* - q_x q^* \right) \right] \right\} \\
 & - i \Lambda^2 \left(4 \sigma R_4 |q|^2 + D_2 - \lambda_2 x \right) - 4 i D_3 \Lambda^3 + 8 i D_4 \Lambda^4, \\
 B = & i \sqrt{\sigma} F^{1/2} \exp(i \varphi / 2) \left\{ D_4 \left[q_{xxx} + \frac{3 i}{2} \varphi_x q_{xx} + \frac{3}{4} \left(2 i \varphi_{xx} - \varphi_x^2 \right) q_x + \left(-\frac{i}{8} \varphi_x^3 + \frac{i}{2} \varphi_{xxx} - \frac{3}{4} \varphi_{xx} \varphi_x \right) q \right] \right. \\
 & + D_3 \left(i q_{xx} - \varphi_x q_x - \frac{1}{2} \varphi_{xx} q - \frac{i}{4} \varphi_x^2 q \right) + \frac{1}{2} D_2 \left(q_x + \frac{i}{2} \varphi_x q \right) + \frac{1}{2} \lambda_2 \left(q + x q_x + \frac{i}{2} \varphi_x x q \right) - i \lambda_1 x q \\
 & + \sigma F \exp(i \varphi / 2) \left(3 D_4 |q|^2 q_x + 3 i D_4 |q|^2 q \varphi_x + 2 i D_3 |q|^2 q \right) \\
 & + \left[-i \left(D_2 + \lambda_2 x \right) q - 4 i \sigma F D_4 |q|^2 q + D_4 \left(-2 i q_{xx} + 2 \varphi_x q_x + \frac{i}{2} \varphi_x^2 q + \varphi_{xx} q \right) + D_3 \left(2 q_x + i \varphi_x q \right) \right] \Lambda \\
 & \left. - \left(4 D_4 q_x + 2 i D_4 \varphi_x q + 4 i D_3 q \right) \Lambda^2 + 8 i D_4 q \Lambda^3 \right\}, \\
 C_0 = & -B_0^*.
 \end{aligned}$$

Appendix B. Determination of the spectral parameter

In order to find reasonable relationships between the external potentials, the self-induced phase $\varphi(x, t)$, and parameters λ_0, λ_1 , and λ_2 , let us consider the coefficient $\mathcal{V}(x, t)$ that arises after calculating Eq. (4) and appears before the derivative $q_x(x, t)$:

$$\mathcal{V}(x, t) = \left[i \lambda_2 + \lambda_1 x - \frac{1}{2} \varphi_x \left(D_2 + \lambda_2 x \right) - \frac{3 i}{4} D_3 \left(2 \varphi_{xx} + i \varphi_x^2 \right) + i D_4 \left(\frac{1}{2} \varphi_x^3 - 2 \varphi_{xxx} - 3 i \varphi_x \varphi_{xx} \right) \right].$$

We accept that $\mathcal{V}(x, t) = 0$, in order to relate the reference frame, where a soliton is moving, with the phase $\varphi(x, t)$ of the soliton. This condition results in the following relations between parameters of the problem:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(t) &= D_2 \Theta - 12 D_4 \Theta^2, \\
 \lambda_2(t) &= 3 D_3 \Theta.
 \end{aligned}$$

References

- [1] A. Hasegawa, F. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion, *Appl. Phys. Lett.* 23 (1973) 142.
- [2] A. Hasegawa, F. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion, *Appl. Phys. Lett.* 23 (1973) 171.
- [3] L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, J.P. Gordon, Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 1095.
- [4] A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer-Verlag, 1989.
- [5] E.M. Dianov, P.V. Mamyshev, A.M. Prokhorov, V.N. Serkin, *Nonlinear Effects in Optical Fibers*, Harwood Academic Publ., New York, 1989.
- [6] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, first ed., Academic Press, 1989.
- [7] J.R. Taylor, *Optical Solitons - Theory and Experiment*, Cambridge Univ, 1992.
- [8] L.F. Mollenauer, J.P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers*, Academic Press, Boston, 2006.
- [9] A. Biswas, D. Milovic, *Mathematical Theory of Dispersion-Managed Optical Solitons*, Springer, Berlin, 2010.
- [10] K. Porsezian, R. Ganapathy (Eds.), *Odyssey of Light in Nonlinear Optical Fibers: Theory and Applications*, CRC Press, Taylor & Francis, 2015.
- [11] A.B. Grudinin, E.M. Dianov, D.V. Korobkin, A.M. Prokhorov, V.N. Serkin, SRS generation of 18-fs pulses in the 1.6-micron region during the excitation of a single-mode waveguide by a YAG: Nd (3+) laser ($\lambda=1.064$ micron), *Pisma V Zhurnal Eksperimentalnoi I Teoreticheskoi Fiziki* 45 (1987) 211–213.
- [12] H.H. Chen, C.S. Liu, Solitons in nonuniform media, *Phys. Rev. Lett.* 37 (1976) 693–696.
- [13] R. Hirota, J. Satsuma, N-soliton solutions of the K-dV equation with loss and nonuniformity terms, *J. Phys. Soc. Jpn. Lett.* 41 (1976) 2141–2142.
- [14] F. Calogero, A. Degasperis, Coupled nonlinear evolution equations solvable via the inverse spectral transform, and solitons that come back: The Boomeron, *Lett. Nuovo Cimento* 16 (1976) 425–433.
- [15] F. Calogero, A. Degasperis, Extension of the spectral transform method for solving nonlinear evolution equations, I, *Lett. Nuovo Cimento* 22 (1978) 131–137.
- [16] F. Calogero, A. Degasperis, Exact solution via the spectral transform of a nonlinear evolution equation with linearly x-dependent coefficients, *Lett. Nuovo Cimento* 22 (1978) 138–141.
- [17] S.P. Burtsev, V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov, Inverse scattering method with variable spectral parameter, *Theoret. Math. Phys.* 70 (1987) 227.
- [18] V.N. Serkin, A. Hasegawa, Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 4502–4505.
- [19] V.N. Serkin, A. Hasegawa, Exactly integrable nonlinear Schrödinger equation models with varying dispersion, nonlinearity and gain: Application for soliton dispersion and nonlinear management, *IEEE J. Select. Top. Quant. Electron.* 8 (2002) 418–431.
- [20] V.N. Serkin, A. Hasegawa, T.L. Belyaeva, Nonautonomous solitons in external potentials, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 074102.
- [21] K.H. Han, H.J. Shin, Nonautonomous integrable nonlinear Schrödinger equations with generalized external potentials, *J. Phys. A Math. Theor.* 42 (2009) 335202.
- [22] H. Luo, D. Zhao, X. He, Exactly controllable transmission of nonautonomous optical solitons, *Phys. Rev. A* 79 (2009) 063802.
- [23] T.L. Belyaeva, V.N. Serkin, Nonautonomous solitons: applications from nonlinear optics to BEC and hydrodynamics, in: H. Edmar Schulz (Ed.), *Hydrodynamics – Advanced Topics*, InTech, Rijeka, Croatia, 2011.
- [24] D. Zhao, Yu-J. Zhang, W.W. Lou, H.G. Luo, AKNS hierarchy, Darboux transformation and conservation laws of the 1D nonautonomous nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Phys.* 52 (2011) 043502.
- [25] V.N. Serkin, A. Hasegawa, T.L. Belyaeva, Hidden symmetry reductions and the Ablowitz–Kaup–Newell–Segur hierarchies for nonautonomous solitons, in: K. Porsezian, R. Ganapathy (Eds.), *Odyssey of Light in Nonlinear Optical Fibers: Theory and Applications*, CRC Press, Taylor & Francis, 2015, pp. 145–187.
- [26] D.W. Zuo, H.X. Jia, Interaction of the nonautonomous soliton in the optical fiber, *Optik* 127 (2016) 11282.
- [27] V.N. Serkin, T.L. Belyaeva, Exactly integrable nonisospectral models for femtosecond colored solitons and their reversible transformations, *Optik* 158 (2018) 1289–1294.
- [28] S. Nandy, G.K. Sahariah, A. Barthakur, Generalized reversible transformations and new nonautonomous higher order nonlinear Schrödinger equation, *Optik* 223 (2020) 165452.
- [29] T.L. Belyaeva, M.A. Aguero, V.N. Serkin, Nonautonomous solitons of the novel nonlinear Schrödinger equation: Self-compression, amplification, and the bound state decay in external potentials, *Optik* 244 (2021) 167584.
- [30] T.L. Belyaeva, V.N. Serkin, Nonautonomous solitons of the generalized complex mKdV equation in external potentials, *Optik* 245 (2021) 167650.
- [31] T.L. Belyaeva, V.N. Serkin, Nonlinear dynamics of nonautonomous solitons in external potentials expressed by time-varying power series: Exactly solvable higher-order nonlinear and dispersive models, *Nonlinear Dynam.* 107 (2022) 1153–1162.
- [32] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 125–127.
- [33] K. Porsezian, M. Daniel, M. Lakshmanan, On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic Heisenberg spin chain, *J. Math. Phys.* 33 (1992) 1807–1816.
- [34] L.H. Wang, K. Porsezian, J.S. He, Breather and rogue wave solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 053202.
- [35] R. Guo, H.-Q. Hao, Breathers and multi-soliton solutions for the higher-order generalized nonlinear Schrödinger equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 18 (2013) 2426–2435.
- [36] F. Yu, Nonautonomous rogue waves and catch dynamics for the combined Hirota – LPD equation with variable coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 34 (2016) 142–153.
- [37] X.-Y. Xie, B. Tian, J. Chai, X.-Y. Wu, Y. Jiang, Dark soliton collisions for a fourth-order variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation in an inhomogeneous Heisenberg ferromagnetic spin chain or alpha helical protein, *Nonlinear Dynam.* 86 (2016) 131–135.
- [38] A. Chowdury, W. Krolkowski, N. Akhmediev, Breather solutions of a fourth-order nonlinear Schrödinger equation in the degenerate, soliton, and rogue wave limits, *Phys. Rev. E* 96 (2017) 042209.
- [39] Y. Zhang, Y. Liu, X. Tang, Breathers and rogue waves for the fourth-order nonlinear Schrödinger equation, *Z. Nat. - Sect. A: J. Phys. Sci.* 72 (2017) 339–344.
- [40] J. Vega-Guzman, R.T. Alqahtani, Q.Z. Mohamma, F. Mahmood, S.P. Moshoko, M.Z. Ullah, A. Biswas, M. Belic, Optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model with spatio-temporal dispersion using the method of undetermined coefficients, *Optik* 144 (2017) 115–123.
- [41] H. Triki, A. Choudhuri, K. Porsezian, P.T. Dinda, Dark solitons in an extended nonlinear Schrödinger equation with higher-order odd and even terms, *Optik* 164 (2018) 661–670.
- [42] A. Biswas, Y. Yildirim, E. Yasar, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Belic, Optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by modified simple equation method, *Optik* 160 (2018) 24–32.
- [43] V.N. Serkin, T.L. Belyaeva, Novel soliton breathers for the higher-order Ablowitz–Kaup–Newell–Segur hierarchy, *Optik* 174 (2018) 259–265.
- [44] V.N. Serkin, T.L. Belyaeva, Optimal control for soliton breathers of the Lakshmanan–Porsezian–Daniel, Hirota, and CmKdV models, *Optik* 175 (2018) 17–27.
- [45] A. Al Qarni, M.A. Banaja, H.O. Bakodah, A.A. Alshaery, Q. Zhou, A. Biswas, S.P. Moshokoa, M.R. Belic, Bright optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model with spatio-temporal dispersion by improved Adomian decomposition method, *Optik* 181 (2019) 891–897.

- [46] A. Al Qarni, et al., Optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by Riccati equation approach, *Optik* 182 (2019) 922–929.
- [47] E.M.E. Zayed, et al., Optical solitons in birefringent fibers with Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by the aid of a few insightful algorithms, *Optik* 200 (2020) 163281.
- [48] N.A. Kudryashov, The Lakshmanan–Porsezian–Daniel model with arbitrary refractive index and its solution, *Optik* 241 (2021) 167043.
- [49] M. Wang, Bo Tian, T.-Yu Zhou, Darboux transformation, generalized darboux transformation and vector breathers for a matrix Lakshmanan–Porsezian–Daniel equation in a Heisenberg ferromagnetic spin chain, *Chaos Solitons Fractals* 152 (2021) 111411.
- [50] M. Bilal, U. Younas, A. Yusuf, T.A. Sulaiman, M. Bayram, Optical solitons with the birefringent fibers without four-wave mixing via the Lakshmanan–Porsezian–Daniel equation, *Optik* 243 (2021) 167489.
- [51] Y. Yıldırım, E. Topkara, A. Biswas, et al., Cubic–quartic optical soliton perturbation with Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by sine-Gordon equation approach, *J. Opt.* 50 (2021) 322–329.
- [52] S. Zhou, L. Wang, J.-F. Zhao, W.-R. Sun, Nonlinear wave molecules for the Lakshmanan–Porsezian–Daniel equation in nonlinear optics and biology, *Annal. Phys.* 534 (2022) 2100545.
- [53] M.R. Ali, M.A. Khattab, S.M. Mabrouk, Optical soliton solutions for the integrable Lakshmanan–Porsezian–Daniel equation via the inverse scattering transformation method with applications, *Optik* 272 (2023) 170256.
- [54] R. Hirota, Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, *J. Math. Phys.* 14 (1973) 805–809.
- [55] H.H. Chen, General derivation of Bäcklund transformations from inverse scattering problems, *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974) 925.
- [56] K. Konno, M. Wadati, Simple derivation of Backlund transformation from riccati form of inverse method, *Progr. Theoret. Phys.* 53 (1975) 1652–1656.
- [57] A.A. Rangwala, J.A. Rao, Complete soliton solutions of the ZS/AKNS equations of the inverse scattering method, *Phys. Lett. A* 112 (1985) 188–192.
- [58] A. Hasegawa, (Invited) Golden jubilee of solitons in optical fibers: For young scientists who love creative works, *Optik* 279 (2023) 170769.
- [59] V.N. Serkin, E.M. Schmidt, T.L. Belyaeva, Maxwell’s solitary waves: Optical video solitons and wave second harmonics solitons, *Proc. SPIE* 3927 (2000) 323–334.
- [60] L.M. Kovachev, Vortex solutions of the nonlinear optical Maxwell–Dirac equations, *Physica D* 190 (2004) 78–92.
- [61] L.M. Kovachev, Optical Leptons, *Int. J. Math. Sci.* 27 (2004) 1403–1422.
- [62] L.M. Kovachev, D.A. Georgieva, K.L. Kovachev, Electromagnetic shock wave in nonlinear vacuum: Exact solution, *Opt. Lett.* 37 (2012) 4047–4051.

Bibliografía

- [1] G. W. Griffiths y W. E. Schiesser, “Linear and nonlinear waves,” Scholarpedia, vol. 4, no. 7, p. 4308, 2009. DOI: [10.4249/scholarpedia.4308](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.4308).
- [2] T. B. Benjamin and J. E. Feir, “The disintegration of wave trains on deep water. Part 1: Theory,” J. Fluid Mech. **27**, 417-430 (1967). DOI: [10.1017/S002211206700045X](https://doi.org/10.1017/S002211206700045X).
- [3] J. R. Taylor, *Optical Solitons - Theory and Experiment*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.
- [4] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2003.
- [5] T. Taniuti and H. Washimi, “Self-trapping and instability of hydro-magnetic waves along the magnetic field in a cold plasma,” Phys. Rev. Lett. **21**, 209-212 (1968). DOI: [10.1103/PhysRevLett.21.209](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.21.209).
- [6] M. A. Agüero y S. Vladimir *Introducción a la teoría de solitones*, Eon, 2022. DOI: [20.500.11799/109487](https://doi.org/20.500.11799/109487).
- [7] P. L. Christiansen, M. P. Sorensen, and A. C. Scott, *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*, Springer, Berlin, Germany, 2000. DOI: [10.1007/3-540-46629-0](https://doi.org/10.1007/3-540-46629-0).
- [8] G. L. Lamb, *Elements of Soliton Theory*, Wiley, 1980. DOI: [10.1137/1025024](https://doi.org/10.1137/1025024).
- [9] N. Alan *Solitons in Mathematics and Physic*, SIAM, 1985. DOI: [10.1137/1.9781611970227](https://doi.org/10.1137/1.9781611970227).
- [10] Vladimir E. Zakharov *What Is Integrability?*, Springer-Verlag, Berlin, 1991. .

- [11] C. Gu, *Soliton Theory and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1995. DOI: [10.1007/978-3-662-03102-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03102-5).
- [12] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003. DOI: [0.1017/CBO9780511535024](https://doi.org/0.1017/CBO9780511535024).
- [13] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer-Verlag, Berlin. 2007 DOI: [10.1007/978-3-540-69969-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-69969-9).
- [14] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, UK. 1998 DOI: [10.1017/CBO9781139172059](https://doi.org/10.1017/CBO9781139172059).
- [15] A. L. Retore, "Introduction to classical and quantum integrability," [arXiv:2109.14280v2](https://arxiv.org/abs/2109.14280v2) [hep-th] (2022).
- [16] G. S. Krishnaswami and T. R. Vishnu "An introduction to Lax pairs and the zero curvature representation" [arXiv:2004.05791v1](https://arxiv.org/abs/2004.05791v1) [hep-th] (2020).
- [17] D. J. Korteweg and G. de Vries, "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **39**, 422–443 (1895). [doi:10.1080/14786449508620739](https://doi.org/10.1080/14786449508620739).
- [18] Mark J. Ablowitz and Harvey Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1981. doi.org/10.1137/1.9781611970883.
- [19] P. Bracken, "Connections of Zero Curvature and Applications to Non-linear Partial Differential Equations," [arXiv: 1403.0028v1](https://arxiv.org/abs/1403.0028v1) [hep-th] (2014).
- [20] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, "Nonlinear-Evolution Equations of Physical Significance," *Phys. Rev. Lett.* **31**, 125 (1973). DOI: [10.1103/PhysRevLett.31.125](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.31.125).

- [21] V. G. Kac, *Infinite-Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990. DOI: [10.1017/CBO9780511626234](https://doi.org/10.1017/CBO9780511626234).
- [22] U. Al Khawaja and L. Al Sakkaf, *Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations*, IOP Publishing, Bristol, UK, 2020. DOI: [10.1088/2053-2563/ab2f31](https://doi.org/10.1088/2053-2563/ab2f31).
- [23] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001. DOI: [10.1017/CBO9780511755583](https://doi.org/10.1017/CBO9780511755583).
- [24] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Oxford University Press, New York, 1995. DOI: [10.4236/opj.2013.32B043](https://doi.org/10.4236/opj.2013.32B043).
- [25] C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean*, Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics, Springer, Berlin, 2009. DOI: [10.1007/978-3-540-88419-4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88419-4).
- [26] E. P. Gross, "Structure of a quantized vortex in boson systems," II *Nuovo Cimento* **20**, 454-477 (1961). DOI: [10.1007/BF02731494](https://doi.org/10.1007/BF02731494)
- [27] L. P. Pitaevskii, "Vortex lines in an imperfect Bose gas," *Sov. Phys. JETP* **13**, 451-454 (1961).
- [28] A. Hasegawa and F. Tappert, "Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion," *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142-144 (1973). DOI: [10.1063/1.1654836](https://doi.org/10.1063/1.1654836)
- [29] A. Hasegawa and F. Tappert, "Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion," *Appl. Phys. Lett.* **23**, 171-172 (1973). DOI: [10.1063/1.1654847](https://doi.org/10.1063/1.1654847)
- [30] V. E. Zakharov and S. V. Manakov, "On the complete integrability of a nonlinear Schrödinger equation," *Theor. Math. Phys.* **19**, 332-343 (1974). DOI: [10.1007/BF01035568](https://doi.org/10.1007/BF01035568).
- [31] A. Shabat and V. Zakharov, "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media," *Sov. Phys. JETP* **34**, 62-69 (1972).

- [32] H. H. Chen, “General derivation of Bäcklund transformation from inverse scattering problems,” *Phys. Rev. Lett.* **33**, 925-928 (1974). DOI: [10.2172/4274272](https://doi.org/10.2172/4274272).
- [33] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 3rd ed., Academic Press, San Diego, 2001, pp. 180-192. DOI: [10.1016/C2011-0-00045-5](https://doi.org/10.1016/C2011-0-00045-5).
- [34] A. Hasegawa and M. Matsumoto, *Optical Solitons in Fibers*, 3rd ed., Springer, Berlin, 2003, pp. 97-103. DOI: [10.1007/978-3-540-46064-0](https://doi.org/10.1007/978-3-540-46064-0).
- [35] V. I. Karpman, “Stabilization of soliton instabilities by higher-order dispersion: fourth order nonlinear Schrödinger-type equations,” *Phys. Rev. E* **53**, 1336-1339 (1996). DOI: [10.1103/PhysRevE.53.R1336](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.R1336).
- [36] V. I. Karpman and A. G. Shagalov, “Stability of solitons described by nonlinear Schrödinger-type equations with higher-order dispersion,” *Physica D* **144**, 194-210 (2000). DOI: [10.1016/S0167-2789\(00\)00078-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00078-6).
- [37] V. N. Serkin and A. Hasegawa, “Novel Soliton Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation Model,” *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4502 (2000). DOI: [10.1103/PhysRevLett.85.4502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4502).
- [38] V. N. Serkin and T. L. Belyaeva, “Novel soliton breathers for the higher-order Ablowitz–Kaup–Newell–Segur hierarchy,” *Optik* **174**, 259-265 (2018). DOI: [10.1016/j.ijleo.2018.08.034](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.08.034).
- [39] A.-M. Wazwaz, “Exact solutions for the fourth order nonlinear Schrödinger equations with cubic and power law nonlinearities,” *Math. Comput. Modelling* **43**, 802-808 (2006). DOI: [10.1016/j.mcm.2005.08.010](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.08.010).
- [40] I. M. Méndez Zuñiga, *Inestabilidad modulacional inducida en las trampas de dispersión con inversión de signos en óptica no lineal*, Tesis, Licenciatura en Física, Universidad Autónoma del Estado de México, 2022. <http://hdl.handle.net/20.500.11799/112819>.
- [41] V. N. Serkin and A. Hasegawa, “Exactly integrable nonlinear Schrödinger equation models with varying dispersion, nonlinearity and gain: Application for soliton dispersion and nonlinear management,” *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **8**, 418-431 (2002). DOI: [10.1109/JST-QE.2002.1016344](https://doi.org/10.1109/JST-QE.2002.1016344).

- [42] V. N. Serkin, A. Hasegawa, and T. L. Belyaeva, “Nonautonomous solitons in external potentials,” *Phys. Rev. Lett.* **98**, 074102 (2007). DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.074102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.074102).
- [43] K. H. Han and H. J. Shin, “Nonautonomous integrable nonlinear Schrödinger equations with generalized external potentials,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 335202 (2009). DOI: [10.1088/1751-8113/42/33/335202](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/33/335202).
- [44] H. Luo, D. Zhao, and X. He, “Exactly controllable transmission of nonautonomous optical solitons,” *Phys. Rev. A* **79**, 063802 (2009). DOI: [10.1103/PhysRevA.79.063802](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.063802).
- [45] T. L. Belyaeva and V. N. Serkin, “Nonautonomous solitons: applications from nonlinear optics to BEC and hydrodynamics,” in *Hydrodynamics – Advanced Topics*, edited by H. Edmar Schulz, InTech, Rijeka, Croatia, 2011. DOI: [10.5772/26463](https://doi.org/10.5772/26463).
- [46] D. Zhao, Y. J. Zhang, W. W. Lou, and H. G. Luo, “AKNS hierarchy, Darboux transformation and conservation laws of the 1D nonautonomous nonlinear Schrödinger equations,” *J. Math. Phys.* **52**, 043502 (2011). DOI: [10.1063/1.3570301](https://doi.org/10.1063/1.3570301).
- [47] V. N. Serkin, A. Hasegawa, and T. L. Belyaeva, “Hidden symmetry reductions and the Ablowitz–Kaup–Newell–Segur hierarchies for nonautonomous solitons,” in *Odyssey of Light in Nonlinear Optical Fibers: Theory and Applications*, edited by K. Porsezian and R. Ganapathy, CRC Press, Taylor & Francis, 2015, pp. 145-187.
- [48] D. W. Zuo and H. X. Jia, “Interaction of the nonautonomous soliton in the optical fiber,” *Optik* **127**, 11282 (2016). DOI: [10.1016/j.ijleo.2016.09.022](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2016.09.022).
- [49] V. N. Serkin and T. L. Belyaeva, “Exactly integrable nonisospectral models for femtosecond colored solitons and their reversible transformations,” *Optik* **158**, 1289-1294 (2018). DOI: [10.1016/j.ijleo.2018.01.020](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.01.020).
- [50] S. Nandy, G. K. Sahariah, and A. Barthakur, “Generalized reversible transformations and new nonautonomous higher order nonlinear Schrödinger equation,” *Optik* **223**, 165452 (2020). DOI: [10.1016/j.ijleo.2020.165452](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2020.165452).

- [51] T. L. Belyaeva, M. A. Aguero, and V. N. Serkin, “Nonautonomous solitons of the novel nonlinear Schrödinger equation: Self-compression, amplification, and the bound state decay in external potentials,” *Optik* **244**, 167584 (2021). DOI: [10.1016/j.ijleo.2021.167584](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.167584).
- [52] T. L. Belyaeva and V. N. Serkin, “Nonautonomous solitons of the generalized complex mKdV equation in external potentials,” *Optik* **245**, 167650 (2021). DOI: [10.1016/j.ijleo.2021.167650](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.167650).
- [53] T. L. Belyaeva and V. N. Serkin, “Nonlinear dynamics of nonautonomous solitons in external potentials expressed by time-varying power series: Exactly solvable higher-order nonlinear and dispersive models,” *Nonlinear Dynam.* **107**, 1153–1162 (2022). DOI: [10.1007/s11071-021-07010-0](https://doi.org/10.1007/s11071-021-07010-0).
- [54] R. Hirota, “Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation,” *J. Math. Phys.* **14**, 805-809 (1973). DOI: [10.1063/1.1666399](https://doi.org/10.1063/1.1666399).
- [55] K. Porsezian, M. Daniel, and M. Lakshmanan, “On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic Heisenberg spin chain,” *J. Math. Phys.* **33**, 1807-1816 (1992). DOI: [10.1063/1.529658](https://doi.org/10.1063/1.529658).
- [56] “Do N-soliton breathers exist for the Hirota equation models?,” *Optik* **173**, 44-52 (2018). DOI: [10.1016/j.ijleo.2018.08.005](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.08.005).
- [57] “Novel conditions for soliton breathers of the complex modified Korteweg–de Vries equation with variable coefficients,” *Optik* **172**, 1117-1122 (2018). DOI: [10.1016/j.ijleo.2018.07.139](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.07.139).
- [58] “Optimal control for soliton breathers of the Lakshmanan–Porsezian–Daniel, Hirota, and cmKdV models,” *Optik* **175**, 17-27 (2018). DOI: [10.1016/j.ijleo.2018.08.140](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.08.140).