



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO

**ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO Y LA
VOLATILIDAD DEL BITCOIN. UN MODELO DE
HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL
ASIMÉTRICA (2007-2024)**

TESIS

Para obtener el Título de

LICENCIADA EN ACTUARÍA

Presenta

C. GUADALUPE AVILÉS TOVAR

**Asesor: D. en E. EDUARDO ROSAS ROJAS
Co-Asesor: D. en E. JÉSSICA GÁMEZ ARROYO**

Atizapán de Zaragoza, Edo. de Méx. Noviembre de 2024



RESUMEN

En este trabajo se analiza el Bitcoin debido a que ha liderado la mayor parte de la capitalización de mercado en el sector de las monedas digitales y se ha consolidado como un activo financiero significativo, aunque caracterizado por una alta volatilidad. Por lo que se ofrece un análisis sobre el rendimiento y la volatilidad de Bitcoin utilizando modelos GARCH, tanto simétricos como asimétricos. Por ello, se aplica el modelo ARMAX-GARCH el cual es el que mejor explica el comportamiento de Bitcoin en relación con variables como el índice S&P500. En contraste, para una criptomoneda como Ethereum, un modelo de media móvil es más adecuado. Se encontró que las divisas y las materias primas no suelen justificar el comportamiento de Bitcoin entre 2007 y 2024. Además, las estadísticas descriptivas destacan una considerable volatilidad en los precios de Bitcoin, subrayando su naturaleza especulativa y arriesgada. El análisis también espera una relación significativa entre Bitcoin y Ethereum, así como con el S&P500, lo que sugiere que el optimismo en los mercados tradicionales lo que se refleja en un aumento del interés por Bitcoin. Asimismo, el estudio busca identificar que la volatilidad de Bitcoin es simétrica y, con el tiempo, podría volverse más eficiente a medida que sea analizada y negociada por los inversionistas.

ABSTRACT

Bitcoin is analyzed in this paper because it has led most of the market capitalization in the digital currencies sector and has established itself as a significant financial asset, although characterized by high volatility. Therefore, an analysis is provided on the performance and volatility of Bitcoin using both symmetric and asymmetric GARCH models. Therefore, the ARMAX-GARCH model is applied which best explains the behavior of Bitcoin relative to variables such as the S&P500 index. In contrast, for a cryptocurrency such as Ethereum, a moving average model is more appropriate. It was found that currencies and commodities tend not to account for Bitcoin's behavior between 2007 and 2024. In addition, descriptive statistics highlight considerable volatility in Bitcoin prices, underscoring its speculative and risky nature. The analysis also expects a significant relationship between Bitcoin and Ethereum, as well as with the S&P500, suggesting optimism in traditional markets which is reflected in increased interest in Bitcoin. Furthermore, the study seeks to identify that Bitcoin's volatility is symmetric and, over time, could become more efficient as it is analyzed and traded by investors.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO Y VOLATILIDAD DEL BITCOIN. UNA REVISIÓN TEÓRICA	9
1.1 Introducción	9
1.2 El Impacto del Bitcoin en el Sistema Financiero: Evolución, Volatilidad y Análisis de sus Determinantes.....	12
1.3 Revisión de la literatura sobre determinantes del rendimiento del Bitcoin	17
1.4 Revisión de la literatura sobre los determinantes de la volatilidad del Bitcoin ..	28
1.5 Conclusiones.....	31
CAPÍTULO 2. MODELOS ECONOMETRÍCOS DE SERIES DE TIEMPO	33
2.1 Introducción	33
2.1.1 Serie de tiempo.....	35
2.1.2 Hechos estilizados de las series de tiempo	35
2.1.3 Procesos estocásticos estacionarios	39
2.1.4 Ruido blanco, caminata aleatoria y regresión espuria.....	43
2.1.4 Autocorrelación y autocovarianzas (FAC y FACP)	46
2.1.5. Pruebas de Estacionariedad (DF, DFA, PP y KPSS)	51
2.2 Modelos de Series de Tiempo	58
2.2.1 Proceso Autorregresivos de orden 1 (AR (1))	61
2.2.2 Proceso Autorregresivos de orden 2 (AR (2))	63
2.2.3 Proceso de Media Móvil de orden 1 (MA (1))	65
2.2.4 Proceso de Media Móvil de orden 2 (MA (2))	66
2.2.5 Proceso Autorregresivos y de Medias Móviles (ARMA (1,1))	67
2.2.6 Proceso Autorregresivos Integrado y de Medias Móviles (ARIMA (1,1,1))	69
2.3 Metodología para la selección y estimación de modelos de Series de Tiempo	71
2.3.1 Identificación.....	72
2.3.2 Estimación	74
2.3.3 Pruebas de Diagnóstico	77
2.3.4 Pronóstico	80
2.4 Modelos ARMAX	82
2.4.1 Estimación de modelos ARMAX.....	82
2.4.2 Aplicaciones del modelo ARMAX.....	84
2.5 Conclusiones.....	86

CAPÍTULO 3. MODELACIÓN DE LA VOLATILIDAD CONDICIONAL.....	88
3.1 Introducción	88
3.2 Modelos de Volatilidad Condicional.....	89
3.2.1 Breve historia y evolución de los modelos de volatilidad	91
3.2.2 Aplicaciones de los modelos de volatilidad condicional en el análisis de criptomonedas	91
3.3 Efectos ARCH y Pruebas Formales	93
3.3.1 Modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH)	94
3.3.2 Características principales del modelo ARCH	95
3.3.3 Pruebas formales para efectos ARCH en series temporales (Pruebas de heterocedasticidad)	98
3.4 Procesos GARCH	101
3.4.1 Estructura del Modelo de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada (GARCH).....	102
3.4.2 Aplicaciones de los procesos GARCH en la modelización de volatilidad...	104
3.4.3 Pruebas de efecto del Modelo GARCH	105
3.4.4 Estimación por Máxima Verosimilitud en Modelos de Volatilidad	106
3.5 Modelos con Asimetría.....	108
3.5.1 Introducción a la asimetría en la volatilidad.....	109
3.5.2 Modelo GJR-GARCH	110
3.5.3 Modelo EGARCH (Exponential GARCH).....	111
3.6 Conclusión	113
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS EMPÍRICO SOBRE LOS RENDIMIENTOS Y LA VOLATILIDAD DEL BITCOIN	114
4.1 Introducción	114
4.2 Estadísticas descriptivas.....	116
4.4 Análisis de los resultados.....	145
4.5 Conclusiones	152
BIBLIOGRAFÍA	159

INTRODUCCIÓN

El análisis de la volatilidad que presenta el precio del Bitcoin destaca en un consenso aceptado por la naturaleza altamente volátil de esta criptomoneda. El Bitcoin se incorporó al mercado en 2009 en un sistema financiero tradicional el cual estaba pasando por la crisis de hipotecas de 2008, debido a esto los inversionistas fueron cautivados por la innovación del momento, el Bitcoin, quien poco a poco fue tomando impulso logrando incorporar diversos activos similares como lo son las otras criptomonedas al mercado.

El impacto del Bitcoin en los mercados financieros globales durante 2007-2024 permite analizar de manera exhaustiva su evolución y adaptabilidad como un activo financiero haciendo énfasis en su rendimiento y volatilidad haciendo el uso de metodologías econométricas avanzadas y modelos de volatilidad condicional. Por ello, es importante identificar los principales determinantes que expliquen la influencia de criptomonedas alternativas, el mercado de valores, la percepción del riesgo, la incertidumbre económica, las divisas principales y los *commodities* claves, lo que permite desarrollar un modelo econométrico para predecir su comportamiento.

En este trabajo el uso de software especializado como R-Studio o E-Views¹ se ajusta a estos modelos, permitiendo interactuar con variables como la principal moneda virtual que compone las *Altcoins*, es decir Ethereum (ETH), el índice de incertidumbre de la volatilidad (VIX), el índice de la incertidumbre de la política económica de los Estados Unidos, el índice de S&P500, las principales monedas fiduciarias (divisas): el Euro, la Libra esterlina (GBP) y el Yuan de China y las *commodities*: precio del oro por onza troy y precio del petróleo West Texas Intermediate para optimizar el ajuste a los rezagos necesarios, lo que proporciona un entorno eficiente para la modelización precisa.

¹ *La implementación de herramientas como R-Studio y E-Views se llevó a cabo para realizar prácticas y optimizar la ejecución de pruebas en ambos entornos. En particular, E-Views fue utilizado para consolidar los análisis, mientras que R-Studio permitió la comprobación de los resultados, ya que es posible ejecutar las pruebas en simultáneo en ambas plataformas. Cada software presenta ciertas ventajas para distintos procesos. Por ejemplo, en E-Views se destacan funcionalidades más avanzadas para el análisis de series temporales, como las medias móviles, procesos autorregresivos, y pruebas de raíz unitaria, así como pruebas de simetría y otras metodologías estadísticas específicas.*

Entre los enfoques y modelos utilizados para desarrollar este análisis de precio del Bitcoin se encuentran el modelo ARCH se utiliza para analizar la volatilidad en series de tiempo financieras y los modelos GARCH asimétricos, también conocidos como modelos EGARCH (Exponential GARCH) o GJR-GARCH, los cuales capturan la asimetría en la volatilidad, asumen que las buenas y malas noticias afectan de manera diferenciada la volatilidad.

Por ello, este trabajo hace referencia a la volatilidad condicional que presenta el precio del Bitcoin utilizando series de tiempo y modelos econométricos avanzados como es el caso de la heteroscedasticidad condicional asimétrica, por lo que se desarrolla en base a la siguiente estructura:

En el capítulo 1 se menciona el análisis del Bitcoin que ha adquirido una gran importancia en las economías emergentes y desarrolladas, así como diversas investigaciones que han utilizado metodologías avanzadas, como los modelos de volatilidad condicional simétrica y asimétrica, para comprender mejor la volatilidad del Bitcoin. Los modelos GARCH asimétricos, en particular, han mostrado ser los más adecuados para las estimaciones. Además, se ha analizado la relación del Bitcoin con otros activos, como *altcoins* y mercados de valores, así como su interacción con *commodities* como el oro y el petróleo, lo que enriquece la comprensión de su rendimiento.

En el capítulo 2 se abordan conceptos tales como el ruido blanco, la caminata aleatoria y la regresión espuria utilizados en series de tiempo. Además de, las pruebas de estacionariedad, como los correlogramas y pruebas de raíz unitaria (Dickey-Fuller aumentado, Phillips Perron, KPSS), son cruciales para asegurar que las características de la serie sean constantes a lo largo del tiempo. También se menciona la metodología Box-Jenkins como un proceso sistemático para la identificación, estimación y pronóstico de series que permiten mejorar la precisión y fiabilidad de pronósticos.

En el capítulo 3 se presenta la variabilidad del Bitcoin a lo largo del tiempo en modelos de volatilidad condicional. Los modelos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) son particularmente eficientes en contextos de volatilidad, y los modelos asimétricos como EGARCH (Exponential GARCH) ofrecen un mayor análisis facilitando la predicción de la volatilidad en los rendimientos. Para seleccionar el modelo más apropiado,

se emplean criterios como el Criterio de Información de Akaike (AIC) y el Criterio de Información Bayesiano (BIC). Además, se utilizan pruebas formales como la prueba de White y la prueba de Breusch-Pagan, para identificar el comportamiento de las variables explicativas.

En el capítulo 4 se desarrolla el análisis del rendimiento del Bitcoin durante 2007 -2024 mediante modelos de volatilidad condicional autorregresiva tanto simétricos como asimétricos utilizando la metodología de modelos autorregresivos y de medias móviles con componentes exógenos (ARMAX). Por lo que presentan los resultados y conclusiones del trabajo.

Finalmente se muestra la recopilación de la bibliografía consultada, lo cual sustenta este trabajo.

CAPÍTULO 1. ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO Y VOLATILIDAD DEL BITCOIN. UNA REVISIÓN TEÓRICA

1.1 Introducción

El bitcoin fue desarrollado en una época turbulenta en la que el sistema financiero tradicional se tambaleaba por las réplicas de la crisis de las hipotecas de alto riesgo de 2008. Sin embargo, presentaba la particularidad de no estar respaldado por ningún activo tangible ni por la economía de ningún país, sino por la seguridad de un algoritmo que registra todas las transacciones. Así, entre 2017 y 2024, el Bitcoin ha mostrado una tendencia alcista.

Con el tiempo, se han realizado investigaciones en las que el Bitcoin se compara con activos financieros tradicionales, como el oro y petróleo, además de ciertos índices de volatilidad que suelen tener un gran impacto en el mercado del Bitcoin tales como el trabajo de Dyhrberg, (2016) “Bitcoin, gold and the dollar a garch volatility analysis“, Baur et al. (2018) “Bitcoin, gold and the US dollar”, Kang et al. (2019) “Co-movements between Bitcoin and Gold”, Jareño et al. (2020) “Bitcoin and gold price returns: A quantile regression and NARDL analysis”, Iheke y Lin (2020) “Crude oil price and cryptocurrencies: Evidence of volatility connectedness and hedging strategy”, entre otros. También, se ha utilizado la metodología GARCH Asimétrica simple, que proporciona el mejor ajuste para las estimaciones. Por lo tanto, las implicaciones de la volatilidad asimétrica del Bitcoin en la gestión de riesgos y la toma de decisiones de inversión también requieren una mayor claridad. Para abordar estas cuestiones, es fundamental llevar a cabo investigaciones adicionales utilizando modelos GARCH asimétricos y analizar la dinámica de la volatilidad del Bitcoin en diversos contextos económicos y eventos del mercado.

Al crear un enfoque basado en la volatilidad condicional asimétrica que exhibe el Bitcoin, se utilizan modelos GARCH para estimar dicha volatilidad. Destacan Dyhrberg (2016), Katsiampa (2017), Sajeev y Afjal (2021) y Sapuric et. al (2022) como los principales autores que han contribuido al desarrollo de estos modelos. No obstante, se realizan diversas pruebas que comparan algunas metodologías para determinar cuál ofrece un mejor desempeño. Con el tiempo, se han realizado investigaciones con un análisis comparativo de series de precios de criptomonedas, donde se pueden comparar algunas de ellas como el Bitcoin y el Ethereum

como “Datestamping the Bitcoin and Ethereum bubbles” de Cobert (2018) y “Structural breaks and double long memory of cryptocurrency prices: A comparative analysis from Bitcoin and Ethereum” de Mensi (2019). Además, estudios recientes han señalado que la interacción de Bitcoin con otros mercados financieros, como las bolsas de valores y los mercados de materias primas, añade otra capa de complejidad. También se ha planteado la idea de que las criptomonedas podrían considerarse como mercancías, ya que exhiben muchas de sus características, como los choques de demanda y los grandes movimientos de precios. En este contexto, algunos investigadores tales como Baur et al. (2018), Kang y McIver (2019) y Jareño (2020) han analizado la conectividad entre los mercados de criptomonedas y las mercancías y otros activos tradicionales.

Un aspecto crucial en el comportamiento de las criptomonedas es la capacidad del Bitcoin para actuar como cobertura frente a las principales monedas fiduciarias, como el euro, la libra esterlina y el yen. Dyhrberg (2016) empleó el modelo GARCH para investigar si Bitcoin comparte propiedades con el oro, utilizando variables macroeconómicas previamente identificadas que influyen en el valor de esta *commodity*. En su estudio, usó como variables independientes los tipos de cambio dólar-euro y dólar-libra esterlina. Sus hallazgos revelaron que los precios de Bitcoin responden con mayor intensidad al tipo de cambio dólar-libra esterlina, lo que sugiere que diferentes países y regiones ejercen impactos específicos y diferenciados sobre el precio de Bitcoin. Además, el autor señala que los tipos de cambio influyen positivamente en el rendimiento de Bitcoin; sin embargo, los efectos contemporáneos, aunque positivos, son de magnitud reducida.

En los últimos años, ha habido un creciente interés académico en las características de rendimiento y volatilidad de las criptomonedas, con numerosas investigaciones que buscan ofrecer una mejor estimación de la volatilidad del Bitcoin a corto y largo plazo. Paralelamente, se ha evaluado cómo factores del mercado y globales, como el oro, petróleo, índices de volatilidad y de estrés financiero, afectan la volatilidad y rendimientos del Bitcoin. A pesar de estos avances, aún quedan preguntas sin respuesta sobre las asimetrías en la volatilidad del Bitcoin y su comparación con otros activos financieros, lo que resalta la necesidad de investigaciones adicionales con modelos GARCH asimétricos y un análisis más profundo de su dinámica en diversos contextos económicos.

Cabe mencionar que el comportamiento de los valores extremos de las criptomonedas ha demostrado que estas exhiben un comportamiento de cola más pesado, lo que las hace más riesgosas que las monedas fiduciarias. Investigaciones recientes, como las de Chu et al. (2017) y Phillip, Chan y Peiris (2018), han analizado el comportamiento de las series temporales de activos de criptomonedas para identificar las distribuciones adecuadas de las innovaciones de los modelos GARCH, empleando pruebas no paramétricas. Sus hallazgos empíricos desafían la suposición de una distribución normal en el modelado de innovaciones, y en cambio, respaldan el uso de innovaciones con una distribución t-student o de error generalizada (GED). Estos estudios subrayan la necesidad de considerar distribuciones alternativas y métodos robustos para capturar la naturaleza intrínsecamente volátil y riesgosa de las criptomonedas, proporcionando una base más sólida para la gestión de riesgos y la toma de decisiones de inversión.

A pesar de que el Bitcoin es un activo que, aunque posee ciertas propiedades de cobertura, muestra una volatilidad significativamente más alta en comparación con otros activos típicos de cobertura como el oro y el dólar. Estudios recientes destacan varias características y limitaciones en su uso como instrumento de cobertura. Aunque la volatilidad de Bitcoin complica su uso como activo de cobertura general, se ha demostrado que puede actuar como un diversificador o cobertura parcial frente a ciertas monedas y en determinados contextos de inversión. Por ejemplo, estudios muestran que puede servir de cobertura frente al dólar estadounidense, aunque su efectividad como "refugio seguro" es limitada en comparación con el oro (Wang et al., 2021). También se debe considerar que, si bien es cierto, Bitcoin tiene buenas propiedades de cobertura, también es cierto que presenta una alta volatilidad en comparación con otros activos de cobertura. En otras palabras, si se incluye Bitcoin en una cartera, los inversionistas deben prestar atención a su amplia variación. Estos hallazgos empíricos destacan el papel importante que el oro y el USD juegan en la cobertura contra los mercados bursátiles globales.

Wang et al., (2021), consideran que Bitcoin no es un activo de cobertura adecuado para los inversionistas en acciones, lo cual también es respaldado por las conclusiones de Conlon y McGee (2020). Además, de acuerdo con la efectividad de cobertura mostrada, encuentran que el oro es adecuado para cubrir todos los mercados de acciones a corto plazo. El USD es

adecuado para coberturas en inversiones de mayor plazo, excepto en el mercado de acciones de EE. UU

Finalmente, suele indicarse que el bitcoin puede ser efectivamente utilizado como cobertura contra el riesgo específico del mercado, dada su respuesta a la volatilidad y a las noticias, sugiriendo que la criptomoneda puede ser una herramienta útil para la gestión de carteras, el análisis de riesgos y el análisis del sentimiento del mercado. Todo esto puede desarrollarse con una metodología específica de modelos ARCH y GARCH simétricos y asimétricos que han demostrado ser metodologías que explican con precisión los rendimientos y la volatilidad de la moneda virtual.

1.2 El Impacto del Bitcoin en el Sistema Financiero: Evolución, Volatilidad y Análisis de sus Determinantes

El Bitcoin fue lanzado al mercado en 2009 por Nakamoto durante una época turbulenta en la que el sistema financiero tradicional se tambaleaba por las réplicas de la crisis de las hipotecas de alto riesgo de 2008, (Kumar, A. S., & Anandarao, S. (2019). pg. 448) como un nuevo activo financiero con características totalmente diferentes al tipo de moneda que se utiliza tradicionalmente; su sistema es electrónico, esto quiere decir que al realizar un pago este no pasa por una institución financiera, sino que se efectúan de manera directa. De esta manera, “el valor de Bitcoin no se basa en ningún activo tangible ni en la economía de ningún país, sino en la seguridad de un algoritmo que rastrea todas las transacciones” (Urquhart, A., & Zhangb, H. (2019). pg. 49). Siendo esta la oportunidad perfecta para entrar al mercado y formar una clase de activos nuevos que servía como medio de intercambio y tenía un almacenamiento de valor.

El análisis del Bitcoin se ha convertido en un tema de gran interés en el ámbito de la Actuaría y las finanzas. Bitcoin es una criptomoneda que se lanzó al mercado en 2009 debido a las réplicas de la crisis de las hipotecas de alto riesgo de 2008. Durante los últimos años, es decir en el periodo 2017 – 2024, el Bitcoin ha presentado un nivel alcista en inversores generando una alta volatilidad en el mercado ya que en algunos casos este activo está expuesto tanto a

problemas de seguridad como a las prohibiciones del comercio que resultan en caídas severas para el Bitcoin.

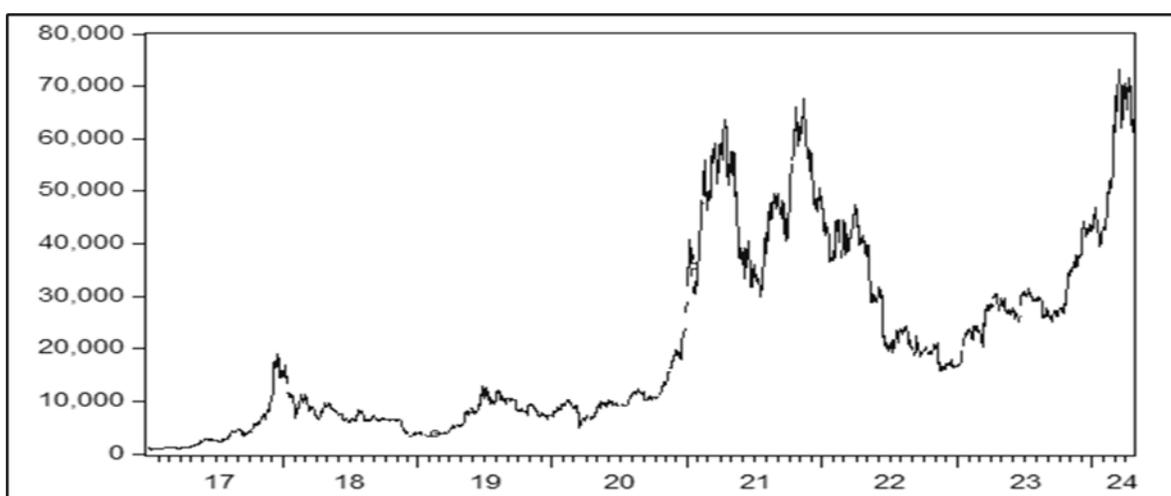
La volatilidad extrema que caracteriza a esta criptomoneda plantea desafíos significativos, principalmente para las economías emergentes. Por ejemplo, los trabajos de investigación como el de Urquhart y Zhang (2019) han explorado la asimetría en la volatilidad del Bitcoin y su efecto en los inversores individuales. En la actualidad son pocas las personas que conocen el trasfondo del funcionamiento de estos sistemas de dinero digital. Por lo que conocer el protocolo del Bitcoin llenaría el vacío de conocimiento, que es notablemente mayor en los países de habla hispana. La presente investigación pretende ilustrar al público sobre el funcionamiento del protocolo Bitcoin y servir como punto de partida para investigaciones posteriores sobre el análisis de volatilidad de la criptomoneda.

El análisis de la volatilidad condicional asimétrica que exhibe el Bitcoin es un tema de gran relevancia en la literatura financiera actual. La presencia de este fenómeno en el precio del Bitcoin es un consenso ampliamente aceptado en la literatura académica y financiera. Algunos estudios respaldan esta noción, destacando la naturaleza altamente volátil de esta criptomoneda (Dyhrberg, 2016) ha encontrado evidencia de una volatilidad significativa en el Bitcoin y han comparado su comportamiento con activos tradicionales como el oro e incluso con el precio del dólar. Sin embargo, existen discrepancias en el conocimiento actual sobre las causas subyacentes de la extrema volatilidad del activo. Algunos estudios, como el de Bhattacharya (2023) sugieren que factores macroeconómicos, como los anuncios regulatorios y las tasas de interés, pueden desencadenar movimientos significativos en el precio del Bitcoin. Mientras tanto, investigaciones como la de Dyhrberg (2016) plantean que la volatilidad del Bitcoin está relacionada con factores psicológicos y la percepción de riesgo de los inversores. Además, Bouri et al. (2017) revelan al bitcoin actuando como cobertura contra la incertidumbre en horizontes de inversiones cortas.

Estas discrepancias subrayan la necesidad de un análisis más profundo y específico para comprender las causas subyacentes de la volatilidad del Bitcoin, lo que a su vez informará sobre su utilidad como activo financiero y su potencial como refugio seguro en tiempos de incertidumbre económica. En la historia de bitcoin se pueden observar 3 periodos en la

magnitud de sus precios relativamente baja en los primeros años de cotización (5 de octubre de 2009, primera cotización registrada), en donde se registró un precio mínimo de \$178.10USD y un precio máximo de \$2958.11USD. Posteriormente en el mes de julio de 2017 se presentó un aumento, en este periodo se observa un precio mínimo de \$1,928.82USD y un precio máximo de \$19,497.40USD. Finalmente, a inicios de marzo de 2020 comienza el tercer periodo, donde el precio mínimo correspondió a \$4,970.78USD y el máximo a \$67,566.82USD.

Figura 1. Cotización diaria del Bitcoin (2017-2024)



Fuente: Elaboración propia con datos de la Reserva Federal de San Luis (FRED) en E-Views (Versión 12)

De acuerdo con Champagne (2014) “El impacto de Bitcoin como sistema monetario es tremendo, pues una ventaja es la capacidad que le da a la gente para “transferir” dinero a través de todo el planeta de manera tan simple como es enviar un correo electrónico. Esto es particularmente ventajoso para los trabajadores inmigrantes que desean enviar dinero a sus familiares en sus países de origen. En contraste, las compañías que envían dinero en remesas internacionales cobran altas comisiones por hacerlo” (p. 38). La subida de los precios del bitcoin fue causada por el boom especulativo que se dio a finales de 2017 ya que antes de este periodo la moneda no presentaba fluctuaciones tan bruscas en su precio. Phil Champagne (2014) culpa a los especuladores por los aumentos de precios del bitcoin. Además de contar

con una estructura de dependencia entre los rendimientos de criptomonedas con colapsos y repercusiones periódicas conectadas a la demanda de las criptomonedas. Analizando la serie de tiempo del precio de bitcoin se puede observar que la pandemia por covid-19 causó que las fluctuaciones presentaran una mayor volatilidad.

Ha habido un número creciente de trabajos académicos que investigan las características de rendimiento y volatilidad de las criptomonedas mediante la adopción de metodologías GARCH. Otro enfoque, igualmente relevante, consiste en estudios que examinan la relación entre Bitcoin y el oro. Las soluciones propuestas han sido diversas y han arrojado resultados significativos en la comprensión de la volatilidad de esta criptomoneda. Katsiampa (2017) aplica modelos GARCH para estimar la volatilidad del Bitcoin, desarrolla pruebas que comparan cuál de las metodologías GARCH, GARCH Exponencial, GARCH de Umbral (GJR-GARCH), ARCH de Potencia Asimétrica, y CGARCH Autorregresivo (AR-CGARCH) es mejor para estimar el comportamiento de Bitcoin. Identificando que el modelo AR-CGARCH captura de mejor forma las características tanto a corto como a largo plazo, permitiendo una mejor comprensión de su dinámica temporal y las implicaciones de esta volatilidad para los inversores.

En esta misma línea se encuentran los trabajos de Sajeev y Afjal (2022) quienes investigan el efecto contagio de las criptomonedas, específicamente del Bitcoin, en el mercado de valores (securities market). El estudio se centra en analizar la volatilidad del Bitcoin y cómo sus movimientos pueden propagarse o contagiar volatilidad a los mercados de valores tradicionales. Los autores emplean modelos de volatilidad condicional asimétrica, como el modelo BEKK y el modelo DCC GARCH (Dynamic Conditional Correlation GARCH). Por su parte Mensi et al. (2019), realizan un análisis comparativo de las series de precios de dos criptomonedas prominentes, Bitcoin y Ethereum, con un enfoque en la detección de cambios estructurales en sus datos de precios y la evaluación de la presencia de memoria de largo plazo en estas series. El documento busca proporcionar una comprensión más profunda de la dinámica de los precios de estas criptomonedas y cómo pueden cambiar con el tiempo.

Respecto a los principales determinantes de los rendimientos y la volatilidad del Bitcoin, la investigación de Bouri, Molnár y Azzi (2017) ha analizado cómo factores específicos del mercado, como bonos, petróleo, oro, el índice general de materias primas y el índice del dólar estadounidense, pueden influir en la volatilidad del Bitcoin, proporcionando una visión más completa de sus determinantes. Jareño et al. (2020) analiza la sensibilidad de los rendimientos de Bitcoin a los cambios en los rendimientos del precio del oro y otros factores de riesgo internacionales, como los rendimientos del mercado de valores de EE. UU., las tasas de interés, los precios del petróleo crudo, el índice de volatilidad del mercado de valores estadounidense (VIX) y el índice de estrés financiero de Saint Louis (STLFSI). Este estudio aplica el enfoque de regresión cuantil para el período 2010-2018. Para mayor robustez, este documento divide el período de muestra completo en dos subperíodos diferentes: uno más volátil y otro menos volátil. Descubren que el factor de riesgo más relevante es el índice VIX, seguido de los cambios en el índice de estrés STLFSI, y ambos muestran efectos negativos y estadísticamente significativos sobre los rendimientos de Bitcoin en la mayoría de los períodos y cuantiles. Los rendimientos del mercado de valores de EE. UU. tienen efectos estadísticamente significativos (con signo positivo) sobre los rendimientos de Bitcoin en todos los períodos y específicamente en los cuantiles altos.

En esta misma línea de investigación, Kyriazis (2020) investiga la relación entre Bitcoin, el oro y los índices de incertidumbre altamente innovadores mediante el uso de estructuras de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH) y ARCH Generalizada (GARCH). El período examinado abarca desde marzo de 2012 hasta marzo de 2020. Los resultados econométricos indican que los rendimientos y la volatilidad de Bitcoin están influenciados positivamente por los rendimientos del oro y el índice de volatilidad S&P500 (VIX). Sin embargo, se revela que el innovador Índice de Riesgo Geopolítico de Caldara e Iacoviello (2019) ejerce impactos negativos en los mercados de Bitcoin. La evidencia indica que la metodología ARCH Asimétrica simple proporciona el mejor ajuste para las estimaciones.

La investigación desarrollada por Das y Kannadhasan (2018) intentan delinear la relación entre los precios de Bitcoin y factores globales como el índice bursátil, la incertidumbre en la política económica, los precios al contado del oro, la volatilidad implícita y los precios del

petróleo crudo mediante un análisis basado en wavelets. Encuentran que Bitcoin está aislado de los factores globales a corto plazo. Sin embargo, no se puede negar la existencia de una relación significativa de Bitcoin con los factores globales a mediano y largo plazo, lo cual podría atribuirse al sistema económico endógeno e interconectado. Entre los factores globales considerados en el estudio, se encuentra que el impacto de la incertidumbre en la política económica y los precios del petróleo crudo son más prominente en la explicación de los rendimientos del Bitcoin.

A pesar de los avances en la comprensión de la volatilidad del Bitcoin, aún existen preguntas sin respuesta. Por ejemplo, ¿cuáles son los factores específicos que contribuyen a las asimetrías en la volatilidad del Bitcoin, y cómo se relacionan con eventos macroeconómicos y financieros específicos? Además, ¿cómo se puede explicar la persistente volatilidad del Bitcoin en comparación con otros activos financieros? Las implicaciones de la volatilidad asimétrica del Bitcoin en la gestión de riesgos y la toma de decisiones de inversión también necesitan una mayor claridad. Para abordar estas cuestiones, es fundamental llevar a cabo investigaciones adicionales utilizando modelos GARCH asimétricos y analizar la dinámica de la volatilidad del Bitcoin en diversos contextos económicos y eventos del mercado. Los trabajos de Kristoufek (2015), Katsiampa (2017) y Bouri et al. (2017), han sentado las bases para abordar estas preguntas, pero aún queda mucho por explorar y comprender en este campo en constante evolución.

1.3 Revisión de la literatura sobre determinantes del rendimiento del Bitcoin

El análisis de los determinantes del precio de Bitcoin ha cobrado gran relevancia en la literatura financiera, dada su naturaleza volátil y su creciente aceptación como activo financiero. Además, la interrelación de Bitcoin con otras criptomonedas como Ethereum, así como con activos tradicionales como el S&P500, el índice de volatilidad VIX, el Índice de Incertidumbre de la Política Económica de EE. UU, el oro, la libra esterlina, el euro, el yuan y el precio del petróleo han sido objeto de diversos estudios. La correlación entre Bitcoin y Ethereum es particularmente significativa debido a su prominencia en el mercado de

criptomonedas (Corbet et al., 2018). Por otro lado, la relación de Bitcoin con el S&P500 y el VIX revela su comportamiento en tiempos de incertidumbre en los mercados tradicionales (Bouri et al., 2017). Asimismo, se ha debatido si Bitcoin puede actuar como un refugio seguro similar al oro, especialmente en periodos de crisis (Shahzad et al., 2019). Finalmente, la fluctuación de la libra esterlina, influenciada por eventos económicos y políticos, también impacta el comportamiento de Bitcoin (Smales, 2019). Estas interrelaciones subrayan la complejidad y multifacética naturaleza de los determinantes del precio de Bitcoin en el contexto de un entorno financiero global dinámico.

Para una mejor comprensión del fenómeno, la definición precisa de conceptos como Bitcoin y rendimiento del Bitcoin es crucial para entender los factores que influyen en los rendimientos de las criptomonedas. Bitcoin, la primera criptomoneda descentralizada, ha revolucionado los mercados financieros, presentando un nuevo paradigma en términos de inversión y tecnología blockchain. El rendimiento del Bitcoin es altamente volátil y está influenciado por una amplia gama de factores, incluyendo la adopción tecnológica, la regulación gubernamental, la dinámica del mercado, y la percepción del riesgo entre los inversores. La claridad en estos conceptos facilita el desarrollo de investigaciones empíricas que puedan desentrañar la compleja interacción entre variables, proporcionando una comprensión más clara de los determinantes del rendimiento de las criptomonedas en un contexto global (Corbet et al., 2018). A continuación, se definen este par de conceptos.

Bitcoin: La criptomoneda se lanzó en 2009, una época turbulenta en la que el sistema financiero tradicional se tambaleaba por las réplicas de la crisis de las hipotecas de alto riesgo de 2008 denominada como “una transacción de criptomoneda que se lleva a cabo a través de una red distribuida descentralizada, conocida como, blockchain” que operaba en una plataforma diferente en comparación al dinero fiduciario. (Kumar, A. S., & Anandarao, S. (2019)).

Rendimiento de Bitcoin: Las criptomonedas como un bien actúan mediante un precio que está determinado por la dinámica de la oferta y la demanda, considerándose extremadamente volátiles en comparación con los activos financieros convencionales. En julio de 2010 Bitcoin comenzó a cotizar en Mt. Gox, un intercambio en línea con sede en Japón, y comenzó

a atraer el interés del público. El primer día de negociación, el valor de Bitcoin era de 0,008 dólares. Los rendimientos de Bitcoin en la mayoría de los casos dependen de los niveles retardados del tipo de interés de fondos federales, del tipo de cambio y de precios rezagados de acciones y del oro. (Baur, D. G., Dimpflb, T., & Kuckc, K.; 2018)

Con la llegada de las criptomonedas, los investigadores han ampliado el universo de activos de inversión al incluir las criptomonedas. La predictibilidad de los rendimientos de los activos financieros es de gran interés en la literatura financiera. Para Binsbergen et al., 2010, la evidencia empírica sugiere que los rendimientos de las acciones son, en efecto, parcialmente predecibles. Malladi et al. (2019) estudian la predictibilidad de BTC con un conjunto más pequeño de variables dependientes y han pronosticado con precisión la dirección de los rendimientos, pero no la magnitud de estos. En un estudio más reciente, Malladi y Dheeriyaa (2021) incluyen varios predictores adicionales, como los precios de Ripple, los mercados bursátiles globales y el índice de incertidumbre económica.

Por lo tanto, los determinantes del rendimiento del Bitcoin en el mercado dependen de diversos factores como lo son económicos, tecnológicos, sociales y regulatorios. Esto debido a la oferta y demanda que presenta dicha criptomoneda en el mercado financiero, además Kumar & Anandarao, (2019) mencionan que la interacción de múltiples factores internos que pueden intervenir en el rendimiento, por ejemplo; la adaptación tecnológica y la infraestructura, ya que de esto puede depender la seguridad en los que se pueda reflejar confianza o incertidumbre respecto al rendimiento del Bitcoin. Sin embargo, el riesgo entre los inversionistas en ocasiones se ve afectado por eventos económicos y geopolíticos globales (Shahzad et al., 2019)

A) Altcoins

Katsiampa (2019), señala que la relación entre Bitcoin y altcoins² puede ser analizada utilizando métodos de cointegración, que permiten identificar relaciones a largo plazo entre

² "Altcoin" es un término utilizado para describir todas las criptomonedas que no son Bitcoin. Este término es una combinación de "alternative" (alternativa) y "coin" (moneda), y se refiere a las monedas digitales que surgieron después del éxito de Bitcoin. Las altcoins intentan mejorar y diversificar las funcionalidades de Bitcoin mediante avances tecnológicos, aplicaciones distintas o enfoques filosóficos diferentes (<https://cointelegraph.com/learn/what-is-an-altcoin-a-beginners-guide-to-cryptocurrencies-beyond-bitcoin>)

series temporales no estacionarias. Estudios han encontrado que, aunque las altcoins y Bitcoin pueden mostrar patrones de movimiento similares, existe evidencia de cointegración, lo que sugiere que hay una relación equilibrada a largo plazo entre ellos. Existen pocos estudios sobre los precios de las criptomonedas y sus movimientos de precios. Van Wijk (2013) encontró que todas las variables que influyen significativamente en el valor del Bitcoin a largo plazo están directamente relacionadas con la economía de Estados Unidos. Esto se puede explicar por el hecho de que, en los EE. UU., el Bitcoin es actualmente más popular que en cualquier otra parte del mundo. Además, el valor del índice Dow Jones también afecta significativamente el valor del Bitcoin a corto plazo. Por lo que se puede decir que la mayoría de las variables influyentes están relacionadas con la economía de Estados Unidos y, por lo tanto, el desempeño y crecimiento económico deben observarse con mayor atención al invertir en Bitcoin.

Como se sabe, dentro de los altcoins más conocidos se encuentra Ethereum, Litecoin y Ripple y suelen hacerse comparaciones con el Bitcoin por ser la primera criptomoneda en salir al mercado y en ser una de las primeras en generar un aumento en cuanto a la inversión de día con día. Entre algunas investigaciones se encuentra la de Mensi et al., (2019) que se enfoca en las rupturas estructurales de los rendimientos mediante un análisis comparativo del Bitcoin y el Ethereum. A diferencia de otras altcoins, Ethereum (ETH) cuenta con una capitalización significativa en el mercado ocupando el segundo lugar entre las criptomonedas existentes. El Bitcoin en este caso suele presentar regímenes diferentes porque la media y varianza disminuyen de manera significativa lo que lleva a una persistencia de la volatilidad para ambas criptomonedas puesto que ninguna está regulada por una autoridad central (Mensi et al., 2019).

Por otra parte, hay investigaciones que implican algunas otras criptomonedas como la de Göttfert (2019) que identifica que existe cointegración por parte del Bitcoin y las altcoins conocidas como: Ethereum, Litecoin y Ripple, concluyendo que el Bitcoin se considera como un valor independiente mientras que las altcoins se encuentran como el valor dependiente en una relación de largo plazo.

B) Mercados de valores (S&P500)

El índice S&P500, compuesto por 500 empresas de diversos sectores de la economía estadounidense, es ampliamente considerado como un barómetro representativo del mercado en general. Su robustez y diversificación sectorial lo convierten en un indicador clave del desempeño económico y de las condiciones del mercado financiero. Debido a su relevancia, el S&P500 ha sido utilizado en numerosos estudios para analizar el comportamiento de Bitcoin, proporcionando una base sólida para entender cómo esta criptomoneda interactúa con los mercados financieros tradicionales. Conrad et al. (2018) demostraron que el comportamiento del precio de Bitcoin está correlacionado con el rendimiento del S&P500, sugiriendo que los movimientos en el mercado de criptomonedas no ocurren en aislamiento, sino que están influenciados por las condiciones macroeconómicas representadas por este índice. Este hallazgo es consistente con la idea de que los inversores ven a Bitcoin no solo como un activo especulativo, sino también como una alternativa dentro de un portafolio diversificado que incluye activos tradicionales.

Por su parte, Kjærland et al. (2018) ampliaron este análisis, encontrando que durante periodos de alta volatilidad en el S&P500, la correlación entre Bitcoin y el índice aumenta, indicando que los inversores podrían estar utilizando Bitcoin como un medio para gestionar el riesgo y diversificar sus inversiones. Este comportamiento sugiere que, aunque Bitcoin se considera a menudo un activo independiente, su valor y su percepción de seguridad están, en parte, ligados a la estabilidad y desempeño de los mercados tradicionales. Además, resaltan la creciente interconexión entre los mercados financieros tradicionales y los emergentes, como el de las criptomonedas. A medida que más inversores institucionales y minoristas adoptan Bitcoin, su reacción ante la volatilidad del S&P500 sugiere un cambio en la forma en que se percibe y utiliza este activo digital. En lugar de ser únicamente una reserva de valor o un instrumento especulativo, Bitcoin parece estar tomando un rol más integrado en las estrategias de inversión más amplias.

De acuerdo con la literatura previa (Ciaian, 2018, Kjærland et al. 2018), se identifica una correlación entre el S&P 500 y el Índice de Volatilidad de CBOE (VIX)³. El S&P 500 es un buen indicador de cómo se están comportando los mercados financieros, y el VIX está diseñado para proporcionar una medida instantánea de cuánto cree el mercado que fluctuará el S&P500 en los próximos 30 días. La literatura sobre la fijación de precios de activos muestra que el VIX tiene un alto poder explicativo en las pruebas de regresión que buscan determinar la sección transversal de los rendimientos de las acciones, donde los aumentos en el VIX están asociados con la caída de los precios de los activos y viceversa (Koutmos, 2019).

C) Percepción del riesgo y la incertidumbre en el mercado y la economía

Como activo digital altamente volátil, Bitcoin es particularmente sensible a las fluctuaciones en la percepción de riesgo y la incertidumbre económica. Factores como la incertidumbre política, las expectativas de volatilidad del mercado, y las políticas económicas globales pueden influir significativamente en su valor. El Índice de Incertidumbre de la Volatilidad (VIX) y el Índice de Incertidumbre de la Política Económica de EE. UU., son ejemplos de métricas que reflejan estas percepciones y, a su vez, impactan en la confianza y el comportamiento de los inversores en Bitcoin. En tiempos de elevada incertidumbre, los inversores pueden recurrir a Bitcoin como un refugio alternativo, mientras que, en períodos de estabilidad económica, su demanda puede disminuir.

En su estudio, Al-Yahyaee et al. (2019) examinan la relación no lineal entre el Índice de Incertidumbre de la Volatilidad (VIX) y los rendimientos en el precio de Bitcoin (BTC). El análisis proporciona información útil sobre si el índice VIX tiene algún poder de predictibilidad para el mercado de BTC. Los resultados principales muestran que BTC y el índice VIX se mueven juntos a lo largo del tiempo y en frecuencias altas y bajas. Esto indica que el índice VIX tiene poder predictivo sobre los precios de BTC. También desarrollan un análisis multivariante en el que muestran como los índices el Índice de Incertidumbre de la

³ El índice de volatilidad implícita de CBOE a menudo se refiere como el "medidor de miedo del inversor" y puede ser utilizado por los inversores para formar estrategias de trading. Además de servir como un barómetro del miedo y la incertidumbre, el índice VIX representa la volatilidad esperada del mercado "neutral al riesgo" para el contrato del S&P 500 a partir de una gama de precios de opciones con diversos precios de ejercicio y vencimientos (Bekaert y Hoerova 2014).

Política Económica de EE. UU (EPU, por sus siglas en inglés)⁴ afecta el nexo BTC-VIX en todas las frecuencias. Fang et al. (2019) mostraron que los inversores en BTC pueden usar la información del EPU para mejorar la predicción del riesgo de precios de BTC. En esta misma línea de investigación, Demir et al. (2018), analizaron el poder predictivo del índice de incertidumbre de la política económica (EPU) sobre los rendimientos diarios de Bitcoin, emplearon para ello el modelo Bayesiano de Vectores Autorregresivos Estructurales Gráficos (BGSVAR), así como las estimaciones de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS) y Regresión Cuantil sobre Cuantil (QQ), y encontraron que el EPU tiene un poder predictivo sobre los rendimientos de Bitcoin. Fundamentalmente, los rendimientos de Bitcoin están negativamente asociados con el EPU.

En la misma línea de investigación, Das y Kannadhasan (2018) coinciden en que el EPU juega un papel relevante en la determinación del Bitcoin. El resultado para la regresión por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) muestra que un choque positivo en el EPU y el VIX conduce a una caída en los precios de Bitcoin. Sin embargo, los coeficientes no son significativos y la magnitud del impacto también es diminuta. La posible explicación para este fenómeno podría ser el comportamiento averso al riesgo de los inversores durante condiciones económicas turbulentas. Tanto el EPU como el VIX están relacionados con un entorno económico y financiero inestable.

D) Divisas

Otro conjunto de variables relevantes en la determinación del Bitcoin son las principales monedas fiduciarias. La relación entre el euro (EUR), la libra esterlina (GBP) y el yuan chino (CNY), y los rendimientos del Bitcoin es un tema de creciente interés en la literatura financiera. Dyhrberg (2016) utilizó su modelo para estudiar si el Bitcoin tiene las mismas propiedades que el oro y empleó variables macroeconómicas previamente encontradas que afectan al oro, a saber, el uso de los tipos de cambio dólar-euro y dólar-libra esterlina como

⁴ Este índice cuantifica el nivel de incertidumbre en la política económica mediante la evaluación de la cobertura de noticias, las expiraciones del código tributario y la dispersión de pronósticos económicos. Los hallazgos clave del estudio muestran que un aumento en la incertidumbre de la política económica está asociado con resultados económicos adversos, como una reducción en la inversión, menor empleo y un crecimiento económico más lento. Además, la incertidumbre económica tiene efectos significativos en los mercados financieros, aumentando la volatilidad y afectando los precios de los activos (Baker et al. 2015).

variables independientes. Sus resultados indicaron que los precios de Bitcoin reaccionan más fuertemente al tipo de cambio dólar-libra esterlina, lo que muestra que varios países y regiones exhiben diferentes impactos específicos en los precios de Bitcoin. Takaishi y Adachi (2018) emplearon los tipos de cambio USD/CHF, USD/JPY y Euro/GBP como variables independientes para analizar las propiedades de las series temporales vinculadas a Bitcoin. La comparación con otros tipos de cambio reveló que Bitcoin muestra correlaciones en series temporales.

Baur et al. (2018) exploraron cualitativamente la relación entre los precios de Bitcoin y los tipos de cambio USD/Euro y USD/GBP. Aunque sus resultados muestran que los precios de Bitcoin no están directamente relacionados con los tipos de cambio, se encontró una correlación negativa con otros activos financieros denominados en dólares, lo que sugiere que las fluctuaciones en la tasa de rendimiento de Bitcoin pueden estar relacionadas con cualquier activo financiero basado en tipos de cambio en dólares. Recientemente, Chen (2021) en su investigación muestra que los tipos de cambio USD/EURO, USD/GBP (Libra Esterlina) y Euro/GBP tienen un impacto positivo en el precio de Bitcoin. Con base en el análisis empírico, la investigación encuentra que, los posibles inversores en Bitcoin pueden utilizar los mencionados tipos de cambio USD/Euro, USD/GBP y Euro/GBP, junto con la tasa de fondos federales, el FTSE100, el índice del dólar estadounidense, el DAX, el Nikkei 225 y el precio del oro como indicadores de referencia.

E) Commodities (Precio del oro por onza troy y Precio del petróleo West Texas Intermediate)

En la literatura que se centra en las conexiones entre Bitcoin y el oro, hay un creciente número de estudios significativos. Entre ellos, trabajos de Dyhrberg (2016a), Baur et al. (2018), Al-Khazali et al. (2018), Pal y Mitra (2019), y Wu et al. (2019) profundizan en la relación entre Bitcoin, la criptomoneda más importante, y el oro, considerado el refugio seguro más fiable, como activos de inversión. Dyhrberg (2016), demuestra que Bitcoin tiene capacidades de cobertura y similitudes con el oro, como una alta persistencia en la volatilidad, sugiriendo que Bitcoin se sitúa entre el oro y el dólar estadounidense. Destaca los rasgos similares de Bitcoin y el oro. El autor señala que ambas mercancías derivan su valor de su (a) escasez, (b)

costo de extracción y (c) falta de control por parte de cualquier gobierno específico. El autor clasifica además a Bitcoin como una mercancía híbrida, que posee características tanto de oro como de moneda (US\$). Mientras que el oro actúa como una reserva de valor, se pueden observar grandes fluctuaciones de precio en Bitcoin. Como opción de inversión alternativa, los inversores adversos al riesgo pueden preferir el oro, mientras que los inversores con motivos especulativos pueden preferir Bitcoin. Por lo tanto, la interacción de la dinámica de precios entre Bitcoin y el oro es un tema importante que examinar. Por otro lado, Baur et al. (2018), encuentran que Bitcoin no comparte muchas características con el oro ni con monedas fiduciarias como el dólar estadounidense, destacando que Bitcoin es diferente de los activos convencionales.

Además, Al-Khazali et al. (2018), al utilizar las mismas especificaciones que Baur et al. (2018), sostienen que Bitcoin y el oro no se comportan de manera similar. Específicamente, encontraron que Bitcoin es menos influenciado por sorpresas en noticias macroeconómicas de grandes economías avanzadas. En general, se observó una asimetría en las reacciones. Pal y Mitra (2019) afirman que Bitcoin no es un refugio seguro tan efectivo como el oro. Además, Wu et al. (2019) argumentan que tanto Bitcoin como el oro tienen capacidades de cobertura y refugio seguro débiles frente a la incertidumbre económica, independientemente de si se trata de mercados alcistas o bajistas.

Das y Kannadhasan (2018) señalan como un choque positivo en los precios del oro muestra un impacto negativo en los precios de Bitcoin en el cuantil 0.50. La razón subyacente podría atribuirse al hecho de que los inversores pueden preferir invertir en oro en lugar de Bitcoin cuando los precios del oro muestran trayectorias ascendentes (junto con la razón obvia de menores riesgos). Por otro lado, un choque negativo en los precios del oro también ilustra un impacto negativo en el cuantil 0.90. Como se discutió anteriormente, las características del oro y Bitcoin son algo similares (Dyhrberg, 2016), ya que ambos pertenecen a la clase de opciones de inversión alternativas (cobertura/refugio seguro). Un choque negativo en los precios del oro puede ser estimulado por las tendencias inminentes de los inversores a invertir en activos convencionales. En esta misma línea, Kapar y Olmo (2020), en su análisis de los precios de Bitcoin y utilizando variables del sentimiento del mercado, encontraron que el precio spot del oro tiene un efecto negativo sobre los precios de Bitcoin. Estos hallazgos

empíricos sugieren que, durante el período estudiado, Bitcoin mostró un comportamiento procíclico. Es decir, su valor fue impulsado por el interés de los inversores en la criptomoneda y estuvo positivamente correlacionado con la cartera de mercado. En otras palabras, cuando el precio del oro aumentó (indicando una mayor demanda de refugios seguros), el precio de Bitcoin tendió a bajar.

Otra investigación relevante es la desarrollada por Jareño et al. (2020), en la que investigan cómo los rendimientos de Bitcoin reaccionan a los cambios en los rendimientos del precio del oro y otros factores de riesgo internacionales como los rendimientos del mercado de valores de EE. UU., las tasas de interés, el índice de volatilidad del mercado estadounidense (VIX) y el índice de estrés financiero de Saint Louis (STLFSI) y los precios del petróleo. Utilizando un enfoque de regresión cuantílica para el período de 2010 a 2018, el estudio divide la muestra en dos subperíodos: uno con mayor volatilidad y otro con menor volatilidad. Las estadísticas F de los límites muestran relaciones a largo plazo, es decir, cointegración, entre los rendimientos de Bitcoin y los cambios en los rendimientos del precio del oro en algunos casos. En todo el período de muestra, encontraron cointegración entre los rendimientos de Bitcoin y los rendimientos del precio del oro utilizando frecuencias semanales y diarias. Los coeficientes a largo plazo de los cambios en los rendimientos del precio del oro son positivos en todos los casos, pero significativos al nivel del 1% solo para el conjunto completo de datos y los datos semanales. Para comprender las asimetrías a corto y largo plazo entre los rendimientos del oro y de Bitcoin, emplean un modelo de cointegración no lineal asimétrica (NARDL). Sus resultados muestran que la sensibilidad de los rendimientos de Bitcoin a los factores de riesgo internacionales es más notable en condiciones extremas del mercado, con el mayor poder explicativo en el cuantil más bajo. Los rendimientos de Bitcoin responderían de la misma manera a cambios positivos y negativos en los rendimientos del precio del oro para los datos diarios en todos los períodos, mientras que los rendimientos de Bitcoin responden más a cambios positivos que a cambios negativos en los rendimientos del precio del oro durante todo el período para los datos mensuales y semanales. Finalmente, el análisis ARDL no lineal revela una conexión positiva y significativa entre los rendimientos del oro y Bitcoin a corto y largo plazo.

De acuerdo con Gronwald (2019), las criptomonedas, principalmente Bitcoin, exhiben la mayoría de las características de las mercancías, como los choques de demanda, grandes movimientos de precios, etc., lo que se compara con los comportamientos de los mercados de petróleo crudo, excepto por las incertidumbres en el suministro de petróleo crudo, que se eliminan en el mercado de Bitcoin. Dado que las criptomonedas pueden percibirse como mercancías, el precio del petróleo crudo es capaz de influir en sus variabilidades de precios. En este sentido, algunos investigadores han analizado la conectividad entre los mercados de criptomonedas y las mercancías y otros activos tradicionales. Las criptomonedas son más refugios seguros que sustitutos de los mercados de mercancías. Wang et al. (2019) y Shahzad et al. (2019) mostraron evidencia empírica de la afirmación de que Bitcoin es un refugio seguro. Como tal, las criptomonedas se interrelacionan con otras opciones de inversión. Por ejemplo, el comercio activo y la minería de criptomonedas se relacionan significativamente con el mercado de electricidad (Hayes, 2017).

Para Iheke y Lin (2020) los activos de criptomonedas son mercancías y exhiben los atributos de los mercados de mercancías. Por ello, los precios globales del petróleo crudo, como mercado energético, son capaces de afectar sus precios, lo cual se observa a menudo en otros mercados. Además, el comercio activo y la minería de criptomonedas requieren un uso intensivo de electricidad para el equipo de minería. Estas son solo algunas de las conexiones existentes entre los mercados de criptomonedas y los mercados energéticos. Su análisis empírico muestra que existe una conectividad significativa de la volatilidad entre los mercados de criptomonedas y el mercado del petróleo crudo. Esto se puede ver en el derrame de volatilidad unidireccional de los rendimientos del mercado del petróleo crudo hacia los rendimientos del mercado de Bitcoin Cash.

De acuerdo con las investigaciones que incorporan la relación entre las criptomonedas y los mercados de energía, Iheke y Lin (2020) mencionan que las criptomonedas, al tener características parecidas a las mercancías, están influenciadas por los precios globales del petróleo crudo, lo que refleja patrones observados en otros mercados energéticos. Esta interacción se ve desde volatilidad hasta los rendimientos del mercado del petróleo crudo hacia los rendimientos de Bitcoin (Iheke & Lin, 2020). Por ello, en investigaciones de Wang

et al. (2019) y Shahzad et al. (2019) se refleja el rendimiento siendo afectado por su integración con mercados tradicionales y energéticos.

1.4 Revisión de la literatura sobre los determinantes de la volatilidad del Bitcoin

La definición clásica de "dinero" requiere que un activo sea empleado como medio de intercambio, unidad de cuenta y reserva de valor. Investigaciones como la de Dyhrberg (2016a) señala que el bitcoin puede clasificarse como un activo intermedio entre un "puro medio de intercambio", como el dólar estadounidense, y una "pura reserva de valor", como el oro. Aunque el bitcoin no es una moneda *per se*, combina las ventajas tanto del oro como del dólar y tiene el potencial de ser un instrumento importante en los mercados financieros y en la gestión de carteras. Urquhart (2016) indica que las criptomonedas, como el bitcoin, aún presentan ineficiencia en la información, aunque han mostrado una tendencia hacia la eficiencia.

En años recientes se han llevado a cabo múltiples investigaciones sobre la volatilidad de los precios y los rendimientos de las criptomonedas. Se ha demostrado que los niveles de volatilidad de las criptomonedas suelen ser mucho más altos que los de las monedas tradicionales (Yermack, 2015). De acuerdo con Sapuric et al. (2022), la volatilidad anualizada del bitcoin es sustancialmente mayor que la de cualquier activo financiero estándar, como las monedas fiduciarias, acciones o productos básicos, con la volatilidad anual alcanzando niveles superiores al 84%. La volatilidad a lo largo del tiempo muestra grandes oscilaciones y es muy inestable. Lo anterior hace que la predicción asociada a este segmento sea una tarea potencialmente aún más desafiante que para las variables comúnmente abordadas, como los índices bursátiles o los tipos de cambio.

Aunque el aumento exponencial de los precios del bitcoin se asemeja al comportamiento de una burbuja, principalmente en 2023 y lo que va de 2024, podría no estar puramente relacionado con aspectos especulativos, como indican estudios académicos recientes, por ejemplo: Bouri et al. (2017) presentan evidencias que indican que el bitcoin puede ser

efectivamente utilizado como cobertura contra el riesgo específico del mercado. Dyhrberg (2016a) analiza la volatilidad del bitcoin en comparación con el dólar estadounidense y el oro, tradicionalmente considerados como reservas de valor "seguras", utilizando GARCH (1,1) y EGARCH (1,1). El estudio concluyó que el bitcoin tiene similitudes significativas con ambos activos, especialmente en lo que respecta a las capacidades de cobertura y la reacción de la volatilidad a las noticias, sugiriendo que el bitcoin puede ser una herramienta útil para la gestión de carteras, el análisis de riesgos y el análisis del sentimiento del mercado. En otro estudio para el mismo año, Dyhrberg (2016b) también señala que las reacciones del bitcoin pueden ser más rápidas que las del oro y el dólar, respaldando así el análisis de frecuencias de datos tanto altas como bajas. El autor replica el estudio utilizando TGARCH(1,1) y encuentra conclusiones similares a su anterior trabajo.

Por su parte, Katsiampa (2017) compara varios modelos tipo GARCH y encuentra que el modelo AR-Component GARCH, que consiste en un componente de varianza condicional tanto a corto como a largo plazo, se ajusta mejor a los rendimientos de precios de Bitcoin que los otros modelos tipo GARCH considerados en su estudio. Stavroyiannis y Babalos (2017) investigaron las propiedades dinámicas del Bitcoin utilizando modelos GARCH univariados y especificaciones vectoriales autorregresivas. Cermak (2017) empleó un GARCH (1, 1) para modelar la volatilidad del Bitcoin en relación con variables macroeconómicas en los países con mayor volumen de comercio de Bitcoin. Los resultados indicaron que el Bitcoin se comporta de manera similar a las monedas fiduciarias en China, EE. UU. y Europa, pero no en Japón. En particular, el Bitcoin parece ser un activo atractivo para la inversión y la reserva de valor en China. Bouoiyour y Selmi (2015, 2016) analizaron los precios diarios del Bitcoin utilizando un modelo GARCH óptimo y encontraron que la volatilidad había disminuido al comparar datos de 2010-2015 con datos de la primera mitad de 2015. La asimetría en el mercado del Bitcoin seguía siendo significativa, lo que sugiere que los precios del Bitcoin estaban más influenciados por choques negativos que positivos. Chen et al. (2016) realizaron un análisis econométrico de la familia del índice CRIX utilizando datos de 2014-2016. A través de diversos modelos GARCH, concluyeron que el modelo TGARCH (1, 1) es el que mejor se ajusta a todos los datos de muestra según criterios de discriminación como la verosimilitud logarítmica, el AIC y el BIC.

En la investigación de López-Cabarcos (2021) se analiza el comportamiento del Bitcoin y el efecto que el sentimiento de los inversores, los rendimientos del S&P 500 y los rendimientos del VIX tienen en la volatilidad del Bitcoin utilizando modelos GARCH y EGARCH. Los resultados sugieren que los rendimientos del S&P500 y el sentimiento en las redes sociales sobre el índice S&P500 son significativos, lo que significa que ambos influyen en la volatilidad del Bitcoin. La estimación del coeficiente para los rendimientos del S&P500 tienen una mayor influencia en la volatilidad del Bitcoin. También encuentran que los rendimientos del VIX son significativos, lo que implica que la volatilidad del mercado influye en la volatilidad del Bitcoin, en línea con los resultados obtenidos por Bouri et al. (2017). Las estimaciones de los coeficientes ARCH son significativas, lo que indica que la volatilidad de los rendimientos del Bitcoin en el día anterior influye en la volatilidad del Bitcoin. De esta manera, es posible concluir que el modelo GARCH(1,1) y E-GARCH(1,1) son adecuados para modelar la volatilidad del Bitcoin. Específicamente, los resultados obtenidos sugieren que los inversores en Bitcoin son más "tecnológicos" y, por lo tanto, prestan más atención a la información que proviene de estos medios. Además, se ha demostrado que la volatilidad del Bitcoin se comporta de manera diferente a lo largo del tiempo. Así, en períodos en los que los mercados de valores tienen alta volatilidad, el Bitcoin puede usarse como refugio seguro, pero cuando los mercados de valores están estables, el Bitcoin se vuelve atractivo para los inversores especulativos.

Para Kyriazis (2020) el nexo entre Bitcoin, oro e índices de incertidumbre altamente innovadores, empleando especificaciones alternativas de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH) y ARCH Generalizado (GARCH), indican que los rendimientos y la volatilidad del Bitcoin están positivamente influenciados por los rendimientos del oro y el índice de volatilidad del S&P500 (VIX). La evidencia indica que la metodología ARCH Asimétrico simple proporciona el mejor ajuste para los propósitos de estimación porque el patrón de la volatilidad del Bitcoin no exhibe un carácter simétrico a medida que pasa el tiempo.

Cabe mencionar que todos los estudios mencionados anteriormente han empleado modelos de volatilidad univariados. Además, el comportamiento de los valores extremos de las criptomonedas ha sido estudiado por Osterrieder y Lorenz (2017) y Gkillas y Katsiampa

(2018), todos los cuales han demostrado que las criptomonedas exhiben un comportamiento de cola más pesado y, por lo tanto, son más riesgosas que las monedas fiduciarias. En esta misma línea, Shaw (2018) analiza el comportamiento de las series temporales de activos de criptomonedas para identificar las distribuciones adecuadas de las innovaciones de los modelos GARCH, empleando pruebas no paramétricas tipo Kolmogorov y la transformación de martingala de Khmaladze⁵. Sus hallazgos empíricos desafían la suposición de normalidad en el modelado de innovaciones, y en cambio, respaldan el uso de innovaciones con una distribución de error generalizada (GED).

Por lo tanto, las investigaciones sobre la volatilidad y los rendimientos del Bitcoin y otras criptomonedas se dice que suelen ser más volátiles en comparación a un activo financiero estándar. Es por ello por lo que siempre se destaca la complejidad y la importancia de la volatilidad en cuanto a los rendimientos, siendo su interrelación con algunos factores externos y activos financieros. Destacando que la metodología utilizada se basa en las necesidades existentes, se emplearon modelos de volatilidad apropiados, como el GARCH y el EGARCH. Estos modelos son fundamentales para comprender e identificar el comportamiento del Bitcoin en relación con varias altcoins dentro del mercado financiero.

1.5 Conclusiones

El análisis del Bitcoin ha ganado considerable interés e importancia debido a su relevancia en las economías emergentes y desarrolladas además de inversionistas individuales. Investigaciones recientes han explorado diversos factores que afectan el rendimiento del Bitcoin, incluyendo tanto aspectos psicológicos, como la percepción de riesgo por parte de los inversionistas, como factores macroeconómicos, tales como anuncios regulatorios y tasas de interés. Por ejemplo, Baur, Hong y Lee (2018) examinan cómo los cambios en la percepción del riesgo pueden afectar la volatilidad del Bitcoin, mientras que Dyhrberg (2016) analiza la influencia de las políticas monetarias y los anuncios regulatorios en su rendimiento.

⁵ La transformación de martingala de Khmaladze es una técnica estadística avanzada utilizada para mejorar las pruebas de bondad de ajuste en modelos con dependencia temporal. Propuesta por Khmaladze en 1981, esta transformación ajusta los procesos de martingala para eliminar dependencias y hacer que las pruebas sean más robustas y eficaces (Khmaladze, 1981). Es especialmente útil en el análisis de series temporales y modelos financieros como GARCH, donde las suposiciones de independencia y normalidad de las innovaciones pueden no cumplirse completamente.

Estas investigaciones resaltan la necesidad de un análisis más profundo y específico para comprender las causas subyacentes de la volatilidad del Bitcoin y proporcionan una base sólida para futuras investigaciones en este campo dinámico y en constante evolución.

Diversas investigaciones como las desarrolladas por Dyhrberg (2016) Katsiampa (2017), Baur et al. (2018), Baur y Dimpfl (2018) han propuesto una serie de pruebas y metodologías para obtener resultados significativos en la comprensión de la volatilidad del Bitcoin. Algunos autores han utilizado modelos de volatilidad condicional simétrica o asimétrica y análisis comparativos de las series de precios de criptomonedas predominantes. La evidencia muestra que las metodologías GARCH asimétricas, como GJR-GARCH y E-GARCH, proporcionan el mejor ajuste para las estimaciones. Además, estudios como los de Baur y Dimpfl (2018) y Corbet et al. (2018) han abordado diversos factores que contribuyen a la determinación del rendimiento y volatilidad del Bitcoin, incluyendo altcoins, mercados de valores (S&P500), percepción del riesgo e incertidumbre en el mercado y la economía, divisas y commodities como el precio del oro por onza troy y el precio del petróleo West Texas Intermediate (WTICO).

El análisis de los determinantes principales del Bitcoin y su volatilidad revela una compleja interacción entre factores macroeconómicos, psicológicos y específicos del mercado. Estudios como los de Baur, Hong y Lee (2018) han demostrado que la percepción del riesgo y los anuncios regulatorios juegan un papel crucial en la volatilidad del Bitcoin, mientras que Dyhrberg (2016) y Katsiampa (2017) han destacado la influencia de factores económicos tradicionales como las tasas de interés y el oro. Además, investigaciones recientes, como las de Corbet et al. (2018) y Baur y Dimpfl (2018), han utilizado modelos GARCH asimétricos para mostrar que el Bitcoin reacciona tanto a noticias buenas como malas de manera simétrica, pero con una frecuencia y magnitud mayores debido a su naturaleza descentralizada y no regulada. La evidencia sugiere que el Bitcoin se comporta como un híbrido entre una moneda y una mercancía, proporcionando a los gestores de carteras y analistas de mercado una herramienta valiosa para la cobertura y la toma de decisiones informadas. Estos hallazgos subrayan la importancia de considerar una amplia gama de variables y metodologías avanzadas para entender y gestionar eficazmente la volatilidad del Bitcoin en el contexto de los mercados financieros actuales.

CAPÍTULO 2. MODELOS ECONOMETRICOS DE SERIES DE TIEMPO

2.1 Introducción

Un modelo econométrico de series de tiempo es una herramienta principal para llevar a cabo el análisis y modelado de datos temporales en diversos ámbitos, ya sea económicos, financieros, entre otros. La mayoría de estos modelos se desarrolla en base a una metodología para estimar adecuadamente un modelo eficiente siendo este el tema a desarrollar en este capítulo. Tomando en cuenta que una serie de tiempo son datos observados en ciertos intervalos de tiempo y pueden representar una infinidad de sucesos, estas suelen tener dependencia entre sí, permitiendo que se lleve a cabo el análisis de tendencias, estacionalidad y ciclos, entre otras características. Dando paso a los hechos estilizados los cuales se reflejan como patrones recurrentes en las series de tiempo como la tendencia, variación y fluctuación aleatoria. Además, una serie de tiempo puede establecer procesos estocásticos siendo la estacionariedad lo primordial en cuanto a la variación del tiempo y debe satisfacer ciertas condiciones como: la media, la varianza y la autocorrelación constantes.

De esta manera, un modelo de series de tiempo que sea estacionario debe estar correlacionado, y esta condición se puede medir mediante dos funciones denominadas: función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial encargadas de indicar si hay presencia de un ruido blanco dentro de los datos observados, es decir, son variables aleatorias independientes y correlacionadas de manera constante. Pero, una serie de tiempo puede presentarse como una caminata aleatoria suelen ser observaciones más un término aleatorio. Por último, puede mostrarse como una regresión espuria, produce estimaciones que podrían parecer significativas cuando realmente no lo son. Para evitar esta problemática se deben identificar reglas prácticas para la identificación de autocorrelación, pues su existencia invalida el poder explicativo de las variables que determinan el proceso generador de datos.

Para que una serie de tiempo pueda modelarse, es necesario el uso de herramientas estadísticas como los procesos autorregresivos que buscan un modelo adecuado para identificar sus comportamientos en cierto periodo de tiempo y suele variar entre procesos autorregresivos puros como lo es un proceso $AR(p)$. Por otro lado, un proceso de media móvil

(MA) expresa el valor actual de la serie como una combinación lineal de los términos de error (choques aleatorios o innovaciones) pasados. Un modelo MA(q) utiliza los errores de predicción de los “q” períodos anteriores para modelar la serie temporal. Esto es útil para estructurar series donde los valores presentan un patrón de "choques" seguido de un retorno gradual a la media, es decir, donde los efectos de un cambio inesperado se disipan con el tiempo. Aunque también se pueden presentar procesos mixtos como los modelos ARMA y ARIMA.

Cuando se combinan ambos enfoques, se obtienen los modelos ARMA (p, q), que incorporan los elementos de ambos procesos autorregresivos y de media móvil. Este modelo es capaz de capturar tanto la dependencia entre las observaciones como los efectos de choques y su desvanecimiento en el tiempo. Los modelos ARMA son especialmente efectivos para series temporales estacionarias, donde las propiedades estadísticas de la serie como la media y la varianza no cambian con el tiempo. Para series no estacionarias, que presentan tendencias o cambios en la varianza a lo largo del tiempo, los modelos ARIMA (Autorregresivo Integrado de Media Móvil) son más adecuados. Estos modelos incorporan un término de integración (I) que permite modelar y remover tendencias y efectos estacionales, convirtiendo la serie en estacionaria y luego aplicando un modelo ARMA. Otro de los modelos que suelen incorporarse suelen identificarse como híbridos por la estructura similar que las compone como es el caso de un modelo ARMAX y ARIMAX, para un modelo ARMAX el cual consiste en crear adecuaciones para modelizar series de tiempo con una estructura de lag infinita con parametrización parsimoniosa, de lo contrario un modelo ARIMAX es un modelo de transferencia con proceso iterativo similar al modelo univariante ARIMA en cuanto a la identificación, estimación y diagnóstico, sin embargo, un modelo ARIMA suele ser más preciso.

Por lo tanto, una vez que se cuenta con un modelo con su respectivo proceso autorregresivo, sigue el enfoque para la selección y estimación de los modelos mediante la metodología Box-Jenkins que consta de cuatro etapas, en donde se identifican los posibles modelos con las características necesarias, se estima mediante ciertos métodos como la máxima verosimilitud y el método de mínimos cuadrados, se realizan pruebas de diagnóstico para la estimación de parámetros con los residuos del modelo y finalmente se hace un pronóstico y en caso de

rechazar la hipótesis, se debe iterar, siendo esta la característica principal de dicha metodología o bien puede generarse un modelo parsimonioso.

2.1.1 Serie de tiempo

En las últimas décadas, la definición de serie de tiempo se ha evolucionado con base en sus características y su manejo, siendo múltiples los autores que eligen la definición que mejor se adapte a sus necesidades. Videgaray (2011) describe a la serie de tiempo como “una colección de observaciones cronológicas, las cuales son generadas en forma secuencial a través del tiempo”. Esta definición implica que los datos poseen un orden y suelen presentar dependencia entre sí, lo que los convierte en un proceso estocástico. Asimismo, se puede determinar si se trata de un conjunto de series de tiempo continuas o, en su defecto, una serie de tiempo discreta.

Aunque cada autor presenta una perspectiva única en la definición de series de tiempo, como en el caso de Box y Jenkins, quienes la describen como " un conjunto de observaciones generadas de manera secuencial en el tiempo". Existen diversas interpretaciones en la literatura. Por ejemplo, Bovas y Ledolter (2009) las definen como "una secuencia ordenada de observaciones en dimensiones de tiempo y de espacio". Mientras que Brockwell y Davis (1991) las caracterizan como "un conjunto de observaciones registradas en un tiempo determinado, asociadas a un proceso estocástico". Además de Percival y Walden (2006) proponen que “una serie de tiempo es cualquier secuencia de observaciones relacionadas a una variable independiente que podría ser discreta o continua”.

2.1.2 Hechos estilizados de las series de tiempo

Para llevar a cabo el análisis de una serie de tiempo, es fundamental expresarla mediante un modelo matemático que garantice un alto grado de precisión y confiabilidad, manteniendo las propiedades lo más similares posible al proceso real. Sin embargo, una serie de tiempo presenta diversos componentes contribuyen a una comprensión más completa del modelo a pronosticar. Estos componentes incluyen la tendencia, que refleja la dirección general de

cambio a largo plazo y su finalidad dentro de un modelo es eliminarla o modelarla; la variación estacional, que muestra fluctuaciones regulares y predecibles asociadas con ciclos repetitivos dentro de un año o período; el ciclo, que representa oscilaciones periódicas pero no necesariamente relacionadas con la estacionalidad; y finalmente, las fluctuación aleatorias o ruidos blancos, es decir, un conjunto de variables aleatorias independientes que siguen una distribución Normal con media cero y varianza constante (Videgaray, 2011, p. 18-20).

El análisis de series de tiempo implica el estudio de las variaciones en los datos a lo largo del tiempo, las cuales pueden ser influenciadas por una amplia gama de factores. Entre estos se encuentran los eventos macroeconómicos, como cambios en las tasas de interés o políticas fiscales, eventos geopolíticos como conflictos internacionales o acuerdos comerciales, y el sentimiento del mercado, que refleja la confianza y las expectativas de los inversores. El objetivo principal al desarrollar un modelo de series de tiempo es proporcionar descripciones eficientes y precisas de los datos utilizados como muestra. Esto implica identificar y modelar adecuadamente los factores que influyen en las variaciones de la serie temporal, lo que permite comprender mejor su comportamiento y facilita la toma de decisiones informadas en diferentes contextos, como la planificación financiera, la gestión de riesgos y la formulación de políticas económicas.

De acuerdo con Cowpertwait y Metcalfe (2009) hay observaciones que cuentan con una secuencia de variables aleatorias definidas a intervalos de muestreo fijos denominada proceso estocástico; es decir, es el modelo de serie de tiempo (p. 22-23). En otras palabras, el modelo de serie de tiempo proporciona una estructura analítica que permite comprender y predecir el comportamiento de estas variables a lo largo del tiempo. Este enfoque no solo ayuda a identificar patrones y tendencias dentro de los datos financieros, sino que también permite evaluar la incertidumbre asociada con las futuras observaciones.

Al momento de generar un modelo econométrico dinámico, es esencial considerar ciertas características clave como la presencia de fluctuaciones aleatorias alrededor de una media constante y una variabilidad homogénea. También es posible identificar una variabilidad homogénea y regular junto con una tendencia estocástica. Este análisis permite distinguir entre comportamientos estocásticos, donde las variaciones son impredecibles, y

comportamientos determinísticos, donde existen patrones predecibles. Este enfoque ayuda a comprender mejor la naturaleza cambiante de los datos económicos y a desarrollar modelos que capturen adecuadamente tanto la incertidumbre como las tendencias a lo largo del tiempo (Lutkepohl & Kratzing, 2004).

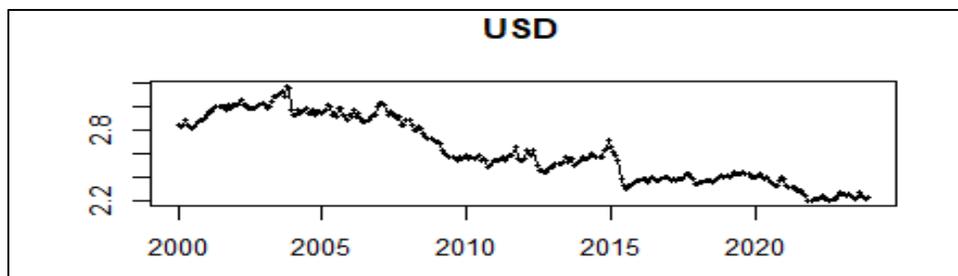
En términos generales, cuando se cuenta con un modelo sólido y se ajustan adecuadamente los datos se puede llegar a orientar decisiones de planificación. Por ejemplo, en un mercado de acciones volátil, los precios suelen ser significativos para identificar los resultados financieros en un periodo de tiempo determinado de una empresa. Así, la modelización tiende a capturar características relevantes y desestimar otras menos significativas, lo que tienen un impacto considerable en el análisis de las variables en los procedimientos individuales de las series de tiempo, previo a la modelización de un conjunto de series temporales.

Videgaray (2011) señala la importancia de la preparación previa de las bases de datos originales para facilitar su manejo. De acuerdo con Wooldrifge (2010), en el caso de las bases de datos de series temporales, el tiempo es una característica fundamental, y su eficacia se maximiza cuando las observaciones están ordenadas cronológicamente y tienen una periodicidad definida. Al seguir un marco estadístico, se puede apreciar como los datos pueden estar fluctuando de manera aleatoria durante cierto tiempo. Considerando como una recomendación realizar graficas en las que se logre identificar cada uno de los valores determinados por las variables (Shumway & Stoffer, 2011). Considerando que no todos los modelos se desempeñan con el mismo procedimiento, todo dependerá del análisis y su sistema de variables. Cuando se trabaja con series de tiempo las observaciones que lo conforman están asociadas y se representan mediante símbolos similares en el conjunto de variables aleatorias (Lutkepohl & Kratzing, 2004).

Entre los principales hechos estilizados de las variables temporales se encuentra la marcada tendencia, denominada así por ser una dirección sistemática en los datos a lo largo del tiempo, donde se puede identificar una caminata aleatoria y de ser así se confirma que se trata de una serie no estacionaria. Esto implica una influencia en observaciones futuras causadas por las observaciones pasadas. (Hamilton, 1994). Este comportamiento muestra claramente que la varianza de los errores no es constante en un lapso afectando significativamente la precisión e interpretación de los datos (Tsay, 2010). Es decir, la tendencia de los choques genera efectos

duraderos siento esto lo relevante. No obstante, la asimetría en respuestas a noticias también es un hecho estilizado importante porque destaca a eventos positivos y negativos ante impactos desiguales en las series de tiempo. (Campbell et al., 1997). La representación de un proceso no estacionario puede apreciarse en la figura 1, en donde se tomaron datos del precio mensual del dólar (USD) durante 2000-2024:

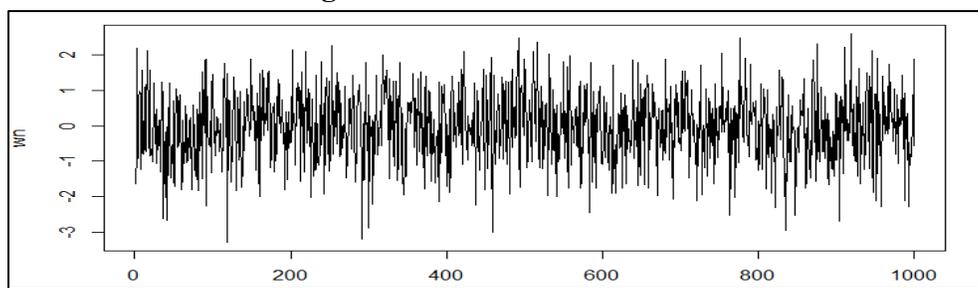
Figura 2. Serie de tiempo del tipo de cambio del dólar (USD) 2000 a 2024



Fuente: Elaboración propia con datos de Investing.com en R-Project (Versión 3.4.1)

Otro de los componentes importantes en las series de tiempo financieras es el denominado ruido blanco, se refiere a la variación aleatoria de los precios o valores de activos financieros, que carece de correlación o patrón discernible en el tiempo. Tsay (2005), considera al ruido blanco como una serie de tiempo con una secuencia de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuida con media y varianza finitas. Para este caso, la media siempre es cero al igual que la varianza denominado Ruido blanco Gaussiano. Sin embargo, Cryer & Chan menciona que su importancia radica en poder construir modelos con procesos útiles debido a que es estrictamente estacionario y se puede identificar fácilmente. Además, de ser caracterizado por asociarse con series estacionarias, en donde cada observación es independiente y no se correlaciona con otras facilitando su análisis e interpretación. A continuación, se muestra un proceso estacionario del tipo Ruido Blanco:

Figura 3. Proceso Estacionario



Fuente: Elaboración propia con datos de Investing.com en R-Project (Versión 3.4.1)

La presencia de la propiedad de estacionariedad presente en el ruido blanco implica que las características estadísticas del proceso no cambian con el tiempo, lo que proporciona un equilibrio fundamental en el análisis de series temporales financieras. Esta propiedad permite a los analistas y tomadores de decisiones emplear herramientas y técnicas estadísticas con confianza para modelar y predecir el comportamiento de los precios de los activos financieros, lo que facilita una toma de decisiones más fundamentada y precisa.

2.1.3 Procesos estocásticos estacionarios

Antes de comenzar con la realización del proceso estocástico, es importante identificar los datos que hay en los registros observados con los cuales se crean varios escenarios con su respectiva estructura. Por ello es primordial conocer el supuesto de estacionariedad en donde las leyes de probabilidad rigen el comportamiento del proceso que no cambian con el tiempo, generando un equilibrio estadístico. (Cryer & Chan, 2008, p. 16) señalan que trabajar con procesos estocásticos estacionarios es esencial en el ámbito actuarial por una serie de razones fundamentales que impactan en la calidad y eficacia del análisis de datos. En primer lugar, la estacionariedad proporciona una estructura estadística consistente a lo largo del tiempo, lo que simplifica el modelado y la predicción de datos y permiten aplicar modelos y técnicas de análisis de series temporales de manera más directa y efectiva. Además, los procesos estacionarios permiten desarrollar modelos más parsimoniosos, lo que conduce a una mayor eficiencia computacional y una mejor comprensión del fenómeno. La estacionariedad también es crucial para la aplicación de herramientas estadísticas específicas, como las funciones de autocorrelación y las pruebas de raíz unitaria, que son fundamentales para el análisis de series temporales.

Enders (2015) considera que, si Y_t es una serie estacionaria, sus elementos como la media, la varianza y las autocorrelaciones logran aproximarse correctamente mediante promedios de tiempo suficientemente largos, basados en el conjunto de realizaciones. Al usar aproximaciones, se asume que la media es la misma en cada uno de los periodos. Pues, un proceso estocástico que tiene una media y unas varianzas finitas es covarianza estacionaria para todo t y $t-s$. Por su parte, Brooks (2008) define a la estacionariedad como “aquella serie

de tiempo con una media constante y autocovarianzas constantes para cada rezago dado”. También emplea el término “choque” para referirse a un cambio inesperado en una variable o en el valor del término de error en un período de tiempo específico. En el contexto de una serie estacionaria, estos impactos son eventos temporales que impactan en la serie, pero tienden a disiparse con el tiempo. Este concepto es fundamental en el análisis de series temporales, ya que permite entender cómo los cambios repentinos afectan a la dinámica de la serie y cómo el sistema tiende a volver a su estado de equilibrio a largo plazo después de experimentar estos choques.

Para comprender el desarrollo de los procesos estocásticos, es importante definir el concepto de estacionariedad. De acuerdo con Videgaray (2011) este se divide en dos acepciones, la primera se considera estacionariedad en sentido fuerte o estricto, es decir, “una serie de tiempo Y_t es estacionaria siempre y cuando su función de distribución conjunta de probabilidad permanezca sin cambio alguno durante cierto periodo de tiempo”. Por su parte, Heij (2004) define a una serie de tiempo como estacionaria solo si sus propiedades estadísticas permanecen constantes con el tiempo, es decir que la media muestral y sus covarianzas que existen en los intervalos pudieran ser más o menos los mismos. Otra definición es la que presenta Greene (2003) explicando que “en un proceso de serie de tiempo fuertemente estacionaria la distribución de probabilidad de cualquier conjunto de N observaciones dentro de una secuencia es el mismo independientemente del origen”. Por otra parte, la segunda acepción se le denomina estacionariedad en sentido débil o amplio solo si la serie de tiempo satisface las tres condiciones siguientes:

- 1) Media constante: Se determina que la media es constante cuando no se presenta tendencia y el valor esperado es representado por un periodo de tiempo constante.
- 2) Varianza constante: Al igual que la media, se espera que la varianza permanezca constante en el tiempo para que no se genera alguna dispersión en el proceso.
- 3) La función de autocorrelación es independiente del tiempo: La autocorrelación se encarga de medir la dependencia entre un valor observado y otro que este separado por cierta longitud.

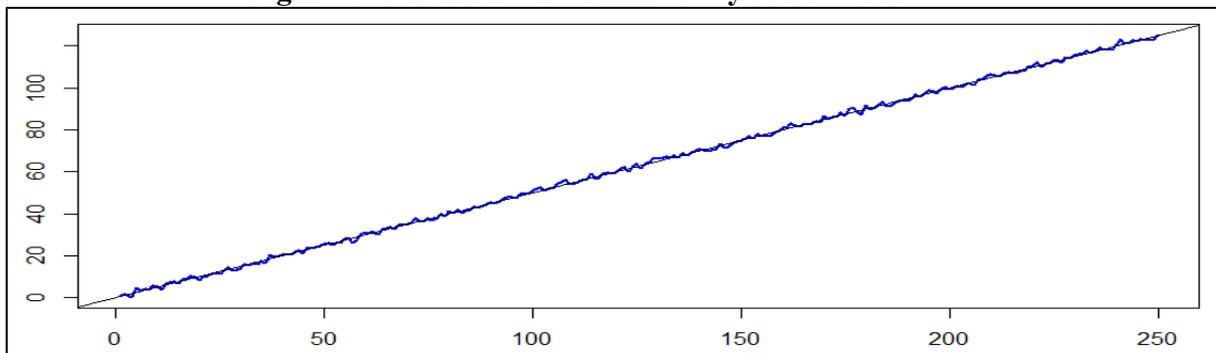
En cuestiones de terminología, una serie de tiempo generada por un proceso estacionario fluctúa con una media constante y la variabilidad parece regular. La mayoría de las veces es

posible obtener series de tiempo estacionarias con un proceso de transformación dependiendo de que las series de tiempo sean procesos estacionarios en diferencias o procesos estacionarios con tendencia. Sin embargo, las transformaciones son: la diferenciación, esta sirve para eliminar la tendencia de una serie de tiempo y de esta forma se convierte en estacionaria, los logaritmos, los cuales estabilizan la varianza y reducen heterocedasticidad y por último, las tasas de crecimiento, estas eliminan la tendencia y genera una serie estacionaria. Algunos autores denominan a este proceso como covarianza de primer y segundo momento invariantes en el tiempo (Lutkepohl & Kratzing, 2004, p. 11).

En su obra, Lütkepohl & Krätzing (2004) definen un proceso estacionario tendencial como aquel que ha sido ajustado para alcanzar la estacionariedad mediante la eliminación de una función de tendencia determinística. Este tipo de proceso se caracteriza por ser modificado restando una función lineal con parámetros fijos a la serie original. La eliminación de la tendencia permite que las propiedades estadísticas de la serie, como la media y la varianza, permanezcan constantes a lo largo del tiempo, facilitando así el análisis y modelado de la serie de tiempo sin la interferencia de una tendencia creciente o decreciente.

La tendencia determinista se refiere a patrones que pueden ser modelados de manera precisa y predecible a lo largo del tiempo. En otras palabras, existe una relación causal o una regla subyacente que dicta el comportamiento de la serie temporal. Este enfoque se basa en la idea de que la evolución de la serie temporal sigue un patrón fijo y predecible (Hamilton, J.D, 1994). Por lo general, se modela mediante funciones matemáticas, como polinomios de grado superior o exponenciales, que capturan la evolución sistemática de la serie a lo largo del tiempo (ej. la tendencia determinista es el crecimiento constante de una serie temporal que representa el PIB de un país en desarrollo). A continuación, se muestra una simulación de una tendencia determinista:

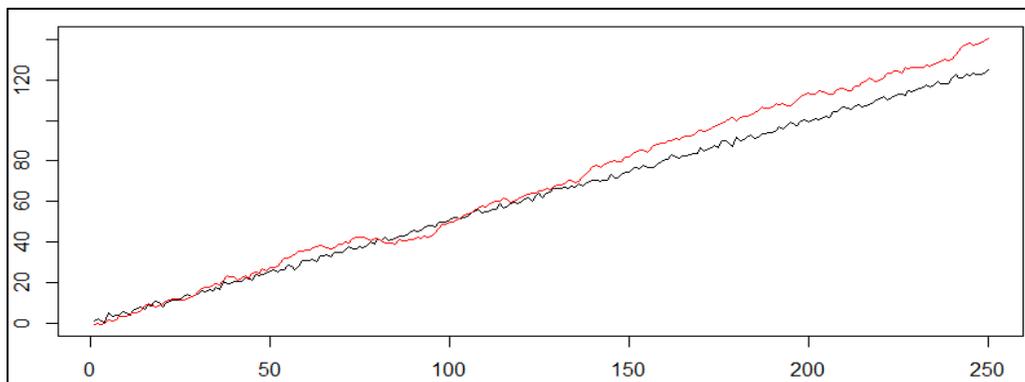
Figura 4. Tendencia determinística y Ruido blanco



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

Por otro lado, la tendencia estocástica se caracteriza por una evolución impredecible y aleatoria en el tiempo. En este caso, no hay un patrón determinista que guíe el comportamiento de la serie temporal de manera clara. En lugar de seguir una regla fija, la serie temporal exhibe variaciones aleatorias que no pueden ser modeladas con certeza. La tendencia estocástica implica la presencia de componentes aleatorios que influyen en la dirección y magnitud de los cambios a lo largo del tiempo (Brockwell, P.J. y Davis, R.A, 2016) (ej. puede ser la volatilidad de los precios de las acciones en un mercado financiero). Hay que destacar que, en la práctica, las series temporales pueden contener tanto componentes de tendencia determinista como estocástica, por lo que es necesario descomponer la serie en estos elementos para comprender mejor su comportamiento y realizar estimaciones y pronósticos precisos. A continuación, se muestra una simulación de una tendencia estocástica:

Figura 5. Tendencia estocástica



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

La distinción entre tendencia determinista y estocástica es crucial en el análisis de series temporales, ya que influye en la elección de modelos y métodos adecuados para el análisis estadístico. En presencia de una tendencia determinista, se pueden aplicar técnicas específicas, como regresiones lineales, para capturar y predecir la evolución futura. En cambio, cuando se enfrenta a una tendencia estocástica, es necesario recurrir a métodos más sofisticados, como modelos de series temporales estacionarias, que tengan en cuenta la naturaleza aleatoria de los datos (Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C. , 2015).

Diferenciar cada tipo de estacionariedad, no siempre es fácil, pues de acuerdo con Greene (2003), esta es una característica esencial para llevar a cabo el análisis y la estimación de

parámetros; pero, también debe considerarse otro elemento fundamental como lo es la ergodicidad. De acuerdo con Davidson y MacKinnon (1993, p. 132), “un proceso es ergódico siempre y cuando las dos funciones cualesquiera que estén dentro de los mismos vectores en los espacios vectoriales reales de la dimensión A y B son escalares reales”. En otras palabras, si los eventos se encuentran a una distancia considerable en el tiempo, se les llama “asintóticamente independientes”. Por ello la ergodicidad junto a la estacionariedad logran una estimación más precisa de los parámetros. De ahí se define el teorema únicamente para sumas de observaciones dependientes como una contraparte de las leyes de los grandes números (Greene, 2003).

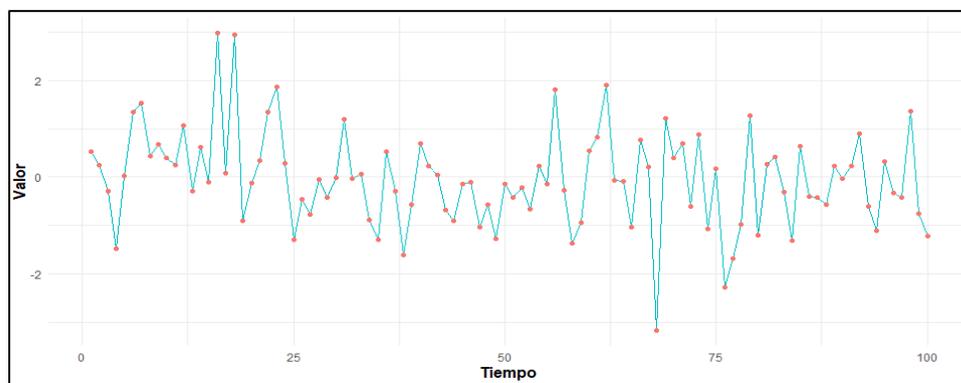
Desde la perspectiva de Enders (2015), en las series estacionarias de modelos multivariantes, el término de autocovarianza se reserva a Y_t y sus propios rezagos, pues la covarianza cruzada se refiere a la covarianza entre una serie y otra. Sin embargo, para modelos univariados de series temporales, los términos de autocovarianza y covarianza son indistintos. La diferencia se encuentra en la serie de tiempo estacionaria de covarianza debido a la autocorrelación. Lo recomendable es graficarlas para detectar los patrones que más destacan, es decir, aquellos rezagos que exceden el intervalo de confianza establecido; a este tipo de pruebas se le conoce como correlograma siendo una herramienta eficiente ante la periodicidad, ya que permiten destacar las autocorrelaciones que tengan un período y longitud iguales (Videgaray, 2011, p. 53). En cuanto a un análisis desarrollado con variables en términos reales, generalmente se presenta una estacionariedad en sentido débil o amplio. No obstante, cuando se trabaja con variables en términos nominales las series generalmente se comportarán como no estacionarias, en tal caso deben realizarse las transformaciones antes señaladas para lograr que se cumpla con las condiciones establecidas.

2.1.4 Ruido blanco, caminata aleatoria y regresión espuria

Como se ha mencionado anteriormente, existen procesos estacionarios los cuales se ejemplifican con procesos como el de un ruido blanco, el cual se define como una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sin embargo, su importancia radica en los procesos que se desarrollan partir de este, pues es estrictamente

estacionario (Cryer & Chan, 2008, p. 18). Como señala Tsay (2013), el ruido blanco es esencial para modelar la aleatoriedad inherente en muchos fenómenos, y su característica distintiva es la falta de patrón o estructura discernible en las observaciones. Entre las características de un ruido blanco se encuentra su media de cero, una varianza constante y no esta correlacionado con otras realizaciones, denotado como $E(x)$ para cada periodo de tiempo t . Enders (2015). Para Brooks (2008), un ruido blanco debe cumplir con ciertas condiciones para determinar que ninguna de sus observaciones este correlacionada, excepto por un pico de 1 en $s=0$, a esto se le llama como Ruido blanco con media cero.

Figura 6. Proceso de Ruido Blanco



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

Por otro lado, una caminata aleatoria es una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas cada una por su respectiva media y varianza cero. Siendo así, una serie de tiempo con condiciones para la interpretación del tamaño de los pasos en una recta numérica, donde Y_t toma el lugar del caminante aleatorio en el momento t . Cryer & Chan (2008). La mayoría de las veces este proceso de caminata aleatoria proporciona un modelo efectivo para analizar fenómenos diversos como el precio de acciones. Este tipo de modelos de caminata aleatoria (MCA) son no estacionarios y existe dos tipos, los cuales son: la caminata aleatoria sin desvío (sin un término constante o de intercepto) donde hay presencia de errores aleatorios conocido por una memoria infinita y la caminata aleatoria con desvío, es decir con un término constante. Ambos describen un proceso estocástico no estacionario porque violan las condiciones de estacionariedad débil (Gujarati, D. N., & Porter, D. C., 2009, p. 743). Es por eso por lo que los términos de no estacionariedad, caminata aleatoria y raíz unitaria son sinónimos. Dados que las diferencias de primer orden son consideradas una

serie de ruido blanco, en donde se puede utilizar su correlograma para evaluar si esta razonablemente modeladas como una caminata aleatoria Cowpertwait & Metcalfe (2009).

Una caminata aleatoria puede presentarse como se observa en el siguiente gráfico como lo muestra Cowpertwait & Metcalfe (2009), en este caso ha sido simulada buscando que se logre identificar una muestra creciente, es decir, se refleja como un proceso estocástico debido a la alta correlación que presenta:

Figura 7. Gráfico de una Caminata Aleatoria con y sin deriva



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

De acuerdo con Heij (2004), en un proceso de caminata aleatorio la dirección de la tendencia no es predecible, porque el valor dado es Y_{t-1} siendo igual de probable que $Y_t > Y_{t-1}$. Pero, en ciertos intervalos de tiempo existen secuencias de valores particulares de ruido blanco para redireccionar los movimientos de las tendencias en la serie de tiempo Y_t . De acuerdo con Gujarati, D. N., & Porter, D. C., (2009) existe un fenómeno de regresión espuria o también conocido como regresión sin sentido descubierto por Yule, tal fenómeno se encarga de mostrar la correlación que persiste en las series de tiempo no estacionarias en donde la muestra es muy grande. Cabe mencionar que la correlación es señalada como espuria cuando en una regresión de serie de tiempo sobre una o más variables pueden dar resultados sin sentido. Una manera de evitarla es mediante series de tiempo cointegradas, es decir, series de tiempo no estacionarias en un nivel individual o la combinación lineal de varias series de tiempo estacionarias.

En este contexto, Granger y Newbold (1974) señalan que la falta de consideración de esta variable adicional puede conducir a la identificación errónea de relaciones causales. La

regresión espuria también puede ocurrir cuando las series temporales analizadas son no estacionarias y muestran tendencias temporales. Asimismo, Engle y Granger (1987) propusieron el uso de cointegración como una herramienta para abordar la regresión espuria en series temporales, ya que implica la presencia de relaciones de largo plazo entre las variables, eliminando así la posibilidad de relaciones espurias a corto plazo.

2.1.4 Autocorrelación y autocovarianzas (FAC y FACP)

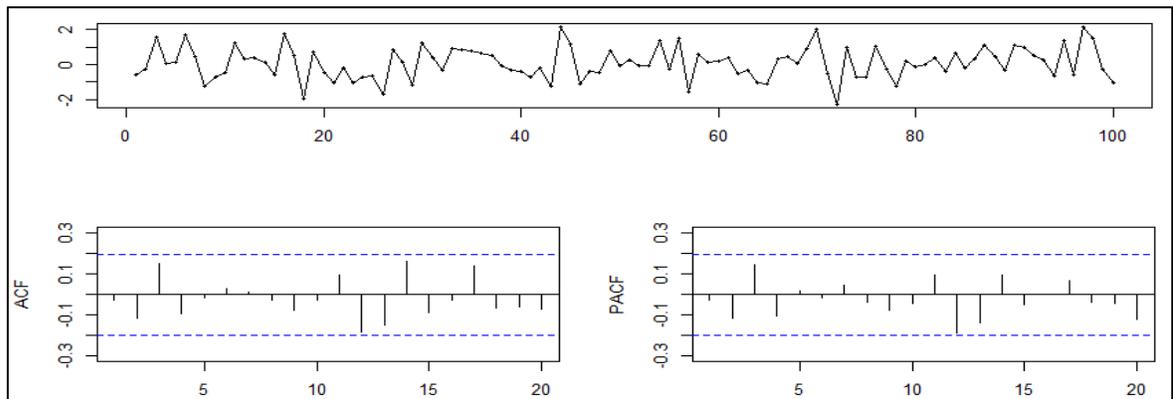
En estudios sobre distribuciones estadísticas se destacan dos de las propiedades relevantes que son la posición central y la dispersión. Sin embargo, para estudiar modelos de series de tiempo las propiedades a considerar son las de segundo orden, es decir, medidas como la media, varianza y correlación en serie. Además, un modelo de series de tiempo que sea estacionario y cuente con su media y varianza puede tener variables que estén correlacionadas y estas dependen del número de brechas temporales que las separan. Es así, como la correlación de una variable consigo misma en distintos momentos se le denomina autocorrelación. (Cowpertwait & Metcalfe, 2009).

La función de autocorrelación (FAC) y la función de autocovarianza o función de autocorrelación parcial (PACF) suelen compararse ante varias funciones teóricas para ayudar a identificar el proceso de generación de datos. Box y Jenkins (1976) analizan la distribución de valores muestrales, los cuales indican que los errores tienen una distribución normal, por lo tanto, al realizar casos prácticos se pueden utilizar valores muestrales para generar autocorrelaciones muestrales y las funciones de autocorrelación y comprobar resultados. Para identificar el modelo adecuado en una serie de tiempo, se deben generar diversos modelos autorregresivos y de medias móviles (ARMA) donde se espera que los datos reales sean similares a la estructura propuesta por estos modelos. Las estructuras ARMA son ampliamente utilizados en el análisis de series temporales debido a su capacidad para capturar tanto la autocorrelación (a través de los términos autorregresivos) como la dependencia de las observaciones pasadas sobre los errores pasados (a través de los términos de medias móviles). La selección del modelo ARMA adecuado se puede realizar mediante técnicas como el criterio de información bayesiana (BIC) o el criterio de información Akaike (AIC), que buscan encontrar el equilibrio óptimo entre el ajuste del modelo y la complejidad de este, evitando así el sobreajuste o subajuste. Dentro de los elementos esenciales de un modelo se

encuentra la función de autocorrelación simple (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF) (Videgaray, 2011).

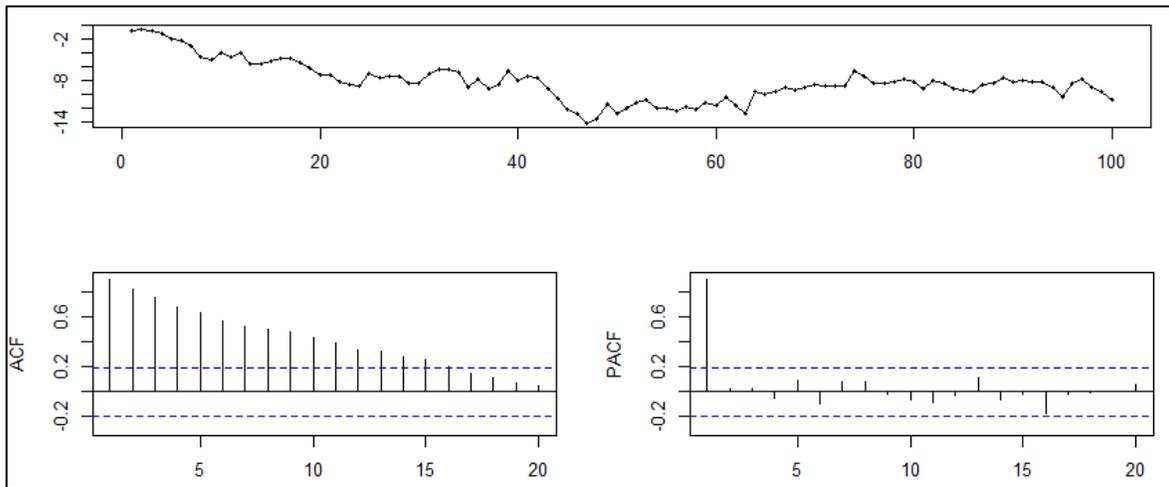
Para la interpretación de la ACF, se muestra con creciente infinita o se trunca en valor de k . Es común utilizar una inspección visual conocida como “correlograma”, en donde los intervalos de confianza permitirán probar una de las hipótesis para cada una de las autocorrelaciones denotadas como p_k : 1) La hipótesis nula describe la igualdad o diferencia entre el valor del parámetro y el cero; y 2) La hipótesis alternativa describe las circunstancias en caso de no aceptar la primera hipótesis. Por lo tanto, al aceptar la hipótesis nula se estará indicando que la autocorrelación correspondiente al intervalo k es estadísticamente insignificante, concluyendo que no hay autocorrelación entre Y_t y Y_{t-k} . Sin embargo, al rechazar H_0 , la autocorrelación p_k es significativa (Videgaray, 2011, p. 108). Se plantean reglas de decisión para las hipótesis planteadas, especialmente al aceptar la hipótesis nula siendo las primeras autocorrelaciones insignificantes, lo que lleva a aceptar que los datos analizados son un ruido blanco. A continuación, se muestra un correlograma ACF y PACF simulando este último proceso y comparándolo contra el correlograma simulando de una Caminata aleatoria:

Figura 8. Correlograma ACF Y PACF (Ruido blanco)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

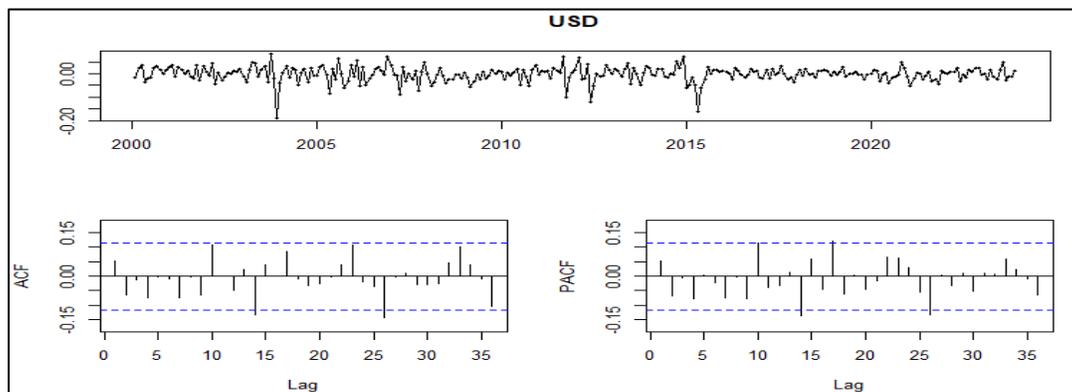
Figura 9. Correlograma ACF Y PACF (Caminata Aleatoria)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

Un modelo lineal general puede variar en cuanto a la forma en la que se puede identificar, como lo es un modelo de forma invertida o viceversa. Videgaray (2011) toma como ejemplo un modelo de forma invertida en donde se define la autocorrelación parcial (partial autocorrelation) de orden k como el valor de cada nueva variable autorregresiva Y_{t-k} que se adhieren al modelo. Por otra parte, la función de autocorrelación parcial o PACF (Partial AutoCorrelation Function) se muestra como el gráfico con valores de la autocorrelación parcial contra los intervalos k . Siendo el cálculo de la PACF a través de la ecuación resultante para ACF. En el gráfico de un proceso estacionario se aprecia la aplicación la ACF y la PACF para el tipo de cambio peso dólar, (USD):

Figura 10. Aplicación de la ACF y la PACF para el tipo de cambio peso dólar (USD)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

En su trabajo seminal de 1976, Box y Jenkins resaltaron la importancia fundamental de las autocovarianzas y autocorrelaciones como herramientas clave para la identificación y estimación de modelos de series de tiempo. Estos métodos analíticos facilitan de manera significativa el discernimiento de las estructuras AR, MA y/o ARMA en los datos temporales, permitiendo así modelos más precisos y robustos. Específicamente, en el contexto de un proceso autorregresivo de primer orden (AR(1)), Box y Jenkins identificaron una condición crítica de estacionariedad: el coeficiente autorregresivo, $|a_1|$, debe ser menor que uno. Esta restricción asegura que la función de autocorrelación (FAC), o correlograma, exhiba una convergencia hacia cero, lo que se convierte en un criterio decisivo para afirmar la estacionariedad de la serie. La convergencia de la FAC hacia cero no solo indica que las correlaciones entre observaciones sucesivas disminuyen con el tiempo, sino que también es esencial para la validación de los supuestos del modelo AR(1), reforzando la fiabilidad de las proyecciones y análisis derivados de este.

Por ejemplo, un modelo de forma invertida genera un modelo con variables históricas y un error aleatorio, a esto se le denomina “modelo autorregresivo” (AutoRegresive Model) denotado por AR(p), en donde p son las variables autorregresivas (Videgaray, 2011, p. 65). De esta manera, se logra identificar ciertas características únicas para un modelo AR(p) como: las condiciones de estacionariedad para sus parámetros, la ACF se presenta de manera decreciente infinita con variantes dependientes de los coeficientes en signos y magnitudes al igual que la PACF que permanece en $k = p$.

La modelización de series de tiempo, especialmente cuando se busca simplificar su complejidad, a menudo conduce a la interpretación de dichos modelos en términos de ruido blanco, bajo la premisa de ciertas restricciones paramétricas. La efectividad de un modelo de series de tiempo, en términos de su aplicabilidad práctica, se ve significativamente incrementada cuando este se estructura de manera que solo involucre un número finito de parámetros, asegurando así su manejabilidad y eficiencia computacional. En este contexto, Tsay (2013) destaca la relevancia de los modelos de Media Móvil (MA), cuya principal ventaja reside en su capacidad para manifestar estacionariedad débil. Esto se debe a que los modelos MA pueden considerarse como combinaciones lineales finitas de una secuencia de ruido blanco, que permanece invariante en el tiempo en lo que respecta a sus dos primeros

momentos. Tal característica no solo facilita la interpretación y análisis de los datos, sino que también subraya la importancia de la estacionariedad débil como un criterio esencial para la selección de modelos prácticos en el análisis de series de tiempo.

La identificación de procesos autorregresivos en el análisis de series de tiempo se fundamenta en gran medida en el uso estratégico de las funciones de autocorrelación simple (FAC) y parcial (PACF). La FAC ofrece una visión inicial sobre la dependencia lineal y la persistencia de las observaciones a lo largo del tiempo, permitiendo detectar patrones y tendencias subyacentes. Por otro lado, la PACF proporciona información crítica al revelar la correlación entre observaciones separadas por k intervalos, controlando los efectos de las correlaciones en intervalos más cortos. Juntas, estas herramientas son indispensables para discernir la estructura específica de un proceso autorregresivo, como la determinación del orden p en un modelo $AR(p)$. La PACF de un proceso $AR(p)$ se interrumpe después de encontrarse con algún rezago en p (Heij, 2004, p. 548). En cuanto a la interpretación de la PACF, de igual manera debe hacerse una inspección visual buscando que un intervalo de confianza pruebe la hipótesis para las autocorrelaciones parciales denotadas como p_{kk} . En este caso, la hipótesis nula al ser aceptada representa a la variable autorregresiva que no tiene aportación valiosa dentro del modelo $AR(k)$, en cambio al ser rechazada la autocorrelación parcial es relevante (Videgaray, 2011, p. 111).

De acuerdo con Shumway & Stoffer (2011), una función de autocovarianza se denomina un producto de segundo momento para todo s y t . En caso de que no se reconozca algún problema en cuanto a la identificación de una serie temporal cambia la interpretación de: $\gamma_x(s,t)$ a $\gamma(s,t)$. Asimismo, la autocovarianza es la medida en momentos diferentes de los puntos de una misma serie de tiempo, en general las series de tiempo entrecortadas tienden a tener más funciones de autocovarianza cercanas a cero debido a la distancia a la que se encuentra. Shumway & Stoffer (2011), considera que la ACF tiene como propósito predecir de manera lineal el tiempo de un proceso estocástico, es decir, es una forma de aproximarse a una serie de tiempo en el momento t a partir de valores en el momento s .

En el análisis de series de tiempo, es fundamental comprender las características específicas de cada modelo y determinar el momento más apropiado para su aplicación. Por ejemplo, en el contexto de un modelo de promedio móvil (MA), resulta esencial especificar el orden del

modelo, ya que la función de autocorrelación (ACF) provee información valiosa para este propósito. Sin embargo, cuando se trata de un modelo autorregresivo (AR), la función de autocorrelación parcial (PACF) es más indicativa para determinar el orden adecuado, cortando en el rezago “p” para un modelo AR(p). Esta distinción subraya la importancia de elegir el modelo y sus parámetros con precisión, basándose en las propiedades estadísticas de la serie temporal en estudio, tal como se destaca en los trabajos de Tsay (2012). Este enfoque meticuloso asegura la implementación del modelo más adecuado para el análisis de los datos, permitiendo así una interpretación más precisa y resultados más confiables.

2.1.5. Pruebas de Estacionariedad (DF, DFA, PP y KPSS)

En el análisis de series de tiempo, distinguir entre series estacionarias y no estacionarias es un paso crucial, ya que afecta directamente la selección de modelos y técnicas de pronóstico aplicables. Para evaluar la estacionariedad de una serie, es común recurrir primero al análisis gráfico, el cual permite una inspección visual de los datos. A través de gráficos de la serie de tiempo, se pueden identificar patrones como tendencias o estacionalidades, ofreciendo una comprensión preliminar de la naturaleza de los datos. Este análisis visual sirve como el fundamento para proceder con pruebas más formales, entre las cuales destaca la prueba del correlograma. El correlograma, mediante la función de autocorrelación, ayuda a detectar la presencia de dependencias seriales en los datos, lo que es indicativo de la no estacionariedad. Ambos enfoques, el gráfico y el correlograma, son herramientas complementarias esenciales en el diagnóstico preliminar de la serie, guiando la estrategia de modelado hacia la aplicación de transformaciones o la selección de modelos específicos que manejen adecuadamente las características identificadas.

A pesar de que la prueba del correlograma es uno de los métodos inmediatos, no siempre es el más efectivo porque las perturbaciones de un proceso pueden permanecer indefinidamente en un modelo provocando que la ACF de un proceso de raíz unitaria, es decir un pase aleatorio decaiga poco a poco hasta llegar a cero. De esta manera, suele confundirse este proceso con uno persistente, pero estacionario Brooks (2008). Asimismo, se determinó que no es posible el uso de la ACF y de la PACF para saber si una serie de tiempo se describe por

una raíz unitaria pues los datos generados podrían llegar a ser erróneas y se pensaría que se trata de un proceso estacionario.

Una herramienta fundamental en el análisis de series de tiempo para determinar la estacionariedad es la "Prueba de raíz unitaria". Esta prueba es particularmente relevante en contextos donde el modelo de interés se asimila a una caminata aleatoria, lo cual es indicativo de un proceso subyacente no estacionario. La presencia de fluctuaciones persistentes en la serie de tiempo sugiere la posibilidad de una raíz unitaria, característica de los procesos no estacionarios. En estos modelos, se introduce el concepto de error de ruido blanco para describir cómo las primeras diferencias de una serie de tiempo de caminata aleatoria pueden ser consideradas estacionarias. La estructura de la prueba de raíz unitaria se basa típicamente en una hipótesis nula que asume que la serie es no estacionaria (presencia de una raíz unitaria), frente a una hipótesis alternativa que propone la estacionariedad de la serie. La capacidad de identificar correctamente la presencia de una raíz unitaria es crucial, ya que guía el proceso de diferenciación necesario para convertir la serie en un proceso estacionario, permitiendo el uso de modelos de predicción más convencionales y efectivos.

Antes de aplicar pruebas de estacionariedad en análisis de series de tiempo, es crucial verificar si los modelos presentan raíces unitarias, lo cual indica procesos potencialmente no estacionarios. Confirmar la presencia de raíces unitarias permite avanzar hacia la identificación de tendencias estocásticas, que son variaciones aleatorias a largo plazo. El procedimiento inicia con la localización de un punto en el correlograma que se aproxime a un comportamiento de caminata aleatoria, representativo de las dinámicas intrínsecas en las series de tiempo analizadas. Este paso es fundamental para discernir entre variaciones que reflejan una tendencia genuina en los datos y aquellas que son el resultado de fluctuaciones aleatorias. La precisión en este proceso es vital para la selección adecuada de técnicas de modelado y transformaciones subsiguientes que aseguren la estacionariedad de la serie, permitiendo así análisis y pronósticos confiables y robustos (Cowpertwait & Metcalfe, 2009)

La Prueba Dickey y Fuller es una de las mejores alternativas para probar las hipótesis planteadas en las que el valor estimado t del coeficiente Y_{t-i} siguen en el estadístico (τ), el cual es calculado por medio de simulaciones. Según Gujarati y Porter (2009), el estadístico τ , conocido también como la prueba de Dickey-Fuller (DF), juega un papel crucial en el

análisis de estacionariedad de una serie de tiempo. Esta prueba se enfoca en la hipótesis nula de que existe una raíz unitaria ($\delta=0$), lo que indicaría que la serie es no estacionaria. Al rechazar esta hipótesis nula, se concluye que la serie es estacionaria. Sin embargo, la prueba DF también contempla la posibilidad de una hipótesis alternativa donde $\delta<0$, lo que reflejaría estacionariedad. Es importante destacar que esta prueba es unidireccional, centrando su enfoque en la dirección de la relación y no en la magnitud del efecto. Este enfoque metodológico permite a los investigadores determinar si una serie de tiempo requiere diferenciación para alcanzar la estacionariedad, un paso esencial para el análisis y modelado efectivo de datos temporales.

Gujarati y Porter (2009) destacan que la evaluación de la presencia de tendencia estocástica en una serie de tiempo es crucial, y en ausencia de esta, se busca evidencia de una tendencia determinística a través de la prueba F, utilizando los valores críticos encontrados en las tablas de Dickey-Fuller. Este enfoque subraya que una serie de tiempo puede manifestar tanto tendencias estocásticas como determinísticas dentro del mismo modelo. La distinción entre estas tendencias es vital para el análisis y la modelización adecuada de los datos. Además, el tamaño de la muestra desempeña un papel importante en la sensibilidad de la prueba hacia estas características, lo que lleva a la identificación de tres escenarios posibles: una caminata aleatoria pura, una caminata aleatoria con deriva, y una caminata aleatoria con deriva y tendencia. Este marco teórico subraya la complejidad y la riqueza de las series de tiempo, y la importancia de elegir el enfoque de análisis correcto basado en la estructura subyacente de los datos.

La Prueba Dickey-Fuller Aumentada (DFA), desempeña un papel crucial en la identificación de autocorrelaciones dentro de un proceso que se presume estacionario, ut sin adherirse estrictamente a un modelo AR. Esta distinción es importante porque, a diferencia del DF, el DFA incorpora términos adicionales para capturar la autocorrelación serial, lo que permite un análisis más robusto frente a estructuras de autocorrelación complejas. Cowpertwait y Metcalfe (2009) subrayan que debido a la metodología exhaustiva de simulación empleada en DFA, no es sencillo descartar la hipótesis de una raíz unitaria. En esencia, la DFA extiende el alcance de la prueba DF al ajustar por autocorrelación en los errores, manteniendo la distribución asintótica para el uso de valores críticos tabulados de manera similar. Según

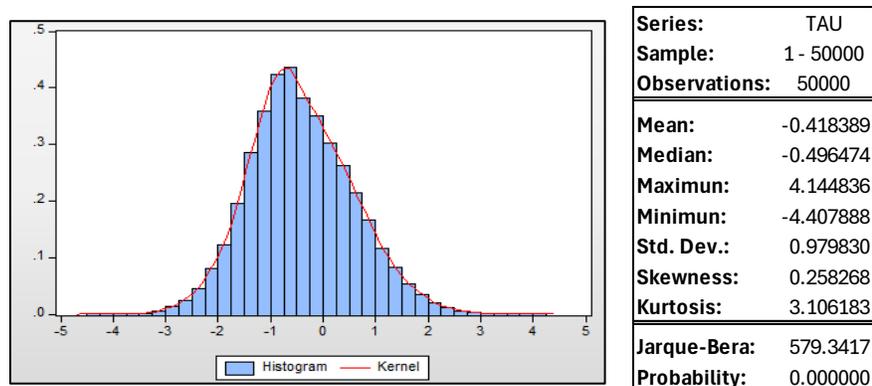
Gujarati y Porter (2009, p.758), aunque la DFA se alinea estrechamente con la DF en su esencia, es imprescindible considerar la correlación serial entre los errores, especialmente al incluir términos de diferencias rezagadas. Este enfoque ampliado asegura una detección más precisa de la no estacionariedad, adaptándose a la complejidad inherente de las series de tiempo reales.

En este tipo de pruebas se generan cambios en decisiones como tomar el orden AR, es decir el número de diferencias rezagadas de Y_t , en este caso se puede utilizar un procedimiento de forma secuencial. En caso se tomar como base el modelo AR el proceso se convierte en mixto, permitiendo que se obtengan las mismas distribuciones límite de procesos AR de orden finito como para los modelos AR que se aproximan a infinito con cierto ritmo en el tamaño de la muestra. (Lutkepohl & Kratzing, 2004).

Para Cryer & Chan (2008), la forma más efectiva para identificar las hipótesis planteadas en un Prueba Dickey-Fuller es cuando la hipótesis nula corresponde al caso en que el modelo se identifica como un AR y tiene una raíz unitaria, mientras que la hipótesis alternativa establece que no tiene raíces unitarias. Por otra parte, la prueba Dickey-Fuller aumentada (DFA) se puede señalar en el estadístico t del estadístico del coeficiente estimado en el método de mínimos cuadrados, donde se presenta una distribución no estándar de la muestra bajo la hipótesis nula de una raíz unitaria.

Un ejemplo para desarrollar la Prueba Dickey Fuller, puede llevarse a cabo mediante una simulación Monte Carlo tal como lo plantea Lizardi (2014), empleando el software EViews:

Figura 11. Histograma de la Prueba Dickey Fuller Aumentada (Distribución TAU)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en E-VIEWS (Versión 12)

Al emplear una simulación de Monte Carlo, siendo un método computacional que utiliza muestreo aleatorio repetido se pueden obtener resultados numéricos aplicables para identificar los valores del estadístico “tau” de la prueba de Dickey-Fuller Aumentada (ADF) para diferentes niveles de significancia, como el 1%, 5% y 10%. De acuerdo con Lizardi (2014) la finalidad es corroborar que a medida que el tamaño de la muestra crece lo suficiente, el estadístico converge al verdadero.

En este ejemplo se encuentra el valor al 5% de -1.95, donde los valores críticos dependen de lo siguiente: la hipótesis nula (raíz unitaria= no estacionariedad) y la alternativa (no hay raíz unitaria=estacionariedad) que sirve para maximizar la potencia de la prueba en la dirección de desviación del valor nulo. (Lizardi, 2014). Entre los valores más representativos del estadístico “TAU” para los diferentes niveles de significancia se tienen 1%, 5% Y 10% y para 500 observaciones bajo tres estructuras diferentes y se muestran en las siguientes tablas:

1. Sin tendencia ni constante: es un estadístico que asume que la serie no tiene tendencia ni intercepto y es adecuada para series que fluctúan alrededor de un nivel medio cero.

Tabla 1. Estadísticos de la Prueba ADF (Sin tendencia ni constante)

OBS.	NIVEL DE SIGNIFICANCIA							
	1%	3%	5%	10%	90%	95%	98%	99%
100	-2.6	-2.24	-1.95	-1.61	0.9	1.29	1.64	2.03
250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.29	1.63	2.01
500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2
Inf	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2

Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

2. Con constante: el estadístico indica que incluye un término intercepto en el modelo, adecuado para series que fluctúan alrededor de un nivel medio no cero, pero sin tendencia

Tabla 2. Estadísticos de la Prueba ADF (Con constante)

OBS.	NIVEL DE SIGNIFICANCIA							
	1%	3%	5%	10%	90%	95%	98%	99%
100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58	-0.42	-0.05	0.26	0.63
250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57	-0.42	-0.06	0.24	0.62
500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57	-0.43	-0.07	0.24	0.61
Inf	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57	-0.44	-0.07	0.23	0.6

Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

3. Con tendencia y constante: este estadístico añade tanto un término intercepto como un término de tendencia lineal al modelo, adecuado para series que muestran una tendencia estocástica o determinista a lo largo del tiempo

Tabla 3. Estadísticos de la Prueba ADF (Con tendencia y constante)

OBS.	NIVEL DE SIGNIFICANCIA							
	1%	3%	5%	10%	90%	95%	98%	99%
100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15	-1.22	-0.9	-0.62	-0.28
250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13	-1.23	-0.92	-0.64	-0.31
500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13	-1.24	-0.93	-0.65	-0.32
Inf	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12	-1.25	-0.94	-0.66	-0.33

Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

A continuación, se muestra una simulación de ruido blanco, en donde se aplica la prueba Dickey Fuller Aumentada:

Figura 12. Prueba Dickey Fuller Aumentada (Ruido Blanco)

Data: White Noise
Dickey-Fuller = -9.7185 **Lag Order =** 9 **P-Value =** 0.01
Alternative hypothesis: Stationary

Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

La prueba presentada en la figura 11, considera como los resultados la hipótesis nula, en donde se señala la presencia de una serie de tiempo No estacionaria, o la hipótesis alternativa, en donde se garantiza que la serie de tiempo es estacionaria. En este caso, se comprueba la hipótesis nula identificando la inexistencia de una raíz unitaria con una estructura sin constante ni tendencia.

A diferencia de la Prueba Dickey-Fuller, la Prueba Phillips-Perron introduce ajustes en su estadística de prueba para abordar la autocorrelación serial y la heteroscedasticidad presente en los residuos del modelo, sin requerir la modelación explícita de estos componentes. Este enfoque ajustado proporciona robustez en escenarios donde la autocorrelación y la heteroscedasticidad pueden influir en las conclusiones de la prueba de estacionariedad. (Phillips, P.C.B. & Perron, P., 1988). En el contexto de la Prueba Phillips-Perron, la consideración de la autocorrelación serial y la heteroscedasticidad en los residuos se traduce en una mayor flexibilidad para abordar las complejidades inherentes a las series temporales. Este enfoque es particularmente valioso cuando los residuos exhiben patrones no lineales o comportamientos no gaussianos, lo que puede ser el caso en diversas aplicaciones prácticas. La capacidad de la Prueba Phillips-Perron para acomodar estas características mejora la robustez de la evaluación de estacionariedad en comparación con pruebas que no realizan tales ajustes. (Davidson, J., MacKinnon, J.G., 2004).

Figura 13. Prueba Phillips Perron (Caminata aleatoria)

Data:	Caminata Aleatoria Simulada
Dickey-Fuller z(alpha) =	-10.405 Lag Parameter = 3 P-Value = 0.5121
Alternative hypothesis:	Stationary

Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

Al igual que en el ejemplo de la figura 8 al tratarse de una caminata aleatoria la prueba de hipótesis no es rechazada debido a la evidencia estadística en donde la serie de tiempo es no estacionaria, determinado la presencia de una raíz unitaria. La prueba Schmidt-Phillips es una de las varias pruebas de raíz unitaria, esta tiene el objetivo de utilizarse ante un modelo con una tendencia lineal determinística. De esta manera, se logra ajustar a términos determinísticos y a esta serie se aplica la prueba, dependiendo únicamente de la estructura

dinámica del término del error, siendo esta la razón por la cual debe aplicarse un factor de ajuste al establecer las estadísticas de la prueba. (Lutkepohl & Kratzing, 2004, p. 57).

Adicionalmente, Lutkepohl & Kratzing (2004), presenta otra prueba denominada KPSS (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin) en donde su utilidad varía considerablemente en cuanto a las pruebas anteriores de raíz unitaria por el contraste que se genera en la hipótesis nula de estacionariedad frente a la alternativa de la raíz unitaria, considerándose una prueba de raíz unitaria estacional. A continuación, se muestra la siguiente simulación de una serie de tiempo estacionaria con valores estadísticos que garantizan la inexistencia de una raíz unitaria, es decir, se rechaza la hipótesis nula, además de observar que el valor de p es mayor al nivel de significancia establecido en dicha prueba:

Figura 14. Prueba KPSS.

Data: Serie_Tiempo
KPSS Level = 0.95298 Lag Parameter = 4 P-Value = 0.01

Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

La prueba de raíz unitaria KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin) asume como hipótesis nula que una serie es estacionaria en torno a una tendencia determinística o estacionariedad de nivel, lo que la hace particularmente adecuada para los datos de criptomonedas, que pueden exhibir tendencias fuertes a lo largo del tiempo (Kwiatkowski et al., 1992). En el ámbito de las criptomonedas, donde la volatilidad y las tendencias son más pronunciadas en comparación con los mercados financieros tradicionales, la capacidad de la prueba KPSS para distinguir entre estacionariedad y la presencia de una raíz unitaria resulta esencial para realizar análisis y pronósticos precisos. La correcta identificación de la estacionariedad en las series de tiempo de criptomonedas no solo facilita la aplicación de modelos predictivos más adecuados, sino que también mejora la comprensión del comportamiento del mercado y la dinámica de precios.

2.2 Modelos de Series de Tiempo

Los modelos de series de tiempo suelen desarrollarse a partir de la teoría de las ecuaciones en diferencias lineales en donde se abordan los procesos forzados $\{X_t\}$ siendo estocásticos.

Al desarrollar estos modelos es importante hacer uso de la metodología de Box y Jenkins (1976) y tener en cuenta una de las características principales de estos modelos son las variables históricas ponderadas y un error aleatorio. Por lo que dicho modelo se denomina “Modelos Autorregresivos”. De acuerdo con Box – Jenkins (1976), un modelo autorregresivo es un proceso estocástico importante para presentar series de tiempo, expresándose como:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t$$

Siendo un modelo autorregresivo de orden p o AR(p), en donde las e_t son ruido blanco, interpretadas como variables independientes que siguen una distribución Normal con media cero y varianza constante. El modelo AR(p) se generaliza mediante: condiciones de estacionariedad para sus parámetros, una ACF decreciente infinita con ariane de acuerdo a los signos y magnitudes de los coeficientes y una PACF que se trunca en $k = p$. (Videgaray, 2011, p. 71). Gujarati (2009) menciona estos modelos como una forma reducida haciendo referencia al análisis de los modelos de ecuaciones simultaneas.

Por otra parte, Box Jenkins (1976) presentaron otro modelo conocido como un Proceso de Medias móviles (MA), el cual se caracteriza por expresar la desviación del proceso mediante una suma finita ponderada de desviaciones anteriores. Este modelo se formula con signos negativos, sin embargo, implican que su valor es positivo y viceversa. Se puede identificar como:

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_3 e_{t-3} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

Este proceso es un MA(p), es decir, se trata de una combinación lineal de términos de error de ruido blanco. Este modelo tiene las siguientes características: siempre es estacionario, tiene condiciones de invertibilidad para sus parámetros, una ACF que se trunca en $k = p$ y una ACF decreciente infinita con variantes que dependen de signos y magnitudes de los coeficientes (Videgaray, 2010, p. 76). Para estos procesos MA(p) se presenta falta de unicidad dadas sus funciones de autocorrelación, por lo cual es importante inferir los valores de los parámetros a partir de las series de tiempo observadas. (Cryer & Chan, 2008),

También se pueden identificar modelos con características conjuntas en cuanto a un modelo autorregresivo con parámetros p y un modelo de medias móviles con parámetros q, estos se

denomina ARMA (p). Este modelo tiene como finalidad lograr un mayor ajuste en series de tiempo con datos reales Box Jenkins (1976). Se representa de la siguiente manera:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

Lutkepohl & Kratzing (2004) mencionan que se identifica cuando la unicidad de la representación MA(p) requiere de restricciones y con ello garantiza que si $m(z) \neq 0$, para números complejos z con $|z| < 1$. A este proceso se le denomina invertible.

A continuación, se presenta un cuadro entre los procesos mencionados. En términos de correlación, la función de autocorrelación (FAC) de AR(p) muestra un decaimiento exponencial o sinusoidal para rezagos mayores que p , mientras que la función de autocorrelación parcial (FACP) se corta bruscamente después del rezago p . Por su parte, la FAC para MA(q) se corta bruscamente después del rezago q , mientras que la FACP muestra un decaimiento exponencial o sinusoidal. La FAC y la FACP de ARMA(p,q) pueden presentar patrones más complejos que reflejan la combinación de efectos AR y MA, sin cortes bruscos después de los lags p y q respectivamente, sino más bien un decaimiento que puede ser mixto entre los patrones de ambos modelos puros. El siguiente cuadro comparativo destaca cómo la selección y adecuación de un modelo específico depende estrechamente de la naturaleza de los datos y de los patrones observados en sus funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, además de las pruebas de estacionariedad e invertibilidad, fundamentales para garantizar la validez de las predicciones y análisis realizados.

Tabla 4. Dualidad de Modelos ARMA

Modelo	Equivale a	Condiciones de Estacionariedad (CE)	Condiciones de Invertibilidad (CI)	ACF	PACF
AR (p)	MA (∞)	Si	No	Decreciente Infinita	Se trunca en $k = p$
MA (q)	AR (∞)	No	Si	Se trunca en $k = p$	Decreciente Infinita
ARMA (p,q)	AR (∞) MA (∞)	Si	Si	Decreciente Infinita	Decreciente Infinita

Fuente: Videgaray, 2010, p. 79

Los modelos de series de tiempo antes mencionados son considerados débilmente estacionarios por tener una media y varianza constante y una covarianza invariante en el tiempo. Es por eso por lo que al tener un modelo ARMA (p, q) se puede diferenciar, generando así una serie de tiempo autorregresiva integrada de promedios móviles o ARIMA (p, q, d), en donde p son los autorregresivos, d el número de veces que la serie debe ser diferenciada para lograr que sea estacionaria y q el número de promedios móviles. Cowpertwait & Metcalfe (2009), indica que un proceso ARMA(p,q) debe ser estacionario cuando las raíces θ superen en valor absoluto a la unidad, se menciona que cuenta con dos casos especiales que son; ARMA(0,q) y ARMA(p,0) y parsimonia de los parámetros, ajustando los datos a dicho proceso.

2.2.1 Proceso Autorregresivos de orden 1 (AR (1))

De acuerdo con Videgaray (2010), un proceso autorregresivo AR (1) debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. La media debe ser constante:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(\phi_1 Y_{t-1} + e_t) \\ &= E(\phi_1 Y_{t-1}) + E(e_t) \\ &= \phi_1 E(Y_{t-1}) \end{aligned}$$

- En caso de que Y_t sea estacionaria y la media sea constante, debe cumplirse:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \mu$$

2. La varianza debe ser constante:

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= Var(\phi_1 Y_{t-1} + e_t) \\ &= Var(\phi_1 Y_{t-1}) + Var(e_t) \\ &= \phi_1^2 Var(Y_{t-1}) + \sigma^2 \end{aligned}$$

- En caso de que Y_t sea estacionaria y la media sea constante, debe cumplirse:

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) = \gamma_0$$

La varianza debe ser positiva, pero será constante solo si cumple lo siguiente:

$$1 - \phi_1^2 > 0$$

$$\phi_1^2 < 1$$

$$|\phi_1^2| < 1$$

3. La función de autocorrelación ACF solo depende del intervalo k , en donde se toman en cuenta las autocovarianzas siempre y cuando su media sea cero; determinando que para $k = 1, 2, 3, \dots$:

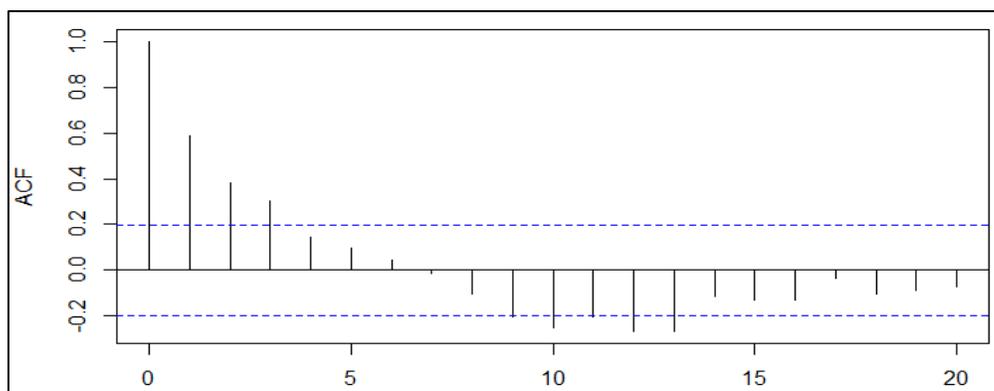
$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{Autocov}(Y_t, Y_{t-k}) \\ &= E((\phi_1 Y_{t-1} + e_t) Y_{t-k}) \\ &= \phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-k}] + E[e_t Y_{t-k}] \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} \\ &= \phi_1^k \gamma_0 \end{aligned}$$

Concluyendo que la ACF de un modelo AR (1) estacionario se representa por:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k$$

Para establecer la condición de estacionariedad se considera que $|\phi_1^2| < 1$, por ello se muestran las gráficas ACF con sus respectivos coeficientes:

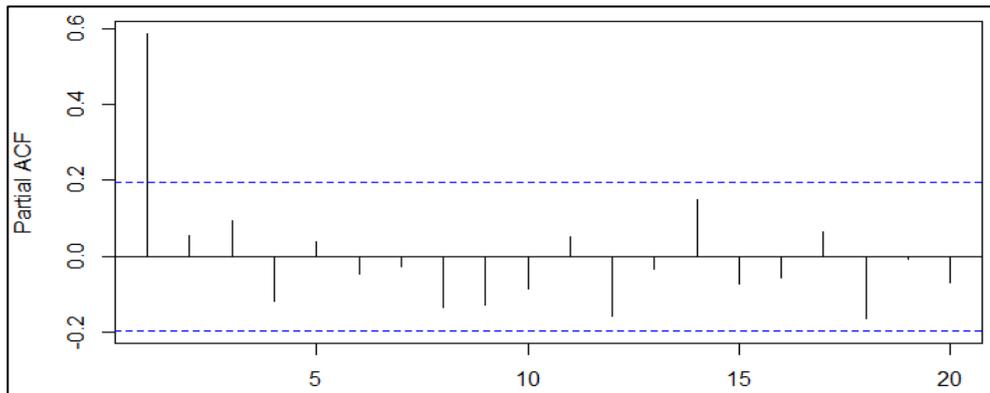
Figura 15. ACF del Modelo AR (1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

También se muestran las gráficas PACF con sus respectivos coeficientes:

Figura 16. PACF del Modelo AR (1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1).

2.2.2 Proceso Autorregresivos de orden 2 (AR (2))

En este proceso autorregresivo AR (2) se describen condiciones con las cuales debe contar, sin embargo, es importante mencionar que se representa como:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$$

En cuanto a los condiciones en sus parámetros para ser estacionario, Videgaray (2011) determina que:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$|\phi_2| < 1$$

Al cumplir con las condiciones antes mencionadas, el proceso AR (2) tendrá una media de:

$$E(Y_t) = \mu = 0$$

Mientras que la varianza se calcula con la siguiente formula:

$$\gamma_0 = \frac{2\phi_1\phi_2\gamma_0 + \sigma^2}{1 - \phi_1^2\phi_2^2}$$

Para obtener la ACF, es necesario conocer las autocovarianzas y así se obtiene la siguiente ecuación para $k = 3, 4, 5, \dots$: $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$

Ya que para que $k = 1$, se debe considerar la siguiente formula:

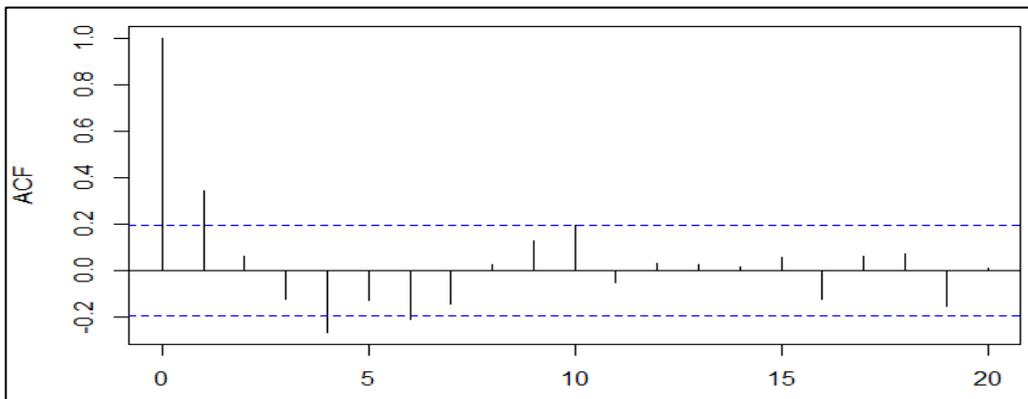
$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

Para $k = 2$:

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

A continuación, se muestra el gráfico para este modelo autorregresivo de orden 2:

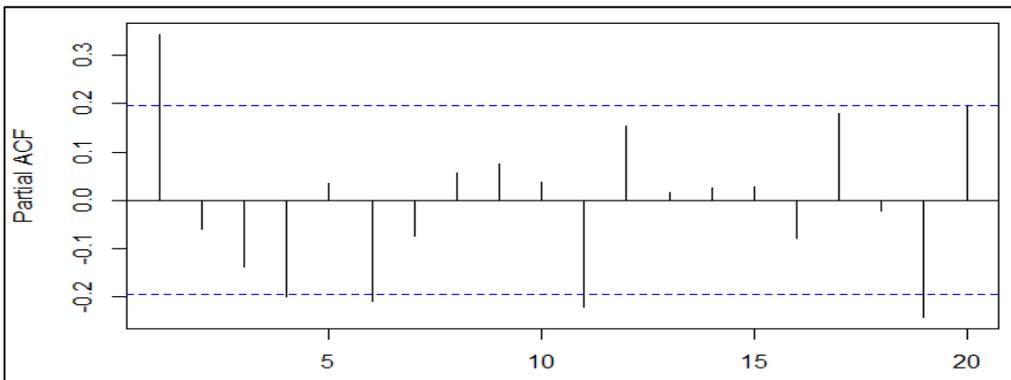
Figura 17. ACF del Modelo AR (2)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

También se muestran las gráficas PACF de este modelo autorregresivo con sus respectivos coeficientes:

Figura 18. PACF del Modelo AR (2)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

2.2.3 Proceso de Media Móvil de orden 1 (MA (1))

El modelo de media móvil MA (1) establece ciertas condiciones para considerarse estacionario, como lo son:

1. Media constante:

$$E(Y_t) = E(e_t - \theta e_{t-1}) = 0$$

Esto quiere decir que, la media es un término independiente en cuanto al valor de θ_1 .

2. La varianza se identifica como:

$$Var(Y_t) = Var(e_t - \theta e_{t-1}) = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$$

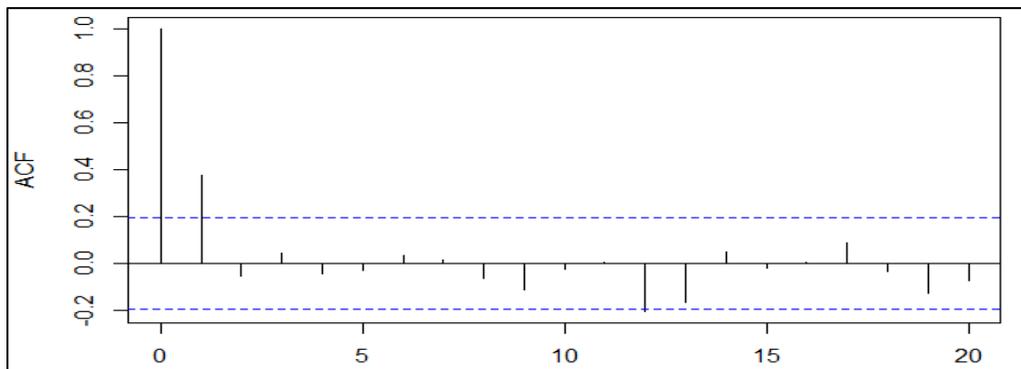
Por lo que se determina que la varianza es un término constante, estableciendo que no tuene condiciones de estacionariedad.

3. Para la función de autocorrelación ACF se ha considerado lo siguiente:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & \text{para } k = 1 \\ 0 & \text{para } k = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

A continuación, se muestra un gráfico desarrollado mediante una simulación del modelo de medias móviles de orden 1:

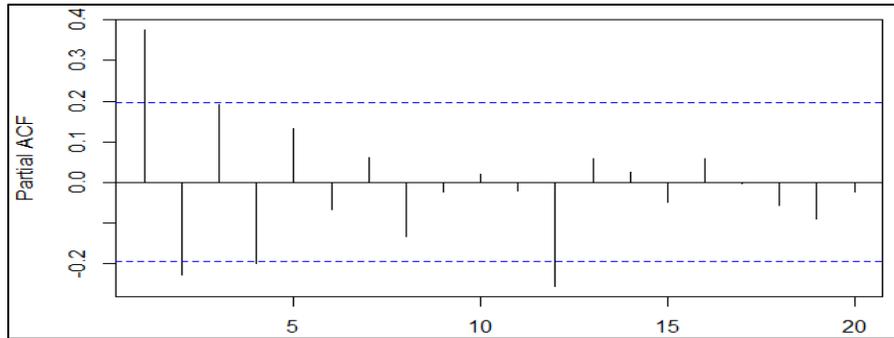
Figura 19. ACF del Modelo MA (1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

De acuerdo con la Condición de Invertibilidad, se establece que $|\theta_1| < 1$. Por lo que la PACF se identifica como un modelo decreciente infinito.

Figura 20. PACF del Modelo MA (1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

2.2.4 Proceso de Media Móvil de orden 2 (MA (2))

Además de un proceso de media móvil de orden 1, también se puede encontrar un proceso denominado de MA (2) y debe obedecer a lo siguiente:

1. La media debe ser constante:

$$E(Y_t) = E(e_t - \theta e_{t-1} - \theta e_{t-2}) = 0$$

2. La varianza de misma forma debe ser constante:

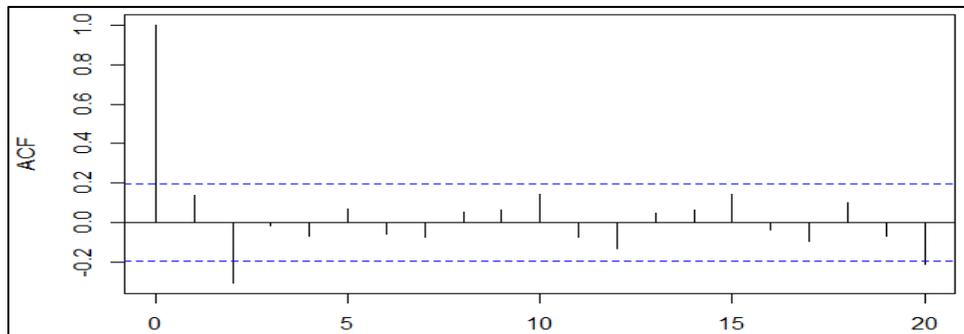
$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= \text{Var}(e_t - \theta e_{t-1} - \theta e_{t-2}) \\ \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \end{aligned}$$

3. La función de autocorrelación debe depender únicamente de k, es decir:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\theta_1(1 - \theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} & \text{para } k = 1 \\ \frac{-\theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} & \text{para } k = 2 \\ 0 & \text{para } k > 2 \end{cases}$$

Por ello, se muestra un gráfico en el que se puede apreciar de mejor manera el proceso de media móvil del orden 2:

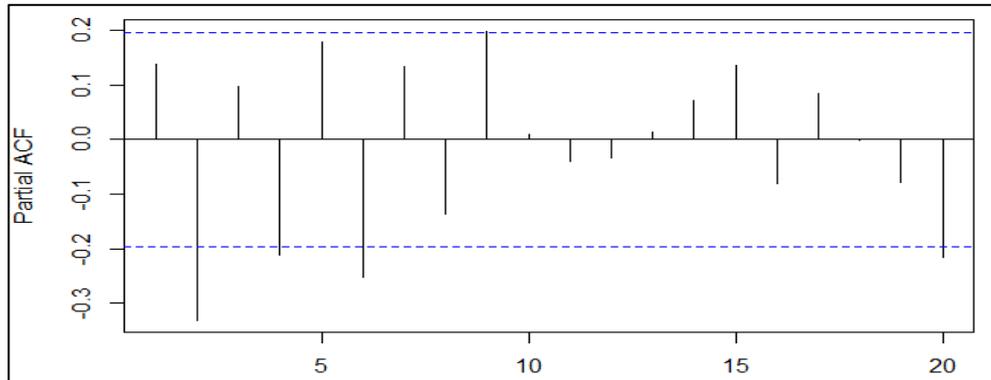
Figura 21. ACF del Modelo MA (2)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

Para el caso de PACF se puede observar su representación de la siguiente forma:

Figura 22. PACF del Modelo MA (2)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

2.2.5 Proceso Autorregresivos y de Medias Móviles (ARMA (1,1))

Este tipo de modelos son una mezcla de los procesos mencionados anteriormente, sin embargo, cuentan con la característica de tener menos parámetros, denominándose como:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

También debe cumplir las condiciones establecidas como:

1. Media constante:

$$E(Y_t) = E(\phi_1 Y_t + e_t - \theta_1 e_{t-1}) = 0$$

2. Varianza constante:

$$Var(Y_t) = Var(\phi_1 Y_t + e_t - \theta_1 e_{t-1})$$

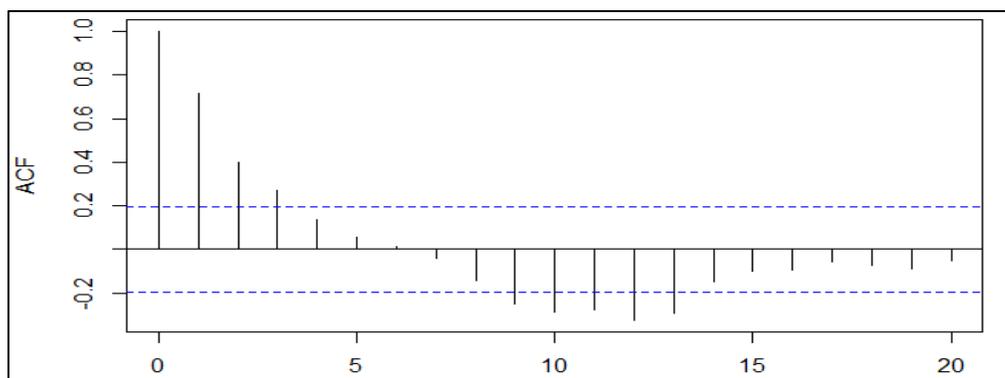
$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

3. Función de autocorrelación que únicamente dependa de k:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)} & \text{para } k = 1 \\ \phi_1\rho_{k-1} & \text{para } k \geq 2 \end{cases}$$

A continuación, se muestra el gráfico para identificar mejor sus características:

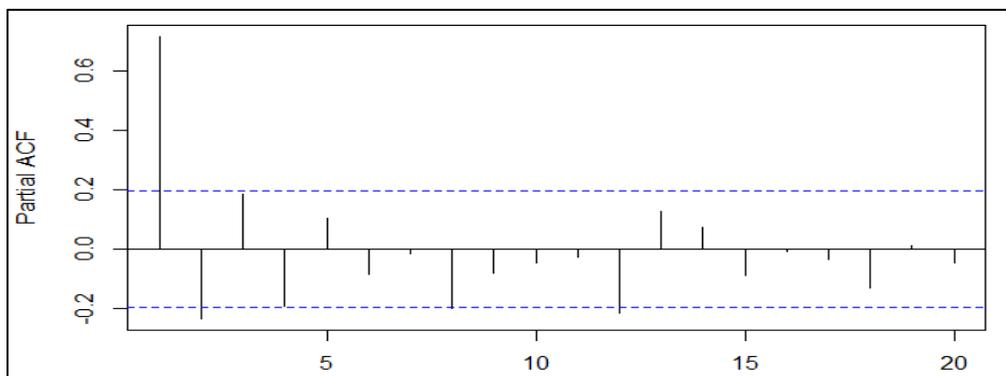
Figura 23. ACF del Modelo ARMA (1,1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

Para el caso de PACF, estos modelos determinan que su condición de estacionariedad es $(|\phi_1|)$ y su condición de invertibilidad $(|\theta_1|)$. Esto se puede observar el siguiente gráfico:

Figura 24. PACF del Modelo ARMA (1,1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

2.2.6 Proceso Autorregresivos Integrado y de Medias Móviles (ARIMA (1,1,1))

Un modelo ARIMA (p, d, q) puede estimarse y evaluarse aplicando los resultados de una serie estacionaria convenientemente diferenciada. Sin embargo, es importante considerar el tipo de tendencia que la serie de tiempo presente, ya que al ser estocástica se debe aplicar un orden de integración mediante ciertas transformaciones algebraicas que eliminen la tendencia y en el caso de presentar una tendencia determinística, las pruebas a utilizar son convencionales porque no siguen las distribuciones estándar afectando procedimientos de inferencia (Heij, 2004).

De acuerdo con Enders (2015), un modelo ARIMA es caracterizado por un modelo multiplicativo identificados como ARIMA (p, d, q) (P, D, Q) en donde la denotación es la siguiente: p y q son los coeficientes ARMA no estacionales, d es el número de diferencias no estacionales, P son los números de coeficientes autorregresivos multiplicativos, D son números de diferencias estacionales, Q como el número de coeficientes de media móvil multiplicativa y s es el período estacional. Videgaray (2010) considera que estos modelos tienen una media de cero, con un término independiente (δ_0). Por lo que el modelo es denotado como:

$$W_t = \delta_0 + \phi_1 W_{t-1} + \dots + \phi_p W_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

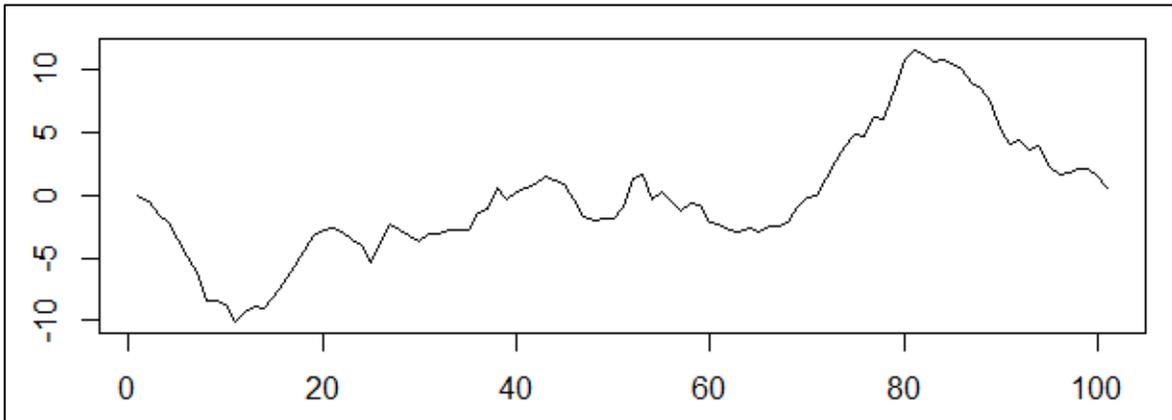
O en su forma reducida: $\phi(B)W_t = \delta_0 + \theta(B)e_t$

En dicho modelo, el termino constante no es la media, pero la excepción se presenta cuando el modelo seleccionado únicamente tiene medias móviles, así como en la siguiente ecuación:

$$E(W_t) = \frac{\delta_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$$

Los modelos de serie de tiempo con proceso autorregresivo integrado de promedios móviles son débilmente estacionarios, es decir, su media y varianza son débilmente estacionarias y constantes mientras que si covarianza es invariante en el tiempo. A continuación, se muestra una simulación de un proceso Autorregresivos Integrado y de Medias Móviles:

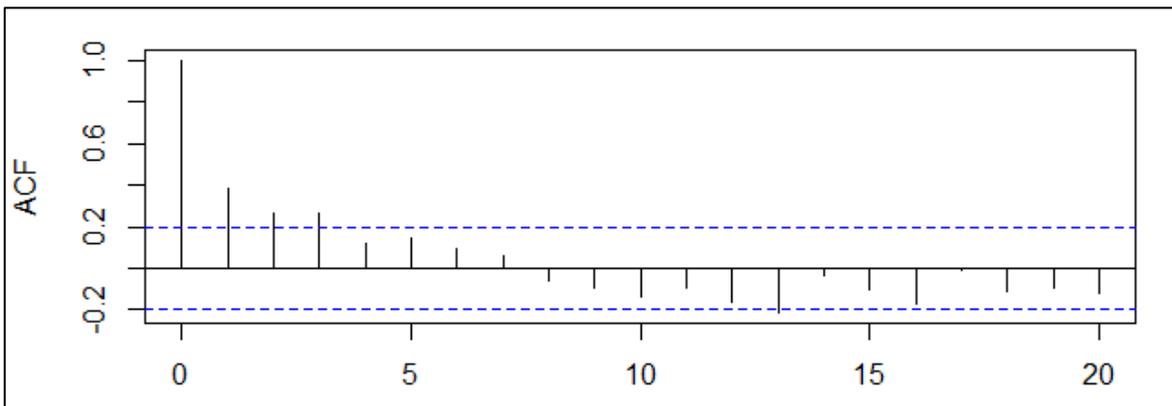
Figura 25. Proceso ARIMA (1, 1, 1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

Para la ACF del modelo ARIMA (1, 1, 1), Box y Jenkins (1976) relaciona una disminución dirigida a cero, lo que indica la presencia de una tendencia en la serie diferenciada. Por lo que con termino integrado del orden 1 se observa como llegan a cero después de uno o dos retrasos, así como se muestra a continuación:

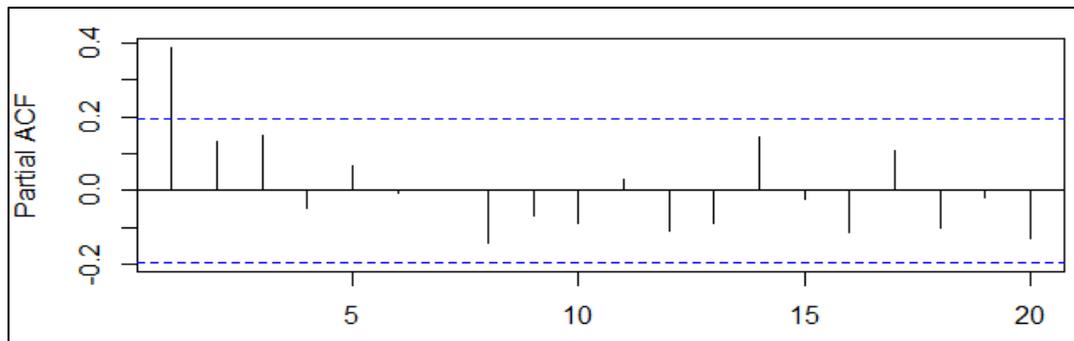
Figura 26. ACF del modelo ARIMA (1, 1, 1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

El PACF mide la correlación de un valor rezagado y el valor actual de la serie de tiempo considerando los rezagos intermedios, lo que son significativos para el modelo ARIMA. Una de las características principales es el corte en un determinado rezago para indicar el orden de dicho proceso, así como se ve en el siguiente gráfico:

Figura 27. PACF del modelo ARIMA (1, 1, 1)

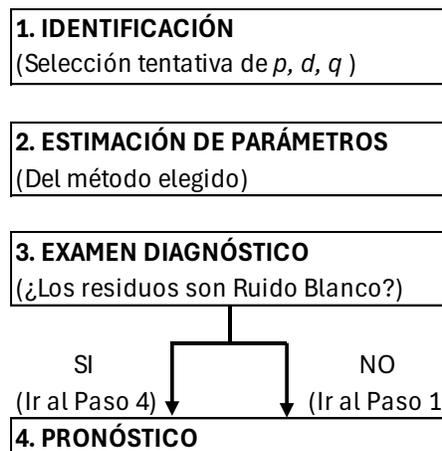


Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

2.3 Metodología para la selección y estimación de modelos de Series de Tiempo

Videgaray (2011) menciona que al conocer el panorama en el que se encuentran los modelos y sus características, es necesario confrontar los datos reales de manera sistemática y ordenada para satisfacer las expectativas en cuanto a pronósticos. Por ello se emplea la metodología Box-Jenkins que tiene por objetivo identificar un modelo tentativo o preliminar para las observaciones. De acuerdo con Enders (2015) esta metodología es un método de 3 etapas destinada a seleccionar un modelo apropiado para la estimación y previsión de una serie de tiempo univariante. Por otra parte, Gujarati (2009) describe esta metodología en base a cuatro etapas, las cuales se ejecutan, así como lo muestra el siguiente diagrama:

Figura 28. Metodología Box-Jenkins



Fuente: Elaboración propia con datos de Gujarati y Porter 2009, p.778.

Para lograr una mayor identificación en el primer paso es necesario realizar el correlograma ACF y el PACF, de esta manera se hallarán los valores de p , d y q . Para la estimación se deben encontrar los parámetros de términos autorregresivos y de promedio móviles en el modelo. También se realiza un examen diagnóstico para comprobar que los residuales estimados del modelo son un ruido blanco, y de ser así se acepta el ajuste realizado, de lo contrario se debe realizar otro ajuste, es por ellos que esta metodología es un proceso iterativo. Por último, se tiene el pronóstico que en la mayoría de los procesos estos resultados suelen ser confiables por el hecho de ser obtenidos por modelos a corto plazo; sin embargo, se deben verificar. Por ello, Brooks (2008) describe esta metodología como práctica y sistemática, y que requiere por lo menos 80 datos para que se logre detectar su tendencia y variación estacional.

2.3.1 Identificación

Ender (2015) considera esta etapa de identificación como visual, ya que el gráfico de la serie de tiempo que se analiza corresponde al correlograma de la ACF y de la PACF, es decir, se enfoca en la trayectoria temporal (Y_t) en donde se identifican valores atípicos, valores perdidos y/o rupturas estructurales en los datos. Además, para las variables no estacionarias pueden visualizarse posibles tendencias no estacionarias por lo cual deben corregirse. Gujarati (2009) indica que las herramientas principales de esta etapa son la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial, de manera que la autocorrelación parcial ρ_{kk} mide la correlación entre series de tiempo separadas por k periodos y mantiene constantes las correlaciones de los rezagos intermedios, es decir los rezagos menores de k . Definiendo que la autocorrelación parcial es la correlación entre Y_t y Y_{t-k} después de eliminar el efecto de las Y intermedias.

Asimismo, Brooks (2008) establece que esta primera etapa determina el orden del modelo necesario para captar las características de los datos mediante procedimientos gráficos para encontrar la especificación más adecuada. Al realizar gráficos de las series de tiempo se puede encontrar gráficos temporales, gráficos de dispersión frente a valores rezagados y también de transformaciones como lo son logaritmos y primeras diferencias, por ejemplo, en

presencia de tendencias o fluctuaciones cíclicas. (Heij, 2004). Una de las aplicaciones formales para comprobar las primeras diferencias es mediante la Prueba de raíz unitaria de Dickey Fuller. Gujarati (2009) explica que al considerar la ACF y la PACF y los correlogramas para procesos como AR (1), AR (2), MA (1), MA (2), ARMA (1,1), entre otros; cada proceso estocástico cuenta con ciertos patrones que permiten su identificación, tal como se ha establecido en el cuadro 1, sobre la dualidad de los modelos ARMA.

La correcta identificación de un proceso ARMA/ARIMA en el software econométrico actual, como EViews o R-Project, es fundamental para garantizar la adecuación y precisión del modelo de series de tiempo. Una identificación precisa facilita la captura eficaz de las dinámicas temporales en los datos, permitiendo así realizar proyecciones más fiables y coherentes. El uso de software avanzado en econometría, como EViews y R-Project, proporciona herramientas robustas para el diagnóstico y la selección del modelo, incluyendo funciones para el análisis de autocorrelación y pruebas de raíz unitaria, lo que resulta esencial para construir modelos que no solo describan con precisión el comportamiento histórico de los datos, sino que también proporcionen predicciones confiables y útiles.

El algoritmo "Automatic ARIMA Forecasting" de EViews 12 y el comando `auto.arima()` de la librería `forecast` en R-Project son herramientas avanzadas diseñadas para simplificar la identificación y estimación de modelos ARIMA en la análisis de series temporales. En EViews 12, el algoritmo "Automatic ARIMA Forecasting" utiliza una metodología sistemática para determinar el orden óptimo de los componentes AR (autorregresivos), I (integrados) y MA (media móvil) del modelo. Este proceso implica una búsqueda exhaustiva a través de diferentes combinaciones de parámetros, evaluando cada modelo potencial basándose en criterios de información como el AIC (Criterio de Información de Akaike) o el BIC (Criterio de Información Bayesiano) para seleccionar el modelo más adecuado que minimiza el error de pronóstico.

Por otro lado, en R-Project, el comando `auto.arima()` de la librería "forecast" automatiza el proceso de modelado ARIMA al realizar una búsqueda heurística a través del espacio de posibles modelos. Analiza la estructura de los datos de la serie temporal para determinar el grado de diferenciación necesario para lograr la estacionariedad y luego ajusta varios

modelos ARIMA, seleccionando aquel que presenta el mejor ajuste según criterios similares, como el AIC. Ambas herramientas, por lo tanto, facilitan una identificación precisa y eficiente de la estructura de un proceso ARIMA, permitiendo a los analistas concentrarse en la interpretación y aplicación de los resultados del modelo en lugar de en la complejidad del proceso de identificación.

2.3.2 Estimación

Enders (2015) hace referencia al principio de parsimonia para esta etapa porque representa la escasez. Sin embargo, el enfoque está en la incorporación de coeficientes adicionales que aumentan necesariamente el ajuste para reducir grados de libertad. En la metodología Box y Jenkins argumentan que los modelos parsimoniosos producen mejores previsiones que los modelos sobre parametrizados, ya que estos ajustan los datos sin incorporar coeficientes innecesarios. Con ello, se garantiza una correlación débil puesto que los coeficientes muy colineales son inestables y generalmente pueden eliminarse del modelo sin afectarlo. Del mismo modo, Cryer & Chan, (2008) consideran el principio de parsimonia como un modelo que inevitablemente incluirá ciertos parámetros cuyos valores deben estimarse a partir de una serie de tiempo, generando un ajuste de estimaciones dentro del mismo modelo tomando en cuenta criterios como el de mínimos cuadrados, máxima verisimilitud Yule-Walker.

Para los órdenes seleccionados p y q se estiman los parámetros del modelo ARMA (p, q), denominado como el modelo tentativo. La estimación de parámetros utiliza algún método como la máxima verosimilitud, mínimos cuadrados o Yule Walker, aunque estos generen ecuaciones no lineales. Según Videgaray (2011), una vez que se tienen los valores del orden autorregresivo, las diferencias ordinarias, el orden de media móviles y las diferencias estacionales se genera el siguiente modelo:

$$\phi(B)Z_t = \delta_0 + \theta(B)e_t$$

En cuanto a la obtención de estimadores, estos deben ser para $p+q+1$ para los parámetros desconocidos como: $\delta_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$. Al aplicar el método numérico de mínimos cuadrados se busca que los residuales sustituyan los parámetros de sus valores estimados

respectivamente hasta encontrar un vector de parámetros autorregresivos, un vector de parámetros de medias móviles y una constante, denotada como:

$$S(\delta_0, \phi, \theta) = \sum_{t=d+Ds+1}^N e_t^2$$

Considerando que se pueden presentar dos tipos de problemas el primero se relaciona con el error de la serie de tiempo (e_t), porque depende de: $Z_0, Z_{-1}, \dots, Z_{-p+1}$ y de $e_0, e_{-1}, \dots, e_{-p+1}$ y de solucionarse con un método que permita inicializar la serie, antes de aplicar una estimación no lineal. El segundo error se presenta cuando la estimación se complica cuando hay presencia de términos de medias móviles y se soluciona usando un método iterativo de estimación no lineal. Al estimar los valores esperados en base a una función de suma de mínimos cuadrados se tiene:

1. Valores esperados incondicionales, en donde se sustituyen valores desconocidos $Z_0, Z_{-1}, \dots, Z_{-p+1}$ y de $e_0, e_{-1}, \dots, e_{-p+1}$ por μ y cero respectivamente. En caso de contar con una serie estacionaria, la muestra será grande y brindará resultados adecuados.
2. Valores esperados condicionales, se toman el modelo obtenido para efectuar un pronóstico hacia atrás y obtener valores de los datos desconocidos. Para ello, se usa un operador de salto hacia adelante F con el cual se obtiene el siguiente modelo:

$$\phi(F)Z_t = \delta_0 + \theta(F)e_t$$

Este proceso debe repetirse hasta que se cumplan una de las siguientes condiciones:

- Los valores estimados no cambien, es decir la diferencia entre una iteración y otra sea un valor absoluto menor al error específico ϵ_1
- La suma de cuadrados de los residuales no cambie, en donde el valor absoluto sea menor al error específico ϵ_2
- Se determina un número máximo de iteraciones, en caso de que no se convergente.

Por el contrario, se pueden realizar estimaciones no lineales de los parámetros considerando ciertos criterios que se repiten hasta que se satisfagan como lo son:

1. *Stopping Criterion 1.* El vector de parámetros estimados no varía de una estimación, por lo que debe cumplir con:

$$|\beta_k - S(\beta_{k-1})| \leq \epsilon_1$$

2. *Stopping Criterion 2.* La suma de cuadrados de los residuales no varía de una estimación, donde se cumple la K-ésima iteración cumpliendo que:

$$|\beta_k - S(\beta_{k-1})| \leq \epsilon_2$$

3. El número máximo de iteraciones llega a su fin.

Señalando que no siempre hay garantía en el proceso de estimación, porque no siempre es convergente, por lo que es recomendable realizar una comprobación para que se verifique el cumplimiento de las condiciones de estacionariedad.

Como se ha señalado la estimación de coeficientes en modelos ARIMA es crucial para el análisis y la predicción de series temporales. Los métodos más comunes incluyen Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS), Máxima Verosimilitud (MV) y Yule-Walker, cada uno con sus particularidades y contextos de aplicación preferentes. Mínimos cuadrados ordinarios es uno de los métodos más antiguos y utilizados para estimar los parámetros de modelos lineales, y bajo ciertas condiciones, puede aplicarse a modelos ARIMA. Según Gujarati y Porter (2009) en "Basic Econometrics", MCO puede ser efectivo para estimar los coeficientes de la parte AR de un modelo ARIMA cuando la serie es estacionaria. Sin embargo, OLS no es adecuado para estimar los términos de media móvil debido a la correlación entre los términos del error. Por su parte, la Máxima Verosimilitud es ampliamente reconocida por su eficacia en la estimación de modelos ARIMA. En su libro "Time Series Analysis", Hamilton (1994) describe cómo la MV busca los valores de los parámetros que maximizan la probabilidad de los datos observados, ofreciendo estimaciones consistentes y eficientes. Este método es particularmente robusto para modelos que incluyen tanto componentes AR como MA. Finalmente, el método de Yule-Walker, se utiliza principalmente para estimar los parámetros de la parte autorregresiva de modelos AR. Como se expone en "Introduction to Time Series and Forecasting" de Brockwell y Davis (2002), el método de Yule-Walker se basa en las autocorrelaciones de la serie para derivar estimaciones de los coeficientes AR. Aunque su uso está limitado a modelos AR, es un método eficiente y de fácil implementación.

Mientras que MCO es simple y efectivo para componentes AR en series estacionarias, MLE proporciona un enfoque más general y robusto, adecuado para modelos complejos ARIMA. Por su parte, el método de Yule-Walker ofrece una solución específica y eficiente para la estimación de modelos puramente autorregresivos. Las pruebas de diagnóstico complementan este proceso al evaluar la validez del modelo estimado, verificando aspectos críticos como la estacionariedad, la independencia de los residuos y la conformidad con las distribuciones teóricas. Estas pruebas son fundamentales para asegurar que el modelo no solo se ajusta bien a los datos históricos, sino que también posee la robustez necesaria para predecir futuros comportamientos. En conjunto, la estimación precisa y las rigurosas pruebas de diagnóstico son pilares fundamentales en la metodología Box-Jenkins, garantizando que los modelos sean tanto teóricamente sólidos como prácticamente útiles en el ámbito de la predicción y el análisis de series temporales.

2.3.3 Pruebas de Diagnóstico

En esta etapa, Heij (2004) describe la evaluación del modelo mediante pruebas de diagnóstico, las cuales se encargan de analizar el modelo para determinar si identifica las principales correlaciones de las series de tiempo, es decir, se trata de comprobar la validez empírica de dicho modelo. Por ello, se analizan las principales herramientas de diagnóstico para modelos de series de tiempo, tales como las pruebas de diagnóstico para regresiones basadas en residuos del modelo y pruebas basadas en el rendimiento predictivo del modelo.

Para llevar a cabo el diagnóstico de un modelo, Videgaray (2011) propone los siguientes pasos: 1) Analizar la estacionariedad de los datos; 2) Verificar la sobrestimación del modelo, de ser así deberán eliminarse parámetros; 3) Verificar si está subestimado, en este caso se agregan parámetros; 4) Revisar la ocurrencia de datos atípicos para dar el tratamiento adecuado.

Enders (2015) hace referencia a los residuos estandarizados para buscar valores atípicos y pruebas de periodos en los que el modelo no se ajusta a los datos, por lo que se considera como una prueba de cambio estructural. Sin embargo, cuando los modelos ARMA no generan un ajuste eficiente, se puede optar por otros métodos de estimación multivariante, por

ejemplo, en caso de que la varianza de los residuos sea creciente, esta debe someterse a una transformación logarítmica. Además, es importante que el modelo tentativo no produzca residuos no aleatorios ya que debe ser eliminado.

Brooks (2008) indica que lo principal es examinar los residuos libres de autocorrelación para hacer un sobreajuste, en donde los modelos ARMA pueden generar complicaciones en cuanto a la estimación y las pruebas estadísticas como consecuencia del sobreajuste del modelo, siendo este un problema únicamente para modelos de procesos mixtos. Dada las siguientes complicaciones, es recomendable formar un modelo parsimonioso que describa las características necesarias de los datos a utilizar con pocos parámetros y de esta manera será más eficiente por las siguientes razones: 1) Si el modelo contiene rezagos irrelevantes o parámetros innecesarios se genera un aumento en los errores estándar de los coeficientes, alejando las relaciones significativas del modelo. 2) Si se presenta una reducción en los grados de libertad causara que los errores de los parámetros estimados aumenten o disminuyan; y 3) Si se tiene un modelo que aparentemente se ajusta bien a los datos, puede generar pronósticos inexactos y lo ideal es ajustar el modelo para encontrar las características relevantes de los datos o las tendencias.

El modelo puede someterse a diversas pruebas como: pruebas de estacionariedad, comprobación de la existencia de valores atípicos y varianza constante, prueba Jarque-Bera y prueba Breusch-Pagan en los residuos del modelo, comprobación de la estructura del modelo mediante modelos ARMA, pruebas t y F, así como AIC (Criterio de Información de Akaike) y BIC (Criterio de Información de Schwarz o Bayesiano), de esta manera se evalúa el rendimiento de las previsiones y se compara el rendimiento entre diversos modelos; sin embargo, en estas pruebas no se puede incluir la prueba Durbin-Watson porque ya se tienen regresores estocásticos en el modelo (Hejj, 2004).

Videgaray (2011) indica que lo conveniente es asegurarse que el modelo tentativo de la serie de tiempo sea estacionario en todo sentido para constatar esto en las residuales de cada modelo y en caso de que tengan tendencia, heteroscedasticidad o ambas, será necesario corregir en la serie de tiempo original. Si se presenta un modelo sobrestimado es porque más de uno de los parámetros del modelo son insignificantes y se cuenta con herramientas

estadísticas como: la desviación estándar estimada del estimador del parámetro, el estadístico t y el valor p -value, los cuales se utilizan para probar la hipótesis donde: Se acepta la H_0 si $P\text{-Value} > \alpha$, donde α es el nivel de significancia. Esto demuestra que el estadístico es insignificante y debe eliminarse del modelo. En caso contrario, se rechaza H_0 y debe permanecer dicho parámetro en el modelo.

Si un modelo es adecuado para una serie de tiempo, se espera que los residuales se compartan como un ruido blanco, si esto no ocurre es necesario realizar ajustes que se desarrollan mediante transformaciones o estableciendo nuevos parámetros, a esto se le denomina un modelo subestimado. Entre las características que estos modelos deben presentar se encuentran: Residuales de tipo AR, se incrementa en 1 el orden de la parte AR del modelo original y en caso de que se tenga un compartimento MA, se incrementa en 1 el orden de este. Señalando que, en el principio de parsimonia, los parámetros se agregan de manera individual y cada vez que esto sucede debe verificarse el resultado.

Para realizar las comprobaciones se recomienda el uso del software y paqueterías específicas con las que se pueden analizar los residuos, como lo es el caso de la paquetería “*forecast*” o “*stats*” en R-Project. Estas paqueterías tienen la función de evaluar la calidad del modelo para determinar si se ajustan los datos correctamente. Por ejemplo, el comando “*checkresiduals*” de la librería *forecast*, proporciona un análisis de los residuos de un modelo ARIMA, incluyendo gráficos de residuos, su autocorrelación, y la prueba Ljung-Box para detectar la autocorrelación residual. El comando “*acf()*” se del paquete “*stats*” utiliza la función para obtener la autocorrelación de los residuos. Enders (2015) aborda una idea fundamental en la modelización de series temporales: un modelo más parsimonioso, aunque no tenga el mejor ajuste a los datos de muestra, puede ofrecer mejores previsiones fuera de muestra. Esta afirmación se basa en el principio de la compensación entre sesgo y varianza. Un modelo con muchos parámetros (menos parsimonioso) puede ajustarse muy bien a los datos de muestra, capturando gran parte de la variabilidad (bajo sesgo), pero a costa de una alta varianza, lo que puede llevar a un sobreajuste. El sobreajuste ocurre cuando un modelo es tan complejo que captura el ruido aleatorio de los datos como si fuera parte del patrón subyacente. Esto resulta en un rendimiento pobre en datos nuevos o fuera de muestra, ya que

el modelo ha aprendido los detalles y el ruido específicos de la muestra en lugar de las verdaderas tendencias subyacentes.

Por otro lado, un modelo parsimonioso presenta una menor varianza en las predicciones. Al ser menos complejo, el modelo captura solo las estructuras más significativas de los datos, ignorando el ruido. Esto puede llevar a un mejor rendimiento predictivo en nuevos conjuntos de datos, ya que el modelo es más general y capaz de capturar las tendencias consistentes en lugar de las peculiaridades específicas de la muestra. En la práctica, la selección del modelo se realiza a menudo mediante criterios como el Akaike Information Criterion (AIC) o el Bayesian Information Criterion (BIC), que penalizan la complejidad del modelo y favorecen la parsimonia. Estos criterios ayudan a encontrar un equilibrio entre la adecuación del modelo a los datos y su complejidad, con el objetivo de mejorar la capacidad predictiva del modelo.

2.3.4 Pronóstico

Esta última etapa se desarrolla una vez que se tiene el mejor modelo y se le han aplicado las pruebas de diagnóstico correspondientes, dando paso a obtener los pronósticos, los cuales incluyen el valor puntual y el intervalo de confianza para los parámetros establecidos (Videgaray, 2011). En estos casos, también es recomendable usar un software para realizar transformaciones automáticas en los residuales. Por ello, la importancia de esta última etapa se basa en brindar un análisis de las series de tiempo con pronósticos precisos utilizando métodos como lo son: la extrapolación de tendencias, determinar estacionalidad y estimación de procesos estocásticos respaldados en los modelos ARIMA (Box y Jenkins, 1976).

Gujarati (2009), considera que la construcción de estos modelos ARIMA genera pronósticos más confiables que los pronósticos de los modelos econométricos tradicionales, en especial si se trata de pronósticos a corto plazo, sin embargo, es necesario verificar cada caso. Asimismo, Brockwell y Davis (2016) señalan que un error de pronósticos⁶ se utiliza para retroalimentar el proceso de modelado y mejorar la capacidad predictiva del sistema. El error de pronóstico es crucial para evaluar la eficacia de un modelo de series temporales. Se utilizan

⁶ La precisión de los pronósticos se evalúa a menudo mediante el análisis del error de pronóstico, que mide la diferencia entre los valores observados y los pronosticados (Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G., 2018).

varias métricas, como el error cuadrático medio (MSE), la raíz del error cuadrático medio (RMSE), y el error absoluto medio (MAE), para cuantificar la precisión de los pronósticos. Estas medidas ayudan a identificar qué tan bien un modelo puede predecir los valores futuros de una serie temporal.

La prueba Diebold-Mariano (Diebold y Mariano, 1995) se constituye como un método estadístico utilizado para comparar la precisión predictiva de dos modelos de series temporales. Esta prueba evalúa si las diferencias en el rendimiento de pronóstico entre dos modelos son estadísticamente significativas. Se basa en la comparación de los errores de pronóstico de ambos modelos a lo largo de un periodo de tiempo y proporciona un marco formal para determinar si un modelo predice significativamente mejor que otro. El software estadístico, como R y Python, proporciona bibliotecas y paquetes especializados que simplifican la implementación de modelos ARMA/ARIMA. Por ejemplo, en R, el paquete “*forecast*” desarrollado por Hyndman y Khandakar (2008) ofrece funciones como `auto.arima()`, que automatizan la selección de los mejores parámetros del modelo, basándose en criterios como el AIC o el BIC, optimizando así el proceso de modelado (Hyndman, R. J., & Khandakar, Y., 2008). En R-project, el comando *forecast* proviene del paquete homónimo, ampliamente utilizado para realizar pronósticos de series temporales. Además, se destaca por su versatilidad y eficacia en la automatización del proceso de selección de modelos, ajustando el modelo más adecuado a los datos y utilizando criterios estadísticos para optimizar la precisión del pronóstico. Cabe mencionar que permite al usuario ajustar manualmente los parámetros del modelo, ofreciendo así flexibilidad para análisis más detallados y específicos (Hyndman & Athanasopoulos, 2018).

Los pronósticos son esenciales en el análisis de series temporales ya que proporcionan una visión anticipada del comportamiento futuro basada en datos históricos. Un modelo ARIMA bien ajustado es crucial para este proceso, pues captura la naturaleza autoregresiva, integrativa y de media móvil de la serie. Al ajustar un modelo ARIMA, se analizan los patrones pasados para prever futuras tendencias y ciclos. La efectividad de este modelo se incrementa significativamente mediante la realización de pruebas diagnósticas, como la prueba de Ljung-Box para autocorrelación y la prueba de Shapiro-Wilk para normalidad de residuos, asegurando que el modelo se ajuste adecuadamente a los datos sin sobreajustar.

Estas pruebas ayudan a validar la estabilidad y la precisión del modelo, lo que resulta en pronósticos más confiables y precisos. Por lo tanto, un modelo ARIMA ajustado correctamente, junto con evaluaciones exhaustivas, es fundamental para obtener resultados superiores en el análisis predictivo de series temporales (Hyndman y Athanasopoulos, 2018).

2.4 Modelos ARMAX

Los modelos ARMAX fueron desarrollados por Wichern y Jones (1977), Dekimpe y Hannsens (1995) y Bronnenberg y Wathieu (1996) con el objetivo de desarrollar una matriz de variables exógenas mediante la metodología clásica de Box-Jenkins, la cual en la mayoría de los casos se conoce como ARIMA y sus diversas extensiones. En este caso, las condiciones son las mismas que las de un modelo ARIMA, es decir, pueden surgir de un proceso de tendencia estacionario o por la presencia de raíz unitaria denominado como un proceso de diferencia estacionaria.

Bratina y Faganel (2008) describen al proceso de medias móviles autorregresiva con entrada exógena (ARMAX) como un modelo univariante del modelo ARMA que incluye variables exógenas, estableciendo que el modelo no puede depender de variables endógenas como en el caso de los modelos de vectores Autorregresivos. Además, se considera una gran ventaja que los modelos ARMAX evitan los complejos modelos multivariantes de medias móviles autorregresivas vectoriales denominados VARMA.

De acuerdo con Bierens (1987) la ecuación de dicho modelo se compone de un operador de diferencias habituales, la variable endógena, vector de variables explicativas y perturbaciones o ruido blanco. Aunque también se menciona que los modelos ARMAX poseen una estructura de lag infinita con parametrización parsimoniosa, lo que crea adecuaciones para modelizar series de tiempo.

2.4.1 Estimación de modelos ARMAX

Shumway y Stoffer (2016), señalan que la siguiente ecuación es utilizada al momento de considerar un modelo ARMAX (k) dimensional:

$$y_t = \Upsilon u_t + \sum_{j=1}^p \Phi_j y_{t-j} + \sum_{k=1}^q \Theta_k v_{t-k} + v_t$$

También mencionan una propiedad denominada “Estado-espacio de ARMAX” en donde $p \geq q$ sea:

$$F = \begin{bmatrix} \Phi_1 & I & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_1 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{p-1} & 0 & 0 & \dots & I \\ \Phi_p & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \Theta_1 + \Phi_1 \\ \vdots \\ \Theta_q + \Phi_q \\ \Phi_{q+1} \\ \vdots \\ \Phi_p \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \Upsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, el modelo de estado-espacio esta dado por:

$$x_{t+1} = Fx_t + Hu_{t+1} + Gv_t$$

$$y_t = Ax_t + v_t \quad \text{en donde } A = [I, 0, \dots, 0].$$

Otra de las características representantes de un modelo ARMAX es cuando se presenta una regresión con errores autocorrelacionados se ajusta el modelo de la siguiente manera:

$$y_t = \Gamma u_t + \varepsilon_t$$

Para el caso de los modelos ARMAX, esta regresión es un caso especial del modelo estado-espacio y los resultados de dicha propiedad pueden aportar innovaciones para la verosimilitud para la estimación de parámetros.

De esta manera, Yin, Zhang y Gao (2023) indica que los modelos de media móvil autorregresiva con entrada exógena (ARMAX) contribuyen a representar una variedad de sistemas prácticos, pero no se contemplan las incertidumbres de medida en la salida, lo que puede afectar al modelo.

2.4.2 Aplicaciones del modelo ARMAX

Un modelo ARMAX es un método utilizado para realizar una estimación simultánea del ruido de estado y salida. El estimador resultante suele ser un estimador Kalman el cual es capaz de reducir los efectos adversos de los ruidos de salida proporcionando errores de estimación menores. Dentro de las problemáticas de estos modelos se presenta el efecto del filtro Kalman, ya que este es conocido por ser el mejor estimador lineal en el sentido de errores cuadráticos y se emplea para diversas aplicaciones como juegos booleanos evolutivos, redes de campo infinitos con perturbaciones estocásticas entre otras (Yin, Zhang y Gao, 2023).

El análisis econométrico del comportamiento del Bitcoin requiere de modelos que puedan capturar no solo las dinámicas internas de la serie temporal, sino también la influencia de factores externos que afectan su comportamiento. En este contexto, los modelos ARMAX (Autoregressive Moving Average with Exogenous Inputs) se destacan como herramientas fundamentales para la estimación de la media condicional en modelos que buscan identificar los determinantes del Bitcoin. Estos modelos permiten incorporar tanto la estructura autorregresiva y de promedios móviles de la serie, como la influencia de variables exógenas, ofreciendo una perspectiva más amplia y precisa del comportamiento del activo.

La importancia de los modelos ARMAX radica en su capacidad para manejar la autocorrelación y la heteroscedasticidad que son comunes en las series temporales financieras. Según Box y Jenkins (1976), la inclusión de variables exógenas en un modelo ARMAX permite capturar el impacto de factores externos en la serie temporal. En el caso del Bitcoin, variables como las tasas de interés, mercados accionarios, las *commodities*, los tipos de cambio, la regulación financiera y el sentimiento del mercado pueden tener efectos significativos en su precio, y su inclusión en un modelo ARMAX permite que estas influencias sean cuantificadas y analizadas de manera más efectiva.

Además, desde la perspectiva de la modelización de la volatilidad condicional, la correcta estimación de la media condicional es crucial para la adecuada captura de la volatilidad en un modelo GARCH. Engle (1982) destaca que la correcta especificación de la media

condicional es esencial para evitar errores de especificación que pueden llevar a estimaciones ineficientes de la volatilidad. En este sentido, un modelo ARMAX, al incorporar las variables exógenas pertinentes, permite una especificación más robusta de la media condicional, lo que es particularmente relevante en un mercado tan volátil y sensible como el de las criptomonedas.

Por otro lado, la naturaleza del Bitcoin como un activo financiero emergente y volátil requiere modelos que puedan adaptarse a cambios estructurales y capturar la dinámica de corto y largo plazo. Los modelos ARMAX, al permitir la inclusión de variables exógenas, ofrecen una flexibilidad adicional que es fundamental en el análisis del Bitcoin. Como lo señalan Tsay (2010) y Hamilton (1994), la inclusión de información exógena puede mejorar sustancialmente la precisión de los pronósticos y la identificación de los determinantes clave, proporcionando una mejor comprensión de cómo diferentes factores macroeconómicos, tecnológicos y de mercado influyen en el comportamiento del Bitcoin.

Una aplicación más específica de un modelo ARMAX se explica por Malladi y Dheeriya (2020), donde se hace un análisis de series de tiempo en base a los rendimientos y volatilidades de dos criptomonedas específicas: Bitcoin y Ripple. Para desarrollar esta investigación se comprobaron las hipótesis al establecer un modelo de medias móviles autorregresivas con variables exógenas (ARMAX), con un modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH), y pruebas de causalidad de Granger para determinar los vínculos entre los rendimientos y volatilidades de Bitcoin y de Ripple. Un modelo ARMAX ofrece flexibilidad para analizar y pronosticar diversas series de tiempo, ya que este brinda mayor aportación en cuanto a la explicación de los rendimientos de cada criptomoneda utilizada en la investigación.

2.5 Conclusiones

En el ámbito actuarial, las series de tiempo son fundamentales para analizar y predecir eventos financieros y de riesgo, permitiendo a los profesionales tomar decisiones informadas. Los hechos estilizados de los procesos estocásticos estacionarios, como el ruido blanco, la caminata aleatoria y la regresión espuria, son clave en este análisis. El ruido blanco representa una serie temporal con propiedades de independencia e idéntica distribución, sirviendo como punto de partida para modelar fenómenos más complejos. La caminata aleatoria, con su dependencia del paso anterior, ilustra la naturaleza a menudo impredecible de los mercados financieros, mientras que la correcta identificación de una regresión espuria advierte sobre la interpretación errónea de las relaciones en los datos de series temporales.

Las pruebas de estacionariedad, como los correlogramas y las pruebas de raíz unitaria (ej., Dickey-Fuller aumentado, Phillips Perron ó la Prueba KPSS), son cruciales para determinar si una serie temporal requiere transformaciones para alcanzar la estacionariedad, una propiedad deseable para el análisis predictivo. Estas pruebas ayudan a discernir si las características de la serie, como su media y varianza, son constantes a lo largo del tiempo, lo cual es esencial para el modelado efectivo. Por esta razón se ha explicado empíricamente como puede desarrollarse la prueba estadística que garantice la inexistencia de raíces unitarias en un proceso estocástico, lo que permite garantizar que los resultados de un modelo que presenten significancia estadística sean realmente confiables.

Comprender la estructura de los procesos autorregresivos integrados y de medias móviles (ARIMA) es vital, ya que estos modelos capturan tanto las dependencias temporales como las tendencias y ciclos de los datos, lo que es especialmente relevante en series financieras como las de criptomonedas. Estos modelos son la esencia de la metodología Box-Jenkins, que proporciona un marco sistemático para la identificación, estimación, diagnóstico y pronóstico de series temporales. Esta metodología, fundamentada en la iteración entre modelado y validación, asegura que los modelos sean tanto estadísticamente significativos como prácticamente relevantes.

En el desarrollo de algoritmos computacionales, el uso de software estadístico como R, con sus librerías y comandos, es indispensable para la automatización de estos procesos.

Herramientas como `auto.arima()`, `adf.test()`, `acf()`, `shapiro.test()`, `forecast()`, entre otras dentro de las diferentes paqueterías de R-project facilitan la implementación de la metodología Box-Jenkins, permitiendo a los actuarios y analistas financieros modelar y predecir con eficiencia las complejidades de las series temporales, incluyendo las de los mercados de criptomonedas. Esta automatización no solo aumenta la eficiencia, sino que también mejora la precisión y fiabilidad de los pronósticos, lo cual es esencial en la toma de decisiones en el ámbito actuarial y financiero.

CAPÍTULO 3. MODELACIÓN DE LA VOLATILIDAD CONDICIONAL

3.1 Introducción

La modelación de la volatilidad condicional es una herramienta utilizada para modelar ciertos procesos en los que intervenga alguna variación en determinado tiempo, buscando un ajuste en la información dada y el tiempo a considerar. En la mayoría de los casos, se logra identificar heteroscedasticidad en los modelos de volatilidad y debido a ello se emplean diversos modelos que incluyen esta característica y se procede a evaluar cada uno para emplear el mejor modelo, entre los tipos de modelos se incluyen el modelo ARCH, el modelo GARCH, el modelo EGARCH, el modelo TGARCH y el modelo NGARCH. Cada uno de estos modelos tiene como finalidad medir la variabilidad temporal en la volatilidad, además de complementarse con herramientas como los softwares estadísticos los cuales desempeñan un papel fundamental al facilitar el análisis de la investigación a desarrollar dentro del mercado.

Para comprender mejor el análisis a desarrollar se tomarán en cuenta factores relacionados a la volatilidad que muestra el mercado de criptomonedas, especialmente del Bitcoin para identificar si es crucial aplicar modelos univariantes de series de tiempo o modelos como el ARMAX. Esto se aplica para la formulación de pronósticos e implantación de estrategias basadas en modelos predictivos. Al desarrollar cada uno de estos modelos, es necesario medir la heteroscedasticidad con pruebas como la Prueba de Box-Ljung y la Prueba de autocorrelación (ACF) para modelos ARCH y para modelos GARCH. Además, se incluye una estimación por máxima verosimilitud para determinar el modelo que mejor se ajuste al apturar la volatilidad en las series de tiempo.

También existen modelos con asimetría desarrollados a partir de modelos GARCH básicos, estos suelen ser una adaptación del modelo original en donde se trato de corregir ciertas problemáticas identificadas en los modelos básicos. Debido a esto, existen dos extensiones asimétricas del modelo GARCH denominadas: GJR-GARCH y GARCH EGARCH.

3.2 Modelos de Volatilidad Condicional

Un modelo de volatilidad condicional es una herramienta que se encarga de modelar las variaciones de los precios de algún activo financiero en determinado tiempo. Siendo una de las características principales de estos modelos el ajuste que se realiza entre la información adquirida y el tiempo que transcurre durante este proceso. Por lo que, un ejemplo claro de estos modelos es la volatilidad que tiene la criptomoneda Bitcoin durante un periodo de tiempo (2017-2023).

Engle (1982) desarrolló un modelo de volatilidad que permite capturar la heteroscedasticidad condicional, provocando un cambio a lo largo del tiempo en la información, denominándose un Modelo de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH). Determinando así, que la volatilidad es una función de los errores cuadráticos pasados.

De acuerdo con Lutkepohl & Kratzing (2004), la estimación de la función de la volatilidad condicional $\sigma(x)$ se lleva a cabo una vez que se tiene un proceso autorregresivo no lineal heteroscedástico, considerándose una de las tareas básicas en la modelización de series de tiempo financieras. En donde, la heteroscedasticidad es un caso particular de no estacionariedad de la varianza de una variable, Levendis (2018).

Tsay (2010) establece que existen modelos univariantes que incluyen el modelo autorregresivo condicional heteroscedástico (ARCH) de Engle (1982), el modelo autorregresivo condicional heteroscedástico generalizado (GARCH) de Bollerslev (1986), el modelo exponencial autorregresivo condicional heteroscedástico generalizado (EGARCH) de Nelson (1991), el modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresivo generalizado de umbral (TGARCH) de Glosten et al. (1993) y Zakoian (1994), el modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresivo generalizado no simétrico (NGARCH) de Engle y Ng (1993) y Duan (1995).

Concepto y características de la volatilidad condicional

La volatilidad se define como una medida de incertidumbre del precio futuro de un valor, la cual permite un análisis amplio en las carteras de activos para determinar la trayectoria futura de las tasas de interés spot y de esta manera se obtengan ganancias. En donde una alta

volatilidad implica que la tasa puede cambiar en gran medida y viceversa en caso de baja volatilidad. (Iqbal, A. S., 2018)

Tsay (2010), señala que la volatilidad de los activos es una medida de riesgo mediante su modelización respecto a sus derivados estimados a partir de precios observados. Además de no ser directamente observable tiene características que, si lo son, y suelen clasificarse en agrupaciones de volatilidad que dependen de lo alta que esta sea y del periodo de tiempo, también se muestra una evolución a lo largo del tiempo de manera continua, debido a los saltos de volatilidad que se generen, la volatilidad no diverge hacia el infinito, sino que varía dentro de un rango fijo, demostrando que la volatilidad puede llegar a ser estacionaria y por último, se sabe que volatilidad puede reaccionar de manera diferente a un aumento o caída de precios, provocando un mayor impacto.

Entre los tipos de volatilidad se encuentra: 1) la volatilidad histórica, encargada de medir el comportamiento de la variabilidad de los precios centrándose en el pasado, tomando datos diarios, semanales, mensuales, anuales, entre otros; 2) la volatilidad implícita, generalmente se encuentra en el mercado de derivados en donde se observa un modelo de valoración reflejando lo que subyace en un determinado tiempo, y 3) la volatilidad futura que depende de las volatilidades anteriores por ser un estimador sesgado que busca una aproximación. Así los modelos con mejores resultados para la predicción de volatilidad son: el modelo ARCH y el modelo GARCH (Muncharaz, J. O.; 2013).

Por otra parte, Tsay (2010) también menciona los tres tipos de medidas de acciones registradas en IBM, las cuales son: 1) Volatilidad como desviación típica condicional de los rendimientos diarios, 2) Volatilidad implícita que se encuentra a partir de los precios de mercado como se menciona anteriormente, en donde se crea una fijación de precios y 3) Volatilidad realizada, se estima mediante la disponibilidad de datos financieros de alta frecuencia para calcular la volatilidad diaria. Al desarrollar los modelos de volatilidad también se encuentra un análisis estadístico en donde los resultados obtenidos, es decir los rendimientos de un activo, se identifican como un proceso estocástico.

3.2.1 Breve historia y evolución de los modelos de volatilidad

La volatilidad siempre se ha presentado como un comportamiento de las variables económicas en general acerca del efecto que puede tener el valor de una acción, en algunos casos, los especialistas en el tema, es decir los inversionistas crean un choque de volatilidad el cual indica que el modelo tiene asimetrías en su distribución. Hamilton (1996) indicó evidencias de un incremento de volatilidad en mercados financieros en sus respectivos ciclos económicos de recesión.

Respecto a la evolución de los modelos de volatilidad, se tiene uno de los primeros modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresivo (ARCH) creado por Engle (1982) permitiendo capturar la variabilidad temporal en la volatilidad; más tarde, Bollerslev (1986) desarrolló una expansión del modelo ARCH, la cual tenía una mayor flexibilidad en la modelización. En la siguiente década se propusieron los modelos EGARCH (1991) y TGARCH (1993), siendo estos modelos anteriores con los cuales permiten identificar la asimetría y la volatilidad como resultado de los diferentes impactos, positivos y negativos, provocados por las noticias. Actualmente, la implementación de estos modelos en software estadístico como R, Python, SAS o EViews ha facilitado significativamente su uso en el análisis financiero. Estos programas proporcionan herramientas que permiten modelar y predecir la volatilidad de manera más eficiente, ayudando a los analistas a tomar decisiones informadas y gestionar mejor los riesgos asociados a las fluctuaciones del mercado.

3.2.2 Aplicaciones de los modelos de volatilidad condicional en el análisis de criptomonedas

En un mercado financiero se encuentran una serie de activos, entre los cuales las criptomonedas son un grupo de instrumentos financieros que destacan por su alta volatilidad fluctuando de manera irregular en cierto periodo de tiempo, en ocasiones sirve para visualizar el crecimiento económico que este puede presentar ya sea estable o acelerado. De acuerdo con Bogle (2017), cuando hay un bien escaso tiende a variar su precio, ya que su comportamiento depende estrictamente de la demanda que tenga y la oferta en el mercado. Debido a que las criptomonedas suelen tener comportamientos extremadamente alcistas o

bajistas, la tasa se encuentra un constante cambio, lo que genera una gran incertidumbre en aquellas personas que invierten en dichos valores financieros.

Entre los factores que alteran la volatilidad de estos activos se encuentra el no contar con un marco que proteja las inversiones en el mercado de criptomonedas ante un fraude financiero, ya que no están reguladas por el banco central. Al realizar comparaciones entre varios tipos de criptomonedas, se puede observar que los precios de otras criptomonedas seguramente se verán afectados por los movimientos de precios de Bitcoin, ya que esta todavía tiene la mayor capitalización de mercado (Kumar, A. S., & Anandarao, S. (2019)).

Para desarrollar un análisis más completo, se establecen modelos que pronostican la volatilidad los cuales son útiles para optimizar carteras de inversión o lograr una implementación efectiva en métodos de cobertura y fijación de precios en cuanto a instrumentos derivados. Por ello, Engle (1982) incorporó el modelo ARCH y posteriormente el modelo GARCH con la finalidad de contribuir a la selección de un modelo que sea adecuado para estimar la volatilidad en los rendimientos de las criptomonedas. Siendo para el caso del Bitcoin, un modelo GARCH (1,1) de acuerdo con el criterio de Akaike (AIC) el modelo más adecuado para determinar sus rendimientos (Yıldırım, H., Bekun, F.V. (2023)).

En este caso, el Bitcoin es una de las criptomonedas más comunes y su volatilidad es mayor en comparación con las otras criptomonedas (Kasper, 2017), utilizando el modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH), recordando que este es un modelo estándar para modelar la volatilidad (Sapuric, S., Kokkinaki, A., & Georgiou, I. (2022)). Dyhrberg (2016) investiga la inestabilidad de Bitcoin utilizando modelos GARCH, los cuales proponen que Bitcoin tiene algunas similitudes tanto con el oro como con el dólar. Bouri et al. (2017) aportan que existe un efecto de contagio entre ambos mercados debido al comercio especulativo de la criptomoneda. Osterrieder y Lorenz (2017) encuentran que los rendimientos de Bitcoin exhiben una mayor volatilidad que las monedas tradicionales. Balcılar et al. (2017), investiga la conexión causal entre el volumen de intercambio encontrando que el volumen no puede ayudar a anticipar la imprevisibilidad de los rendimientos de Bitcoin. Yi et al. (2018) analizó la conectividad de la volatilidad en el mercado monetario digital confirmando que la conectividad de la inestabilidad varía constantemente y las burbujas de riesgo de imprevisibilidad afectan a los inversores.

Uno de los trabajos que destacan el análisis riguroso de series temporales en la determinación del rendimiento y la volatilidad de las monedas virtuales es el desarrollado por Malladi y Dheerlya (2020), en este trabajo se expone el interés creciente en el desarrollo y expansión de las criptomonedas, especialmente Bitcoin y Ripple, lo que ha impulsado un enfoque analítico renovado para comprender su comportamiento en el mercado. Dado que estas criptomonedas presentan movimientos de precios altamente especulativos y similares a los de las "burbujas", es crucial aplicar modelos de series de tiempo como el ARMAX (Modelo Autoregresivo de Media Móvil con variables Exógenas), modelos GARCH (Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva Generalizada), y pruebas de causalidad de Granger para analizar sus rendimientos y volatilidades.

Este análisis permite entender cómo factores externos, como los índices bursátiles globales, los precios del oro y los indicadores de incertidumbre económica como el VIX y el Índice de Incertidumbre de Política Económica de EE. UU., pueden influir en el comportamiento de estas monedas digitales. Por ejemplo, el estudio indica que, aunque los rendimientos de los mercados de acciones globales y del oro no tienen un efecto causal sobre los rendimientos de Bitcoin, sí existe un efecto causal de los rendimientos de Ripple sobre los precios de Bitcoin. Estos hallazgos son esenciales para los inversores y reguladores, ya que facilitan una mejor comprensión de los riesgos y oportunidades asociados con la inversión en criptomonedas, y subrayan la importancia de utilizar métodos sofisticados de series temporales para predecir eventos críticos como el desplome de Bitcoin en 2018 o la crisis sanitaria de COVID-19.

3.3 Efectos ARCH y Pruebas Formales

Existen modelos que consideran la heterocedasticidad, es decir, la variabilidad no constante de los errores. Siendo uno de los modelos destacados el modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), desarrollado por Robert F. Engle (1980). Este modelo identifica la posibilidad de que la varianza de los errores en un modelo económico cambie con el tiempo debido a cambios en diversos factores independientes o externos. La presencia de efectos ARCH en un modelo indica que los errores están correlacionados condicionalmente, lo que puede representar un desafío para la estimación precisa de los

parámetros del modelo, ya que las estimaciones obtenidas mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) pueden ser sesgadas e inconsistentes cuando se presenta heterocedasticidad condicional.

Es por ello por lo que se han desarrollado diversas pruebas formales para identificar la presencia de efectos ARCH en un modelo econométrico. Por ejemplo, la prueba de White, propuesta por Halbert White (1980) y la prueba de Breusch-Pagan, creada por Trevor Breusch y Adrian Pagan (1979). En este tipo de pruebas, los residuos de la regresión sirven de base en cada una de las variables explicativas establecidas. Entre las pruebas más empleadas se encuentran los estadísticos de Ljung-Box en los correlogramas de los residuos de la ecuación de la media y de los residuos al cuadrado (Tsay, 2013) y la prueba de multiplicadores de Lagrange (LM) de Engle (1982) y de Bollerslev (1986) en la que después de obtener la ecuación de varianza condicional denotada como: $h_t = z_{t1}w_1 + z_{t2}w_2$ probando que $H_0: w_2 = 0$ indicando que el modelo ARCH se identifica con la dimensión de w_1 (Monsegny & Cuervo, 2008).

Para ajustar un modelo con dispersiones diferenciadas, es esencial utilizar técnicas que permitan que la varianza del término de error cambie con el tiempo. Modelos como el ARCH, GARCH y sus extensiones son herramientas fundamentales en este contexto. Estos modelos no solo capturan la naturaleza cambiante de la varianza, sino que también mejoran la eficiencia de las estimaciones de los parámetros al proporcionar un método robusto para modelar la varianza condicional. Al ajustar un modelo que toma en cuenta la heterocedasticidad condicional, se puede obtener una comprensión más precisa de la estructura que explica el fenómeno analizado y, por ende, realizar inferencias más precisas y fiables. Además, esta corrección es crucial para la formulación de pronósticos y para la implementación de estrategias de manejo de riesgo basadas en modelos predictivos precisos y robustos.

3.3.1 Modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH)

Una de las características distintivas en la mayoría de las series de tiempo financieras es su forma de nivel, ya que son caminatas aleatorias, por lo que establece que son no estacionarias.

Por tal motivo, al modelar este tipo de series financieras en su forma de nivel suelen presentar amplias variaciones o volatilidad en sus primeras diferencias, lo que indica que la serie de tiempo se ve afectada a través del tiempo y se modifica. Es por ello, que la solución practica es aplicar un modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresivo (ARCH), desarrollado por Engle en 1982. Siendo su función principal generar una estructura autorregresiva en la que la heteroscedasticidad es observada en diferentes periodos de tiempo y se determine si esta autocorrelacionada (Gujarati y Porter., 2009).

Sin embargo, Lütkepohl, H., & Krätzig, M. (2004) indican que al tener un proceso autorregresivo no lineal que sea condicionalmente heteroscedástico, los intervalos de confianza requieren de una función de volatilidad condicional, dado que la estimación de la volatilidad es una tarea básica en la modelización de series de tiempo. El modelo ARCH suele constar de dos ecuaciones; la primera hace referencia a la ecuación de la media que describe la evolución principal de interés, denotada como Y; mientras que la segunda corresponde a la ecuación de la varianza de Y (Cowpewartwait y Metcalfe, 2009).

Actualmente el acrónimo ARCH hace referencia a una amplia gama de modelos de volatilidad condicional cambiante, que incluyen modelos autorregresivos como AR(p), donde los residuos de u_t siguen dicho proceso con media cero y varianza condicional, denotada como:

$$\sigma_t^2 = Var(u_t|\Omega_{t-1}) = E(u_t^2|\Omega_{t-1}) = \gamma_0 + \gamma_1 u_{t-1}^2 + \dots + \gamma_q u_{t-q}^2$$

Estos modelos tienen la capacidad de generar series con características similares a las series de tiempo financieras, incluyendo agrupaciones de volatilidad y valores atípicos similares, aunque las u_t se muestran como ruido blanco por no estar correlacionadas continuamente (Lütkepohl, H., & Krätzig, M., 2004).

3.3.2 Características principales del modelo ARCH

Para el desarrollo de un modelo de volatilidad como lo es un modelo ARCH, se deben realizar cuatro pasos según Tsay (2010): 1) Especificar una ecuación de media para la corroboración de dependencia serial en los datos, esto mediante un modelo econométrico como por ejemplo,

un ARMA(p, q) para eliminar cualquier dependencia lineal de la serie de rendimientos, 2) Utilizar los residuos de la ecuación media para comprobar la existencia de efectos ARCH, 3) Especificar un modelo de volatilidad si los efectos ARCH son estadísticamente significativos y realizar una estimación conjunta de la ecuación de la media y la volatilidad, 4) Comprobar el modelo ajustado y refinarlo.

Levendis (2018), considera que uno de los principales modelos que se desarrolla es el modelo ARCH (1), en donde Y_t no sigue un proceso AR (1), y tiene como características una media constante más un error, es decir:

$$Y_t = \beta_0 + \epsilon_t;$$

mientras que el error se identifica como:

$$\epsilon_t = (\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2)^{1/2} u_t \quad \text{donde} \quad u_t \sim N(0,1), \alpha_0 > 0, \text{ y } \alpha_1 > 1.$$

Teniendo en cuenta que la curtosis de una variable X en el modelo ARCH (1) se define como:

$$K(X) = \frac{E[(X - \mu_x)^4]}{E^2[(X - \mu_x)]^2} = \frac{E(X^4)}{E(X^2)^2}$$

De tal manera, que en un modelo ARCH los rendimientos no son predecibles, pero si su riesgo de volatilidad. Por ello se genera un fenómeno de agrupación de volatilidad, el cual manifiesta de manera precisa los rendimientos de los activos mediante un gráfico de un determinado tiempo, logrando captar el hecho de que los rendimientos tienden a tener una distribución de cola más grande. Se puede tomar una distribución gaussiana u otro tipo de distribuciones de media cero y varianza unitaria siempre y cuando estas seas adecuadas, aunque pueden presentar algunas complicaciones para la derivación de la verosimilitud, por lo que es recomendaba utilizar la densidad normal, aunque la distribución no lo requiera o no sea la correcta (Ghysels, E., & Marcellino, M., 2018).

Una de las características según Cowpertwait y Metcalfe (2009), un modelo ARCH, es sobre las colas gruesas de una distribución aplicada a una serie de tiempo financiera implicando la normalidad; en algunos casos se procede de una distribución cauchy o de otras distribuciones sin momentos finitos (Mandelbrot, 1963).

Entre las propiedades con las que cuenta el modelo ARCH (1) se encuentran las siguientes:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_{t-1}^2$$

Donde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$

- 1) La media incondicional es de at cero:

$$E(\alpha_t) = E[E(\alpha_t|F_{t-1})] = E[\sigma_t E(\epsilon_t)] = 0$$

- 2) La varianza incondicional de a_t se obtiene mediante la siguiente ecuación: siempre y cuando at sea un proceso estacionario con:

$$\begin{aligned} Var(\alpha_t) &= E(\alpha_t^2) = E[E(\alpha_t^2|F_{t-1})] \\ &= E(\alpha_0 + \alpha_1 \alpha_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(\alpha_{t-1}^2) \end{aligned}$$

Dado que a_t debe ser positiva se establece que:

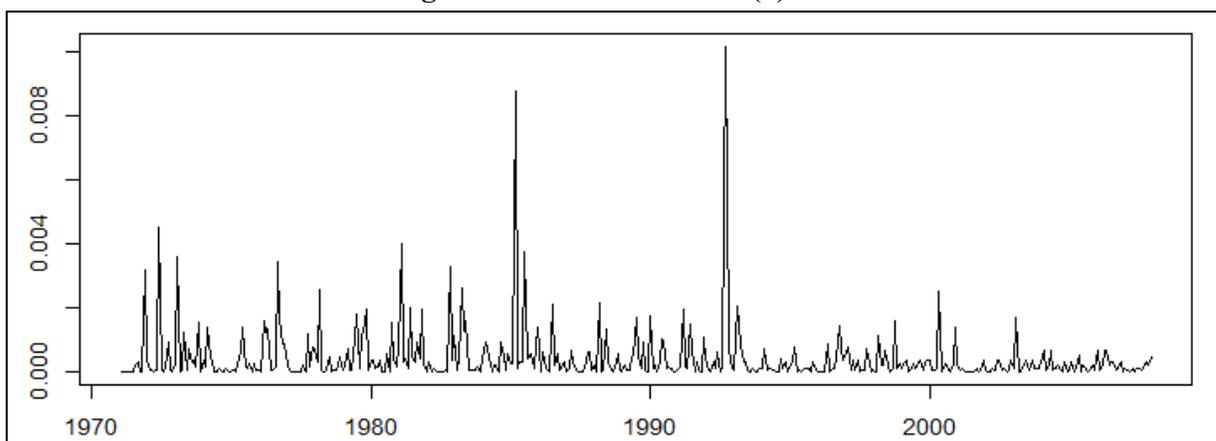
$$E(\alpha_t) = 0, Var(\alpha_t) = Var(\alpha_{t-1}) = E(\alpha_{t-1}^2)$$

- 3) Al momento de aplicar dicho modelo, es necesario contar con momentos de orden superior de a_t , por lo que α_1 debe satisfacer algunas restricciones.

Esto genera que el choque at de un modelo ARCH (1) gaussiana condicional produzca valores atípicos con mayor probabilidad que un ruido blanco. Sin embargo, se logran mantener dichas propiedades para los modelos ARCH generales.

A continuación, se observa el grafico de un modelo ARCH (1), realizado mediante una simulación de 1000 datos:

Figura 32. Modelo ARCH (1)



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1) 97

De acuerdo con Tsay (2010), un modelo ARCH consta de ciertas desventajas, entre las principales se encuentran: 1) El modelo supone que las perturbaciones positivas y negativas tienen los mismos efectos sobre la volatilidad, 2) Un modelo ARCH es muy restrictivo, es decir, limita la capacidad de los modelos ARCH con innovaciones gaussianas para capturar exceso de curtosis, 3) El modelo ARCH no aporta ninguna novedad para comprender el origen de las variaciones de una serie de tiempo, dicho de otra manera, no proporciona una forma mecánica de describir el comportamiento de la varianza condicional, 4) Es probable que un modelo ARCH pronostique la volatilidad en exceso, debido a la lentitud generada por las grandes perturbaciones aisladas de la serie.

3.3.3 Pruebas formales para efectos ARCH en series temporales (Pruebas de heterocedasticidad)

Cuando se desarrolla un modelo ARCH en series de tiempo, se realizan una serie de pruebas que miden el nivel de heteroscedasticidad a la cual está expuesto dicho modelo. Por ejemplo, Levendis (2018) se enfoca en el análisis de pruebas de autocorrelación en los residuos al cuadrado, ya que estos son una estimación de la varianza y permite identificar si se presenta una varianza autocorrelacionada. Sin embargo, solo propone dos pruebas, las cuales son: 1) Prueba de Box-Ljung y 2) Prueba de autocorrelación (ACF).

Esta primera prueba tiene la característica de estimar la ecuación de la media mediante una regresión con rezagos de sí misma o sobre una variable exógena e identificar las propiedades de los residuos y los residuos al cuadrado. Después investiga si una variable es ruido blanco, de lo contrario no puede estar autocorrelacionada, siendo utilizada para probar los efectos de un modelo ARCH, además de usar los residuos estandarizados después de la estimación ARCH para comprobar si es el modelo adecuado. Mientras que la Prueba ACF sirve para la estimar la función de autocorrelación de los residuos al cuadrado, estos se analizan mediante una regresión con varios rezagos para observar si los coeficientes son significativos; en caso de ser así, se establece como alternativa un gráfico para una mejor interpretación.

Por otra parte, Brooks (2008), estableció una serie de pasos con los cuales se identificaría de manera precisa la comprobación de los efectos ARCH, los cuales son:

- 1) Ejecutar una regresión lineal de manera que cumpla con la siguiente estructura y guarde los residuos, \hat{u} .

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + u_t$$

- 2) Elevar al cuadrado los residuos y realizar una regresión sobre los rezagos propios para comprobar la existencia de un modelo ARCH (p):

$$\hat{u}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \gamma_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \dots + \gamma_q \hat{u}_{t-q}^2 + v_t$$

- 3) El estadístico de prueba se define en base al número de observaciones que multiplican al coeficiente de correlación múltiple de la última regresión.
- 4) Las hipótesis se presentan como:

$$H_0: \gamma_1 = 0 \text{ and } \gamma_2 = 0 \text{ and } \gamma_3 = 0 \dots \text{ and } \gamma_q = 0$$

$$H_1: \gamma_1 \neq 0 \text{ and } \gamma_2 \neq 0 \text{ and } \gamma_3 \neq 0 \dots \text{ and } \gamma_q \neq 0$$

Otra prueba para efectos ARCH según Ruud (2000), es la Prueba Goldfeld y Quandt (1965) la cual consta de una generalización en cuando la varianza cambia con una única variable explicativa. Los pasos por seguir para desarrollar esta prueba son los siguientes:

1. Ordenar las observaciones, de tal forma que se obtenga submuestras con los valores más altos y bajos; es decir, de Xi hasta X.
2. Se omiten observaciones centrales y se procede a dividir las observaciones en dos grupos aplicando la siguiente fórmula: $(n - c)/2$.
3. Ajustar las regresiones MCO y obtener la suma de cuadrados residuales a k, siendo este el número de parámetros que deben estimarse para cada grupo de observaciones; es decir:

$$SCR = \left(\frac{n - c - 2k}{2} \right) gl$$

4. Por último, se estima la razón, mediante la siguiente expresión:

$$\lambda = \left(\frac{SCR_2/gl}{SCR_1/gl} \right)$$

Guajarati (2010), describe la Prueba Breusch-Pagan-Godfrey como una las pruebas más utilizadas en donde se requiere un análisis para comprobar heteroscedasticidad siguiendo estos pasos:

1. Estimar un modelo de regresión lineal con k variables mediante MCO y obtener los residuos $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$.
2. Obtener el estimador de máxima verosimilitud de σ^2 , aplicando lo siguiente:

$$\bar{\sigma}^2 = \sum \hat{u}_i^2 / n$$

3. Construir las variables en donde el residuo esta la cuadrado y dividido entre $\bar{\sigma}^2$, y se definen como:

$$p_i = \hat{u}_i^2 / \bar{\sigma}^2$$

4. Hacer una regresión de las p_i , sobre las Z, es decir:

$$p_i = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \dots + \alpha_m Z_{mi} + v_1$$

5. Obtener la Suma de Cuadrados Explicada (SCE):

$$\theta = \frac{1}{2} (SCE)$$

Enders (2015) mencionan otra prueba denominada como Prueba McLeod (1983), la cual tiene como finalidad mostrar de manera practica y grafica el número de rezagos y valores p, siendo esta una de las opciones más formales para la detección de evidencia de ARCH en el modelo, esta se utiliza a partir del estadístico Box-Ljung con los residuos o datos al cuadrado como la Prueba McLeod, es decir, la función que se tiene estima los estadísticos de Box-Ljung con las autocorrelaciones de los datos para detectar la heteroscedasticidad condicional. Adicionalmente, esta prueba se puede aplicar a los residuos de un modelo ARMA ajustado a los datos

Por otra parte, se debe considerar que al estimar varios modelos ARCH el número de rezagos se establece con los criterios denominados como el Criterio de Información de Akaike (AIC) y el Criterio de Información Bayesiano (BIC).

3.4 Procesos GARCH

Los modelos GARCH son una continuación mejorada de los modelos ARCH, en donde se enfocan en la previsión de las varianzas condicionales futuras con el rendimiento al cuadrado más reciente. Al desarrollar un modelo GARCH, se debe considerar que la precisión de la previsión va a ir mejorando so se incluyen todos los rendimientos cuadrados de pasados con una ponderación menor para volatilidades lejanas.

Determinando que, el modelo ARCH (p,q) propuesto por Engle (1982) se generaliza de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2$$

En donde las varianzas no deben ser negativos, siendo esta una restricción para el modelo GARCH, sin embargo, se puede permitir que los parámetros sean negativos y así aumentar los patrones dinámicos que logran captar mejor el modelo GARCH. (Cryer y Chan, 2008). De acuerdo con Gujarati (2009), estos procesos tienen detalles técnicos con los cuales es fácil de identificar, por ejemplo, para el caso de un modelo GARCH (1,1) equivale a un ARCH (2), es decir, un modelo GARCH (p, q) es equivalente a un ARCH (p + q).

Algunas de las aplicaciones que suele tener este modelo GARCH, esta relacionados con la descripción de una amplia variedad de datos de instrumentos financieros, dando énfasis en una especificación parsimoniosa de la heteroscedasticidad condicional. Esto se desarrolla debió a que al estimar un modelo GARCH presenta las propiedades del estimador de máxima verosimilitud. (Lütkepohl, H., & Krätzig, M., 2004))

Al igual que los modelos ARCH, se realizan pruebas para comprobar su estacionariedad como el estimador de máxima verosimilitud (MLE).

3.4.1 Estructura del Modelo de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada (GARCH)

En 1986 Bollerslev introdujo una extensión a la metodología en la cual se captan aún mejor las características de cada modelo; este se denominó una generalización del modelo ARCH. De acuerdo con Levendis (2018), este modelo conocido como GARCH (p,q), significa “Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada”. Este tipo de modelos GARCH se puede identificar como un modelo ARCH infinito de orden infinito con procesos MA invertible, lo que equivale a un proceso AR de orden infinito.

Franco y Zakoian (2010) indican que los modelos GARCH clásicos tienen como característica principal la varianza condicional expresado como una función lineal de valores pasados de la serie de tiempo que se esté analizando, por lo que es fácil identificar los principales hechos estilizados. Además de tener en cuenta las condiciones de estacionariedad estricta de un modelo GARCH, por ejemplo, se tiene un GARCH de primer orden, en este se logra una identificación sencilla de los resultados, al igual que los modelos ARCH (∞), los cuales permiten un decaimiento más lento de las autocorrelaciones de rendimiento cuadrático.

Lütkepohl, H., & Krätzig, M. (2004), describe los momentos incondicionales de un modelo GARCH como una distribución que es leptocúrtica, es decir, la distribución tiene mayor concentración entorno a cero que en sus colas. De esta manera la varianza se define como:

$$\begin{aligned} E(u_t^2) &= E[E(u_t^2|\Omega_{t-1})] \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 E(u_{t-1}^2) + \beta_1 E[E(u_t^2|\Omega_{t-2})] \\ &= (1 - \gamma_1 - \beta_1)^{-1} \gamma_0 \end{aligned}$$

Mientras que el cuarto momento se representa de la siguiente forma en un modelo GARCH, se define como la curtosis bajo normalidad condicional de la siguiente manera:

$$k = \frac{E(u_t^4)}{(E(u_t^2))^2} = \frac{3(1 - \gamma_1 - \beta_1)(1 + \gamma_1 + \beta_1)}{(1 - \beta_1^2 - 2\gamma_1\beta_1 - 3\gamma_1^2)}$$

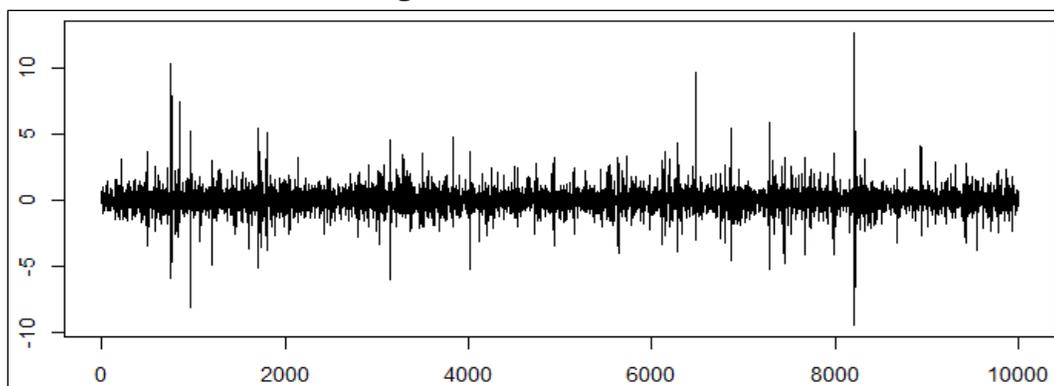
Un modelo GARCH está diseñado para captar hechos empíricos como es el caso de las series financieras con rendimientos al cuadrado que se estén autocorrelacionados. Según Franco y

Zakoian (2010), la correlación de un modelo GARCH se define cuando no se proporciona directamente un proceso de solución que satisfaga ciertas condiciones, ya que al tener un modelo GARCH (1, 1) el proceso a considerar es un ARMA (1, 1) y su autocorrelación disminuye a cero proporcionalmente, y se representa de la siguiente manera: $Corr(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2) = K(\alpha_1\beta_1)^h$, siendo K una constante independiente de h.

Además, se debe comprender el que una estructura de un modelo GARCH permite que la magnitud del ruido (ϵ_t) sea una función de sus valores pasados. Así, los periodos con un alto nivel de volatilidad irán seguidos de periodos en lo que las fluctuaciones tengan una amplitud menor (Franco y Zakoian, (2010))

A continuación, se muestra la representación de dichos modelos mediante una simulación:

Figura 33. Modelo GARCH



Fuente: Elaboración propia con datos simulados en R-Project (Versión 3.4.1)

Para analizar detalladamente un modelo GARCH, debemos investigar si cuenta con la existencia de heteroscedasticidad, lo cual viene implícito al aplicar el método de mínimos cuadrados generalizados (MCG) para transformar los datos, por lo que concluimos que al utilizar el MCG, podremos encontrar el efecto GARCH.

En cuanto a las variaciones que puede presentar un modelo GARCH, Levendis (2018) indica que solo se amplían los márgenes del modelo, no se añaden rezagos a los componentes GARCH del modelo general, sino se modifican las restricciones de los coeficientes. Entre las diferentes variaciones se encuentran: 1) GARCH-t, este modelo indica una modificación sencilla en la que los errores proceden de una distribución t-Student, sustituyendo a una distribución normal; 2) GARCH-M, este modelo altera la ecuación de la media para que

dependa directamente de la varianza del modelo original; 3) Existen más variaciones que cambian en las perturbaciones positivas y negativas en base a respuestas asimétricas que son más comunes para modelar la volatilidad condicional como: GJR-GARCH, es un método denominado como Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH que se modifica directamente en los rendimientos; E-GARCH, este es un modelo Exponencial GARCH y se altera en los errores pasados y T-GARCH, es un modelo de Threshold que cambia de acuerdo a la variable que se determine como principal .

3.4.2 Aplicaciones de los procesos GARCH en la modelización de volatilidad

La modelización de aspectos no lineales, como los regímenes de cambio y las volatilidades cambiantes, es útil para estructurar dinámicamente dicho proceso. En algunos casos, se observan valores atípicos en la serie de tiempo, lo que conduce a su modelización a través de variables ficticias, cambios en los parámetros de los modelos ARMA, variaciones en la varianza y el uso de modelos GARCH para la predicción de riesgos.

De acuerdo con Heij (2004), la utilización de modelos GARCH se aplica en la modelización del riesgo, especialmente para predecir riesgos futuros. Por ello, en un modelo GARCH la varianza condicional cambia con el tiempo, por lo que la precisión de la previsión también presentará variación en el tiempo. Normalmente el intervalo de previsión puede basarse puntualmente en $2\hat{\sigma}_t$. Pero en caso de tener periodos muy volátiles con residuos e_t muy grandes, las varianzas condicionales estimadas $\hat{\sigma}_t^2$ también serán grandes, debido a la ampliación de los intervalos. Reflejando la presencia de incertidumbre en tales periodos sobre valores futuros de Y_t , es decir, se identifica a los periodos con valores grandes de $\hat{\sigma}_t$ con mayor riesgo.

Otra de las aplicaciones de las cuales consta el modelo GARCH la explica Cryer y Chan (2008), es para un análisis del tipo de cambio en una periodicidad diaria, ya que la mayoría de los datos parecen estacionarios, pero no siempre la volatilidad se agrupa de la misma forma. Es aquí cuando los datos se respaldan en las pruebas de comprobación de

heteroscedasticidad aplicada a los residuos del modelo, además de detallar el análisis de los valores atípicos aditivos.

3.4.3 Pruebas de efecto del Modelo GARCH

Heij (2004) indica que las correlaciones en la varianza de una serie pueden aprovecharse para prever riesgos futuros y ajustar la amplitud de los intervalos de previsión. Por lo tanto, es importante comprobar la presencia de efectos GARCH. Esto puede hacerse aplicando una prueba LR o una prueba F sobre la significación conjunta de los parámetros GARCH, además de adecuar el modelo a pruebas de ACF y PACF. Estas pruebas tienen las distribuciones asintóticas habituales si el modelo ARMA y el modelo GARCH son estacionarios.

Enders (2015), propone las pruebas ACF y PACF de los residuos las cuales deben indicar un proceso de ruido blanco. Para el caso del ACF, los residuales al cuadrado pueden ayudar a identificar el orden del proceso GARCH, y de encontrar heteroscedasticidad condicional, el correlograma debe mostrar dicho proceso. Los pasos para desarrollar esta técnica, es:

- 1) Estimar secuencia de Y_t utilizando el mejor modelo ARMA y obtener los errores ajustados al cuadrado $\hat{\varepsilon}_t^2$ y calcular la varianza muestral de los residuos $\hat{\sigma}_t^2$, definida como:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^T \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{T} \text{ donde } T \text{ representa el número de residuales.}$$

- 2) Calcular y representar las autocorrelaciones muestrales de los residuales con:

$$\rho_i = \frac{\sum_{t=i+1}^T (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{\varepsilon}_{t-i}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=1}^T (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2}$$

- 3) La desviación estándar ρ_i se aproximan por $1/\sqrt{T^2}$. Los valores de ρ_i suelen ser significativamente diferentes de cero siendo indicativos de errores GARCH. Se usa el estadístico Q de Ljung-Box para comprobar los coeficientes significativos:

$$Q = T(T + 2) \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i^2}{(T - i)}$$

Con la fórmula anterior, se obtiene una distribución asintótica con n grados de libertad si la secuencia no está correlacionada serialmente. Por lo que rechazar la hipótesis nula de ausencia de errores ARCH o GARCH es equivalente a rechazar la hipótesis nula de la secuencia $\hat{\varepsilon}_t^2$ no está correlacionada.

Existe otra prueba explicada por Heij (2004) para términos de error denominada como la prueba del multiplicador de Lagrange (LM), la cual consta de tres pasos: 1) Estimar un modelo ARMA que más se ajuste usando la metodología MCO, sea ε_t la serie correspondiente de residuos; 2) Estimación de un modelo en donde la regresión sea de los residuos al cuadrado ε_t^2 sobre una constante; 3) Se calcula la prueba de LM de la regresión anterior, ya que con esto se logra determinar si hay o no presencia de modelos ARCH o GARCH. De la misma forma, al interpretar la volatilidad agrupada resulta que puede estimar bajo supuestos para la estimación de un modelo GARCH.

3.4.4 Estimación por Máxima Verosimilitud en Modelos de Volatilidad

La estimación de las especificaciones GARCH y las propiedades del estimador de máxima verosimilitud (ML), se analizan de acuerdo con Lütkepohl y Krätzig (2004), para lo cual dicha estimación debe encontrarse en un tramo infinito de observaciones, ya que las perturbaciones de tipo GARCH no siempre son del todo observables. Sin embargo, se obtienen parámetros de varianza los cuales aparecen al estimar la media condicional y debe de considerarse la densidad del modelo.

De acuerdo con Brooks (2008), al estimar la máxima verosimilitud se elige un conjunto de valores de los parámetros que tiene más probabilidades de generar más observaciones, estableciendo los siguientes pasos: 1) Adaptar al modelo la función de verosimilitud logarítmica (LLF); 2) Utilizar la regresión para obtener estimaciones iniciales de los parámetros medios; 3) Elegir algunas conjeturas iniciales para los parámetros de varianza condicional, para esto la mejor opción es establecer valores iniciales plausibles diferentes de cero; 4) Especificar un criterio de convergencia o de valor, en algunos softwares como E-Views cuentan con este criterio por defecto con un valor de 0.001, lo que significa que se alcanza la convergencia de manera automática.

Por otra parte, Enders (2015) describe de manera amplia y detallada el método de máxima verosimilitud necesarios para la comprensión de un modelo GARCH. A continuación, suponemos que:

1) Los valores de ε_t se extraen de una distribución normal con media cero y varianza constante σ^2 , en donde la teoría de la distribución estándar, la probabilidad de cualquier realización de ε_t es:

$$L_t = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \exp\left(\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \right) \text{ donde } L_t \text{ es la probabilidad de } \varepsilon_t$$

2) Al tener las realizaciones de ε_t independientes, la probabilidad de las realizaciones conjuntas de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$ son el producto de las probabilidades individuales, por lo que tienen la misma varianza, siendo la probabilidad de las realizaciones conjuntas:

$$L = \prod_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \exp\left(\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \right)$$

3) Una vez obtenido el producto, es conveniente tomar el logaritmo natural de cada lado, para tener:

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t)^2$$

Una vez que se tiene dicho procedimiento utilizado para la estimación de máxima verosimilitud, se seleccionan los parámetros de distribución para maximizar la probabilidad de la muestra observada. 4) Si suponemos que en la secuencia se trata de un proceso MA (1), este se sustituye en la verosimilitud para desarrollar las derivadas parciales iguales a cero, tales como:

$$\frac{\delta \ln L}{\delta \sigma^2} = -\frac{T}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t)^2 \quad y \quad \frac{\delta \ln L}{\delta \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t)$$

5) Se resuelven para los valores de, los cuales producen el valor máximo de $\ln L$, las cuales resultan de las estimaciones realizadas:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum \frac{\varepsilon_t^2}{T} \quad y \quad \hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}$$

En este modelo, lo principal radica en las condiciones que se establecen, ya que no son de 1er orden al momento de estimar ARCH o GARCH lo que requiere una solución de algún tipo de algoritmo de búsqueda tales como el método de Newton-Raphson que encuentra el máximo de la función de verosimilitud mediante el cálculo de derivadas de primer y segundo orden, siendo ampliamente utilizado por su rapidez y precisión en la convergencia a una solución óptima (Bollerslev, 1986). El método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) es un algoritmo cuasi-Newton que no requiere el cálculo completo de la matriz Hessiana, lo que lo hace más eficiente computacionalmente y adecuado para manejar funciones de verosimilitud complejas en la estimación de modelos GARCH (Nocedal & Wright, 2006). El algoritmo de gradiente estocástico que optimiza la función de verosimilitud utilizando muestras aleatorias de datos, lo que lo hace adecuado para grandes conjuntos de datos y es particularmente útil en la estimación de parámetros de modelos GARCH en series temporales extensas (Bottou, 2010). Finalmente, el método de Cuasi-Máxima Verosimilitud (QMLE) es una variante del MLE que es robusta ante ciertas formas de especificación errónea del modelo, proporcionando estimadores consistentes y asintóticamente normales, incluso cuando la especificación del modelo no es completamente correcta (White, 1982). Estos algoritmos permiten la estimación precisa de los parámetros en los modelos GARCH, mejorando la capacidad de los modelos para capturar la dinámica de la volatilidad en series temporales financieras.

3.5 Modelos con Asimetría

Los modelos con asimetría se desarrollaron a partir de los modelos GARCH, ya que de estos derivan una variedad de extensiones y ampliaciones de un modelo GARCH básico. De acuerdo con Brooks (2008) las extensiones del modelo GARCH surgieron como consecuencia de los problemas percibidos en el modelo original, es decir de un modelo

GARCH (p,q) estándar. Sin embargo, al desarrollarse deben cumplir con algunas características como: incumplir con las condiciones de no negatividad mediante restricciones artificiales a los coeficientes del modelo, no pueden tener efectos de apalancamiento, aunque pueden tener en cuenta la agrupación de la volatilidad, y, por último, no permite una retroalimentación directa entre varianza y media condicionales.

Franqc y Zakoian (2010) describen las propiedades de simetría de los modelos GARCH estándar con la siguiente interpretación en términos de autocorrelaciones:

$$Cov(\sigma_t, \epsilon_{t-h}) = 0, \quad h > 0$$

Esta característica expresada en términos de covarianzas puede comprobarse de manera empírica, pero suele ser rechazada por series de tiempo con datos financieros.

También se establecen ciertas restricciones usando la siguiente denotación $\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$ para un modelo GARCH con asimetría condicional, las cuales son:

- i) El proceso ϵ_t es una diferencia martingala
- ii) La parte positiva y negativa de ϵ_t tienen la misma volatilidad, hasta un factor multiplicativo
- iii) La curtosis y la asimetría de la distribución condicional de ϵ_t son constantes.

En general, Levendis (2018) establece que la modelización GARCH no añade rezagos adicionales a los componentes ARCH o GARCH del modelo, solo modifica las restricciones de los coeficientes. Al igual que se propusieron por Engle y Ng (1993) un conjunto de pruebas para la asimetría en la volatilidad conocidas como pruebas de sesgo de signo y de tamaño. Estas pruebas se utilizan para determinar si se requiere un modelo asimétrico para la serie de tiempo o si un modelo GARCH simétrico es adecuado para la serie de tiempo utilizada (Brooks, 2008).

3.5.1 Introducción a la asimetría en la volatilidad

Levendis (2018) establece que en un modelo GARCH al recibir nueva información suele considerarse un acontecimiento inesperado y, por lo tanto, un componente de error. Para el caso de la volatilidad existe una respuesta asimétrica de la volatilidad al término de error.

Siendo este el motivo por el cual los modelos que analizan estos fenómenos lo hacen modificando un poco dicho proceso.

De acuerdo con Francq y Zakoian (2010) un modelo GARCH tiene un inconveniente en su construcción y esto se refleja en la varianza condicional la cual solo depende de variables pasadas en donde las innovaciones positivas y negativas tienen el mismo efecto sobre la volatilidad. Por lo tanto, presentar asimetría condicional, lo cual es un hecho estilizado provocando un aumento de la volatilidad y una disminución del precio.

Brooks (2008) indica que las restricciones de modelos GARCH imponen una respuesta simétrica de la volatilidad a las perturbaciones positivas y negativas, esto se establece en una función de las magnitudes de los residuos rezagados. Esto nos lleva a diversos argumentos en donde se demuestra que una perturbación negativa en una serie de tiempo financiera tiene un alto grado de probabilidad de generar un incremento en su volatilidad.

Debido a esto, existen dos extensiones asimétricas del modelo GARCH denominadas: GJR-GARCH creado por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) y el modelo exponencial GARCH (EGARCH) propuesto por Nelson (1991).

3.5.2 Modelo GJR-GARCH

Un modelo GJR-GARCH es una extensión de un modelo GARCH el cual fue creado por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) que presenta asimetría y para lograr identificar los estadísticos se usa la prueba Diebold-Mariano con las funciones de pérdida o de crisis. Según Brooks (2008), el modelo GJR GARCH contiene un término adicional añadido para tener en cuenta posibles asimetrías. La varianza condicional se define por:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 I_{t-1} \quad \text{donde } I_{t-1} = 1 \text{ si } u_{t-1} < 0$$

Además, en el modelo GJR GARCH debe de cumplir la condición para la no negatividad será $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \beta \geq 0$ y $\alpha_1 + \gamma \geq 0$.

Por otra parte, Levendis (2018) muestra una descomposición de la ecuación de la varianza para obtener u_{t-1}^2 o ϵ_{t-1}^2 en la suma de dos efectos diferentes mediante una interacción de variable ficticia, en donde la ecuación es:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 D_{t-1} \epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \text{con } D_{t-1} = \begin{cases} 1, & \epsilon \geq 0 \\ 0, & \text{lo contrario} \end{cases}$$

De tal modo que al tener el error positivo la ecuación se presenta como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) \epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

Y al presentar el error como negativo, $D_{t-1} = 0$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

Sin embargo, para estimar este modelo es recomendable el uso de un software como lo es R-Studio o E-Views en el que se ajusta el modelo a los rezagos con los que se requiere interactuar con la variable ficticia.

3.5.3 Modelo EGARCH (Exponential GARCH)

El modelo exponencial GARCH fue propuesto por Nelson (1991), y la representación más común es mediante la ecuación de la varianza condicional establecida por Levendis (2018) como:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left(\alpha_{i1} z_{t-i} + \alpha_{i2} \left(|z_{t-i}| \sqrt{2/\pi} \right) \right) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

Brooks (2008) señala que esta extensión del modelo GARCH tiene ciertas ventajas, las cuales son: 1) Se modela el $\log(\sigma_t^2)$ aunque tenga parámetros negativos, ya que σ_t^2 será positivo, 2) La formulación EGARCH permite asimetrías en donde podría reflejar una relación entre la volatilidad y rendimientos negativos, siendo este modelo negativo, 3) La interpretación intuitiva se aplica al modelo EGARCH porque utiliza errores condicionalmente normales.

Entre las características principales de un modelo EGARCH de acuerdo con Enders (2015) son:

- i) La ecuación de la varianza condicional tiene forma *log-lineal* e independientemente de la magnitud de la varianza, el valor implícito no puede ser negativo, pero si lo pueden ser los coeficientes.
- ii) El modelo EGARCH utiliza el nivel del valor estandarizado, esto de acuerdo con Nelson (1991) quien argumenta que permite una interpretación natural del tamaño y persistencia en las perturbaciones.
- iii) El modelo exponencial GARCH permite efectos de apalancamiento, este efecto puede ser tanto negativo como positivo sobre el logaritmo de la varianza condicional.

El modelo EGARCH consta de dos teoremas fundamentales explicado por Francq y Zakoian (2010), el primero hace referencia a la estacionariedad del proceso EGARCH (p,q) el cual admite una solución estrictamente estacionaria y no anticipada si y solo si las raíces β_j están fuera del círculo unitario. Este teorema se expresa de la siguiente forma:

$$E(\epsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) = e^{\alpha_0^*} \prod_{i=1}^{\infty} g_{\eta}(\lambda_i)$$

donde $\alpha_0^* = \alpha_0/\beta_1$ y $g_{\eta} = E[\exp \{xg(\eta_t)\}]$.

El segundo teorema está relacionado a los momentos del proceso EGARCH (p,q), el cual indica que m un número entero positivo bajo las condiciones del primer teorema:

$$\mu_{2m} = E(\eta_t^{2m}) < \infty, \prod_{i=1}^{\infty} E \exp \{|m\lambda_i g(\eta_t)|\} < \infty$$

donde ϵ_t^2 admite un momento de orden m dado:

$$E(\epsilon_t^{2m}) = \mu_{2m} e^{m\alpha_0^*} \prod_{i=1}^{\infty} g_{\eta}(m\lambda_i).$$

Este modelo EGARCH tiene varias aplicaciones especialmente en investigaciones relacionadas con criptomonedas, como en el caso de Sapuric y Georgiou (2022) quien utilizaron este proceso para examinar la relación entre volumen, rentabilidad, volatilidad y la asimetría de la reacción de la volatilidad del Bitcoin (BTC) presentada a las noticias económicas, distribuidas en cuatro periodos de diferente tiempo, pero significativos.

3.6 Conclusión

El uso de criptomonedas, como el Bitcoin, ejemplifica la variabilidad en su valor a lo largo del tiempo. Para describir este proceso de manera precisa, es esencial emplear modelos de volatilidad condicional. Entre ellos, los modelos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) son especialmente eficientes en la presencia de volatilidad. Estos modelos, particularmente los asimétricos como EGARCH (Exponential GARCH), permiten un análisis más detallado en comparación con los modelos ARCH o GARCH básicos, facilitando la predicción de la volatilidad en los rendimientos.

Para seleccionar el modelo más adecuado, se utilizan criterios específicos como el Criterio de Información de Akaike (AIC) o el Criterio de Información Bayesiano (BIC). Además, pruebas formales como la prueba de White y la prueba de Breusch-Pagan, basadas en los residuos de una regresión, ayudan a identificar el comportamiento de las variables explicativas junto con herramientas gráficas como los correlogramas también son útiles en este análisis.

El uso de software especializado como R-Studio o E-Views es altamente recomendable para ajustar estos modelos, permitiendo interactuar con variables ficticias y optimizar el ajuste del modelo a los rezagos necesarios. Estas herramientas proporcionan un entorno eficiente para el análisis y la modelización precisa de la volatilidad en los mercados de criptomonedas.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS EMPÍRICO SOBRE LOS RENDIMIENTOS Y LA VOLATILIDAD DEL BITCOIN

4.1 Introducción

En los últimos tres quinquenios las criptomonedas han atraído una atención significativa de inversores, reguladores, académicos e investigadores, inclusive de medios de comunicación, desde que Bitcoin (BTC) fue propuesto por Nakamoto (2008). Las criptomonedas son sistemas de efectivo electrónico de igual a igual que permiten realizar pagos en línea directamente de una parte a otra sin pasar por una institución financiera. Por lo tanto, a diferencia de la gran mayoría de otros activos financieros disponibles, no están asociadas con ninguna autoridad superior (banco central), no tienen representación física y son infinitamente divisibles. A diferencia de los activos financieros tradicionales (acciones, bonos, depósitos bancarios, futuros, opciones o *commodities*), el valor de las criptomonedas no se basa en ningún activo tangible, la economía de un país o una empresa, sino en la seguridad de un algoritmo que puede rastrear todas las transacciones. El crecimiento del uso de criptomonedas se puede vincular a sus bajos costos de transacción, su sistema de igual a igual y su diseño libre de intervención gubernamental. Esto ha llevado a un aumento en el volumen de comercio, la volatilidad y el precio de las criptomonedas, que regularmente aparecen en las noticias principales (Corbet, 2019).

El creciente interés en Bitcoin se debe en gran medida a que constantemente mantiene la mayor parte de la capitalización total del mercado en el ámbito de las monedas digitales. Además, ha sido y sigue siendo el principal impulsor en el esfuerzo de las criptomonedas por volverse ampliamente populares entre los inversores. En concreto, Bitcoin se construye sobre un registro de transacciones que se distribuye a través de una red de computadoras participantes. Es notable que la forma en que se construye Bitcoin fomenta la participación honesta, se basa en gran medida en los primeros adoptantes y previene la creación de monopolios (Böhme et al., 2015). Por otro lado, se cree que el oro constituye un activo de refugio seguro en la economía mundial que protege las carteras de los riesgos de inversiones alternativas. Baur y Lucey (2010) sostienen que un activo puede clasificarse como diversificador respecto a activos alternativos si está positivamente, pero no perfectamente,

correlacionado con otro activo, y como cobertura si no está correlacionado o está negativamente correlacionado. Cuando actúa como una cobertura durante tiempos de estrés o turbulencia en el mercado, entonces se considera un refugio seguro (*safe heaven*).

En años recientes un número creciente de artículos académicos se ha dedicado a la investigación de las características de rendimiento y volatilidad de las criptomonedas utilizando metodologías GARCH. Las investigaciones de Katsiampa (2017), Dempere (2019), Malladi y Dhereriya (2020) Kyriazis (2020), Chen et al. (2020), López-Cabarcos et al. (2021), Dyhrberg (2016), analiza cómo fluctúan los valores del mercado de Bitcoin y su volatilidad utilizando metodologías GARCH y GARCH simétricas y asimétricas.

En esta investigación los resultados no varían tanto en comparación a trabajos anteriores, a las cuales se añadieron pruebas para determinar la volatilidad y poder trabajar adecuadamente, por lo que se puntualiza que un modelo ARMAX-GARCH fue el que mejor describe al Bitcoin en función de variables como el índice de S&P500, a la criptomoneda Ethereum, se hace el uso de una media móvil, es decir un AR (1). Esto debido a la significancia estadística que presentaron en comparación con las variables, estableciendo que tanto las divisas (euro, Libra esterlina y yuan chino) como los commodities (oro y petróleo) no suelen explicar al Bitcoin durante el periodo de 03/01/2017 a 19/04/2024.

Al poner en práctica las metodologías revisadas anteriormente, se debe hacer un análisis con las estadísticas descriptivas con las que cuenta cada una de las variables, como por ejemplo el considerar 1814 observaciones para cada variable, la media, la desviación estándar, entre otras. El objetivo principal es identificar los determinantes del rendimiento y evaluar, a través de gráficos, si es necesario aplicar diferencias logarítmicas, como se hizo en este caso. Además, se realizan pruebas de correlación y causalidad para asegurar que los resultados obtenidos sean adecuados para desarrollar modelos tanto condicionalmente simétricos como asimétricos. Esto permitirá determinar qué variables son más favorables y qué modelo es más apropiado según su nivel de significancia.

4.2 Estadísticas descriptivas

Esta tesis tiene como objetivo comprender la relación entre los rendimientos y la volatilidad del Bitcoin mediante un análisis exhaustivo de sus principales determinantes. Para ello, se utilizarán datos diarios que abarcan desde el 3 de enero de 2017 hasta el 19 de abril de 2024. Este período fue seleccionado para capturar la sutileza y los patrones en el comportamiento de Bitcoin, ya que durante estos años se observó una mayor fluctuación en su mercado. En la Figura 34, donde se presentan los rendimientos de Bitcoin, puede observarse un aumento notable en su precio a partir de 2017. Esto contrasta con el periodo previo, desde 2009 (año en que Bitcoin fue lanzado) hasta 2017, durante el cual su valor se mantuvo relativamente estable, sin grandes variaciones.

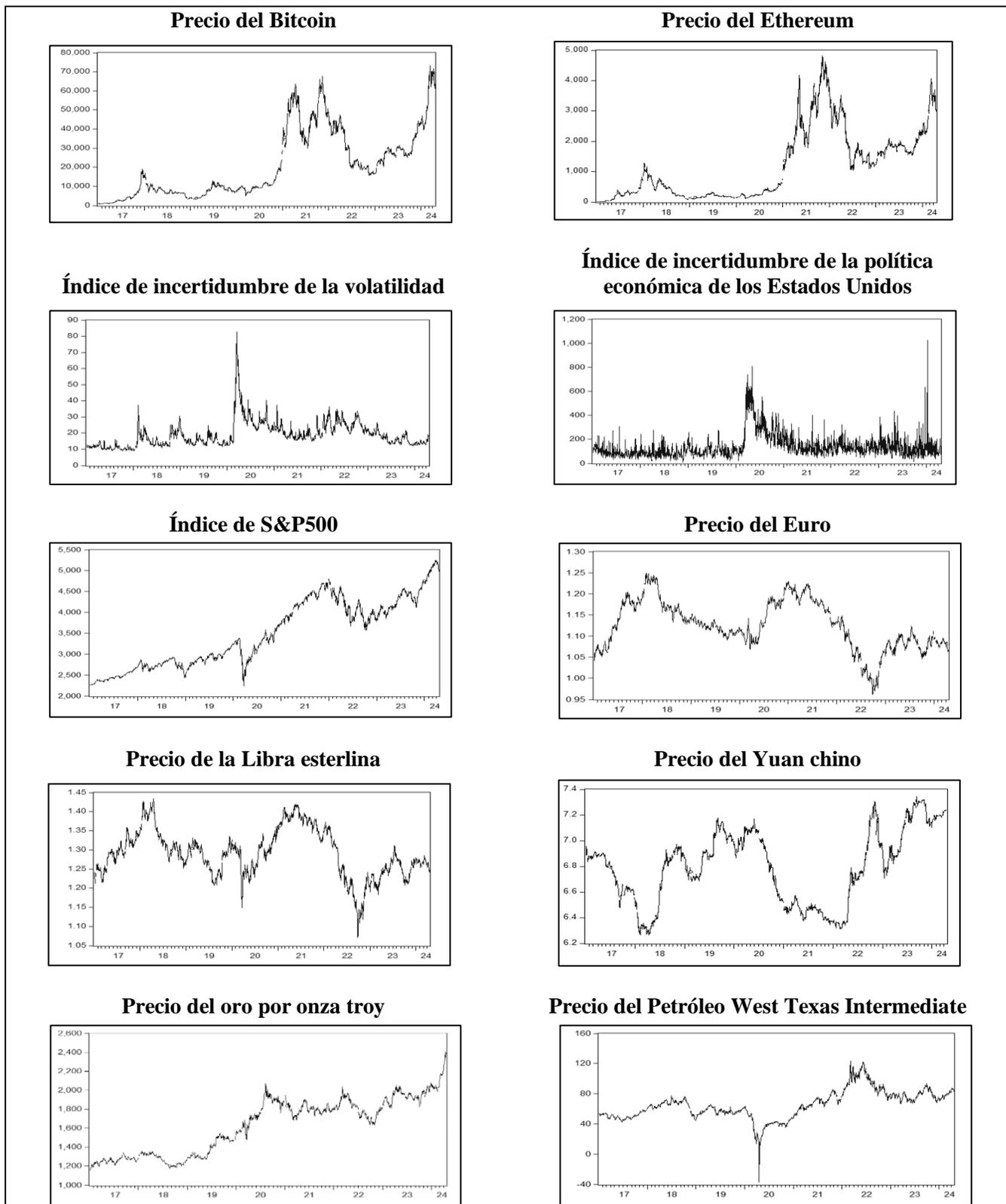
La elección de datos diarios se fundamenta en la necesidad de contar con una imagen detallada y precisa del comportamiento de la criptomoneda, esencial para capturar las sutilezas y patrones en su dinámica de mercado. Los estudios han demostrado que los datos diarios son cruciales para identificar patrones específicos, capturan las reacciones inmediatas del mercado a los eventos, ayudando a evaluar la eficiencia de la información en el mercado de Bitcoin y a entender cómo se reflejan rápidamente los precios. Asimismo, apoyan el desarrollo de modelos predictivos que utilizan datos históricos para pronosticar tendencias futuras, mejorando la precisión de las predicciones. Finalmente, los datos de rendimientos diario proporcionan información sobre la naturaleza especulativa del mercado de Bitcoin, mostrando que la volatilidad es impulsada por factores internos y externos del mercado.

En esta tesis, se llevó a cabo un análisis exhaustivo en el primer capítulo, enfocado en la revisión de la literatura relevante, con el objetivo de seleccionar las variables principales en función de su capacidad explicativa. Esta revisión permitió identificar y evaluar las variables que han demostrado mayor relevancia y poder predictivo en estudios previos relacionados con el comportamiento de activos financieros y criptomonedas. Como parte de este proceso, se exploraron ampliamente variables ligadas a las altcoins, al mercado de valores representado por el índice S&P500, y a los índices de riesgo e incertidumbre que reflejan las fluctuaciones en los mercados financieros.

Además, se incluyeron variables correspondientes a los mercados de divisas y commodities. Estos factores, que abarcan activos como el dólar estadounidense, el oro y el petróleo, ofrecen un contexto valioso para entender las dinámicas de los mercados financieros en tiempos de volatilidad e incertidumbre, sirviendo como indicadores tanto de estabilidad como de riesgo en periodos críticos. La selección de estas variables se fundamentó en su reconocimiento en estudios previos, como el de Malladi & Dheeriyaa (2021), que destacan estas categorías de activos y su respuesta ante eventos de incertidumbre y volatilidad.

Para la identificación de los principales determinantes del rendimiento y volatilidad del Bitcoin, se recopilan datos diarios del precio de esta criptomoneda respecto a la principal moneda virtual que compone las Altcoins, es decir Ethereum (ETH). Tanto Bitcoin como Ethereum se obtienen de la base de datos de la Reserva Federal de San Luis (FRED). De esta misma base de datos se han podido compilar las observaciones diarias para el índice de incertidumbre de la volatilidad (VIX) y para el índice de la incertidumbre de la política económica de los Estados Unidos. Por su parte, los datos diarios sobre el índice de S&P500 fueron extraídos de Bloomberg. Mientras que los datos de las principales monedas fiduciarias (divisas): el Euro, la Libra esterlina (GBP) y el Yuan de China y las commodities: precio del oro por onza troy y precio del petróleo West Texas Intermediate, se extraen de la plataforma Quandl, reconocida por su fiabilidad y precisión en la provisión de datos económicos y financieros. Además, su facilidad de integración con diversas herramientas de análisis como Excel, E.views y R-Project facilita la manipulación, depuración y el análisis de datos, lo cual es crucial para el análisis estadístico y econométrico requerido en esta investigación.

Figura 34. Graficas con Datos diarios de las Variables (2017-2024)



Fuente: Elaboración propia con datos reales en E-Views (Versión 12)

Además, el análisis del sentimiento de mercado⁷ fue incluido como un determinante crucial en la volatilidad de Bitcoin debido a su influencia directa. A través del índice de volatilidad VIX, que mide la expectativa de volatilidad del mercado, y que es uno de los indicadores de sentimiento más relevantes utilizado en estudios sobre Bitcoin, pues refleja el nivel de incertidumbre o "miedo" entre los inversores. Un incremento en el VIX suele estar asociado a una mayor aversión al riesgo en los mercados, lo cual tiende a aumentar la volatilidad de Bitcoin, reafirmando su carácter especulativo en tiempos de alta incertidumbre (Bouri et al., 2017).

En contextos de sentimiento negativo en el mercado, como durante crisis económicas o eventos geopolíticos importantes, los estudios han mostrado que la volatilidad del Bitcoin tiende a aumentar debido a un incremento en la actividad especulativa. Esto sugiere que los inversores ven a Bitcoin como una opción de alto riesgo y rendimiento, cuyo atractivo se incrementa en tiempos de nerviosismo financiero, pero con una volatilidad superior a la de activos tradicionales de refugio como el oro.

Esta inclusión de los factores de sentimiento de mercado en los modelos de volatilidad condicional permite una mejor precisión en las estimaciones y una comprensión más profunda de la relación entre la volatilidad del mercado y la de Bitcoin, haciendo que los análisis de rendimiento y volatilidad de esta criptomoneda sean más robustos frente a fluctuaciones en el sentimiento del mercado.

En cuanto a los datos que especifican los precios de BTC, ETH, divisas, índices de incertidumbre y mercado de valores, están disponibles los siete días de la semana, mientras que los precios del oro y los datos del VIX solo se publican en los días hábiles de negociación en EE.UU. Para proporcionar un análisis coherente y evitar discrepancias en los periodos de tiempo, se utilizan las fechas del VIX, como referencia. Esto asegura que los datos de las criptomonedas se alineen con los días de negociación estándar de los mercados financieros en EE.UU. Debido a que BTC y ETH se negocian todos los días de la semana, se eliminan

⁷ Este fenómeno, denominado "efecto de sensibilidad al sentimiento del mercado", implica que tanto las expectativas positivas como negativas en los mercados pueden influir en el comportamiento del precio y volatilidad de Bitcoin, particularmente durante eventos de alta incertidumbre. Por esta razón los modelos GARCH y GJR-GARCH que se emplean en la tesis permiten capturar la volatilidad del mercado en función de los cambios en el sentimiento, ajustando los modelos para que reflejen la variabilidad en la respuesta de la volatilidad del Bitcoin a estos cambios en el VIX y en otros indicadores de riesgo económico (EPU).

los datos de los fines de semana para estos activos, manteniendo la coherencia con los días de negociación del oro y el VIX. Esta metodología permite un análisis comparativo más preciso entre diferentes tipos de activos al asegurar que todos los datos provengan de los mismos días de negociación, evitando distorsiones debido a la eliminación de datos de fin de semana para las criptomonedas. Al sincronizar los datos en función de los días de negociación del VIX, se mejora la precisión de los modelos de rendimiento y volatilidad, especialmente en estudios sobre el impacto de eventos específicos del mercado, que típicamente ocurren en días hábiles de negociación. De esta forma la base de datos empleada comprende datos diarios desde el 3 de enero de 2017 hasta el 19 de abril de 2024, proporcionando un total de 1814 observaciones para el análisis. Esta amplia colección de datos permite realizar una evaluación detallada y precisa de los rendimientos y la volatilidad del Bitcoin.

La importancia de las estadísticas descriptivas en el análisis de los rendimientos y la volatilidad del Bitcoin es fundamental para comprender su comportamiento y los factores que los determinan. Las medidas como la media, mediana, valor máximo, valor mínimo, desviación estándar, sesgo, curtosis y el tamaño de muestra proporcionan una visión detallada de la distribución y la variabilidad de los rendimientos del Bitcoin, permitiendo realizar evaluaciones más precisas y fundamentadas. La media y la mediana ofrecen una idea del rendimiento promedio, mientras que el máximo y el mínimo revelan los extremos del comportamiento del precio. La desviación estándar es crucial para entender la volatilidad y el riesgo asociado, y el sesgo y la curtosis ayudan a identificar la asimetría y la forma de la distribución, respectivamente, lo que es esencial para modelar adecuadamente los rendimientos del Bitcoin. Dempere (2019) y Shaw (2018) utilizaron en su investigación metodologías enfocadas a la prueba Jarque-Bera con la cual lograron enfatizar que dicha prueba rechaza la presencia de una distribución normal, por lo que es necesario incorporar distribuciones como la del error generalizado o la t-Student, estableciendo que la GED da una mejor significancia.

A continuación, se presenta una tabla que proporciona estadísticas resumidas de las 10 variables incluidas en nuestro estudio, abarcando el período del 03/01/2017 al 19/04/2024.

Tabla 5. Estadísticas Descriptivas de los Rendimientos y Volatilidades de BTC y variables independientes.

	Observations	Mean	Median	Maximum	Minimum	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Jarque-Bera	Probability
BTC	1814	20770.41	11892.6	73098.48	795.77	17612.34	0.930738	2.838862	263.8656	0.00000
ETH	1814	1187.99	643.405	4805.95	9.59	1151.302	0.960167	2.968793	278.8012	0.00000
EPU	1814	137.2306	108.965	1026.38	10.92	98.99949	2.668296	13.46794	10434.81	0.00000
SP500	1814	3492.4	3357.38	5254.35	2237.4	805.9336	0.216592	1.712417	139.4904	0.00000
VIX	1814	19.02022	17.21	82.69	9.14	8.048128	2.380667	13.72506	10407.62	0.00000
EURO	1814	1.125333	1.12275	1.2488	0.9616	0.057374	-0.125395	2.590545	17.42567	0.00016
LIBRA	1814	1.290595	1.2901	1.4332	1.0703	0.062285	-0.09198	2.929004	2.938829	0.23006
YUAN	1814	6.795056	6.8412	7.343	6.2649	0.282584	-0.096159	1.95218	85.7805	0.00000
GOLD	1814	1626.523	1719.275	2401.5	1151	292.6127	-0.064947	1.674137	134.1441	0.00000
WTICO	1814	65.27103	64.275	123.64	-36.98	18.6504	0.209437	3.780056	59.25307	0.00000

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

Tal como lo indica la Tabla 5 el precio promedio del Bitcoin fue de \$ 20770.41USD durante el periodo 2017 a 2024, en cuanto a la variabilidad se observa una alta fluctuación en los precios con una desviación estándar de \$17612.34USD. Las series del bitcoin se muestran mesocúrticas⁸, mientras que el estadístico Jarque-Bera señala que los precios del Bitcoin no siguen una distribución normal y son estadísticamente significativo. Por otro lado, el precio promedio del Ethereum fue de \$1187.99 durante el mismo periodo (2017-2024), se puede observar una gran variabilidad durante este periodo con un sesgo hacia la derecha y una curtosis mesocúrtica. Según el estadístico Jarque-Bera los precios no se distribuyen en una normal, pero si son estadísticamente significativos.

Los mercados de valores, representados por índices como el S&P500, también desempeñan un papel importante, ya que los movimientos en los mercados tradicionales pueden impactar las decisiones de inversión en criptomonedas (Corbet et al., 2018). Por ejemplo, durante el periodo 2017 a 2024 el precio promedio de \$137.23, registrando como valor mínimo \$10.92 y como máximo \$1026.38, su sesgo indica que está orientado hacia la derecha además de ser

⁸ La curtosis indica el grado de concentración de una distribución alrededor de su media. Existen tres tipos de curtosis las cuales se pueden identificar de la siguiente manera: leptocúrtica (Curtosis mayor a 3), mesocúrtica (Curtosis cercana o igual a 3) y platicúrtica (Curtosis menor a 3).

leptocúrtica, para los resultados del estadístico Jarque-Bera se muestra un valor elevado en comparación con las variables presentadas.

La percepción del riesgo y la incertidumbre en el mercado y la economía, medida a través del índice de volatilidad VIX y el índice de incertidumbre de la política económica de Estados Unidos (EPU), proporciona una perspectiva sobre cómo las condiciones macroeconómicas y la incertidumbre política afectan el apetito por activos de riesgo como el Bitcoin (Baker et al., 2016). Estas variables indican fluctuaciones a través del mismo periodo (2017-2024) en donde el índice de incertidumbre de la política económica cuenta con una variabilidad más elevada que el índice de volatilidad VIX con una diferencia de \$90.95, ambos índices señalan un fuerte sesgo hacia la derecha y una curtosis leptocúrtica, por lo tanto, se determina que el índice VIX no estuvo expuesto a niveles elevados de incertidumbre económica durante este periodo.

Las divisas, incluyendo el Euro, la Libra Esterlina y el Yuan, influyen en el Bitcoin debido a su papel en el comercio internacional y las políticas monetarias de sus respectivos países (Bouri et al., 2019, Dyhrberg, 2016). Al comparar estadísticamente estas divisas el Euro destaca por su baja volatilidad en comparación con las otras monedas, seguida de la Libra esterlina y por último se encuentra el Yuan chino siendo la divisa con mayor variabilidad durante el periodo 2017-2024, para la curtosis tanto el Euro como la Libra esterlina son mesocúrticas con un sesgo ligero a la izquierda, esto debido al signo negativo con el que cuenta, en el caso del Yuan chino su sesgo presenta una inclinación hacia la izquierda pero su curtosis es platicúrtica. De manera general, se señala que cada una de estas divisas tiene una variabilidad diferente y mientras la Libra esterlina se ajusta más a una normal, el Yuan chino tiene las mayores desviaciones.

Finalmente, los *commodities* como el precio del oro y el precio del petróleo también son determinantes clave, ya que actúan como activos refugio y su fluctuación puede reflejar la confianza del mercado en relación con el Bitcoin (Dyhrberg, (2016) y Baur (2018)). De acuerdo con los estadísticos el precio promedio del oro y del petróleo es similar a lo largo de este periodo (2017-2024), en donde ambos han presentado un valor mínimo de \$ 2401.5USD y un máximo de \$ 1151USD con una volatilidad parecida para ambos activos de \$292.61USD, su sesgo es negativo mientras que su curtosis es positiva y mesocúrtica,

estableciendo que dichos activos muestran una alta volatilidad en sus precios, pero no se distribuyen normalmente.

Tabla 6. Estadísticas Descriptivas de los Rendimientos y Volatilidades de BTC y variables independientes con diferencias logarítmicas

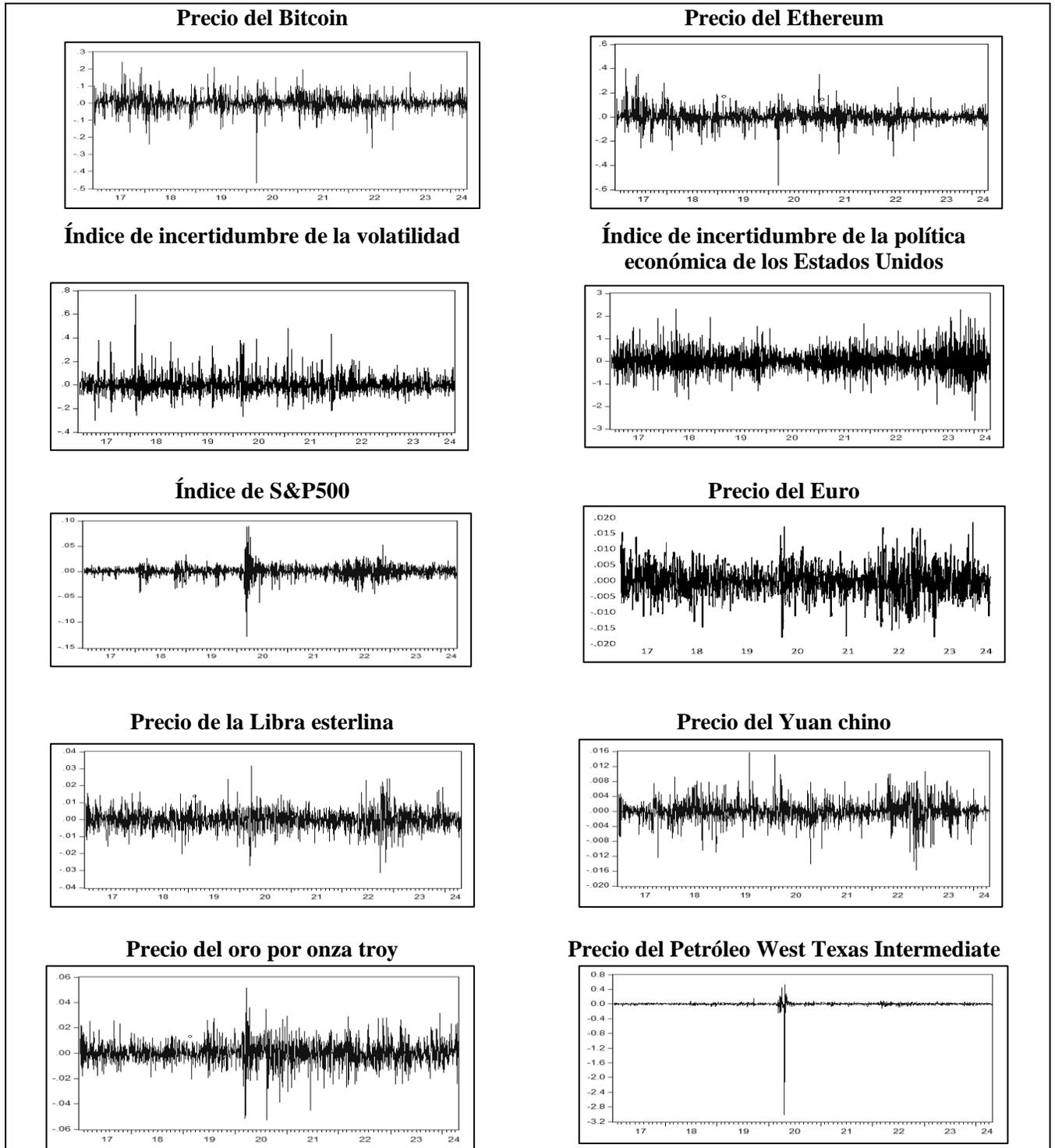
	Observations	Mean	Median	Maximum	Minimum	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Jarque-Bera	Probability
BTCR	1813	0.002281	0.002492	0.240606	-0.468625	0.046497	-0.608902	11.7364	5877.73	0.00000
ETHR	1813	0.00318	0.001014	0.399894	-0.563776	0.062396	-0.03891	11.33208	5244.834	0.00000
EPUR	1813	-0.000141	-0.011564	2.303838	-2.635148	0.524661	0.190845	4.472112	174.7129	0.00000
SP500R	1813	0.000435	0.000711	0.089683	-0.127652	0.012045	-0.888613	19.19709	20056.63	0.00000
VIXR	1813	0.000207	-0.007175	0.768245	-0.299831	0.078253	1.479744	11.76535	6465.609	0.00000
EUROR	1813	1.25E-05	-8.22E-05	0.018725	-0.017799	0.004505	0.036441	4.304223	128.8974	0.00000
LIBRAR	1813	6.31E-06	-7.80E-05	0.031547	-0.031368	0.005712	0.053449	5.748082	571.3506	0.00000
YUANR	1813	2.20E-05	0	0.015644	-0.015854	0.002769	-0.099284	7.014095	1220.178	0.00000
GOLDR	1813	0.000401	0.00017	0.051334	-0.052646	0.00877	-0.191634	6.850922	1131.35	0.00000
WTICOR	1813	-0.001146	0.002033	0.530864	-3.019661	0.08387	-27.27594	954.6097	68632400	0.00000

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

Los principales determinantes de los rendimientos y la volatilidad del Bitcoin incluyen una variedad de factores tanto internos como externos al mercado de criptomonedas. Entre estos se encuentran las altcoins, como el propio Bitcoin y otras criptomonedas, que influyen directamente en su comportamiento debido a su interrelación en el mercado digital (Kristoufek, 2015; Bouri et al., 2017).

Las estadísticas descriptivas proporcionan un marco esencial para analizar estos determinantes y sus impactos en los rendimientos del Bitcoin. Por ejemplo, al estudiar la media y la mediana de los rendimientos del Bitcoin en comparación con los movimientos del S&P500, se puede evaluar si hay una correlación entre el desempeño de los mercados de valores tradicionales y el Bitcoin. La desviación estándar, al medir la volatilidad, permite identificar períodos de alta incertidumbre y comparar esta volatilidad histórica con la de otros activos como el oro y el petróleo, proporcionando una perspectiva sobre el riesgo relativo del Bitcoin como inversión. El sesgo y la curtosis ayudan a entender si los rendimientos del Bitcoin tienen una distribución normal o presentan asimetrías y colas pesadas, lo cual es crítico para modelar adecuadamente su comportamiento y para la gestión de riesgos. Cabe recordar que:

Figura 35. Diferencias logarítmicas de los Datos diarios (2017-2024)



Fuente: Elaboración propia con datos reales en E-Views (Versión 12)

Visualmente, la volatilidad condicional puede ser identificada mediante un gráfico de serie temporal sobre los rendimientos de la variable, donde períodos de alta y baja volatilidad son visibles, mostrando agrupamientos de grandes fluctuaciones (volatilidad agrupada). Estas herramientas permiten una comprensión más profunda de las características de la serie temporal y ayudan a identificar patrones de volatilidad que pueden influir en el modelado y la predicción de los datos. Adicionalmente, el tamaño de muestra también es una consideración importante, ya que una muestra grande y representativa es esencial para obtener resultados estadísticamente significativos y confiables. Investigaciones previas (Dhyrberg, 2016; Kyriazis, 2020; Chen et al. 2021; Mallady y Dheeriya, 2021)) han utilizado estas estadísticas descriptivas para modelar los rendimientos del Bitcoin y su volatilidad, revelando patrones que son fundamentales para los inversores y los responsables de la formulación de políticas.

A continuación, se presenta la prueba de Dickey-Fuller aumentada (ADF, por sus siglas en inglés) la cual proporciona una corrección paramétrica cuando la serie sigue un proceso AR(p). Esta prueba es fundamental para detectar la presencia de raíces unitarias en series temporales y, por lo tanto, para determinar si una serie es estacionaria o no. Como alternativa, la prueba de Phillips-Perron (PP) permite controlar la correlación serial, ya que esta no afecta la distribución asintótica del estadístico de prueba PP. Ambas pruebas, ADF y PP, pueden aplicarse considerando diferentes especificaciones: con intercepto, con intercepto y tendencia determinística, o sin ninguna de estas opciones; además de los tradicionales niveles de significancia. Estas metodologías variadas nos permiten asegurar la robustez de nuestros resultados mediante el nivel de significancia del 10%, 5% o 1%.

Tabla 7. Pruebas Dickey-Fuller (ADF) y Phillips-Perron (PP)

Series	ADF	PP	Decisión
<i>A. Niveles</i>			
BTC	-0.553445	-0.628875	I (1)
ETH	-0.194126	-1.327813	I (1)
EPU	-1.776359	-28.84981 ***	I (1)
SP500	1.367129	-0.751585	I (1)
VIX	-1.572905	-4.790368 ***	I (1)
EURO	0.010762	-1.931672	I (1)
LIBRA	-0.074853	-2.525327 *	I (1)
YUAN	-1.531051	-1.174127	I (1)
GOLD	1.843320	-0.104003	I (1)
WTICO	-2.509737	-1.993224	I (1)
<i>B. Rendimientos</i>			
BTCR	-44.020680 ***	-44.17816 ***	I (0)
ETHR	-28.489950 ***	-44.07347 ***	I (0)
EPUR	-18.797170 ***	-443.2127 ***	I (0)
SP500R	-13.071050 ***	-49.7287 ***	I (0)
VIXR	-46.220340 ***	-48.19618 ***	I (0)
EUROR	-40.992810 ***	-40.99881 ***	I (0)
LIBRAR	-41.438660 ***	-41.4593 ***	I (0)
YUANR	-44.092520 ***	-44.1584 ***	I (0)
GOLDR	-43.989890 ***	-44.05454 ***	I (0)
WTICOR	-15.088240 ***	-31.61885 ***	I (0)

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

Para garantizar la estacionariedad de las series temporales utilizadas en esta tesis, se calculó la tasa de crecimiento de las series no estacionarias, denotándolas como (nombre de la variable y una “r” (por “rate”) al final). Posteriormente, se aplicaron las pruebas ADF y PP a todas las variables seleccionadas, asegurando que todas las series empleadas en el análisis fueran estacionarias, tal como lo muestra la Tabla 7 en la decisión, indicando ser no estacionaria o integrada de orden 1 (I(1)) o al contrario, ser estacionaria e identificarla como I(0). Es importante destacar que los resultados específicos de las pruebas ADF y PP fueron omitidos en el trabajo de tesis para sintetizar la información; no obstante, los datos y pruebas se encuentran a disposición en la siguiente liga: (https://drive.google.com/drive/folders/1nUZHPF7JW5zOz9Knkhtj1lCXcTmVH_Io?usp=drive_link). Sin embargo, la aplicación de estas pruebas es crucial para validar la integridad y la validez de los modelos econométricos desarrollados en esta tesis.

Por ello, una vez comprobada la estacionariedad en cada una de las variables es necesario desarrollar una matriz de correlación en la cual se puede identificar la relación lineal entre las variables como el precio del Bitcoin, altcoins, índices de mercados bursátiles (como el S&P500), indicadores de percepción de riesgo (como el VIX), índices de incertidumbre de política económica (como el EPU de Estados Unidos), divisas (Euro, Libra Esterlina, Yuan) y commodities (oro y petróleo).

Tabla 8. Matriz de Correlación

	BTCR	ETHR	SP500R	VIXR	GOLDR	LIBRAR	EUROR	YUANR	EPUR	WTICOR
BTCR	1	0.70752	0.25167	-0.209204	0.098682	0.113307	0.106272	-0.089214	-0.006429	0.041651
ETHR	-	1	0.272459	-0.224176	0.102925	0.114983	0.124153	-0.104552	-0.000155	0.035417
SP500R	-	-	1	-0.700585	0.109926	0.227707	0.138899	-0.166881	0.02127	0.118872
VIXR	-	-	-	1	0.005039	-0.120067	-0.066354	0.143016	-0.013386	-0.103186
GOLDR	-	-	-	-	1	0.301918	0.368108	-0.349886	0.015342	0.037433
LIBRAR	-	-	-	-	-	1	0.644018	-0.37909	-0.028343	0.061895
EUROR	-	-	-	-	-	-	1	-0.434316	-0.022158	0.016324
YUANR	-	-	-	-	-	-	-	1	-0.014218	-0.046153
EPUR	-	-	-	-	-	-	-	-	1	0.002951
WTICOR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

Lo primero que destaca en la matriz de correlaciones es la notable relación lineal entre los rendimientos de las dos criptomonedas, Bitcoin y Ethereum, las cuales han mostrado una alta y positiva correlación en diversos estudios empíricos (Dempere, 2019; Liu y Serletis, 2019), en el presente estudio corresponde a 0.7075. Los resultados también indican que el rendimiento de S&P 500 tiene un impacto positivo en el precio de Bitcoin. Esta es una de las variables independientes con el coeficiente más alto (0.2516), por lo que se esperaría que ejerza la mayor influencia en el precio de Bitcoin. La interpretación podría ser la siguiente: cuando el optimismo en los mercados financieros aumenta, los inversores también muestran optimismo hacia Bitcoin. Estos hallazgos están respaldados por los estudios de Yermack (2013) y Dyhrberg (2016), que demuestran cómo los mercados de valores influyen en el precio de Bitcoin.

Se identifica que las noticias relacionadas con la tasa de crecimiento del VIX tienen un poder predictivo sobre los rendimientos del precio de BTC, en este caso de -0.2092, resultados que coinciden con los obtenidos por Hamed et al. (2019), quienes demostraron que la relación BTC-VIX varía a lo largo del tiempo y en diferentes frecuencias, tanto altas como bajas.

Además, encontraron co-movimientos tanto positivos como negativos en esas frecuencias. En la investigación de Kyriazis (2020) se puede identificar que el signo de la correlación de la criptomoneda con el índice de volatilidad (VIX) es negativo. Por otra parte, se considera que el oro es un activo refugio dentro de la economía global, capaz de resguardar los portafolios frente a los riesgos asociados con inversiones alternativas. Un activo puede ser clasificado como diversificador en relación con otros activos alternativos si muestra una correlación positiva pero no perfecta con ellos, y como cobertura si no presenta correlación o si esta es negativa. La correlación muestra un signo positivo de 0.0986; no obstante, se deberá estimar el modelo econométrico para conocer el signo y la significancia de esta variable.

Respecto a los resultados para los datos diarios de la tasa de crecimiento del tipo de cambio de la libra y el euro, el signo es positivo 0.1133 y 0.1062 respectivamente. Lo cual coincide con Baur et al. (2018) y Dyhrberg (2016). Chen et al. (2021) también señalan que los tipos de cambio del euro y la libra tienen un impacto positivo en el precio de Bitcoin. Señalan además que estos son de los factores más influyentes, debido a que los inversores buscan cobertura frente a la incertidumbre causada por el Brexit y que los utilizan como indicadores de referencia.

Esta tesis amplía el trabajo de Demir, Gozgor, Lau y Vigne (2018), quienes analizaron el poder predictivo del Índice de Incertidumbre de la Política Económica de EE.UU. (EPU) sobre los rendimientos del precio de BTC utilizando un Modelo Gráfico Bayesiano para procesos Autorregresivos Vectoriales Estructurales y encontraron, al igual que en los resultados de esta investigación (-0.0064), que existe una relación negativa, lo que indica una capacidad predictiva del EPU en relación con los rendimientos de BTC. Adicionalmente incluyeron el Índice de Volatilidad del Fondo Cotizado de Petróleo Crudo (OVX) y el Índice de Riesgo Geopolítico (GPR). Por su parte, Fang et al. (2019) demostraron que los inversores en BTC pueden utilizar la información del EPU para mejorar la predicción del riesgo del precio del Bitcoin. Investigaciones previas se han centrado en los mercados financieros, mostrando que la EPU tiene una relación negativa con los rendimientos de las acciones (Chiang, 2019) y está asociada con una mayor volatilidad en las acciones (Baker et al., 2016).

Por lo tanto, en un entorno de alta EPU, los participantes del mercado buscan un activo refugio para protegerse contra estos shocks de incertidumbre.

Finalmente, se identifica una relación directamente proporcional entre los rendimientos de BTC y WTICO de 0.04165. Estos resultados son similares a los encontrados por Das y Kannadhasan (2018) quienes identifican que los precios del petróleo (WTI) están positivamente relacionados con los precios de Bitcoin en un estado de mercado alcista. La razón subyacente puede atribuirse al hecho de que los precios del petróleo son precursores de condiciones inflacionarias. La inflación devalúa las monedas fiduciarias a medida que los precios generales aumentan, y, por lo tanto, Bitcoin podría usarse como un depósito de valor con flexibilidad para la especulación.

En seguida se muestran las pruebas de causalidad de Granger con especificación Toda y Yamamoto, esto implica una relación de causa-efecto, es decir, una relación predictiva. De esta manera, Toda y Yamamoto (1995) propusieron una versión robusta de la prueba de Granger que no requiere verificar la estacionariedad de las series temporales, una condición a menudo difícil de cumplir. Por eso esta técnica implica primero identificar el mayor orden de integración de las series temporales involucradas. Luego, se estima un modelo VAR (Vector Autoregressive) de orden donde $k+d_{max}$ donde k es el orden óptimo del VAR. Este modelo incorpora rezagos adicionales, para esta investigación se utilizaron 14 días a los cuales se les aplicó el criterio de información de Akaike para ajustar las series temporales permitiendo una estimación adecuada incluso cuando las series no son estacionarias. Finalmente, se realizó una prueba de Wald sobre los coeficientes del VAR original, excluyendo los rezagos adicionales, para evaluar la causalidad de Granger. Esta metodología garantiza la validez de las inferencias estadísticamente, independientemente de la presencia de integración en las series temporales. Los resultados se muestran a continuación:

Tabla 9. Prueba de causalidad de Granger: Bitcoin, Ethereum, Índice de S&P500 y el Índice de incertidumbre de la volatilidad (VIX)

Modelo de Causalidad	Rezagos 8		Rezagos 9		Rezagos 10	
	Chi-sq	Prob.	Chi-sq	Prob.	Chi-sq	Prob.
BTCR → ETHR	23.05915	0.0033	23.31029	0.0055	24.23460	0.0070
BTCR → SP500R	15.42770	0.0513	18.99061	0.0253	20.59278	0.0241
BTCR → VIXR	8.49536	0.3866	13.65838	0.1350	13.94134	0.1757
ETHR → BTCR	14.44565	0.0709	18.90629	0.0260	27.31260	0.0023
ETHR → SP500R	15.64894	0.0477	17.73086	0.0384	20.27189	0.0268
ETHR → VIXR	8.68394	0.3697	17.62164	0.0398	19.10477	0.0390
SP500R → BTCR	9.64290	0.2910	10.80167	0.2895	11.14043	0.3467
SP500R → ETHR	4.09987	0.8480	4.19029	0.8984	5.21293	0.8765
SP500R → VIXR	20.94114	0.0073	18.46785	0.0301	21.53968	0.0176
VIXR → BTCR	11.29767	0.1854	11.57371	0.2384	14.39088	0.1559
VIXR → ETHR	9.79771	0.2795	9.82639	0.3647	10.26589	0.4175
VIXR → SP500R	12.09318	0.1471	12.31765	0.1960	15.95262	0.1010

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

4.3 Modelos de Volatilidad condicional simétrica y asimétrica para el Bitcoin

A continuación, se desarrolló el algoritmo "Automatic ARIMA Forecasting" de EViews 12 el cual ofrece múltiples ventajas para la detección del modelo ARIMA óptimo, basándose en el criterio de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC). Este algoritmo automatiza el complejo proceso de identificación, estimación y diagnóstico de modelos ARIMA, permitiendo identificar rápidamente el modelo más adecuado para las series temporal de los rendimientos del Bitcoin. Utilizando el criterio de información Bayesiano, el algoritmo evalúa diversas combinaciones de parámetros ARIMA, seleccionando aquella que minimiza el BIC, lo que garantiza una excelente compensación entre la bondad del ajuste y la parsimonia del modelo. Además, el algoritmo de EViews 12 realiza pruebas diagnósticas exhaustivas para verificar la adecuación del modelo seleccionado, incluyendo la verificación de residuos y la estabilidad del modelo. Este enfoque integral no solo ahorra tiempo y reduce la posibilidad de errores humanos, sino que también asegura la precisión y fiabilidad en las predicciones, facilitando la toma de decisiones basada en datos.

Tabla 10. Prueba Automatic ARIMA Forecasting

Variable	BTCR
Sample	03/01/2017 - 19/04/2024
Observations	1813
Forecast length	0
Number of estimate ARMA models	25
Number of non-converged estimations	0
ARMA model	(2, 2) (0, 0)
AIC value	-3.3003416509

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

En la Tabla 11 se presenta el desarrollo del modelo ARMA (2,2) sugerido por la prueba anterior, que incluye dos procesos autorregresivos y dos medias móviles. Sin embargo, los resultados indican un bajo poder explicativo. Por esta razón, se optó por generar un modelo ARMAX, tal como se muestra en la Tabla 12, donde se incorporaron variables exógenas siguiendo la sugerencia de Malladi (2021). Estas variables exógenas, identificadas como determinantes del rendimiento del precio de bitcoin, incluyen los rendimientos de la criptomoneda Ethereum y del índices bursátil S&P500, junto con un proceso autorregresivo. Como resultado, el nivel de significancia del modelo aumentó hasta aproximadamente el 50%. Además, todos los coeficientes estimados en el modelo ARMAX son estadísticamente significativos, y la prueba Durbin-Watson confirma la ausencia de autocorrelación, entre otras características relevantes.

Tabla 11. Modelo ARMA (2,2)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.664773	0.307902	2.159040	0.0310
AR(2)	0.238855	0.298866	0.799205	0.4243
MA(1)	-0.698922	0.312241	-2.238406	0.0253
MA(2)	-0.174434	0.299295	-0.582816	0.5601
SIGMASQ	0.002152	0.000033	65.091050	0.0000
R-squared	0.004154	Log-likelihood		2294.669
Adjusted R ²	0.001951	Durbin-Watson Stat.		1.995515

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

Tabla 12. Modelo ARMAX

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000533	0.000872	0.611100	0.5412
ETHR	0.516815	0.006925	74.62752	0.0000
SP500R	0.243656	0.061381	3.969562	0.0001
AR(1)	0.053271	0.012332	4.319852	0.0000
SIGMASQ	0.001068	0.000017	63.09288	0.0000
R-squared	0.505730	Prob (F-statistic)		0.000000
Adjusted R ²	0.504636	Durbin-Watson Stat.		1.998341
Log-likelihood	3629.695			

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

La identificación de efectos ARCH en los residuos es un paso crucial en la modelización de series temporales financieras, especialmente en el contexto de criptomonedas como Bitcoin, que suelen presentar alta volatilidad. Siguiendo los enfoques establecidos por Enders (2015) y Tsay (2010), la prueba de multiplicador de Lagrange (LM) de Engle se aplica para detectar la presencia de heterocedasticidad condicional autoregresiva en los residuos de los modelos ARMA y ARMAX. Esta prueba es fundamental porque permite evaluar si la varianza de los errores en el modelo es constante o si varía a lo largo del tiempo, lo que es característico de los procesos financieros volátiles.

Al encontrar efectos ARCH significativos, se justifica la transición hacia la estimación de un modelo GARCH, que permite modelar no solo la media de la serie temporal, sino también la varianza condicional. El modelo GARCH, propuesto por Bollerslev (1986), extiende el modelo ARCH al incorporar términos autoregresivos en la varianza condicional, proporcionando una mayor flexibilidad para capturar la dinámica de la volatilidad. Este enfoque es especialmente útil en el análisis de criptomonedas, donde los cambios abruptos y la alta volatilidad son comunes. Enders (2015), destaca que la utilización de modelos GARCH es apropiada en series temporales donde los choques a la volatilidad tienden a persistir, lo que se observa comúnmente en activos financieros.

Con el propósito de capturar la volatilidad en los datos utilizando un modelo ARCH, en este trabajo se aplicó la prueba considerando cinco rezagos. De acuerdo con Brooks (2014), este número de rezagos es adecuado para los mercados financieros en EE. UU., ya que corresponde a los días de negociación estándar, de lunes a viernes. De esta manera, se logra

capturar la volatilidad a lo largo de una semana completa de negociación. Es importante destacar que en cuatro de los cinco días, los resultados muestran significancia estadística, lo que permite rechazar la hipótesis nula e indica la presencia de efectos ARCH, como se muestra a continuación.

Tabla 13. Prueba de Multiplicador de Lagrange de Engle

Modelo	Rezagos	F-statistic	Prob.	Obs*R-squared	Prob. Chi-Square
ARMA	5	53.3837	0.0000	233.2728	0.0000
ARMAX	5	24.3906	0.0000	114.6029	0.0000

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

El modelo ARMAX_GARCH es una extensión natural del modelo ARMAX, diseñado para capturar no solo la relación entre las variables dependientes e independientes en la media, sino también para modelar la volatilidad condicional. Este enfoque es especialmente relevante en series temporales financieras, donde las fluctuaciones en la volatilidad pueden tener un impacto significativo en la dinámica del mercado. Al combinar un modelo de media ARMAX con un modelo GARCH, se obtiene una herramienta poderosa para analizar tanto la media como la varianza condicional de la serie temporal.

Tabla 14. Modelo ARMAX - GARCH

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000002	0.000317	0.006510	0.9948
ETHR	0.620080	0.006954	89.17244	0.0000
SP500R	0.090065	0.028003	3.216299	0.0013
AR(1)	0.036669	0.017859	2.053282	0.0400
Variance Equation				
a_0	1.37E-05	4.00E-06	3.417197	0.0006
a_1	0.148045	0.024579	6.023323	0.0000
β	0.853617	0.018868	45.24152	0.0000
GED PARAMETER	0.908549	0.03633	25.00835	0.0000
Adjusted R^2	0.485314	Akaike info criterion		-4.63304
Durbin-Watson !	1.937053	Schwarz criterion		-4.60875
Observations	1812	Hannan-Quinn criter.		-4.62408

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

Al aplicar el modelo ARMAX_GARCH e incluir la variable del índice S&P500 se obtiene un nivel de significancia al 5% además de tener signo positivo, logrando una gran similitud con el trabajo presentado por Kjaerland et al. (2018), el cual indica que el impacto significativo del precio del Bitcoin el cual espera un aumento a la par, es decir tanto del Índice S&P500 y el Bitcoin. Por otra parte, en el trabajo de Baur et al. (2018) se considera un AR(1) porque sirve para la estimación de autocorrelación de primer orden, además de complementarse con los estadísticos de la Prueba Dickey Fuller (ADF).

Tabla 15. Prueba de asimetría Engle y Ng

	t-Statistic	Prob.
Sign-Bias	-0.626739	0.5309
Negative-Bias	0.497277	0.6191
Positive-Bias	0.190914	0.8486
Joint-Bias	1.629529	0.6528

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

También se realizó una prueba de asimetría basada en el trabajo de Engle y Ng (1993), quienes proponen un análisis para identificar si los choques en los rendimientos tienen efectos diferentes sobre la volatilidad dependiendo de si son positivos o negativos. Esta prueba es esencial, ya que, en mercados financieros, las malas noticias tienden a aumentar la volatilidad más que las buenas noticias, un fenómeno conocido como "efecto apalancamiento" o "efecto de asimetría". Al incluir esta prueba, se evalúa si el modelo ARMAX_GARCH necesita ser ajustado para incorporar estos efectos asimétricos, lo que podría conducir al uso de modelos más avanzados como GJR-GARCH o EGARCH, que son extensiones diseñadas específicamente para capturar estas asimetrías. Tras realizar la prueba de asimetría, los resultados indican que la asimetría no es estadísticamente significativa en la serie temporal analizada. Este hallazgo sugiere que un modelo simétrico, como el GARCH clásico, podría ser más adecuado para capturar la volatilidad de la serie sin la necesidad de incorporar componentes asimétricos. La no significancia de la asimetría implica que las fluctuaciones de los datos no presentan diferencias notables entre los shocks positivos y negativos, por lo que un enfoque simétrico podría ofrecer una representación más precisa de la dinámica de la volatilidad.

Aunque la prueba de asimetría no resultó estadísticamente significativa, lo que podría favorecer el uso de un modelo simétrico, no se descarta la posibilidad de que modelos asimétricos como el GJR-GARCH o el E-GARCH puedan ofrecer resultados significativos en el análisis de la volatilidad. Estos modelos permiten capturar posibles efectos de asimetría que no se detectan directamente en la prueba inicial pero que podrían estar presentes bajo ciertas condiciones o en subperíodos específicos de la serie temporal. Por lo tanto, la evaluación adicional de estos modelos asimétricos podría proporcionar una comprensión más completa de las características de la volatilidad.

En el contexto de los modelos GARCH simétricos, ajustar una función de distribución de errores, como la distribución de error generalizado (GED) o la t-Student, es una práctica común para capturar adecuadamente las colas gruesas que caracterizan los rendimientos y la volatilidad de muchos activos financieros. Estas colas gruesas, que reflejan la alta probabilidad de eventos extremos, son comunes en mercados volátiles como los de criptomonedas, acciones y otros instrumentos financieros. La distribución GED ofrece flexibilidad al modelar las colas, permitiendo que estas sean más o menos gruesas dependiendo de los datos observados, lo que resulta en una representación más precisa de los riesgos extremos. Por su parte, la distribución t-Student es conocida por su capacidad para capturar colas pesadas, proporcionando una estructura que puede manejar mejor las fluctuaciones drásticas y las anomalías en los datos. Estos últimos modelos coinciden entre otros trabajos con los resultados de Chen et al. (GJR-GARCH) (2016), Chu et al. (GJR-GARCH) (2017), Naimy y Hayek (E-GARCH) (2018) Gyamera (GJR-GARCH)(2019) y Naimy et al. (GJR-GARCH)(2021)).

Tabla 16. Modelo ARMAX – GARCH simétrico con distribución GED para Bitcoin

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000042	0.000894	0.046623	0.9628
ETHR	0.624066	0.006844	91.18461	0.0000
SP500R	0.063594	0.027098	2.346861	0.0189
VIX	-0.000004	0.000042	-0.083534	0.9334
GOLDR	-0.097734	0.038043	-2.569042	0.0102
LIBRAR	0.103836	0.054790	1.89516	0.0581
EPUR	-0.001460	0.000541	-2.695732	0.0070
AR(1)	0.044335	0.017154	2.584446	0.0098
Variance Equation				
a_0	1.40E-05	4.14E-06	3.380199	0.0007
a_1	0.15249	0.025541	5.970280	0.0000
β	0.85087	0.019208	44.29877	0.0000
GED PARAMETER	0.891611	0.035286	25.26802	0.0000
Adjusted R^2	0.482376	Akaike info criterion	-4.634798	
Durbin-Watson Stat.	1.952381	Schwarz criterion	-4.598360	
Observations	1812	Hannan-Quinn criter.	-4.621352	

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

El modelo ARMAX-GARCH de la tabla 16, no cumple con las condiciones de estabilidad en los parámetros α y β , lo que sugiere que el modelo es inestable. El cumplimiento de esta condición es necesario para garantizar que la volatilidad condicional del modelo no diverja, permitiendo predicciones consistentes y fiables. Cuando los parámetros α y β suman más de uno, la varianza condicional puede crecer indefinidamente, indicando que el modelo no es adecuado para capturar la dinámica de la serie temporal. Dado este incumplimiento, es necesario explorar una estructura alternativa que no solo garantice la estabilidad del modelo, sino que también ofrezca un mejor ajuste a los datos, lo cual incluye la incorporación de nuevas variables. En este contexto, la inclusión de una distribución GED es particularmente prometedora, ya que ha demostrado ajustarse mejor a las colas gruesas observadas en los retornos de activos financieros, ofreciendo así un modelo más robusto y estable para el análisis y la predicción de la volatilidad.

Tras un análisis de los resultados del modelo, se determinó que la tasa de crecimiento del Índice de Volatilidad (VIX) no resultó estadísticamente significativo en la ecuación de la media. La insignificancia estadística de esta variable sugiere que su inclusión no contribuye de manera sustancial a explicar las variaciones del Bitcoin, lo que justifica su eliminación para simplificar el modelo y evitar la inclusión de variables redundantes. En lugar de VIXR, se ha agregado la tasa de crecimiento del precio del petróleo West Texas Intermediate (WTIR) como una nueva variable. Su inclusión se basa en la evidencia de su significancia estadística y su relevancia como factor explicativo en el comportamiento de la variable dependiente (Chen , 2020; Guesmi, 2019 y Das y Kannadhasan, 2018). La tasa de crecimiento del WTI es un indicador clave en los mercados financieros y se esperaría que su influencia en la economía global fuera relevante para incluirla en el modelo, mejorando su capacidad predictiva y ajustándose a la realidad económica analizada.

Además de los cambios en las variables explicativas, se ha realizado un ajuste en la estructura del modelo de la ecuación de la media. El proceso autorregresivo (AR) previamente utilizado ha sido sustituido por un modelo de media móvil (MA). Este cambio se debe a la observación de que el proceso MA podría capturar mejor la estructura de las series residuales. El uso del modelo de media móvil permite un mejor ajuste de los datos, al considerar directamente el impacto de los choques pasados en la variable dependiente, pudiendo resultar en un modelo más preciso y robusto.

Tabla 17. Modelo ARMAX – GARCH con distribución GED para Bitcoin

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000062	0.000306	-0.202013	0.8399
ETHR	0.624637	0.006886	90.71683	0.0000
SP500R	0.061818	0.025845	2.391857	0.0168
EPUR	-0.001483	0.000543	-2.728098	0.0064
GOLDR	-0.098760	0.038541	-2.562486	0.0104
LIBRAR	0.103521	0.054195	1.91016	0.0561
WTICOR	0.000655	0.003723	0.175999	0.8603
MA(1)	0.043418	0.017351	2.502271	0.0123
Variance Equation				
α_0	1.36E-05	4.07E-06	3.333958	0.0009
α_1	0.149089	0.025091	5.94194	0.0000
β	0.854084	0.019061	44.80801	0.0000
GED PARAMETER	0.89086	0.035284	25.24854	0.0000
Adjusted R^2	0.483474	Akaike info criterion	-4.63482	
Durbin-Watson Stat.	1.952764	Schwarz criterion	-4.59840	
Observations	1812	Hannan-Quinn criter.	-4.62138	

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

En el análisis econométrico realizado en la tabla 17, se observó que el coeficiente de pendiente asociado con la variable del rendimiento del Precio del Petróleo West Texas Intermediate (WTICO) no resultó ser estadísticamente significativo, ya que presentó un valor de t-stat de 0.1759. Este resultado indica que el rendimiento del WTICO no tiene un impacto estadísticamente relevante sobre la variable dependiente en el contexto del modelo especificado. Sin embargo, se identificó que la media móvil con un rezago de un período sí mostró una significancia estadística notable, con un t-stat de 2.5022, lo cual sugiere que los efectos de choques pasados en la serie temporal están significativamente correlacionados con los valores actuales de la variable dependiente, contribuyendo de manera sustancial a la explicación de la dinámica del modelo.

Tabla 18. Modelo ARMAX – GARCH asimétrico con distribución GED para Bitcoin

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000043	0.000321	0.134287	0.8932
ETHR	0.624412	0.006933	90.06119	0.0000
SP500R	0.075904	0.039794	1.907443	0.0565
VIXR	0.001473	0.006351	0.231893	0.8166
GOLDR	-0.089673	0.039655	-2.261323	0.0237
LIBRAR	0.120505	0.053612	2.24773	0.0246
AR(1)	0.047973	0.017536	2.735615	0.0062
Variance Equation				
a_0	1.49E-05	4.10E-06	3.632911	0.0003
a_1	0.145109	0.024589	5.90144	0.0000
β	0.853479	0.019016	44.88278	0.0000
VIXR	0.000259	0.000146	1.776415	0.0757
GED PARAMETER	0.904034	0.036195	24.97679	0.0000
Adjusted R^2	0.482810	Akaike info criterion		-4.63469
Durbin-Watson Stat.	1.959026	Schwarz criterion		-4.59825
Observations	1812	Hannan-Quinn criter.		-4.62125

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

Es muy relevante recalcar que la inclusión la tasa de crecimiento del Índice de Volatilidad (VIXR) y el S&P500 en un modelo de media permite capturar la influencia del sentimiento de los inversores en el rendimiento del Bitcoin, permitiendo así una comprensión más profunda de su patrón de comportamiento. El VIX, conocido como el "índice del miedo", es un indicador clave del sentimiento de incertidumbre en los mercados financieros, y su relación con el rendimiento del Bitcoin ha sido explorada en estudios previos, como el de Kyriazis (2020), donde se muestra que un aumento en la tasa de crecimiento VIX puede preceder un menor rendimiento en el mercado de criptomonedas. En este caso, el coeficiente es positivo (0.0014), pero no es estadísticamente significativo. No obstante, los trabajos de Kjærland et al. (2018) y López-Cabarcos et al. (2021) han demostrado que la tasa de crecimiento VIX tiene un papel crucial al modelar la volatilidad condicional del Bitcoin, sugiriendo que las variaciones en estos índices pueden ser predictores de cambios en el comportamiento de la volatilidad del Bitcoin, reflejando la percepción de riesgo y las expectativas del mercado. En la presente investigación, se ha demostrado que, para la ecuación de volatilidad, los rendimientos del VIX son significativos (), lo que implica que la volatilidad del mercado influye en la volatilidad de Bitcoin, en línea con los resultados

obtenidos por Bouri et al. (2017) y López-Cábarcos et al. (2021). Esta aproximación se alinea con la literatura existente, que destaca la interconexión entre mercados financieros tradicionales y emergentes, y subraya la importancia de considerar el sentimiento del inversor, representado por el VIX, en el análisis de activos como el Bitcoin.

Se ha demostrado que en los mercados financieros exhiben un “efecto apalancamiento”⁹, esto quiere decir que la volatilidad de un activo tiende a aumentar más significativamente en respuesta a un choque negativo que a un impacto positivo de la misma magnitud. Este efecto, identificado inicialmente en mercados bursátiles por Black (1976), sugiere que las malas noticias o las caídas en el valor de un activo incrementan más la incertidumbre que las buenas noticias o incrementos en el valor. El efecto es comúnmente modelado utilizando métodos GARCH asimétricos, como los presentados por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) (GJR-GARCH), que introducen un término asimétrico para capturar este comportamiento.

Tabla 19. Modelo ARMAX – TGARCH

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000109	0.000406	-0.268512	0.7883
ETHR	0.615170	0.007832	78.54180	0.0000
SP500R	0.075060	0.034474	2.177264	0.0295
AR(1)	0.046497	0.020898	2.224968	0.0261
Variance Equation				
a_0	1.54E-05	5.53E-06	2.786367	0.0053
a_1	0.229324	0.060624	3.782742	0.0002
γ	-8.95E-02	4.85E-02	-1.846344	0.0648
β	0.872025	0.015854	55.00357	0.0000
VIXR	0.000379	0.000217	1.745007	0.0810
T-DIST. DOF	2.698355	0.225351	11.97401	0.0000
Adjusted R^2	0.487143	Akaike info criterion	-4.63762	
Durbin-Watson Stat.	1.957373	Schwarz criterion	-4.60725	
Observations	1812	Hannan-Quinn criter.	-4.62641	

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

⁹ Existen dos teorías para explicar esta relación negativa entre rendimiento y volatilidad en acciones. La primera es la hipótesis del “apalancamiento”, que sugiere que una caída en el valor de las acciones de una empresa aumenta su riesgo, incrementando la volatilidad. La segunda es el efecto “feedback” de la volatilidad, que indica que un aumento anticipado en la volatilidad incrementa la prima de riesgo, lo que lleva a una disminución en el precio de las acciones. Este fenómeno da lugar a una volatilidad asimétrica, donde los cambios negativos en los rendimientos esperados son más intensos que los positivos (Bouri et al. 2017).

Las investigaciones de Bouri et al. (2017), Katsiampa (2017), Catania y Grassi (2017), Baur et al. (2018), Dempere (2019), y Charles y Darné (2019) señalan que el término GARCH asimétrico ($\gamma = \textit{gamma}$) tiene un coeficiente negativo y estadísticamente significativo, lo que se denominaría un efecto de apalancamiento invertido, y que contrasta notablemente con los efectos asimétricos de todos los demás activos tradicionales. El coeficiente negativo implica que los impactos positivos aumentan la volatilidad más que los negativos, y que esta asimetría es la opuesta para todos los demás activos tradicionales (acciones, bonos, etc).

La forma en que Bitcoin reacciona a las buenas y malas noticias sugiere su nivel de sensibilidad e indica cómo reaccionan los inversores ante los eventos. El modelo GJR-GARCH mostrado en la Tabla 19 explora estos efectos. El signo negativo y la significancia estadística del coeficiente γ (-0.0895) comprueba la existencia de un efecto apalancamiento inverso, esto demuestra que las buenas y malas noticias no tienen un impacto simétrico en la volatilidad del Bitcoin, similar a lo que ocurre con el oro (Hammoudeh y Yuan, 2008), lo anterior da cuenta de que la volatilidad tiende a incrementarse más significativamente en respuesta a impactos positivos que a negativos. Las variables explicativas de la ecuación de la media y la varianza presentan valores similares a los mostrados en los modelos GARCH anteriores, lo que respalda el análisis inicial.

Por ello, es importante destacar que la variable VIX con diferencia logarítmica resulto ser estadísticamente significativa al tener una R-Cuadrada de (0.4871) lo que indica la importancia de dicha variable en el modelo; mientras que en la Prueba Durbin Watson el estadístico de (1.9573) confirma la inexistencia de autocorrelación en el modelo planteado como un ARMAX_TGARCH garantizando los resultados obtenidos de este.

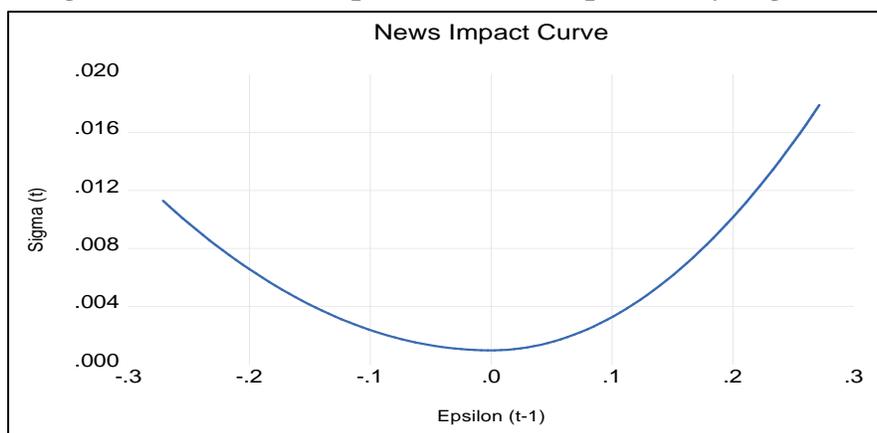
Tabla 20. Modelo ARMAX - EGARCH

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000168	0.000402	-0.416677	0.6769
ETHR	0.610186	0.007746	78.77344	0.0000
SP500R	0.081286	0.034803	2.335607	0.0195
AR(1)	0.049693	0.020944	2.372615	0.0177
Variance Equation				
a_0	-3.85E-01	6.22E-02	-6.177417	0.0000
a_1	0.343051	0.04901	6.999674	0.0000
γ	4.28E-02	2.49E-02	1.720973	0.0853
β	0.974147	0.007173	135.8008	0.0000
VIXR	0.933159	0.343531	2.716374	0.0066
T-DIST. DOF	2.752751	0.230935	11.92003	0.0000
Adjusted R^2	0.488785	Akaike info criterion	-4.64395	
Durbin-Watson Stat.	1.964467	Schwarz criterion	-4.61359	
Observations	1812	Hannan-Quinn criter.	-4.63275	

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

En el modelo E-GARCH de la tabla 20, el coeficiente gamma (γ) captura el efecto de apalancamiento o asimetría en la volatilidad. De acuerdo con Brooks (2018), si γ es negativo, indica que las noticias negativas (choques negativos) tienden a aumentar la volatilidad más que las noticias positivas de la misma magnitud, lo cual es común en muchos mercados financieros. Pero, en el caso de los mercados de criptomonedas al aparecer el mecanismo que impera es el de apalancamiento inverso, esto quiere decir que si γ es positivo (0.04284) y estadísticamente significativo, sugiere lo que noticias positivas tienen un impacto mayor en la volatilidad que las negativas. Para el rendimiento y la volatilidad del Bitcoin, esto podría sugerir que los inversores reaccionan más intensamente a las expectativas positivas, impulsando la volatilidad debido a factores como la especulación o el temor a perder oportunidades.

Figura 36. Curva de impacto de noticias positivas y negativas



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

La curva de impacto de noticias (NIC, por sus siglas en inglés) es una herramienta crucial en los modelos GARCH asimétricos que se han presentado, ya que permite identificar cómo los choques de noticias, principalmente los positivos, impactan la volatilidad condicional de un activo, en este caso, Bitcoin. Como se ha establecido por el grueso de las investigaciones y los resultados obtenidos en esta investigación se puede corroborar que el Bitcoin, dada su naturaleza y volatilidad única, exhiben un efecto de apalancamiento inverso. Es evidente que los impactos de las buenas noticias (lado derecho) generan un mayor efecto en la volatilidad, pues su impacto en la varianza es mayor si se le compara con un choque derivado de las malas noticias (lado izquierdo del eje de abscisas).

De esta forma la NIC ayuda a cuantificar este comportamiento asimétrico, lo que es esencial para la construcción de modelos de media y varianza condicionales más precisos. Por ejemplo, si se identifica que Bitcoin reacciona más intensamente a las noticias positivas, se podría ajustar el modelo para capturar este sesgo, mejorando la precisión de las previsiones de volatilidad y optimizando las estrategias de gestión de riesgos. Sin embargo, se debe señalar que el modelo GJR-GARCH asimétrico se excede, por décimas, en el cumplimiento de las condiciones de estabilidad, específicamente la condición de no explosión de la varianza condicional, cuando la suma de los coeficientes α , β , y γ es mayor a 1. Esto significa que la varianza condicional no es estacionaria y puede divergir con el tiempo, lo que implica que el modelo podría generar pronósticos inestables o volátiles, afectando la precisión y la confiabilidad del análisis econométrico. Por otro lado, el modelo E-GARCH cumple con la

condición de estacionariedad ya que se identifica que la suma de los coeficientes β asociados a los términos autoregresivos de la varianza condicional es menor que 1.

La identificación de un efecto de apalancamiento inverso en la volatilidad del Bitcoin es un hallazgo significativo que sugiere que los impactos positivos podrían tener un mayor efecto en la volatilidad del Bitcoin. Este comportamiento anómalo en la dinámica de la volatilidad de la criptomoneda puede ser reflejo de la naturaleza especulativa y altamente volátil de este activo digital. Sin embargo, a pesar de la importancia de este hallazgo, es crucial que el modelo estadístico empleado para capturar la volatilidad cumpla con las condiciones de estabilidad necesarias, en particular la estacionariedad de la varianza condicional. Esto socavaría la fiabilidad de las predicciones y la interpretabilidad de los resultados obtenidos con dicho modelo. Ante la falta de cumplimiento de las condiciones de estabilidad en el modelo inicialmente estimado, se optó por emplear un modelo GARCH simétrico. Al garantizar que los coeficientes del modelo GARCH simétrico cumplan con las condiciones de estabilidad, se asegura que las estimaciones de la volatilidad y los rendimientos sean robustas y adecuadas para el análisis de los determinantes de la volatilidad en el mercado de Bitcoin.

El modelo GARCH simétrico proporciona una base sólida para identificar los factores que influyen tanto en los rendimientos como en la volatilidad del Bitcoin, ofreciendo una interpretación más estable y fiable. Esto es especialmente relevante en el contexto de la inversión y la gestión de riesgos, donde la estabilidad y la predictibilidad de la volatilidad son cruciales para la toma de decisiones informadas. Al respecto existen investigaciones que confirman esta situación, por ejemplo, Bouri et al. (2016) investigaron la relación entre el rendimiento y la volatilidad en el mercado de Bitcoin, concluyendo que no encontraron evidencia de una relación asimétrica entre estas variables. Esto significa que los cambios en la volatilidad del Bitcoin no parecen depender de la dirección del rendimiento (es decir, si los rendimientos son positivos o negativos). Por otro lado, Akcora et al. (2018) realizaron pruebas separadas para investigar el sesgo de signo, una metodología que permite detectar asimetrías en la respuesta de la volatilidad a los rendimientos positivos y negativos. Sus resultados mostraron que la asimetría no es significativa en el mercado de Bitcoin, lo que refuerza los hallazgos de Bouri et al. (2016). La falta de significancia en el sesgo de signo

indica que la volatilidad del Bitcoin no responde de manera diferenciada a los rendimientos según su signo, lo cual es un comportamiento inusual en comparación con activos financieros más tradicionales.

4.4 Análisis de los resultados

El mercado de Bitcoin ha prosperado, en parte, gracias a la volatilidad. En particular, la frecuente manifestación de periodos de auge y caída de la criptomoneda sugiere que los rendimientos de Bitcoin están sesgados, tienen colas pesadas y se desvían significativamente de la distribución normal, y el panorama de los rendimientos del mercado de valores de EE. UU. (S&P500) no es muy diferente, tal como se ha demostrado en los resultados de la tabla 6. Bajo condiciones extremas de mercado, grandes choques pueden provocar un exceso de curtosis, lo que a su vez altera la asimetría alejándola de la marca cero e intensificando la varianza. Este fenómeno puede propagarse de un mercado a otro, además de evidenciar un creciente vínculo entre estos dos mercados, especialmente en periodos de crisis como la pandemia de COVID-19. A continuación, se presentan los principales resultados que refuerzan el análisis de los modelos de volatilidad condicional revisados en el apartado anterior, y que permiten una identificación más clara y robusta de los determinantes del rendimiento y la volatilidad del Bitcoin:

Tabla 21. Modelo ARMAX-GARCH SIMÉTRICO CON DISTRIBUCIÓN “GED”

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000004	0.000320	0.011754	0.9906
ETHR	0.624779	0.006976	89.56161	0.0000
SP500R	0.070389	0.029120	2.417198	0.0156
GOLDR	-0.085699	0.039160	-2.188455	0.0286
LIBRAR	0.121158	0.055369	2.18819	0.0287
AR(1)	0.050031	0.017629	2.837992	0.0045
Variance Equation				
α_0	1.49E-05	4.10E-06	3.632783	0.0003
α_1	0.145704	0.02466	5.908564	0.0000
β	0.853046	0.01903	44.82743	0.0000
VIXR	0.000257	0.000145	1.767912	0.0771
GED PARAMETER	0.904099	0.036187	24.98382	0.0000
Adjusted R^2	0.483052	Akaike info criterion	-4.63578	
Durbin-Watson Stat.	1.962985	Schwarz criterion	-4.60238	
Observations	1812	Hannan-Quinn criter.	-4.62345	

Los resultados presentados en la Tabla 21 revelan que, en la ecuación de la media, el rendimiento de Ethereum posee el mayor coeficiente de pendiente (0.6247), lo que indica su significativa influencia en el comportamiento de los rendimientos de Bitcoin. Además, es notable el alto nivel de significancia (89.5616), y el signo del coeficiente evidencia una relación directamente proporcional. Lo anterior coincide con los hallazgos de Ciaian et al. (2018), quienes explican que los precios de Ethereum, Litecoin, Dash, entre otros, se basan, al igual que Bitcoin, en el mismo mecanismo de PoW (Proof of Work o Prueba de Trabajo)¹⁰, lo que resulta en una relación más estrecha con el precio de Bitcoin. Los autores concluyen que los precios de Ethereum, NameCoin, NxT y SuperNET, que comparten mecanismos de formación de precios similares a los de Bitcoin (oferta, demanda, validación de transacciones), presentan una relación de cointegración más fuerte con Bitcoin en comparación con otras monedas virtuales. Como resultado, la relación con el precio de Bitcoin es positiva y estadísticamente significativa.

En esta misma línea, los resultados de Katsiampa (2019a) indican que existen interdependencias entre Ethereum y Bitcoin, y que tanto la volatilidad condicional como la correlación entre estas dos criptomonedas son sensibles a noticias importantes. Posteriormente, Katsiampa (2019b) demuestra que hay interdependencias significativas entre Bitcoin, Ether, Ripple y Litecoin (excepto Stellar Lumen), y que la volatilidad condicional es capaz de capturar efectos asimétricos entre noticias positivas y negativas, tal como se ha demostrado en los modelos de las tablas 19 y 20.

Estos resultados están estrechamente relacionados con lo mostrado en la Tabla 9 del apartado 4.2 de esta tesis, donde se evidencia la existencia de causalidad bidireccional entre Bitcoin y Ethereum. En particular, se demuestra que la causalidad de Ethereum hacia Bitcoin presenta niveles de significancia de 0.0033, 0.0055 y 0.0070 para 8, 9 y 10 rezagos, respectivamente, lo que confirma la relación de interdependencia entre estas variables. Además, la magnitud de los coeficientes sugiere que ETH tiene una mayor influencia sobre BTC que viceversa.

¹⁰ La Prueba de Trabajo es un sistema en el que los participantes de la red (mineros) compiten para resolver un problema criptográfico. Este problema implica realizar cálculos computacionales intensivos para encontrar un hash válido (una secuencia de caracteres que representa una suma de verificación) que cumpla con ciertos requisitos predeterminados. El primer minero en encontrar una solución válida recibe una recompensa en forma de bitcoins recién generados y las tarifas asociadas con las transacciones incluidas en el bloque que están validando (Nakamoto, 2018).

Estos hallazgos son coherentes con los trabajos de Hagemann (2018), Masiak et al. (2018) y Sifat et al. (2019), quienes también evidencian una causalidad bidireccional entre Bitcoin y Ethereum, siendo este último estudio realizado con datos diarios de las cinco criptomonedas principales.

Otro de los resultados importantes es que la tasa de crecimiento del S&P500 ha demostrado ser estadísticamente significativa al nivel del 5%, lo que indica una relación real entre los rendimientos del S&P500 y los precios de Bitcoin. Además, esta relación presenta un signo positivo. Específicamente, se observa que por cada aumento del 1% en el rendimiento del S&P 500, el precio de los Bitcoins tiende a incrementarse en un 7.03%. Este hallazgo sugiere que el mercado de criptomonedas, particularmente el de Bitcoin, podría estar influenciado de manera significativa por el comportamiento de los mercados de valores tradicionales, reflejando una interconexión creciente entre estos activos financieros. La interpretación puede ser la siguiente: cuando el optimismo en los mercados financieros aumenta, los inversores también muestran optimismo en Bitcoin. Dado que el riesgo, medido en desviación estándar, es mayor en Bitcoin que en el S&P500 (tabla 4), es probable que los inversores en Bitcoin busquen asumir riesgos. Estos hallazgos también están respaldados por los estudios de Dyhrberg (2016) y Kjærland et al. (2018), en los cuales se observa que los mercados de valores tienen un impacto en el precio de Bitcoin. Cabe mencionar que el modelo final muestra que el miedo en los mercados financieros, medido por el VIX, no tiene un impacto significativo en el rendimiento de Bitcoin.

En relación con la tercera variable de la ecuación de la media, se puede afirmar, basándose en la matriz de correlaciones de la Tabla 8, que existe una relación positiva entre los rendimientos de Bitcoin y los del precio del oro para una frecuencia diaria a lo largo de todo el período, según los coeficientes de correlación de Pearson. Estos resultados son consistentes con los encontrados por Dyhrberg (2016) y Baur et al. (2018), aunque es importante destacar que, al igual que en esta investigación, dicha correlación no es muy elevada. El modelo ARMAX-GARCH simétrico con distribución GED señala que por cada aumento del 1% en el rendimiento del oro, el precio de los Bitcoins tiende a disminuir en un 8.5%. Esta relación puede explicarse por el hecho de que los inversores interpretan el aumento en los precios del

oro como un indicio de mayor incertidumbre macroeconómica, lo que impulsa a muchos a refugiarse en el oro, considerado un activo seguro.

De acuerdo con Kyriazis (2020) en los recientes años en los que Bitcoin ha sido negociado activamente, no ha habido conflicto en la conexión entre Bitcoin y el oro. Esto sugiere que Bitcoin podría compartir algunas de las características de refugio seguro que encarna el oro, las cuales son particularmente útiles durante épocas de tensión. Por lo tanto, de acuerdo con el coeficiente negativo y estadísticamente significativo (-2.1884) que presenta el rendimiento del oro se identifica como un instrumento de cobertura. Esta evidencia es acorde con los resultados de Bouri, et al. (2017) quienes mencionan que Bitcoin es una gran cobertura y refugio seguro cuando el índice de materias primas enfrenta turbulencias, especialmente en el período anterior al colapso. Algunos estudios también encuentran que Bitcoin puede considerarse un refugio seguro o una cobertura contra los riesgos del mercado de valores en ciertos momentos (Fang et al., 2019).

En relación con la conexión entre el rendimiento de Bitcoin y las principales monedas fiduciarias (Libra Esterlina, Euro y Yuan), la Tabla 8 revela que la Libra Esterlina muestra la mayor correlación entre los tres tipos de cambio, siendo esta positiva. En el modelo de la media, la Libra Esterlina presenta el segundo mayor coeficiente de pendiente, el cual es estadísticamente significativo al 5%. Específicamente, se observa que un aumento del 1% en el rendimiento del tipo de cambio de la Libra Esterlina tiende a incrementar el precio de Bitcoin en un 12.11%. Estos hallazgos son consistentes con la investigación de Dyhrberg (2016), quien empleó el modelo GARCH para estudiar si Bitcoin comparte propiedades con el oro, utilizando variables macroeconómicas que previamente se había demostrado que afectan al oro, como los tipos de cambio dólar-euro y dólar-libra esterlina como variables independientes.

También coincide con los resultados de Chen et al. (2021) quienes al igual que en el presente trabajo de investigación emplearon datos diarios para un tamaño de muestra similar y encontraron que la libra esterliona tienen un impacto positivo en el precio de Bitcoin. El estudio utilizó además técnicas actuales de aprendizaje automático (*machine learning*) de alta precisión para encontrar que uno de los factores más influyentes son los tipos de cambio

Euro/GBP y USD/GBP, debido a que los inversores buscan una cobertura ante la incertidumbre causada por el Brexit.

Los resultados de esta investigación indican una relación positiva entre el precio de Bitcoin y su rezago (AR(1)) y que su significancia estadística se comprueba inclusive al 1%. Esta relación señala que un incremento del 1% en el rendimiento del día anterior, se estima que el precio del rendimiento de Bitcoin tiende a incrementar su rendimiento presente en un 5.0%. Este es un resultado muy relevante que sugiere que la hipótesis del mercado eficiente¹¹ aparentemente no se cumple. Los rendimientos pasados no deberían estar correlacionados con los rendimientos presentes, y una estrategia de inversión basada en rendimientos pasados no debería ser rentable. Sin embargo, se sabe que la hipótesis del mercado eficiente es ampliamente cuestionada. Kjørland et al. (2018), atribuyen las imperfecciones en los mercados financieros a errores en el razonamiento humano y en el procesamiento de la información. Dado que la mayoría de los inversores probablemente tienen una experiencia limitada con Bitcoin, el contexto que lo rodea es confuso, y hay demasiada información nueva que considerar en muy poco tiempo; los inversores deben tomar decisiones rápidas sobre si invertir o no. Por lo tanto, es razonable suponer que los inversores están influenciados por el efecto de impulso de los precios en aumento y viceversa. Se podría interpretar que observar el aumento de precios del día anterior alimenta la demanda y crea un impulso en el precio. Combinado con la teoría del impulso, se puede pensar en términos de la teoría del "mayor tonto", en la cual, a medida que el precio aumenta rápidamente, los inversores ven un potencial de enriquecimiento rápido al comprar ahora y vender a un "tonto mayor" la próxima semana (Kjørland et al., 2018).

Los resultados de esta investigación son coincidentes con las evidencias presentadas por Urquhart (2016), quien sostiene que “en un mercado eficiente, los precios futuros no son previsible y las variaciones son aleatorias debido a la naturaleza estocástica de los eventos impredecibles, por lo que los precios siguen una caminata aleatoria” (pg. 81). Para comprobar

¹¹ La hipótesis del mercado eficiente (HME, por sus siglas en inglés), desarrollada por Eugene Fama en 1970, sostiene que los precios de los activos financieros reflejan toda la información disponible, lo que implica que no es posible obtener consistentemente rendimientos superiores al promedio ajustados por riesgo mediante el análisis técnico o fundamental. Según esta hipótesis, las variaciones de precios solo ocurren en respuesta a nueva información, que se incorpora de manera inmediata y completa en los precios de los activos, haciendo que cualquier intento de predecir movimientos de precios sea inútil (Fama, 1970).

que esta hipótesis se cumple o no para los rendimientos del bitcoin emplea una batería de pruebas (autocorrelación de los rendimientos, prueba de rachas y la prueba de Bartels) para determinar si los rendimientos son independientes. Los resultados señalaron que los rendimientos del Bitcoin son persistentemente ineficientes, y que esta característica puede ser atribuida a su condición como activo en desarrollo, lo que lo hace susceptible a los vaivenes de los mercados emergentes. En definitiva, los hallazgos de esta tesis amplían estudios previos que tratan sobre la dinámica de precios intradía en el mercado de bitcoin, así como su eficiencia/ineficiencia (Urquhart, 2016; Nadarajah & Chu, 2017; Tiwari et al. 2019). Se demuestra una contradicción de la hipótesis de mercado eficiente en su forma débil en varias criptomonedas importantes, por lo que hallazgos pueden ser relevantes para los traders en esas criptomonedas que pueden basarse en estos modelos para evaluar su utilidad en las criptomonedas principales, como Ethereum.

En lo que respecta a la ecuación de la varianza, BTCR representa el rendimiento de Bitcoin en el tiempo "t", α_0 representa la intersección, α_1 se refiere al efecto ARCH, que mide el impacto de las noticias recientes en la volatilidad, y β indica el efecto GARCH. Las estimaciones del coeficiente ARCH para el modelo de la tabla 21 son estadísticamente significativas a un nivel de 1%, lo que indica que la volatilidad de los rendimientos de Bitcoin en el día anterior influye en la volatilidad de Bitcoin. Las estimaciones del coeficiente GARCH también son significativas al 1%, lo que indica que la volatilidad del día anterior influye en la volatilidad de Bitcoin. De esta manera, es posible concluir que el modelo GARCH(1,1) es adecuado para modelar la volatilidad de Bitcoin. Los resultados también señalan que la volatilidad del rendimiento del mercado de Bitcoin está afectado linealmente por información simétrica. La suma de los coeficientes estimados de ambos parámetros fue menor que la unidad, lo que garantiza que el modelo es estable. Sin embargo, se encontró que el rendimiento del mercado de Bitcoin es insignificante en respuesta a la información asimétrica, la cual fue capturada por el coeficiente del efecto de apalancamiento, el parámetro gamma (γ), tanto para noticias buenas como malas, lo que indica la ausencia de dicho efecto.

Un aspecto relevante para la determinación de la volatilidad del Bitcoin es que el índice de volatilidad de los mercados (VIX) presenta un efecto positivo (0.000257) y estadísticamente significativo al 10%. El índice VIX es un indicador crucial que mide la volatilidad del

mercado y el sentimiento de los inversores. Representa la expectativa del mercado sobre la volatilidad en el índice S&P 500 durante los próximos 30 días. El índice VIX, a menudo referido como el “índice del miedo”, ayuda a los inversores a evaluar el nivel de riesgo y las posibles fluctuaciones de precios en el mercado. Un valor más alto del VIX indica una mayor incertidumbre en el mercado, mientras que un valor más bajo sugiere más estabilidad. Los resultados aquí presentados coinciden con los presentados por López Cabarcos et al. (2021) y Bouri et al. (2017), al señalar que la volatilidad del mercado influye en la volatilidad de Bitcoin.

Otro aspecto notable es que se realizaron pruebas para determinar si las innovaciones que mejor definen la función de densidad de probabilidad son de tipo Gaussianas, t-student o errores generalizados GED, para lo cual se utilizaron los criterios de información de Akaike y Bayesiano. Los resultados comprueban que el modelo con mejor ajuste, además de cumplir con las condiciones de estabilidad, es el tipo GED, además de que presentó las mejores estimaciones. En esta misma línea de pensamiento, Nelson (1991) recomendó el uso del modelo GARCH con la distribución de error generalizada (GED) basado, en que una distribución de error t-Student puede implicar una varianza incondicional infinita para los errores; por lo tanto, la GED, que acomoda colas más gruesas que la distribución de error normal, podría ayudar a aumentar la curtosis y reducir la autocorrelación de las observaciones al cuadrado.

Finalmente se presentan los resultados del diagnóstico para garantizar que el modelo ha capturado correctamente la volatilidad. En la tabla 21 se el resultado para el modelo ARMAX – GARCH simétrico con distribución GED que, al realizar la prueba con 7 rezagos, es decir 7 días se puede identificar que no existen efectos GARCH en el modelo anteriormente presentado. Enders (2015) menciona que la longitud de rezagos depende si son óptimos o no los rezagos y entre más corta la longitud se suelen omitir resultados favorables.

Tabla 22. Prueba de Heteroscedasticidad

Modelo	Rezagos	F-statistic	Prob.	Obs*R-squared	Prob. Chi-Square
ARMAX -GARCH	7	0.4354	0.8804	3.0562	0.8798

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en E-VIEWS (Versión 12)

Finalmente, entre los resultados relevantes se tiene que este último modelo explica de manera óptima a los rendimientos de Bitcoin a través de variables como las atasa de crecimiento de ethereum, s&p500, el oro, la libra esterlina y un proceso autorregresivo de orden uno. Al estimar la bondad de ajuste todas las pruebas resultan estadísticamente significativas y de acuerdo con las principales investigaciones realizadas en esta área. El modelo simétrico para la media y la varianza condicional con distribución GED muestra un elevado coeficiente de determinación ($R^2=0.4844$), lo que sugiere una mayor capacidad explicativa en comparación con estudios previos en esta área (Baur et al., 2018; Katsiampa, 2019). Además, la prueba de Durbin-Watson (1.9629) confirma la ausencia de autocorrelación en los residuos del modelo, lo que refuerza la validez de los resultados y la robustez del modelo para capturar la volatilidad asimétrica en el mercado de criptomonedas.

4.5 Conclusiones

El análisis exhaustivo del rendimiento y la volatilidad del Bitcoin revela una compleja intersección de factores económicos y financieros que han influido en su evolución desde su creación en 2009. Nacido en un contexto de crisis financiera global, el Bitcoin se ha consolidado como un activo financiero significativo, exhibiendo una tendencia alcista notable entre 2017 y 2024, pero también caracterizado por una volatilidad extrema que desafía las estructuras financieras tradicionales.

La volatilidad del Bitcoin ha sido un foco central de investigación, con numerosos estudios empleando modelos GARCH y sus variantes tanto simétricas como asimétricas para capturar y predecir su comportamiento errático. Investigaciones como Katsiampa (2017) y Kyriazis (2020) han identificado que los modelos como el ARCH asimétrico proporcionan un considerable ajuste para estimar la volatilidad del Bitcoin. Sin embargo, la condición de estabilidad debe ser comprobada y en la presente investigación se demostró que los modelos GARCH asimétricos no garantizaban la convergencia del modelo. Al respecto autores como Bouri et al. (2016) y Akcora et al. (2018) coinciden en que los cambios en la volatilidad del Bitcoin no parecen depender de forma simétrica de las buenas o malas noticias.

Los determinantes del rendimiento y la volatilidad del Bitcoin son diversos y complejos. La interacción con otros activos financieros, como altcoins (especialmente Ethereum), mercados

de valores (S&P500), divisas principales (euro, libra esterlina, yuan) y commodities (oro y petróleo), ha sido ampliamente estudiada. La evidencia sugiere que el Bitcoin mantiene relaciones dinámicas con estos activos, influenciado por factores como la percepción del riesgo (VIX), la incertidumbre económica global (EPU) y eventos geopolíticos. Estudios como los de Corbet et al. (2018) y Das y Kannadhasan (2018) han mostrado cómo estos índices, impactan significativamente en el comportamiento del Bitcoin.

A pesar de los avances en la comprensión del comportamiento del Bitcoin, persisten discrepancias y áreas que requieren investigación adicional. La continua evolución del mercado de criptomonedas y la creciente integración del Bitcoin en los sistemas financieros globales subrayan la necesidad de estudios más profundos y modelos más sofisticados para capturar su comportamiento. La comprensión profunda de su rendimiento y volatilidad es esencial no solo para los inversores y gestores de carteras, sino también para reguladores y académicos que buscan comprender y navegar en el panorama financiero en constante cambio que las criptomonedas han introducido.

El presente trabajo ha tenido como objetivo desarrollar una revisión exhaustiva de la literatura más representativa, reconocida y actualizada respecto al análisis del rendimiento y la inestabilidad del bitcoin, mediante modelos de volatilidad condicional autorregresiva, tanto simétricos como asimétricos. También se han expuesto de manera pormenorizada la metodología de modelos autorregresivos y de medias móviles con componentes exógenos (ARMAX), para la correcta identificación del comportamiento de los rendimientos de Bitcoin. Para complementar la exposición se ha desarrollado un modelo que explica la varianza condicional, es decir, la volatilidad de la criptomoneda a través de estructuras simétricas y asimétricas que consideran la distribución que mejor se adecue al comportamiento de colas pesadas que exhibe la moneda virtual.

Las estadísticas descriptivas revelan una alta volatilidad y fluctuaciones significativas en los precios del Bitcoin, con una media de \$20,770.41 y una desviación estándar de \$17,612.34. Estas características subrayan la naturaleza especulativa y riesgosa del Bitcoin, lo que es consistente con la literatura previa que señala que las criptomonedas suelen exhibir un comportamiento de cola más pesado y no siguen una distribución normal. El análisis de correlación muestra una relación significativa entre el Bitcoin y Ethereum, con una correlación positiva alta, lo que indica una interrelación estrecha entre estas dos

criptomonedas. Además, el S&P500 también muestra un impacto positivo en el precio de la moneda virtual, sugiriendo que el optimismo en los mercados tradicionales se refleja en un aumento del interés por el Bitcoin. En este mismo sentido, las pruebas de causalidad de Granger, implementadas con la metodología Toda y Yamamoto, confirman la existencia de relaciones predictivas entre las variables mencionadas y el Bitcoin.

Utilizando herramientas avanzadas como el algoritmo "Automatic ARIMA Forecasting" de EViews 12, basándose en el criterio de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC), e incorporando las variables exógenas que la revisión de la literatura señala, y complementando la estructura con modelos GARCH, GJR-GARCH y E-GARCH, se ha estimado la complejidad de la volatilidad del Bitcoin. En una primera instancia uno de los hallazgos más relevantes es la identificación de un "efecto de apalancamiento inverso" en la volatilidad del Bitcoin, lo que implica que las noticias positivas tienen un impacto mayor en la volatilidad que las negativas, una característica que contrasta con la mayoría de los activos financieros tradicionales, donde las malas noticias suelen generar mayor volatilidad. Este efecto es capturado en los modelos GJR-GARCH y E-GARCH, aunque estas estructuras no cumplen con la condición de estabilidad, para la estacionariedad de la varianza condicional. En este contexto, se concluye que un modelo GARCH simétrico, ajustado con una distribución de error generalizado (GED) o t-Student, proporciona una base más estable y robusta para el análisis de la volatilidad del Bitcoin.

De manera más detallada se explica el procedimiento de los modelos presentados principalmente fueron presentados con un modelo ARMA (2,2) (Tabla 11) en donde el valor dado era de bajo poder explicativo, por lo que la mejor alternativa fue desarrollar un modelo ARMAX (Tabla 12) y poder utilizar variables que tuvieron una mayor correlación como lo fue Ethereum y S&P500, además de complementarlo con un autorregresivo AR(1) dado que este tuvo mayor significancia en el modelo ARMA(2,2) y explica mejor la eficiencia que tiene el Bitcoin dentro del mercado.

Posteriormente, al modelo asimétrico ARMAX se le incorpora la varianza, sin embargo, la sumatoria entre $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ es diferente a 1, dando paso a desarrollar varios modelos simétricos incluyendo la mayoría de las variables tal como se presenta en la Tabla 16, pero se muestra como un modelo inestable; siendo esta la razón por la cuál en la Tabla 17 se sustituye el

autorregresivo AR(1) por una media móvil MA(1) al igual que VIX por el precio del petróleo (WTICO) para verificar que pueda arrojar datos explicativos; siendo estas variables incluidas en el último modelo las menos significativas.

Dados los resultados anteriores, el modelo ARMAX-GARCH fue aplicado nuevamente cambiándolo la media móvil por un AR(1) y eliminando el índice de incertidumbre de la política económica de EE.UU. e incorporando nuevamente al VIX debido a que éste es aún más relevante; además de incorporarlo en la varianza esperando resultados cruciales al modelar la volatilidad.

Para los resultados finales se aplicó un modelo asimétrico (Tabla 19) descartando las variables que no son significantes, en la cual solo permanecen las variables más relevantes y con mayor correlación entre las que se encuentra Ethereum, S&P500 y un AR(1); para la varianza se incorpora gamma para capturar mejor el comportamiento del efecto apalancamiento lo que implica que las buenas y malas noticias no tienen un impacto simétrico en la volatilidad. Finalmente se incorpora un modelo asimétrico E-GARCH (Tabla 20), el cual captura mejor el apalancamiento aumentando la volatilidad en caso de noticias negativas.

Al aplicar un modelo simétrico (Tabla 21) con variables en la media como Ethereum, S&P500, oro, Libra esterlina y un AR(1), mientras que en la varianza se incluye nuevamente la variable VIX, los resultados son relevantes en comparación a la correlación presentada en la Tabla 9 lo que confirma la interdependencia de las variables.

Los hallazgos para la ecuación de la media confirman que la volatilidad del Bitcoin no muestra un comportamiento asimétrico, es decir, no varía significativamente dependiendo de si los rendimientos son positivos o negativos. Estudios previos, como los de Bouri et al. (2016) y Akcora et al. (2018), respaldan esta conclusión, indicando que el mercado de Bitcoin se caracteriza por una respuesta volátil uniforme (simétrica), independientemente de la dirección de los rendimientos. El análisis revela una significativa interdependencia entre Bitcoin y Ethereum, destacando que el alto coeficiente de pendiente asociado al rendimiento de Ethereum indica que los movimientos en su precio tienen un impacto directo y proporcional sobre Bitcoin. Este hallazgo se alinea con estudios previos (Ciaian et al., 2018; Katsiampa, 2019a; Katsiampa, 2019b; Hagemann, 2018; Masiak et al., 2018; y Sifat et al.,

2019) que señalan que ambas criptomonedas, al compartir mecanismos similares de formación de precios y validación de transacciones, presentan una relación de cointegración robusta.

Otro de los principales resultados de la tesis es que, al igual que Dyhrberg (2016) y Kjærland et al. (2018), se comprueba que existe una relación significativa entre los rendimientos del índice S&P500 y del Bitcoin. Este hallazgo indica que el optimismo en los mercados de valores podría trasladarse al mercado de Bitcoin, impulsando su precio. Además, aunque el riesgo en Bitcoin es mayor que en el S&P500, los inversores parecen dispuestos a asumir ese riesgo en un entorno financiero favorable. Por su parte, se identifica una relación negativa y estadísticamente significativa entre los rendimientos del oro y el precio de Bitcoin, lo cual es coherente con la literatura existente sobre la función del oro como activo refugio. Este resultado sugiere que, en tiempos de incertidumbre macroeconómica, los inversores podrían preferir refugiarse en el oro en lugar de en Bitcoin, lo que impulsa una salida de capital de las criptomonedas hacia activos más tradicionales y seguros (Bouri, et al. (2017); Fang et al., 2019).

La investigación también revela una relación positiva y significativa que va del rendimiento de principales monedas fiduciarias al Bitcoin, en particular la Libra Esterlina, lo que coincide con los resultados en contrados por Dyhrberg (2016) y Chen et al. (2021). También se revela una relación positiva y estadísticamente significativa entre el precio de Bitcoin y su propio rezago, lo cual contradice la hipótesis del mercado eficiente en su forma débil, esta anomalía puede ser atribuida a las imperfecciones en los mercados financieros, que a menudo son el resultado de errores en el razonamiento humano y en el procesamiento de la información, debido principalmente a que los inversores minoristas (que generalmente se asume que son no informados o poco sofisticados) son particularmente activos en estos mercados (Fink y Johann, 2014; Oyedele, 2017), lo que da oportunidades de arbitraje o estrategias de inversión basadas en patrones pasados que podrían ser explotadas por traders, tal como lo argumentan Urquhart(2016), Nadarajah y Chu (2017) y Kjærland et al. (2018).

La hipótesis de mercado eficiente (EMH, por sus siglas en inglés) es uno de los pilares fundamentales de las finanzas, desarrollada por Fama (1970) y distingue entre tres formas de eficiencia, siendo la más comúnmente examinada la forma débil, en la cual se considera que

un mercado es eficiente en su forma débil si los inversores no pueden utilizar la información pasada para predecir rendimientos futuros. La EMH en su forma débil ha sido ampliamente examinada en la literatura para muchos activos financieros tradicionales, así como para productos básicos (Kristoufek y Vosvrda, 2014). Sin embargo, son pocas las investigaciones que abordan el tema para bitcoin, de aquí la importancia del presente trabajo de tesis. Es probable que Bitcoin se vuelva más eficiente con el tiempo a medida que más inversores lo analicen y negocien.

Los hallazgos relacionados con la ecuación de la varianza muestran que la volatilidad del Bitcoin es afectada de manera simétrica por las noticias, es decir, tanto las buenas como las malas noticias tienen un impacto similar en la volatilidad, lo que se refleja en la no significancia del coeficiente del efecto de apalancamiento (γ). Este hallazgo sugiere que, a diferencia de otros activos financieros donde se observa un efecto de apalancamiento (donde las malas noticias aumentan la volatilidad más que las buenas noticias), Bitcoin no presenta esta asimetría, pero tampoco exhibe un efecto apalancamiento inverso.

Otro hallazgo clave, en la medición de la volatilidad, es que un aumento en la incertidumbre del mercado, reflejado por un VIX más alto, tiende a incrementar la volatilidad del Bitcoin, lo que refuerza la percepción de Bitcoin como un activo altamente sensible a las fluctuaciones en el sentimiento del mercado. Este resultado está alineado con investigaciones previas que han destacado la correlación entre la volatilidad del mercado y la volatilidad del Bitcoin, como los estudios de Bouri et al. (2017). Finalmente, las pruebas de ajuste del modelo indican que la distribución de error generalizado (GED) proporciona el mejor ajuste para capturar las colas gruesas en la distribución de los rendimientos del Bitcoin y que es más adecuada que la t-Student o la distribución normal para modelar series temporales con eventos extremos y alta volatilidad, características típicas de los mercados de criptomonedas.

Finalmente, se destaca que los hallazgos de esta tesis son de gran relevancia para responsables de políticas¹², reguladores, funcionarios de bancos centrales, académicos y estudiantes interesados en la eficiencia del mercado. En los últimos años, las autoridades de los bancos centrales han dirigido su atención en el rápido crecimiento y la considerable influencia de Bitcoin, la principal criptomoneda, lo que ha llevado a su constante vigilancia y escrutinio para evaluar su idoneidad como parte del sistema financiero global.

Trabajos futuros:

Los trabajos futuros en el análisis del rendimiento y la volatilidad del Bitcoin deberían centrarse en varios aspectos clave. Primero, es necesario explorar la eficacia de modelos más avanzados que puedan captar mejor las dinámicas no lineales y las interacciones complejas entre Bitcoin y otros activos financieros, tales como los modelos GARCH Multivariados que además garanticen el cumplimiento de las condiciones de estabilidad, proporcionar predicciones más robustas, que consideren su comportamiento de colas pesadas, la naturaleza especulativa de su mercado y que garanticen el cumplimiento de las condiciones de estabilidad. En segundo lugar, las investigaciones futuras deberan profundizar en la relación entre Bitcoin y otros activos refugio, como el oro, en diferentes contextos macroeconómicos, así como examinar la influencia de factores externos como la política económica global y los eventos geopolíticos en la volatilidad del Bitcoin. En tercer lugar, es crucial investigar la hipótesis de eficiencia del mercado del Bitcoin, utilizando una variedad de pruebas y modelos que puedan desafiar o confirmar esta teoría en su forma débil, dado que los resultados actuales indican que los rendimientos del Bitcoin podrían no seguir un patrón de caminata aleatoria. Finalmente, se recomienda estudiar el impacto de la integración creciente de las criptomonedas en los sistemas financieros tradicionales, y cómo podría afectar la volatilidad y el comportamiento a largo plazo del Bitcoin, especialmente en un entorno de incertidumbre creciente reflejado en índices como el VIX.

¹² *Las políticas recomendadas se basan en estudios que, al igual que esta tesis, examinan tanto su rendimiento como su volatilidad, así como en la comprensión de su relación con otros activos. Tal como el Desarrollo de un Marco Regulatorio para Criptomonedas puede incluir la regulación de plataformas de intercambio, la creación de estándares para la custodia de activos digitales y el establecimiento de lineamientos para combatir la manipulación del mercado destaca las áreas en las que se necesita intervención regulatoria, se requiere una regulación para prevenir prácticas que amplíen la volatilidad, especialmente en contextos de alta incertidumbre económica (Lee, 2020).*

BIBLIOGRAFÍA

- Akcora, C. G., Dixon, M. F., Gel, Y. R., & Kantarcioglu, M. (2018). Bitcoin risk modeling with blockchain graphs. *Economics Letters*, 173, 138–142.
- Al-Khazali, O., Bouri, E., & Roubaud, D. (2018). The impact of positive and negative macroeconomic new surprises: Gold versus Bitcoin. *Economics Bulletin*, 38, 373–382.
- Altamirano Vásquez, M., López Castro, E. M., Santamaría Vicarte, G. V., & Hernández Trejo, L. (2020). The impact of volatility on the functionality of cryptocurrencies. *Interconectando Saberes*, (9). <https://doi.org/10.25009/is.v0i9.2659>
- Al-Yahyaee, K. H., Rehman, M. U., & Mensi, W. (2019). The impact of economic policy uncertainty on Bitcoin returns and volatility. *Finance Research Letters*, 29, 250-257. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.03.011>
- Al-Yahyaee, K. H., Rehman, M. U., Mensi, W., & Al-Jarrah, I. M. W. (2019). *Can uncertainty indices predict Bitcoin prices? A revisited analysis using partial and multivariate wavelet approaches*. 49, 47–56.
- Baker, S.R., Bloom, N., Davis, S.J., 2016. Measuring economic policy uncertainty. *Quarterly Journal of Economics*, 131 (4), 1593–1636.
- Balcilar M, Bouri E, Gupta R, Roubaud D (2017) Can volume predict Bitcoin returns and volatility? A quantiles-based approach. *Econ Model* 64:74–81. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2017.03.019>
- Baur, D. G., & Lucey, B. M. (2010). Is Gold a Hedge or a Safe Haven? An Analysis of Stocks, Bonds and Gold. *Wiley* , 45, 217–229.
- Baur, D. G., Dimpflb, T., & Kuckc, K. (2018). Bitcoin, gold and the US dollar – A replication and extension. *Finance Research Letter*, 25, 103–110. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2017.10.012>

- Baur, Dirk G., and Thomas K.J. McDermott. 2012. Safe haven assets and investor behavior under uncertainty. Institute for International Integration Studies. Available online: <https://rbnz.govt.nz/-/media/>
- Bekaert, G., & Hoerova, M. (2014). The VIX, the variance premium and stock market volatility. *Journal of Econometrics*, 183(2), 181–192.
- Bhaskar, P., & Central Bank of Bangladesh, Dhaka, India. (2023). Cryptocurrency and central bank digital currency: an insight from the regulatory perspective. *INTERNATIONAL JOURNAL OF FINANCIAL STUDIES, ECONOMICS AND MANAGEMENT*, 2(3), 25–35.
- Bogle John C. (2017). *Cómo invertir en fondos de inversión con sentido común: Nuevos imperativos para el inversor inteligente*. Estados Unidos: Deusto
- Böhme, R., Christin, N., Edelman, B., & Moore, T. (2015). Bitcoin: Economics, Technology and Governance. *Journal of Economic Perspectives*, 29, 213–238.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
- Bottou, L. (2010). Large-scale machine learning with stochastic gradient descent. In *Proceedings of COMPSTAT'2010* (pp. 177-186). Physica-Verlag HD.
- Bououyour, J., & Selmi, R. (2015). What Does Bitcoin Look Like? *Annals of Economics and Finance*, 16, 449–492.
- Bouri, E., Molnár, P., Azzi, G., Roubaud, D., & Hagfors, L. I. (2017). On the hedge and safe haven properties of Bitcoin: Is it really more than a diversifier? *Finance Research Letters*, 20, 192-198.
- Bovas, A., & Ledolter, J. (2009). *Statistical Methods for Forecasting*. John Wiley and Sons.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C. , (2015) "Time Series Analysis: Forecasting and Control." Wiley
- Brockwell, P. J. & Davis, R. A. (1991). *Times series: Theory and methods*. Springer
- Brockwell, P.J., Davis, R.A. (2016). "Introduction to Time Series and Forecasting." Springer

- Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge University Press.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., & MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- Catania, L., & Grassi, S. (2017). Modelling Crypto-Currencies Financial Time-Series. *Electronic Journal*.
- Cermak, V. (2017). Can Bitcoin Become a Viable Alternative to Fiat Currencies? An Empirical Analysis of Bitcoin's Volatility Based on a GARCH Model. *Skidmore College Saratoga Springs, NY*, 1–52.
- Charles, A., & Darné, O. (2019). Volatility estimation for Bitcoin: Replication and robustness. *International Economics*, 157, 23–32.
- Cheng, J. (2023). “Modelling and forecasting risk dependence and portfolio VaR for cryptocurrencies”. *Empir*, 65:899-924. <https://doi.org/10.1007/s00181-023-02360-7>
- Chiang, T.C., 2019. Economic policy uncertainty, risk and stock returns: evidence from G7 stock markets. *Finance Res. Lett.* 29 (C), 41–49.
- Chu, J., Chan, S., Nadarajah, S., & Osterrieder, J. (2017). GARCH Modelling of Cryptocurrencies. *Journal of Risk and Financial Management*, 10(4), 17.
- Corbet, S., Lucey, B., & Yarovaya, L. (2018). Datestamping the Bitcoin and Ethereum bubbles. *Finance Research Letters*, 26, 81-88.
- Corbet, S., Lucey, B., & Yarovaya, L. (2018). Datestamping the Bitcoin and Ethereum bubbles. *Finance Research Letters*, 26(2017), 81–88. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2017.12.006>
- Corbet, S., Lucey, B., Urquhart, A., & Yarovaya, L. (2019). Cryptocurrencies as a financial asset: A systematic analysis. *International Review of Financial Analysis*, 62, 182-199.
- Cowpertwait, P. S. P., & Metcalfe, A. V. (2009). *Introductory Time Series with R*. Springer.

- Cryer, J. D., & Chan, K. S. (2008). *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer.
- CYin, L., Zhang, G., & Gao, H. (2023). Estimation of ARMAX processes with noise corrupted output signal observations. *Journal of the Franklin*, 360(2021), 8363
- Das, D., & Kannadhasan, M. (2018). Does global factors impact bitcoin prices? Evidence from wavelet approach. *Journal of Economic Research*, 23, 227–264.
- Davidson, J. & MacKinnon, J.G. (2004). "Econometric Theory and Methods." Oxford University Press.
- Davidson, J. (2018). *An Introduction to Classical Econometric Theory*. John Wiley & Sons.
- De Sarmiento Seixas, F. H., & da Silva, C. G. (2019). METODOLOGIAS ECONOMÉTRICAS ARMAX E VAR APLICADAS À ARRECADAÇÃO TOTAL DO ESTADO DE GOIÁS: UMA ANÁLISE DA ACURÁCIA PREDITIVA. *Revista económica Mackenzie*, 16(2019), 105–132.
- Demir, E., Gozgor, G., Lau, C. K., & Vigne, S. A. (2018). Does economic policy uncertainty predict the Bitcoin returns? An empirical investigation. *Finance Research Letters*, 26, 145–149.
- Diebold, F. X., & Mariano, R. S. (1995). Comparing Predictive Accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253-263.
- Dimitrios Koutmos, 2020. "Market risk and Bitcoin returns," *Annals of Operations Research*, Springer, vol. 294(1), pages 453-477, November.
- Dyrberg, A. H. (2016a). Bitcoin, gold and the dollar a garch volatility analysis. *Finance Research Letters*, 16 , 85–92 .
- Dyrberg, A. H. (2016b). Hedging capabilities of bitcoin. is it the virtual gold? *Finance Research Letters*, 16 , 139–144 .
- Enders, W. (2015). *Applied Econometric Time Series*. John Wiley & Sons.
- Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. *Econometry*. *Europeand Business Law Review*, 2020, 423–445.

- Fang, L., Bouri, E., Gupta, R., & Roubaud, D. (2019). Does economic policy uncertainty forecast gold returns? New evidence from a nonparametric causality-in-quantiles test. *Resources Policy*, 62, 345-352. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2019.03.014>
- Fang, Libing & Bouri, Elie & Gupta, Rangan & Roubaud, David, 2019. "Does global economic uncertainty matter for the volatility and hedging effectiveness of Bitcoin?," *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, vol. 61(C), pages 29-36.
- Francq, C., & Zakoïan, J. M. (2010). *Garch Modelos: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. John Wiley & Sons.
- Ghysels, E., & Marcellino, M. (2018). *Applied Economic Forecasting Using Time Series Methods*. Oxford University Press.
- Göttfert, J. (2019). *A cointegration analysis of Bitcoin, Bitcoin Cash, EOS, Ethereum, Litecoin and Ripple*. Springer.
- Granger, C. W. J., & Newbold., P. (1974). *Forecasting Economic Time Series*. Cambridge University Press.
- Greene, W. H. (2003). *Econometric Analysis*. Prentice Hall.
- Gronwald, M. (2019). Is Bitcoin a Commodity? On price jumps, demand shocks, and certainty of supply. *Journal of International Money and Finance*, 97, 86–92.
- Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2009). *Econometría (Quinta Edición)*. McGraw-Hill.
- Hagemann, D., 2018. . A Time Series Analysis of Crypto Currency Price Data. disponible en: <https://www.kennesaw.edu/coles/centers/markets-economic-opportunity/docs/hagemann-paper.pdf>
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hayes, A. (2017). Cryptocurrency value formation: An empirical study leading to a cost of production model for valuing bitcoin. *Telematics and Informatics*, 37, 1308–1321.
- Heij, C., Boer, P., Franses, P. H., Kloek, T., & Van Dijk, H. K. (2004). *Econometric Methods with Applications in Business and Economics*. Oxford University Press.
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting: principles and practice*. OTexts.

- Iheke, D., & Lin, B. (2020). Crude oil price and cryptocurrencies: Evidence of volatility connectedness and hedging strategy. *Energy Economics*, 87(2019). <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2020.104703>
- Iqbal, A. S. (2018). Volatility. Practical Options Theory. Wiley Finance Series.
- Jareño, F., de la O González, M., Tolentino, M., & Sierra, K. (2020). Bitcoin and gold price returns: A quantile regression and NARDL analysis. *Resources Policy*, 67, 101666.
- Kang, S. H., McIver, R. P., & Hernandez, J. A. (2019). Co-movements between Bitcoin and Gold: A wavelet coherence analysis. *Physica A*, 536, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.04.124>
- Kapar, B., & Olmo, J. (2020). Analysis of Bitcoin prices using market and sentiment variables. *Research in International Business and Finance*, 54, 101275.
- Kasper, D. (2017), “Evolution of bitcoin-volatility comparisons with least developed countries”, *Currencies*, available at: <https://ssrn.com/abstract=3052207>
- Katsiampa, P. (2017). Volatility estimation for Bitcoin: A comparison of GARCH models. *Economic Letters*, 158, 3–6. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2015.10.008>
- Katsiampa, P., 2019a. Volatility co-movement between Bitcoin and Ether. *Finance Res. Lett.* 30, 221–227.
- Katsiampa, P., 2019b. An empirical investigation of volatility dynamics in the cryptocurrency market. *Res. Int. Bus. Finance* 50, 322–335.
- Khmaladze, E. V. (1981). Martingale Approach in the Theory of Goodness-of-fit Tests. *Theory of Probability & Its Applications*, 26(2), 240-257.
- Kjærland, F., Khazal, A., Krogstad, E. A., & Nordstrøm, F. B. G. (2018). An Analysis of Bitcoin’s Price Dynamics. *Journal of Risk and Financial Management*, 11. <https://doi.org/10.3390/jrfm11040063>
- Kristoufek, L. (2015). What Are the Main Drivers of the Bitcoin Price? Evidence from Wavelet Coherence Analysis. *PLoS one*, 10. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0123923>

- Kumar, A. S., & Anandarao, S. (2019). Volatility spillover in crypto-currency markets: Some evidences from GARCH and wavelet analysis. *Physica* , 524, 448–458. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.04.154>
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54(1-3), 159-178.
- Kyriazis, N. (2020). Is Bitcoin Similar to Gold? An Integrated Overview of Empirical Findings. *Journal of Financial Risk Management*, 13. <https://doi.org/10.3390/jrfm13050088>
- Lee, J., & L'heureux, F. (2020). A regulatory framework for cryptocurrency. *Journal*
- Levendis, J. D. (2018). *Time Series Econometrics. Learning Through Replication*. Springer.
- López-Cabarcos, M., Pérez-Pico, A. M., Piñeiro-Chousa, J., & Šević, A. (2021). Bitcoin volatility, stock market and investor sentiment. Are they connected? *Finance Research Letters*, 38. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.101399>
- Lütkepohl, H., & Krätzig, M. (2004). *Applied Series Econometrics*. Cambridge University Press.
- Malladi, R., & Dheeriya., P. (2021). Time series analysis of Cryptocurrency returns and volatilities. *Journal of Economics and Finance* , 45(2021), 75–95.
- Masiak, C., Block, J.H., Masiak, T., Neuenkirch, M., Pielen, K., 2018. The triangle of ICOs, bitcoin and ethereum: a time series analysis. *SSRN Electron. J.* <https://doi.org/10.2139/ssrn.3248888>
- Mensi, W., Al-Yahyaee, K. H., & Kang, S. H. (2019). Structural breaks and double long memory of cryptocurrency prices: A comparative analysis from Bitcoin and Ethereum. *Finance Research Letters*, 29, 222–230.
- Monsegny, M. C., & Cuervo, E. C. (2008). Modelos ARCH, GARCH Y EGARCH: Aplicaciones a Series Financieras. *Scientific Electronic Library Online*.
- Muncharaz, J. O. (2013). *Modelización de la volatilidad condicional en índices bursátiles*. Universitat Politecnica de Valencia.
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer.

- org/10.2139/ssrn.3198694.
- Osterrieder J, Lorenz J (2017) A statistical risk assessment of Bitcoin and its extreme tail behavior. *Ann Financ Econ* 12(01):1750003. <https://doi.org/10.1142/S2010495217500038>
- Osterrieder, J., & Lorenz, J. (2017). A Statistical Risk Assessment of Bitcoin and its Extreme Tail Behavior. *Annals of Financial Economics*, 12. <https://doi.org/10.1142/S2010495217500038>
- Pal, D., & Mitra, S. (2019). Hedging bitcoin with other financial assets. *Finance Research Letters*, 30, 30–36.
- Percival, D. B., & Walden, A. T. (2006). *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- Phillip, A., Chan, J., & Peiris, S. (2018). A new look at Cryptocurrencies. *Economics Letters*, 163, 6-9.
- Phillips, P.C.B., Perron, P. (1988), "Testing for a Unit Root in Time Series Regression." *Biometrika*.
- ReserveBank/Files/Publications/Seminars%20and%20workshops/feb2012/4682207.pdf (accessed on 14 January 2018).
- Ruud, P. A. (2000). *An Introduction to Classical Econometric Theory*. Oxford University Press.
- Sajeev, K. C., & Afjal, M. (2021). Contagion effect of cryptocurrency on the securities market: a study of Bitcoin volatility using diagonal BEKK and DCC GARCH models. *SN Business & Economics*, 57, 1–21. <https://link.springer.com/article/10.1007/s43546-022-00219-0>
- Sapuric, S., Kokkinaki, A., & Georgiou, I. (2022). The relationship between Bitcoin returns, volatility and volume: asymmetric GARCH modeling. *Journal of Enterprise Information Management*, 35(6), 1506–1521.
- Shahzad, S. J. H., Bouri, E., Roubaud, D., Kristoufek, L., & Lucey, B. (2019). Is Bitcoin a better safe-haven investment than gold and commodities? *International Review of Financial Analysis*, 63, 322-330.

- Shumway, R. H., & Stoffer, D. S. (2011). *Times Series Analysis and Its Applications with R Examples (Third Edition)*. Springer.
- Smales, L. A. (2019). Bitcoin as a safe haven: Is it even worth considering? *Finance Research Letters*, 30, 385-393.
- Sukono, Lesmana, E., Susanti, D., Napitupulu, H., & Hidayat., A. Y. (Eds.). (2019). Estimation of Value-at-Risk Adjusted under the Capital Asset Pricing Model Based on ARMAX-GARCH Approach (Vol. 15, Número 1). *Jurnal Matematika Integratif*.
- Toda, H. Y., & Yamamoto, T. (1995). "Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes." *Journal of Econometrics*, 66(1-2), 225-250.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons.
- Tsay, R. S. (2013). *An Introduction to Analysis of Financial Data with R*. John Wiley and Sons.
- Urquhart, A. (2016). The inefficiency of Bitcoin. *Economics Lett*, 148, 80–82. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2016.09.019>
- Urquhart, A., & Zhangb, H. (2019). Is Bitcoin a hedge or safe haven for currencies? An intraday analysis. *International Review of Fin*, 63, 49–57. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2019.02.009>
- Videgaray, M. C. G. (2011). *Pronósticos: Metodología de Box-Jenkins*. Universidad Nacional Autónoma del México.
- Wang, P., Zhang, H., Yang, C., & Guo, Y. (2021). Time and frequency dynamics of connectedness and hedging performance in global stock markets: Bitcoin versus conventional hedges. *Research in International Business and Finance* , 58(2021), 101479
- White, H. (1982). Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 50(1), 1-25.
- Wooldridge, J. M. (2009). *Introducción a la Econometría. Un enfoque moderno*. Cengage Learning.
- Wu, S., Tong, M., & Yang, Z. (2019). Does Gold or Bitcoin Hedge Economic Policy Uncertainty? *Finance Research Letters*, 31, 171–178.

- Yermack, D. (2015). Chapter 2 - Is Bitcoin a Real Currency? An Economic Appraisal. *Handbook of Digital Currency*, 31–43.
- Yi S, Xu Z, Wang GJ (2018) Volatility connectedness in the cryptocurrency market: is Bitcoin a dominant cryptocurrency? *Int Rev Financ Anal* 60(December 2018):98–114. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2018.08.012>
- Yildırım, H., Bekun, F.V. (2023). Predicción de la volatilidad de los rendimientos de bitcoin con los modelos ARCH, GARCH y EGARCH. *Futur Bus J* 9, 75