Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Conexidad Local en hiperespacios con la Topología de Fell

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Edith Enríquez González

ASESORES:

DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ÁLVARADO

TOLUCA, MÉXICO 5 DE NOVIEMBRE DE 2024

Índice general

1. Preliminares **6**

1.1. Notación básica 6

1.1.1. Propiedades de los conjuntos Vietoricos 10

1.1.2. Topología de Vietoris 14

1.1.3. La topología de Fell 19

2. La topología de Fell **24**

2.1. Propiedades en hiperespacios 24

2.2. Conexidad de $(C(X), \tau_F)$ y $(C_K(X), \tau_F)$ 34

3. Conexidad local en hiperespacios **36**

3.1. Algunas propiedades en $(C_K(X), \tau_F)$ y $(C(X), \tau_F)$ 36

3.2. Conexidad local en $(C_K(X), \tau_F)$ y $(C(X), \tau_F)$ 42

Introducción

En 1962, Fell introdujo la topología τ_F, ahora llamada Topología de Fell, sobre la colección 2^X de todos los subconjuntos cerrados, incluído el conjunto vacío, de un espacio topológico X, ésta topología ha demostrado ser más útil en términos de aplicaciones particularmente hay aplicaciones en la optimización, el análisis convexo, la economía matemática, la teoría de la probabilidad y la teoría de las capacidades.

Este trabajo consta de tres capítulos, los contenidos de estos se resumen de la siguiente manera: En el Capítulo 1, introducimos conceptos topológicos básicos, los cuales nos servirán a lo largo de la tesis. En el Capítulo 2, nos involucramos con la Topología de Fell y las propiedades en hiperespacios con dicha topología. En el Capítulo 3 estudiamos más afondo resultados como:
Para un espacio localmente compacto, de Hausdorff X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) X es conexo en pequeño en x.

b) $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo en pequeño en $\{x\}$.

c) $(C(X), \tau_F)$ es conexo en pequeño en $\{x\}$.

Además son equivalentes las siguientes condiciones:

e) X es conexo en pequeño en x.

f) $(C(X), \tau_F)$ es conexo en pequeño en $\{x\}$.

Finalmente mostraremos que estás últimas también son equivalentes:

(i) X es localmente conexo;

(ii) $(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo;

(iii) $(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo en cada $E \subset C_K(X)$.

Siendo estos algunos de los más importantes dentro de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notación básica

Sean Z un conjunto y $A \subset Z$. Denotamos por A^c al complemento del conjunto A, en algunas pruebas usaremos el símbolo $Z \setminus A$ para denotar el complemento de A ya que el otro símbolo puede causar alguna confusión, sin embargo en algunos casos el símbolo A^c es pertinente para denotar el complemento de un conjunto. Denotamos por $\mathbb{P}(Z)$ al conjunto potencia de Z.

Sea Z un espacio topológico con topología τ. Sea $Y \subset Z$. Denotamos por $\tau|_Y$ a la topología relativa a Y. Los símbolos $\operatorname{cl}(A)_Z$, $\operatorname{Int}(A)_Z$ denotan la cerradura y el interior de un conjunto A en Z. En caso de no haber confusión del espacio base, usaremos la siguiente notación $\operatorname{cl}(A)$, $\operatorname{Int}(A)$.

El símbolo $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales.

Lema 1.1. *Sea $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un conjunto numerable. Entonces $F(D) = \{A \subset D : A \text{ es finito y no vacío}\}$ es numerable.*

Demostración. Definamos la función $\varphi : \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k \longrightarrow F(D)$ como

$$\varphi(a) = \begin{cases} \{x_a\}, & \text{si } a \in \mathbb{N}, \\ \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}, & \text{si } a = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k, k \geq 2. \end{cases}$$

Claramente φ está bien definida. Probaremos que φ es suprayectiva. Para $k = 1$ y $x_i \in D$, se tiene que $\varphi(i) = \{x_i\}$. Para $k \geq 2$ y $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} \in F(D)$, se tiene que $\varphi((i_1, \ldots, i_k)) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$. Como $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ es numerable, $F(D)$ es numerable. $\square$

El siguiente teorema es conocido en la literatura.

Teorema 1.2. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es localmente conexo si y sólo si cada componente de cada conjunto abierto es un abierto.*

Definición 1.3. *Un espacio X es* **numerablemente compacto***, si toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.*

Lema 1.4. *Sea (Z, τ) un espacio topológico.*

1. *Si $A \subset Z$ no tiene puntos de acumulación, entonces para todo $B \subset A$ no vacío, B no tiene puntos de acumulación.*

2. *Si $A \subset Z$ no tiene puntos de acumulación, entonces A es un subespacio discreto de Z.*

Demostración. Para probar 1., sea $B \subset A$, no vacío. Sea $b \in Z$. Supongamos que b es un punto de acumulación de B. Sea $U \in \tau$ tal que $b \in U$. Entonces $U \setminus \{b\} \cap B \neq \emptyset$. De donde $\emptyset \neq U \setminus \{b\} \cap B \subset U \setminus \{b\} \cap A$. Así, b es un punto de acumulación de A, lo cual es una contradicción. Por lo tanto B no tiene puntos de acumulación.

Para probar 2., sea $a \in A$. Probaremos que $A \setminus \{a\}$ es cerrado en Z. Por 1., $A \setminus \{a\}$ no tiene punto de acumulación. Así, $A \setminus \{a\}$ es cerrado en Z. Dado que $Z \setminus (A \setminus \{a\}) = (Z \setminus A) \cup \{a\}$ es abierto en Z, $(Z \setminus (A \setminus \{a\})) \cap A = \{a\}$ es abierto en A. $\square$

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [7, Teorema 1.I, p. 15].

Proposición 1.5. *Si A es un conjunto infinito no vacío, entonces $|A| < |\mathbb{P}(A)|$.*

La demostración del siguiente resultado se puede consultar [5, Teorema 7.1, p. 15].

Teorema 1.6. *Sea B un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:*

1. *B es numerable*

2. *Existe una función suprayectiva* $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow B$

3. *Existe una función inyectiva* $f : B \longrightarrow \mathbb{Z}_+$

Proposición 1.7. *Sea X un espacio topológico. Si X es segundo numerable, entonces X es separable.*

Demostración. Sea $\beta = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$ una base numerable. Sea $D = \{x_i : x_i \in U_i\}$. Claramente D es numerable. Sean U un abierto no vacío en X y $x \in U$. Como β es una base, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_i \subset U$. Así, $U \cap D \neq \emptyset$. Por lo tanto D es denso en X. $\square$

Proposición 1.8. *Sea X un espacio métrico. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *X es separable*

2. *X es segundo numerable.*

Demostración. Solo probaremos 1. implica 2., ya que la pureba de 2. implica 1., se sigue de la Proposición 1.7.

Sea $D \subset X$ numerable y denso en X. Consideremos $\beta = \{B(z, \frac{1}{n}) : z \in D, n \in \mathbb{N}\}$. Claramente β es numerable. Para probar que β es una base, sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Probaremos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $z \in D$ tales que $x \in B(z, \frac{1}{n}) \subset B(x, \epsilon)$. Por la propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Como D es denso en X, $B(x, \frac{1}{n}) \cap D \neq \emptyset$.

Sea $z \in B(x, \frac{1}{n}) \cap D$ Entonces $d(z, x) < \frac{1}{n}$. Así $x \in B(z, \frac{1}{n})$. Para ver que $B(z, \frac{1}{n}) \subset B(x, \epsilon)$, sea $y \in B(z, \frac{1}{n})$. Dado que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \epsilon$, $y \in B(x, \epsilon)$. De donde $B(z, \frac{1}{n}) \subset B(x, \epsilon)$. Con lo anterior, $B(z, \frac{1}{n}) \in \beta$ y cumple con lo requerido. Así, β es una base numerable. Por lo tanto X es segundo numerable. $\square$

Definición 1.9. *Decimos que un espacio topológico (X, τ) es **localmente compacto** si para cada $x \in X$ y todo abierto V de X con $x \in V$, existe una vecindad compacta G de x tal que $G \subset V$.*

Proposición 1.10. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si y sólo si cada punto de X posee una vecindad compacta.*

Proposición 1.11. *Si X es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces X es regular.*

Definición 1.12. *Una **cadena simple** es una colección finita numerada de subconjuntos de un espacio topólogico, no vacía, $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, se tiene que $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$. Si $\mathcal{L}$ es una cadena, se dice que $\mathcal{L}$ es una cadena de L_1 a L_n, y si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, se dice que $\mathcal{L}$ es una cadena de x a y. A cada elemento de L_i, se le llama **eslabón** de $\mathcal{L}$.*

Teorema 1.13. *Sean X un espacio topológico conexo y $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de X, entonces existe una cadena simple, cuyos eslabones son miembros de $\mathcal{U}$ que conectan a x con y.*

Demostración. Sea $x \in X$. Definimos el siguiente conjunto:

$$D = \{z \in X : \text{existe una cadena simple } \{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U} \text{ de } x \text{ a } z\}.$$

Dado que $x \in X$ y $\bigcup \mathcal{U} = X$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, así $\{U\}$ es una cadena simple que va de x a x. Por lo que $x \in D$. Lo que implica que $D \neq \emptyset$. Demostraremos que D es un abierto y cerrado. Primero veamos que D es abierto.

Sean $z \in D$ y $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ una cadena simple con $x \in U_1$ y $z \in U_n$. Observemos que para todo $t \in U_n$ se tiene que $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una cadena simple que va de x a t, por lo que $t \in D$. Así, $z \in U_n \subset D$. Esto prueba que D es abierto.
Para probar que D es cerrado, sean $p \in \mathrm{cl}\,(D)$ y $U \in \mathcal{U}$ tal que $p \in U$. Entonces $U \cap D \neq \emptyset$.

Sea $t \in U \cap D$. Entonces existe una cadena simple $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\} \subset \mathcal{U}$ que va de x a t. Dado que $t \in U_m \cap U$ y $p \in U$, $\{U_1, \ldots, U_m, U\} \subset \mathcal{U}$ es una cadena simple que va de x a p. Así, $p \in D$. Por lo que $\mathrm{cl}\,(D) \subset D$ y $D = \mathrm{cl}\,(D)$. Por lo anterior, D es un abierto y cerrado en X. Dado que X es conexo y $D \neq \emptyset$, $D = X$.
Por lo tanto existe una cadena simple, cuyos eslabones son miembros de $\mathcal{U}$ que conectan a x con y. $\square$

Definición 1.14. *Un espacio compacto, conexo y de Hausdorff es llamado **continuo**.*

Lema 1.15. *Sean X un espacio localmente compacto, localmente conexo, de Hausdorff y $U \subset X$ abierto y conexo. Si K es un subconjunto compacto de X tal que $K \subset U$, entonces existe un subcontinuo L de X tal que $K \subset Int(L) \subset L \subset U$.*

Demostración. Sea K un compacto en X tal que $K \subset U$. Como X es regular (por la Proposición 1.11), para todo $x \in U$, existe un abierto V'_x tal que $x \in V'_x \subset \mathrm{cl}(V'_x) \subset U$.

Usando que X es localmente compacto, para todo $x \in U$, existe una vecindad V_x de x tal que $\mathrm{cl}(V_x)$ es un compacto y $V_x \subset V'_x$. Dado que X es localmente conexo, para todo $x \in U$, existe una abierto conexo W_x tal que $x \in W_x \subset \mathrm{Int}(V_x)$. Observemos que para todo $x \in U$ $\mathrm{cl}(W_x)$ es un compacto. Claramente la familia $\mathcal{U} = \{W_x : x \in U\}$ es una cubierta abierta de K y de U. Como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in U$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{x_i}$.

Por otra parte, sea $a_i \in W_{x_i}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de U y U es conexo, por el Teorema 1.13, para a_1 y a_2, existe una cadena simple $\{W_{2,1}, \ldots, W_{2,m_2}\} \subset \mathcal{U}$ de a_1 a a_2. Nuevamente usando el Teorema 1.13, para a_1 y a_3, existe una cadena simple $\{W_{3,1}, \ldots, W_{3,m_3}\} \subset \mathcal{U}$ de a_1 a a_3. Continuando con este proceso y usando el Teorema 1.13, para a_1 y a_n, existe una cadena simple $\{W_{n,1}, \ldots, W_{n,m_n}\} \subset \mathcal{U}$ de a_1 a a_n.
Finalmente, por cada $l \in \{2, \ldots, n\}$, sea $L_l = W_{x_1} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{m_l} W_{l,j} \cup W_{x_l}$. Notemos que por cada $l \in \{2, \ldots, n\}$, $a_1 \in W_{x_1} \cap W_{l,1}$, $a_l \in W_{x_l} \cap W_{l,m_l}$ y el conjunto $\{W_{x_1}, W_{l,1}, \ldots, W_{l,m_l}, W_{x_l}\}$ es una cadena simple de a_1 a a_l. Entonces cada L_l es conexo. Así, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} L_l$ es conexo. Sea $L = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(L_l)$. Entonces L es un subcontinuo y $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i \subset \mathrm{Int}(L) \subset L \subset U$. □

1.1.1. Propiedades de los conjuntos Vietoricos

Sean Z un conjunto no vacío y $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}(Z)$ no vacío tal que $\emptyset \notin \mathcal{H}$ y $Z \in \mathcal{H}$. Para $E, E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{P}(Z)$, definimos los siguientes conjuntos.

$$\langle E_1, \ldots, E_n \rangle = \left\{ A \in \mathcal{H} : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i \text{ y } A \cap E_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

$$E^- = \{A \in \mathcal{H} : A \cap E \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$E^+ = \langle E \rangle.$$

Observemos que, si $E = \emptyset$ y algún $E_i = \emptyset$, entonces

$$\langle E_1, \ldots, E_n \rangle = E^- = E^+ = \emptyset.$$

Sean $Y \subset Z$ no vacío y $\mathcal{H}_Y \subset \mathbb{P}(Y)$ no vacío tal que $\mathcal{H}_Y \subset \mathcal{H}$, $\emptyset \notin \mathcal{H}_Y$ y $Y \in \mathcal{H}_Y$. Definimos:

$$\langle E_1 \cap Y, \ldots, E_n \cap Y \rangle =$$
$$\left\{ A \in \mathcal{H}_Y : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap Y) \text{ y } A \cap (E_i \cap Y) \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Lema 1.16. *Sean Z un conjunto no vacío y $E, E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{P}(Z)$. Entonces se tienen las siguientes condiciones.*

1. $E^- = \langle Z, E \rangle$.
2. $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^- = \bigcap_{i=1}^{n} \langle Z, E_i \rangle$.
3. $\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^- \right) \cap (E)^+ = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \langle Z, E_i \rangle \right) \cap \langle E \rangle$.
4. $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^+ = \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i \right)^+ = \left\langle \bigcap_{i=1}^{n} E_i \right\rangle$.
5. $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle = \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^- \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^+$.

Demostración. Dado que las pruebas de los incisos $1, 2, 3, 4$, se siguen de las definiciones, sólo probaremos 5.

$\subset]$ Sea $A \in \langle E_1, \ldots, E_n \rangle$. Entonces $A \cap E_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $A \in E_i^-$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De donde $A \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^-$.
Ahora, dado que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $A \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^+$.

$\supset]$ Sea $A \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^- \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^+$. Entonces $A \in E_i^-$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $A \cap E_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Por otra parte, dado que $A \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^+$, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Por lo que $A \in \langle E_1, \ldots, E_n \rangle$.
Así, $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^- \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^+$. $\square$

Lema 1.17. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $E_1, \ldots, E_k \in \mathbb{P}(Z)$. Se tienen las siguientes propiedades:*

a)$\langle E_1, \ldots, E_k \rangle = \left\langle \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i \right\rangle \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} \langle Z, E_i \rangle \right)$,

b)$\langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle = \langle E_1 \cap E_2 \rangle$,

c)$\langle Z, E_1 \rangle \cap \langle Z, E_2 \rangle = \langle Z, E_1, E_2 \rangle$,

d)$\langle E_1 \rangle \cap \langle Z, E_2 \rangle = \langle E_1, E_1 \cap E_2 \rangle$.

Demostración. A continuación probamos a).

$\subset\rfloor$ Sea $A \in \langle E_1, \ldots, U_k \rangle$. Claramente $A \in \left\langle \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i \right\rangle$. Notemos que $A \cap E_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. De donde $A \in \langle Z, E_i \rangle$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo que

$$A \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} E_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \langle Z, E_i \rangle \right).$$

$\supset\rfloor$ Sea $A \in \left\langle \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i \right\rangle \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} \langle Z, E_i \rangle \right)$. Entonces $A \in \left\langle \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i \right\rangle$ y $A \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \langle Z, E_i \rangle$. Así $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i$ y $A \cap E_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. De donde $A \in \langle E_1, \ldots, E_k \rangle$. Por lo que

$$\langle E_1, \ldots, E_k \rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} E_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \langle Z, E_i \rangle \right).$$

Ahora demostramos la parte b).

$\subset\rfloor$ Sea $A \in \langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle$. Entonces $A \in \langle E_1 \rangle$ y $A \in \langle E_2 \rangle$. De lo anterior, se tiene que $A \subset E_1 \cap E_2$. Por lo que $A \in \langle E_1 \cap E_2 \rangle$.

$\supset\rfloor$ Sea $A \in \langle E_1 \cap E_2 \rangle$. Entonces $A \subset E_1 \cap E_2$. Así, $A \subset E_i$ para $i \in \{1, 2\}$. De donde, $A \in \langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle$.

Concluimos $\langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle$=$\langle E_1 \cap E_2 \rangle$.

En seguida probamos c).

$\subset\rfloor$ Sea $A \in \langle Z, E_1 \rangle \cap \langle Z, E_2 \rangle$. Entonces $A \subset Z \cup E_1 \cup E_2$, $A \cap E_1 \neq \emptyset$ y $A \cap E_2 \neq \emptyset$. Por lo que $A \in \langle Z, E_1, E_2 \rangle$.

$\supset\rfloor$ Sea $A \in \langle Z, E_1, E_2 \rangle$. Entonces $A \cap E_1 \neq \emptyset \neq A \cap E_2$ y $A \cap Z \neq \emptyset$. Notemos que $Z \cup E_1 = Z = Z \cup E_2$, así $A \in \langle Z, E_1 \rangle \cap \langle Z, E_2 \rangle$.

Por tanto $\langle Z, E_1\rangle \cap \langle Z, E_2\rangle = \langle Z, E_1, E_2\rangle$.

Finalmente justificamos d).

$\subset\rfloor$ Sea $A \in \langle E_1\rangle \cap \langle Z, E_2\rangle$. Entonces, dado que $A \in \langle E_1\rangle$ y $E_1 = E_1 \cup (E_1 \cap E_2)$, se tiene que $A \subset E_1 \cup (E_1 \cap E_2)$.
Ahora, dado que $A \subset E_1$, se tiene que $(A\cap E_1)\cap E_2 = A\cap E_2 \neq \emptyset$. Así, $A\cap(E_1\cap E_2) \neq \emptyset$.
Por lo que $A \in \langle E_1, E_1 \cap E_2\rangle$.

$\supset\rfloor$ Sea $A \in \langle E_1, E_1 \cap E_2\rangle$. Dado que $A \subset E_1 \cup (E_1 \cap E_2) = E_1$ y $A \cap E_1 \neq \emptyset$, $A \in \langle E_1\rangle$.
Por otro lado, como $A \cap (E_1 \cap E_2) \neq \emptyset$, $A \in \langle Z, E_2\rangle$. Por lo que $A \in \langle E_1\rangle \cap \langle Z, E_2\rangle$.

Concluimos $\langle E_1\rangle \cap \langle Z, U_2\rangle = \langle E_1, E_1 \cap E_2\rangle$. □

Lema 1.18. *Sean $Y \subset Z$ y $E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{P}(Z)$. Entonces,*

$$\langle E_1 \cap Y, \ldots, E_n \cap Y\rangle = \langle E_1, \ldots, E_n\rangle \cap \mathcal{H}_Y.$$

Demostración. Para la primera contención, sea $B \in \langle E_1 \cap Y, \ldots, E_n \cap Y\rangle$. Probaremos que $B \in \langle E_1, \ldots, E_n\rangle \cap \mathcal{H}_Y$. Notemos que $B \subset Y$ y $B \in \mathcal{H}_Y \subset \mathcal{H}$. Así $B \in \mathcal{H}$.
Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $(B \cap E_i) \cap Y \neq \emptyset$ y $(B \cap E_i) \cap Y \subset B \cap E_i$, $B \cap E_i \neq \emptyset$.

Por otra parte, dado que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n}(E_i \cap Y)$$

y

$$\bigcup_{i=1}^{n}(E_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap Y,$$

$B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$. De donde $B \in \langle E_1, \ldots, E_n\rangle \cap \mathcal{H}_Y$. Así,

$$\langle E_1 \cap Y, \ldots, E_n \cap Y\rangle \subset \langle E_1, \ldots, E_n\rangle \cap \mathcal{H}_Y.$$

Para la segunda contención, sea $A \in \langle E_1, \ldots, E_n\rangle \cap \mathcal{H}_Y$. Notemos que $A \subset Y$ y $A \in \mathcal{H}_Y$.
Probaremos que $A \in \langle E_1 \cap Y, \ldots, E_n \cap Y\rangle$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $A \cap E_i \subset A \subset Y$,

$A \cap E_i \cap Y = A \cap E_i$. Como $A \cap E_i \neq \emptyset$, $A \cap (E_i \cap Y) \neq \emptyset$.
Ahora, dado que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ y $A \subset Y$, se tiene que $A \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap Y$. Así, como

$$\bigcup_{i=1}^{n}(E_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap Y,$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n}(E_i \cap Y).$$

Por lo que $A \in \langle E_1 \cap Y, \ldots, E_n \cap Y\rangle$.

□

1.1.2. Topología de Vietoris

En esta sección la letra X representa un espacio topológico con topología τ.
Definimos:

1. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado}\}$.
2. $\mathcal{K}(X) = \{A \subset X : A \text{ es compacto}\}$.
3. $CL(X) = 2^X \setminus \{\emptyset\}$.
4. $F_n(X) = \{E \in CL(X) : E \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}$
5. $F(X) = \{E \in CL(X) : E \text{ es finito}\}$
6. $C(X) = \{E \in CL(X) : E \text{ es conexo}\}$
7. $C_K(X) = \{E \in CL(X) : E \text{ es conexo y compacto}\}$

Notemos que $\emptyset \in 2^X \cap \mathcal{K}(X)$.

En esta sección consideramos $\mathcal{H} = CL(X)$ para la definición de los vietoricos.
La topología con la que se dota a $CL(X)$ es la topología de Vietoris, la cual describimos a continuación. Sean $\mathcal{S} = \{\langle U\rangle : U \in \tau\} \cup \{\langle X, U\rangle : U \in \tau\}$ y $\mathcal{S}^*$ la familia formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. La topología de Vietoris se define como la mínima topología 2^τ para $CL(X)$ que contiene a $\mathcal{S}$ como subbase. Claramente $\mathcal{S}^*$ es una base para la topología de Vietoris.

Sea Y un subespacio de X con la topología $\tau|_Y$. Entonces $CL(Y)$ tiene la topología de Vietoris, $2^{\tau|_Y}$.

Para los siguientes resultados, consideremos $\mathcal{H}_Y = CL(Y)$.

El siguiente resultado permite obtener una base para la topología 2^τ.

Teorema 1.19. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, la familia*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{V}} = \{\langle U_1, \dots, U_k\rangle : U_1, \dots, U_k \text{ son abiertos en } X, k \in \mathbb{N}\}$$

es una base para 2^τ.

Demostración. Dado que la familia $\mathcal{S}$ es una subbase para 2^τ, es suficiente probar que $\mathcal{S}^* = \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$.

Primero probaremos que:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{V}} \subset \mathcal{S}^*.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \dots, U_k \in \tau$ tales que $\langle U_1, \dots, U_k\rangle \in \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$. Probaremos que $\langle U_1, \dots, U_k\rangle \in \mathcal{S}^*$.

Por Lema 1.17 a), $\langle U_1, \dots, U_k\rangle \in \mathcal{S}^*$.

Finalmente, veamos que

$$\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_{\mathrm{V}}.$$

Sean $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle, \langle X, U_1\rangle, \langle X, U_2\rangle \in \mathcal{S}$. Por el Lema 1.17 b), c) y d), se concluye que $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathrm{V}}$ es una base para la topología de Vietoris. □

Corolario 1.20. *Sea Y un subespacio cerrado de X con la topología $\tau|_Y$. Entonces la familia*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1 \cap Y, \dots, U_k \cap Y\rangle : U_1, \dots, U_k \text{ son abiertos en } X, k \in \mathbb{N}\}$$

es una base para $2^{\tau|_Y}$.

Lema 1.21. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $(Y, \tau|_Y)$ es un subespacio cerrado de X, entonces $2^\tau|_{CL(Y)} = 2^{\tau|_Y}$.*

Demostración. Como Y es cerrado en X, $CL(Y) \subset CL(X)$.
Notemos que $\{\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \cap CL(Y) : U_1, \ldots, U_k$ son abiertos en $X, k \in \mathbb{N}\}$ es una base para la topología $2^{\tau}|_{CL(Y)}$.
Por el Corolario 1.20, $\{\langle U_1 \cap Y, \ldots, U_k \cap Y\rangle : U_1, \ldots, U_k$ son abiertos en $X, k \in \mathbb{N}\}$ es una base para $2^{\tau|_Y}$. Así por el Lema 1.18,

$$\{\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \cap CL(Y) : U_1, \ldots, U_k \text{ son abiertos en } X, k \in \mathbb{N}\} =$$

$$\{\langle U_1 \cap Y, \ldots, U_k \cap Y\rangle : U_1, \ldots, U_k \text{ son abiertos en } X, k \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto $2^{\tau}|_{CL(Y)} = 2^{\tau|_Y}$. □

Teorema 1.22. *Sea (X, τ) un espacio topológico T_1. Entonces X es separable si y sólo si $(CL(X), 2^{\tau})$ es separable.*

Demostración. Para la Necesidad, sean $D \subset X$ denso y numerable. $F(D) = \{E \subset D : E$ es finito y no vacío$\}$. Por el Lema 1.1, $F(D)$ es numerable. Ahora, probaremos que $F(D)$ es denso en $CL(X)$. Como X es T_1, $F(D) \subset CL(X)$. Sea $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \in 2^{\tau} \setminus \{\emptyset\}$. Notemos que $U_i \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que D es denso en X, $U_i \cap D \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $x_i \in U_i \cap D$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\{x_i\}_{i=1}^{n} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F(D).$$

Por lo que $F(D)$ es denso en $CL(X)$. Concluimos que $CL(X)$ es separable.
Para la Suficiencia, sea $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso y numerable en $CL(X)$. Así, tomemos $D = \{a_i : a_i \in A_i$ e $i \in \mathbb{N}\}$. Claramente D es numerable. Probaremos que $\mathrm{Cl_X(D)} = \mathrm{X}$. Sea $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Como $\langle U\rangle \in 2^{\tau}$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \in \langle U\rangle$. Así, $a_i \in A_i \subset U$. Por lo que $a_i \in U \cap D$. De donde $U \cap D \neq \emptyset$.
Por lo que $\mathrm{cl}_X(D) = X$. Esto prueba que X es separable. □

Lema 1.23. *Sea A un subespacio cerrado, discreto y numerable de X, entonces*

$$(CL(A), 2^{\tau}|_{CL(A)})$$

no es segundo numerable.

Demostración. Notemos que $2^{\tau}|_{CL(A)} = 2^{\tau|_A}$. Como A es discreto, $\{\langle E\rangle : E \in \mathbb{P}(A)\} \subset 2^{\tau|_A}$. Sea β una base de $2^{\tau|_A}$. Para cada $E \in \mathbb{P}(A)$, existe $\mathcal{U}_E \in \beta$ tal que $E \in \mathcal{U}_E \subset \langle E\rangle$.

Claramente $\{\mathcal{U}_E\}_{E\in\mathbb{P}(A)} \subset \beta$.

Definimos $\psi : \mathbb{P}(A) \longrightarrow \{\mathcal{U}_E\}_{E\in\mathbb{P}(A)}$ como $\psi(E) = \mathcal{U}_E$. Probaremos que ψ es inyectiva.

Sean $E_1 \neq E_2 \in \mathbb{P}(A)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $E_1 \backslash E_2 \neq \emptyset$. Entonces $E_1 \in \mathcal{U}_{E_1}$. En el caso de que $E_1 \in \mathcal{U}_{E_2} \subset \langle E_2 \rangle$, entonces $E_1 \subset E_2$, por lo que $E_1 \backslash E_2 = \emptyset$, una contradicción. Así, $E_2 \notin \mathcal{U}_{E_1}$. Concluimos $\mathcal{U}_{E_1} \neq \mathcal{U}_{E_2}$. Esto prueba la inyectividad de ψ.

De lo anterior y dado que $|A| < |\mathbb{P}(A)|$, $|A| < |\mathbb{P}(A)| \leq |\{\mathcal{U}_E\}_{E\in\mathbb{P}(A)}|$. Por lo tanto $\{\mathcal{U}_E\}_{E\in\mathbb{P}(A)}$ y β son no numerables. □

Teorema 1.24. *Sea X un espacio topológico. Si $(CL(X), 2^\tau)$ es segundo numerable, entonces X es compacto.*

Demostración. Supongamos que X no es compacto. Entonces existe un subconjunto infinito A de X sin puntos de acumulación. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A es numerable. Por el Lema 1.4, A es un subespacio discreto de X. Claramente A es cerrado en X. Así $CL(A) \subset CL(X)$. Dado que $(CL(X), 2^\tau)$ es segundo numerable, $(CL(A), 2^\tau|_{CL(A)})$ es segundo numerable, esto contradice el Lema 1.23.
Por lo que X es compacto. □

Teorema 1.25. *Sea (X, τ) un espacio T_1. Si $(CL(X), 2^\tau)$ es metrizable, entonces X es compacto.*

Demostración. Supongamos que X no es compacto. Entonces existe un subconjunto infinito A de X sin puntos de acumulación. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A es numerable. Por el Lema 1.4, A es un subespacio discreto de X. Claramente $(A, \tau|_A)$ es separable y además A es cerrado en X. Así $CL(A) \subset CL(X)$ y $(CL(A), 2^{\tau|_A})$ es separable. Por el Lema 1.21, $(CL(A), 2^\tau|_{CL(A)})$ es separable. Dado que $(CL(A), 2^\tau|_{CL(A)})$ es metrizable, por la Proposición 1.8, $(CL(A), 2^\tau|_{CL(A)})$ es segundo numerable, esto contradice el Lema 1.23.
Por lo que X es compacto. □

Proposición 1.26. *Si X es un espacio T_1, entonces X es homeomorfo a $F_1(X)$.*

Demostración. Definamos la función $\sigma : X \to F_1(X)$ como $\sigma(x) = \{x\}$.

Claramente σ es biyectiva. Para la continuidad, sean $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X. Supongamos que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_1(X) \neq \emptyset$. Probaremos

$$\sigma^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_1(X)) = \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

Notemos $x \in \sigma^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_1(X))$. Si y sólo sí, $\sigma(x) = \{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_1(X)$. Esto último se da, si y sólo sí, $x \in \{x\} \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si y sólo sí, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Esto prueba que $\sigma^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_1(X)) = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$.
Por lo que, σ es continua.
Ahora para probar que σ es cerrada, sea K un cerrado en X. Demostraremos que $F_1(X) \setminus \sigma(K)$ es abierto. Sea $\{x\} \in F_1(X) \setminus \sigma(K)$. Así $x \in X \setminus K$ y $\{x\} \in \langle X \setminus K \rangle \cap F_1(X)$.

Necesitamos probar que $\langle X \setminus K \rangle \cap F_1(X) \subset F_1(X) \setminus \sigma(K)$. Sea $\{y\} \in \langle X \setminus K \rangle \cap F_1(X)$. Entonces $y \notin K$. Así, dado que σ es biyectiva, $\sigma(y) \notin \sigma(K)$ y $\sigma(y) \in F_1(X) \setminus \sigma(K)$. Esto prueba $\langle X \setminus K \rangle \cap F_1(X) \subset F_1(X) \setminus \sigma(K)$. De lo anterior y de que $X \setminus K$ es abierto, $F_1(X) \setminus \sigma(K)$ es abierto. Por lo que $\sigma(K)$ es cerrado.
De donde σ es biyectiva, continua y cerrada. Por lo tanto σ es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 1.27. *Si X es un espacio de Hausdorff no degenerado, entonces $F_1(X)$ es cerrado en $CL(X)$.*

Demostración. Sea $A \in CL(X) \setminus F_1(X)$. Entonces A es no degenerado. Sean $a, b \in A$, $a \neq b$. Como X es de Hausdorff, existen dos abiertos ajenos U_a, U_b tales que $a \in U_a$ y $b \in U_b$. Probaremos que $A \in \langle U_a, U_b, X \rangle \subset CL(X) \setminus F_1(X)$.

Claramente $A \in \langle U_a, U_b, X \rangle$. La contención se sigue de que, si $\{x\} \in \langle U_a, U_b, X \rangle \cap F_1(X)$, entonces $x \in U_a \cap U_b \cap X = U_a \cap U_b$, una contradicción a que U_a y U_b son ajenos. Por lo que $\langle U_a, U_b, X \rangle \subset CL(X) \setminus F_1(X)$. Esto prueba que $F_1(X)$ es cerrado en $CL(X)$. $\square$

Teorema 1.28. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si $(CL(X), 2^{\tau})$ es compacto, entonces X es compacto.*

Demostración. Por la Proposición 1.27, $F_1(X)$ es cerrado en $CL(X)$. Como $CL(X)$ es compacto, $F_1(X)$ es compacto. Así, dado que X es homeomorfo a $F_1(X)$ (por la Proposición 1.26), X es compacto.

$\square$

1.1.3. La topología de Fell

Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Una topología fundamental en el conjunto 2^X es la topología de Fell, también llamada la topología de la convergencia cerrada. Para describir esta topología necesitamos introducir alguna notación, para E un subconjunto de X, recordemos que hemos definido los siguientes subconjuntos de 2^X:

$$E^- = \{A \in 2^X : A \cap E \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$E^+ = \{A \in 2^X : A \subset E\}.$$

Notemos que $(\emptyset^c)^+ = X^+ = 2^X$.

Sea $\beta = \{V^- : V \in \tau_X\} \cup \{(K^c)^+ : K \in \mathcal{K}(X)\}$. Definimos la topología de Fell, τ_F, en 2^X como la mínima topología que contiene a β como subbase. Sea β_F la familia de las intersecciones finitas de elementos de β, y a sus elementos les llamaremos básicos. Claramente β_F es una base para τ_F.

Los subconjuntos $CL(X)$, $F_n(X)$, $F(X)$ son considerados subespacios de 2^X. En el caso de que X sea un espacio de Hausdorff, $\mathcal{K}(X)$ es considerado un subespacio de 2^X.

Proposición 1.29. *Sea X un espacio topológico con τ su topología. Sean $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}(X)$. Entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{n} (K_i^c)^+ = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right)^c \right)^+.$$

Demostración. Sea $A \in \bigcap_{i=1}^{n} (K_i^c)^+$. Entonces $A \subset \bigcap_{i=1}^{n} K_i^c$. Dado que $\bigcap_{i=1}^{n} K_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right)^c$, $A \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right)^c$. Así, dado que la unión finita de compactos es un compacto,

$$A \in \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right)^c \right)^+.$$

Para ver la otra contención, sea $B \in \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right)^c \right)^+$. Entonces

$$B \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} K_i^c.$$

Así $B \subset K_i^c$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $B \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} (K_i^c)^+$.
Por lo tanto

$$\bigcap_{i=1}^{n} (K_i^c)^+ = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right)^c \right)^+ .$$

□

El siguiente resultado nos proporciona información sobre los abiertos básicos de la topología de Fell.

Proposición 1.30. *Sea X un espacio topológico con τ su topología. Si $\mathcal{U} \in \beta_F$, entonces $\mathcal{U}$ es igual a uno de los siguientes tres tipos de conjuntos:*

1. *$(K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.*
2. *$\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap (K^c)^+$, donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau$ y $K \in \mathcal{K}(X)$.*
3. *$\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-$, donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau$.*

Demostración. Si $\mathcal{U} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (K_i^c)^+$ para algunos $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}(X)$, entonces por la Proposición 1.29, $\mathcal{U} = \left(\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i \right)^c \right)^+$. Por lo que $\mathcal{U}$ es del tipo 1.

Ahora, si $\mathcal{U} = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{l} (K_l^c)^+ \right)$, donde $K_1, \ldots, K_l \in \mathcal{K}(X)$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau$, por lo anterior, $\left(\mathcal{U} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap \left(\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i \right)^c \right)^+$. Esto prueba que $\mathcal{U}$ es del tipo 2.

En otro caso $\mathcal{U}$ tiene que ser del tipo 3. □

Lema 1.31. *Sean X un espacio topológico con τ su topología. Sean $V_1, \ldots, V_n \in \tau$ y $K \in \mathcal{K}(X)$. Si $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap (K^c)^+ \neq \emptyset$, entonces $V_i \setminus K \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Supongamos que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $V_i \subset K$ y $E \in \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap (K^c)^+$. Entonces $E \cap V_i \neq \emptyset$ y $E \subset K^c$. De donde $\emptyset \neq E \cap V_i \subset V_i \subset K$ y $E \cap V_i \subset E \subset K^c$. Por lo que $\emptyset \neq E \cap V_i \subset V_i \subset K \cap K^c = \emptyset$, una contradicción. Por lo que $V_i \setminus K \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Sea (X,τ) un espacio topológico. Los hiperespacios $\mathcal{K}(X)$ y $CL(X)$ son considerados como subespacios de 2^X, denotamos por $\tau_F|_{\mathcal{H}}$ donde $\mathcal{H} \in \{\mathcal{K}(X), CL(X)\}$, a la topología relativa del correspondiente hiperespacio $\mathcal{H}$.

Observemos que, si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, entonces $\mathcal{K}(X) = CL(X)$.

Proposición 1.32. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico de Hausdorff. Entonces* $\tau_F|_{CL(X)} \subset 2^{\tau}$.

Demostración. Probaremos que $\beta_F \subset \mathcal{S}^*$. Sea $\mathcal{U} \in \beta_F$. Por el Lema 1.30, consideremos los siguientes casos:

Caso I. Supongamos que $\mathcal{U} = (K^c)^+$, para algún K subconjunto compacto de X.

Por definicíon, $(K^c)^+ = \langle K^c \rangle$. Como K es compacto en X y X es de Hausdorff, K es cerrado en X. Así, K^c es un abierto en X. De donde $\mathcal{U} \in \mathcal{S}^*$.

Caso II. Supongamos que $\mathcal{U} = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+$, donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau_X$ y $K \in \mathcal{K}(X)$.

Por el Lema 1.16, 3., $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- \cap (K^c)^+ = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle X, V_i \rangle\right) \cap \langle K^c \rangle$. Así, dado que $K^c \in \tau, \mathcal{U} \in \mathcal{S}^*$.

Caso III. Supongamos que $\mathcal{U} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-$, donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau$.

Por el Lema 1.16, 2., $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle X, V_i \rangle$. De donde $\mathcal{U} \in \mathcal{S}^*$.

□

Proposición 1.33. *Sea* (X, τ_X) *un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces* $\tau_F|_{CL(X)} = 2^{\tau}$.

Demostración. La prueba de la primera contención se sigue de la Proposición 1.32.

Para probar la otra contención, sea $\mathcal{U} \in \mathcal{S}^*$. Por el Teorema 1.19, $\mathcal{S}^* = \beta_V$. De donde $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ con $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X. Hagamos $K = (\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i)^c$. Claramente K es compacto en X. Así, por el Lema 1.16, 5.,

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)^- \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)^+ = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^-\right) \cap (K^c)^+.$$

Por lo que $\mathcal{U} \in \beta_F$. Por lo tanto $\tau_F|_{CL(X)} = 2^{\tau}$. □

Teorema 1.34. *Si X es un espacio topológico, entonces $(CL(X), \tau_F)$ es T_1.*

Demostración. Sea $A, B \in 2^X$ tales que $A \neq B$. supongamos sin pérdida de generalidad $A \nsubseteq B$. Entonces existe $a \in A \backslash B$ y se tiene que $B \neq X$, claramente $\{a\}$ es un subconjunto compacto de X. Entonces $(X \setminus B)^-$ y $(X \setminus \{a\})^+$ son abiertos en $(2^X, \tau_F)$ tales que $A \in (X \setminus B)^-$ y $B \notin (X \setminus B)^-$, $B \in (X \setminus \{a\})^+$ y $A \notin (X \setminus \{a\})^+$. Por lo tanto $(2^X, \tau_F)$ es T_1.

□

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [6, p. 162].

Teorema 1.35. *Sea X un espacio T_1 no degenerado. Entonces $(CL(X), \tau_F)$ es de Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto.*

Lema 1.36. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces:*

a) Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo (compacto) de $(CL(X), 2^\tau)$, entonces $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo (compacto) de $(CL(X), \tau_F)$,

b) Si $\mathcal{D}$ es denso en $(CL(X), 2^\tau)$, entonces éste es denso en $(CL(X), \tau_F)$

Demostración. a) Recordemos que $\tau_F \subset 2^\tau$. Consideremos la función identidad

$$id : (CL(X), 2^\tau) \to (CL(X), \tau_F)$$

definida por $id(A) = A$. Claramente id es suprayectiva y continua. Por lo que, si $\mathcal{B} \subset (CL(X), 2^\tau)$ es conexo (compacto), $id(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ es conexo (compacto) en $(CL(X), \tau_F)$.

b) Veamos que $\mathcal{D}$ es denso en $(CL(X), \tau_F)$. Sea $\mathcal{U} \in \tau_F \subset 2^\tau$. Como $\mathcal{D}$ es denso en $(CL(X), 2^\tau)$, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, así $\mathcal{D}$ es denso en $(CL(X), \tau_F)$. □

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [4, Corolario 5.8.1, p. 169].

Proposición 1.37. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces, la función*

$$\psi : ((CL(X), 2^\tau))^n \to (CL(X), 2^\tau)$$

definida por $\psi(E_1, \ldots, E_n) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ es continua.

Proposición 1.38. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

a) Si $A \subset X$ cerrado, entonces $\{E \in CL(X) : E \subset A\}$ es cerrado en $(2^X, \tau_F)$.

b) Si X es de Hausdorff y $A \subset X$ es compacto, entonces $\{E \in CL(X) : E \cap A \neq \emptyset\}$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$.

Demostración. Para mostrar a), sean $\mathcal{A} = \{E \in CL(X) : E \subset A\}$ y $B \in \mathrm{cl}_{CL(X)}(\mathcal{A})$. Supongamos que $B \notin \mathcal{A}$. Entonces $B \not\subset A$. Sea $b \in B \backslash A$. Dado que $X \setminus A$ es abierto y $b \notin A$, existe un abierto V de X tal que $b \in V$ y $V \cap A = \emptyset$, así $B \in V^-$ y $V^- \cap \mathcal{A} = \emptyset$, lo cual contradice que $B \in \mathrm{cl}_{CL(X)}(\mathcal{A})$. Por lo que $B \in \mathcal{A}$ y así $\mathcal{A}$ es cerrado.

Para mostrar b), sean $\mathcal{A} = \{E \in CL(X) : E \cap A \neq \emptyset\}$ y $B \in \mathrm{cl}_{CL(X)}(\mathcal{A})$. Supongamos que $B \notin \mathcal{A}$. Entonces $B \cap A = \emptyset$. Así, dado que A es cerrado, existe un abierto V tal que $B \subset V$ y $V \cap A = \emptyset$. Así $(A^c)^+$ es un abierto que contiene a B en $CL(X)$ que no intersecta a $\mathcal{A}$, lo cual contradice que $B \in \mathrm{cl}_{CL(X)}(\mathcal{A})$. Por lo que $B \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es cerrado.

$\square$

Capítulo 2

La topología de Fell

2.1. Propiedades en hiperespacios

Proposición 2.1. *Sea X un espacio de Hausdorff. Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto en alguno de los espacios $(C_K(X), \tau_F)$ o $(C(X), \tau_F)$. Si $\{x\} \in \mathcal{O}$, entonces hay una vecindad V de x en X tal que $V \subset \bigcup \mathcal{O}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{Y} \in \{(C_K(X), \tau_F), (C(X), \tau_F)\}$. Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto en $\mathcal{Y}$. Sea $\{x\} \in \mathcal{O}$. Entonces, existe un abierto básico $\mathcal{B}$ en 2^X tal que $\{x\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Supongamos $\mathcal{B} = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau$. Entonces, $\{x\} \in \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+ \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$, así $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ y $x \in K^c$. Como K es cerrado, $K^c \in \tau$.

Notemos que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \cap K^c = W$ y W es abierto.

Mostraremos que $W \subset \bigcup \mathcal{O}$. Sea $z \in W$. Entonces $\{z\} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-$ y $\{z\} \in K^c$. Así, $\{z\} \in \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+$. Dado que $\{z\}$ es conexo y compacto, $\{z\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$. Así, $z \in (\bigcup \mathcal{B}) \cap \mathcal{Y} \subset \bigcup \mathcal{O}$. Por lo tanto $W \subset \bigcup \mathcal{O}$.

Caso II. Supongamos $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-$ donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau$.

Entonces $\{x\} \in \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$, así $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$. Notemos que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i = W$ y W es

abierto.
Mostraremos que $W \subset \bigcup \mathcal{O}$. Sea $z \in W$. Entonces $\{z\} \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i^-$. Así, $\{z\} \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i^-$. Dado que $\{z\}$ es conexo y compacto, $\{z\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$. Así, $z \in (\bigcup \mathcal{B}) \cap \mathcal{Y} \subset \bigcup \mathcal{O}$. Por lo tanto $W \subset \bigcup \mathcal{O}$.

Caso III. Supongamos $\mathcal{B} = (K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.
Entonces $\{x\} \in (K^c)^+ \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$, así $x \in K^c$. Como K es cerrado, $K^c \in \tau$.
Sea $K^c = W$. Mostraremos que $W \subset \bigcup \mathcal{O}$. Sea $z \in W$. Entonces $\{z\} \in K^c$. Así, $\{z\} \in (K^c)^+$. Dado que $\{z\}$ es conexo y compacto, $\{z\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$. Así, $z \in (\bigcup \mathcal{B}) \cap \mathcal{Y} \subset \bigcup \mathcal{O}$. Por lo tanto $W \subset \bigcup \mathcal{O}$. □

Proposición 2.2. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si $\mathcal{O}$ es un subconjunto abierto básico para alguno de los espacios $(CL(X), \tau_F)$, $(\mathcal{F}(X), \tau_F)$ o $(\mathcal{K}(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{O}$ es abierto en X.*

Demostración. Sea $\mathcal{Y} \in \{(CL(X), \tau_F), (\mathcal{F}(X), \tau_F), (K(X), \tau_F)\}$. Sea $\mathcal{B}$ un elemento básico no vacío de $(2^X, \tau_F)$. Probaremos que $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$ es un abierto en X. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Supongamos $\mathcal{B} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$ y cada V_i es un abierto en X.

Mostraremos que $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}) = K^c$. Sea $x \in K^c$. Por el Lema 1.31, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos elegir un punto $x_i \in V_i \backslash K$. Sea $E_x = \{x_1, \ldots, x_n, x\}$. Dado que E_x es un conjunto finito y X es un espacio de Hausdorff, $E_x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{Y}$. Por lo que $x \in E_x \subset \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$. De donde $K^c \subset \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$.

Ahora, sea $x \in \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$. Entonces $x \in E$ para algún $E \in \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+\right) \cap \mathcal{Y}$. Así, $x \in E \subset K^c$. De donde $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}) \subset K^c$. Por lo tanto $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}) = K^c$.

Caso II. Supongamos $\mathcal{B} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^-\right)$ donde cada V_i es un abierto en X.

Mostraremos que $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}) = X$. Claramente $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}) \subset X$. Sea $x \in X$. Elegimos un punto $x_i \in V_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $E_x = \{x_1, \ldots, x_n, x\}$. Dado que E_x es un conjunto finito y X es un espacio de Hausdorff, $E_x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{Y}$. Por lo que $x \in E_x \subset \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$. De donde $X \subset \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$. Por lo tanto $X = \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$.

Caso III. Supongamos $\mathcal{B} = (K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.

Mostraremos que $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}) = K^c$. Sea $x \in K^c$. Entonces $\{x\} \subset K^c$ y $\{x\} \in (K^c)^+$. Dado que $\{x\}$ es un conjunto finito y X es un espacio de Hausdorff, $\{x\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{Y}$. Por lo que $x \in \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$. De donde $K^c \subset \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$.

Ahora, sea $x \in \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$. Entonces $x \in E$ para algún $E \in ((K^c)^+) \cap \mathcal{Y}$. Así, $x \in E \subset K^c$. De donde $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}) \subset K^c$. Por lo tanto $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}) = K^c$.
De los casos anteriores concluimos que $\bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{Y})$ es abierto en X. $\square$

Proposición 2.3. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si $\mathcal{O}$ es un conjunto abierto en $(\mathcal{F}_n(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{O}$ es abierto en X. En particular si*

$$\mathcal{O} = \left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+\right] \cap \mathcal{F}_n(X),$$

donde los V_i's son disjuntos a pares, entonces $\bigcup \mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{n}(V_i \setminus K)$.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un abierto básico de 2^X. Primero probaremos que $\bigcup \mathcal{B} \cap \mathcal{F}_n(X)$ es un abierto en X. Hagamos $\mathcal{O} = \mathcal{B} \cap \mathcal{F}_n(X)$. Sean $U = \bigcup \mathcal{O}$ y $x \in U$. Entonces existe $E \in \mathcal{O}$ tal que $x \in E$. Supongamos que $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$ y asumiremos que $x = x_1$ y $p \leq n$.
Caso I. Supongamos que $\mathcal{B} = \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_i^-\right) \cap (K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$ y cada V_i es un abierto en X.

Subcaso A. Supongamos que $\{V_i : x \in V_i\} = \emptyset$.
Sea $W = K^c$. Claramente K^c es un abierto en X y $E \setminus \{x\} \in \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_i^-\right) \cap (K^c)^+$. Así, para cada $y \in W$, $E_y = \{y, x_2, \ldots, x_p\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}_n(X)$. Así cada $E_y \subset U$, lo que muestra que $x \in W \subset U$.

Subcaso B. Supongamos que $\{V_i : x \in V_i\} \neq \emptyset$.

Sea $W = \bigcap\{V_i : x \in V_i\} \cap K^c$. Claramente W es un abierto en X. Entonces para cada $y \in W$, $E_y = \{y, x_2, \ldots, x_p\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}_n(X)$. Así, cada $E_y \subset U$. Lo que muestra que $x \in W \subset U$.

Caso II. Supongamos $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} V_i^-$ donde cada V_i es un abierto en X.

Subcaso A. Supongamos que $\{V_i : x \in V_i\} = \emptyset$.

Sea $W = K^c$. Claramente K^c es un abierto en X y $E \setminus \{x\} \in \left(\bigcap\limits_{i=1}^{m} V_i^-\right)$. Así, para cada $y \in W$, $E_y = \{y, x_2, \ldots, x_p\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}_n(X)$. Así, cada $E_y \subset U$. Lo que muestra que $x \in W \subset U$.

Subcaso B. Supongamos que $\{V_i : x \in V_i\} \neq \emptyset$.

Sea $W = \bigcap\{V_i : x \in V_i\}$. Claramente W es un abierto en X. Entonces para cada $y \in W$, $E_y = \{y, x_2, \ldots, x_p\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}_n(X)$. Así cada $E_y \subset U$, lo que muestra que $x \in W \subset U$.

Caso III. Supongamos $\mathcal{B} = (K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.

Sea $W = (K^c)$. Claramente K^c es abierto en X. Entonces para cada $y \in W$, $E_y = \{y, x_2, \ldots, x_p\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}_n(X)$. Así cada, $E_y \subset U$. Lo que muestra que $x \in W \subset U$.

De los casos anteriores, concluimos que U es abierto.

Para la segunda parte, supongamos que $\mathcal{O} = \left[\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+\right] \cap \mathcal{F}_n(X)$, donde los V_i's son disjuntos a pares.

Sean $W = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(V_i \setminus K)$ y $U = \bigcup \mathcal{O}$. Mostraremos que $W \subset U$. Sea $x \in W$. Entonces, $x \in V_{i_0} \setminus K$ para algún $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que los V_i's son ajenos a pares, por el Lema 1.31, elegimos para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in V_i \setminus K$. Así $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{O}$. Entonces para cada $y \in V_{i_0} \setminus K$, $E_y = \{x_1, \ldots, x_{i_0-1}, y, x_{i_0+1}, \ldots, x_n\} \in \mathcal{O}$. Por lo tanto $V_{i_0} \setminus K \subset U$. Así $W \subset U$.

Finalmente, para probar la otra contención, sea $x \in U$. Entonces, existe $E \in \mathcal{O}$ tal que $x \in E$. Como $E \in \mathcal{F}_n(X)$ y $E \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, por el principio de las casillas, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $E \cap V_i = \{x\}$. Entonces, $E \subset K^c$ y $x \in V_i \setminus K$. Por lo que $U \subset W$. Por lo tanto $U = W$. $\square$

Definición 2.4. *Una colección $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la **propiedad de intersección finita** si cada subcolección finita de $\mathscr{C}$ tiene intersección no vacía.*

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [5, Teorema 26.9, p. 193].

Teorema 2.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es compacto si y sólo si para cada colección $\mathscr{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, se tiene que la intersección de todos los elementos de la colección, $\bigcap_{C \in \mathscr{C}} C$, es no vacía.*

Proposición 2.6. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si $\mathcal{B}$ es un subespacio compacto de $(CL(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es cerrado en X.*

Demostración. Sean $A = \bigcup \mathcal{B}$ y $x \in \mathrm{cl}\,(A)$. Sea $\mathcal{F}$ la colección de vecindades V de x tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto en X. Para cada $V \in \mathcal{F}$, sea $\mathcal{C}_V = \mathcal{B} \cap \{E \in CL(X) : E \cap \mathrm{cl}(V) \neq \emptyset\}$. Necesitamos probar las siguientes afirmaciones:

Afirmación I. $\mathcal{C}_V \neq \emptyset$.

Sea $V \in \mathcal{F}$. Dado que $x \in \mathrm{cl}\,(A)$, $V \cap A \neq \emptyset$. Así, existe un $E \in \mathcal{B}$ tal que $V \cap E \neq \emptyset$. Por lo que $E \in \mathcal{C}_V$. De donde $\mathcal{C}_V \neq \emptyset$.

Afirmación II. $\mathcal{C}_V$ es cerrada en $(CL(X), \tau_F)$.

Dado que X es de Hausdorff y localmente compacto, por el Teorema 1.35, $(CL(X), \tau_F)$ es de Hausdorff. Así $\mathcal{B}$ es cerrado en $CL(X)$. De esto y de que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto, por la Propocisión 1.38(b), $\mathcal{C}_V$ es cerrada en $(CL(X), \tau_F)$.

Afirmación III. $\bigcap_{V \in \mathcal{F}} \mathcal{C}_V \neq \emptyset$.

Como $\{E \in CL(X) : E \cap \mathrm{cl}(V) \neq \emptyset\}$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$ (por la Proposición 1.38, inciso(b)). Así, cada $\mathcal{C}_V$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}$. Veamos que la colección $\{\mathcal{C}_V : V \in \mathcal{F}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sean $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{F}$. Entonces, $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{F}$. Así, que $\mathcal{C}_V \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{C}_{V_i}$. De esto y de que $\mathcal{C}_V \neq \emptyset$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{C}_{V_i} \neq \emptyset$. Ahora, como $\mathcal{B}$ es compacto, por la Proposición 2.5 $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} \mathcal{C}_V \neq \emptyset$.

Afirmación IV. Si $E \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} \mathcal{C}_V$, entonces $x \in E$.

Sea $E \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} \mathcal{C}_V$. Supongamos que $x \notin E$. Como $X \setminus E$ es un abierto y X es localmente compacto, existe una vecindad compacta V de x tal que $x \in V \subset X \setminus E$. Dado que X es de Hausdorff, $V \in \mathcal{F}$. Por lo que $E \in \mathcal{C}_V$. De donde $\emptyset \neq E \cap \mathrm{cl}\,(V) = E \cap V \subset E \cap X \setminus E = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $x \in E$.

Finalmente, probaremos que $x \in A$. Por la Afirmación III, existe $E \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} \mathcal{C}_V$. Por la Afirmación IV, $x \in E$. Sea $V \in \mathcal{F}$. Entonces $E \in \mathcal{C}_V \subset \mathcal{B}$. Así $x \in E \subset \bigcup \mathcal{B} = A$.
Por lo tanto A es cerrado. □

Proposición 2.7. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces se tienen las siguientes condiciones.*

a) Cada $\mathcal{F}_n(X)$ es un subconjunto cerrado de $(CL(X), \tau_F)$.

b) Si X es conexo, entonces cada uno de los siguientes espacios $(\mathcal{F}_n(X), \tau_F)$, $(\mathcal{F}(X), \tau_F)$, $(\mathcal{K}(X), \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$ es conexo.

Demostración. Para mostrar a), sea $E \in CL(X) \backslash \mathcal{F}_n(X)$. Entonces E tiene más de n elementos. Sean $x_1, \ldots, x_p \in E$ tal que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $p > n$. Como X es de Hausdorff existen conjuntos abiertos disjuntos a pares $V_1, \ldots, V_p$ tales que $x_i \in V_i \cap E \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, p\}$. Entonces $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{p} V_i^-\right) \cap \mathcal{F}_n(X) = \emptyset$. Así,

$$E \in \bigcap_{i=1}^{p} V_i^- \subset CL(X) \backslash \mathcal{F}_n(X).$$

Por lo que $\mathcal{F}_n(X)$ es cerrado de $(CL(X), \tau_F)$.

Para mostrar b), como X es conexo, cada uno de los subespacios $\mathcal{F}_n(X)$, $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ y $CL(X)$ son conexos en $(CL(X), 2^\tau)$ ver [4, Teorema 4.10, p. 165]. Por el Lema 1.36, a), los subespacios $\mathcal{F}_n(X)$, $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ y $CL(X)$ son conexos en $(CL(X), \tau_F)$. $\square$

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [4, Proposición 4.11, p. 166].

Proposición 2.8. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos de X. Entonces $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ es un subconjunto conexo de $(CL(X), 2^\tau)$.*

En [1, Lema 1, p. 389] aparece una prueba del siguiente resultado para la clase de los continuos, sin embargo conjeturamos que modelando la prueba de ese lema se puede demostrar el resultado para la clase de los espacios conexos y de Hausdorff, con fundamento en el Lema 2.2 en [2, p. 1053].

Lema 2.9. *Sea X un espacio topológico conexo y de Hausdorff. Sean V un conjunto abierto conexo y $V_1, \ldots, V_n$ conjuntos abiertos no vacíos de X tales que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = V$. Entonces $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$ es conexo en $(CL(X), 2^\tau)$.*

Proposición 2.10. *Sean X un espacio de Hausdorff, localmente conexo y $\mathcal{O}$ es un subconjunto abierto de $(C(X), \tau_F)$.*

a) Si X es regular, entonces $\bigcup\mathcal{O}$ es un abierto en X.

b) Si X es localmente compacto, entonces $\bigcup\mathcal{O}$ es un abierto en X.

Demostración. Para probar a), sea τ_X la topología para X. Sea $\mathcal{O} \subseteq C(X)$ abierto. Sea $x \in \bigcup\mathcal{O}$. Probaremos que existe $V \in \tau_X$ tal que $x \in V \subseteq \bigcup\mathcal{O}$. Sea $E \in \mathcal{O}$ tal que $x \in E$. Entonces, existe un básico $\mathcal{U}$ en $C(X)$ tal que $E \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$. Así, $x \in E \subseteq \bigcup\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$. Demostraremos que $\bigcup\mathcal{U}$ es un abierto en X.
Consideremos los siguientes casos:

Caso 1(a). Supongamos $\mathcal{U} = ((\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-) \cap (K^c)^+) \cap C(X)$ donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau_X$ y $K \in \mathcal{K}(X)$.

Sea $U = \bigcup\mathcal{U}$. Entonces $x \in U$. Dado que $X\backslash K$ es un abierto tal que $E \subset X\backslash K$ (pues K es compacto y X es de Hausdorff) y X es regular y localmente conexo, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset \mathrm{cl}(V) \subset X \backslash K$. Claramente $E \cup \mathrm{cl}(V) \in C(X)$, $E \cup \mathrm{cl}(V) \subset X \backslash K$ y $(E \cup \mathrm{cl}(V)) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo que $(E \cup \mathrm{cl}(V)) \in \mathcal{U}$. Así $x \in V \subset (E \cup \mathrm{cl}(V)) \subset U$.

Caso 2(a). Supongamos $\mathcal{U} = (\bigcap_{i=1}^{n} V_i^-) \cap C(X)$ donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau_X$.
Sea $U = \bigcup \mathcal{U}$. Entonces $x \in U$. Como X es abierto y localmente conexo, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset X$. Claramente $E \cup \mathrm{cl}(V) \in C(X)$ y $(E \cup \mathrm{cl}(V)) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto $E \cup \mathrm{cl}(V) \in \mathcal{U}$. Así $x \in V \subset E \cup \mathrm{cl}(V) \subset U$.

Caso 3(a). Supongamos $\mathcal{U} = (K^c)^+ \cap C(X)$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.
Sea $U = \bigcup \mathcal{U}$. Entonces $x \in U$. Dado que $X \backslash K$ es un abierto tal que $E \subset X \backslash K$ (pues K es compacto y X es de Hausdorff) y X es regular y localmente conexo, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset \mathrm{cl}(V) \subset X \backslash K$. Claramente $E \cup \mathrm{cl}(V) \in C(X)$ y $E \cup \mathrm{cl}(V) \subset X \backslash K$. Por lo que $(E \cup \mathrm{cl}(V)) \in \mathcal{U}$. Así $x \in V \subset (E \cup \mathrm{cl}(V)) \subset U$.

Para demostrar $b)$, sean $\mathcal{O} \subseteq C(X)$ abierto y $x \in \bigcup \mathcal{O}$. Probaremos que existe $V \in \tau_X$ tal que $x \in V \subseteq \bigcup \mathcal{O}$. Sea $E \in \mathcal{O}$ tal que $x \in E$. Entonces existe un básico $\mathcal{U}$ en $C(X)$ tal que $E \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$. Entonces $x \in E \subseteq \bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{O}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1(b). Supongamos que $\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^- \cap (K^c)^+ \right) \cap C(X)$ donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau_X$ y $K \in \mathcal{K}(X)$.
Sea $U = \bigcup \mathcal{U}$. Entonces $x \in U$. Dado que $X \backslash K$ es un abierto tal que $x \in E \subset X \backslash K$ (pues K es compacto y X es de Hausdorff) y X es localmente compacto, existe una vecindad compacta V de x tal que $V \subset X \backslash K$. Como $x \in \mathrm{Int}(V)$ y localmente conexo, existe un abierto conexo W en X tal que $x \in W \subset \mathrm{Int}(V)$. Entonces $\mathrm{cl}(W)$ es una vecindad cerrada y conexa de x tal que $\mathrm{cl}(W) \subset \mathrm{cl}(V) = V \subset X \backslash K$.
Así $E \cup \mathrm{cl}(W) \in \mathcal{U}$ y $x \in W \subset (E \cup \mathrm{cl}(W)) \subset U \subset \bigcup \mathcal{O}$.

Caso 2(b). Supongamos que $\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap C(X)$ donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau_X$.
Sea $U = \bigcup \mathcal{U}$. Entonces $x \in U$. Como X es abierto y localmente compacto, existe una vecindad compacta V de x tal que $V \subset X$. Como $x \in \mathrm{Int}(V)$ y localmente conexo, existe

un abierto conexo W en X tal que $x \in W \subset \mathrm{Int}\,(V)$. Entonces $\mathrm{cl}\,(W)$ es una vecindad cerrada y conexa de x tal que $\mathrm{cl}\,(W) \subset \mathrm{cl}\,(V) = V \subset X$.
Así $E \cup \mathrm{cl}\,(W) \in \mathcal{U}$ y $x \in W \subset (E \cup \mathrm{cl}\,(W)) \subset U \subset \bigcup \mathcal{O}$.

Caso 3(b). Supongamos que $\mathcal{U} = (K^c)^+ \cap C(X)$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.
Sea $U = \bigcup \mathcal{U}$. Entonces $x \in U$. Dado que $X \backslash K$ es un abierto tal que $x \in E \subset X \backslash K$ (pues K es compacto y X es de Hausdorff) y X es localmente compacto, existe una vecindad compacta V de x tal que $V \subset X \backslash K$. Como $x \in \mathrm{Int}\,(V)$ y localmente conexo, existe un abierto conexo W en X tal que $x \in W \subset \mathrm{Int}\,(V)$. Entonces $\mathrm{cl}\,(W)$ es una vecindad cerrada y conexa de x tal que $\mathrm{cl}\,(W) \subset \mathrm{cl}\,(V) = V \subset X \backslash K$.
Así $E \cup \mathrm{cl}\,(W) \in \mathcal{U}$ y $x \in W \subset (E \cup \mathrm{cl}\,(W)) \subset U \subset \bigcup \mathcal{O}$.

□

La prueba del siguiente resultado la podemos consultar en [4, Teoremas 4.2, 4.9.12, 4.10, pp. 161, 164, 165] y [3].

Lema 2.11. *Si X es un espacio de Hausdorff, compacto y conexo, entonces $(CL(X), 2^\tau)$ y $(C(X), 2^\tau)$ son de Hausdorff compactos y conexos. En particular, para cada $E \in C(X)$, el conjunto $\mathcal{L}_E = \{F \in C(X) : E \subset F\}$ es un subconjunto cerrado y conexo de $C(X)$.*

Proposición 2.12. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de $(C(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es conexo en X.*

Demostración. Sea $A = \bigcup \mathcal{B}$. Supongamos que A no es conexo. Entonces existen dos conjuntos no vacíos A_1 y A_2 tales que $A = A_1 \cup A_2$, $\mathrm{cl}\,(A_1) \cap A_2 = \emptyset$ y $A_1 \cap \mathrm{cl}\,(A_2) = \emptyset$.
Sea $\mathcal{A}_i = \{E \in \mathcal{B} : E \cap A_i \neq \emptyset\}$ para $i \in \{1, 2\}$. Es claro que $\mathcal{A}_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Como cada $E \in \mathcal{B}$ es conexo, se tiene que $E \subset A_1$ o $E \subset A_2$. Así $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$ y $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Vamos a probar que $\mathcal{A}_1 \cap \mathrm{cl}\,(\mathcal{A}_2) \neq \emptyset$. Supongamos que $F \in \mathcal{A}_1 \cap \mathrm{cl}\,(\mathcal{A}_2)$. Entonces $F \subset A_1$. Sea $x_0 \in F$ y V un abierto de x_0 en X.

Entonces $F \in V^-$. Como $F \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{A}_2)$, existe un elemento $E \in \mathcal{A}_2$ tal que $E \in V^-$. Como $E \subset A_2$ y $E \cap V \neq \emptyset$, $V \cap A_2 \neq \emptyset$. Así $x_0 \in \mathrm{cl}\,(A_2)$. De donde $x_0 \in A_1 \cap \mathrm{cl}\,(A_2)$, una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{A}_1 \cap \mathrm{cl}\,(\mathcal{A}_2) = \emptyset$. Similarmente se prueba que $\mathrm{cl}\,(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. Esto significa que $\mathcal{B}$ no es conexo lo cual es una contradicción. □

La prueba de la siguiente proposición es similar a la de la Proposición 2.12.

Proposición 2.13. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de $(C_K(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es conexo en X.*

Proposición 2.14. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si X es localmente conexo, entonces $(C_K(X), \tau_F)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un abierto básico en $CL(X)$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Supongamos que $\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^- \cap (K^c)^+ \right) \cap C(X)$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X y $K \in \mathcal{K}(X)$.
Sean $E \in \mathcal{U}$ y C la componente de $X \backslash K$ que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos un punto $x_i \in U_i \cap E = C \cap U_i \cap E$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $V_i = U_i \cap C$. Hagamos $\mathcal{V} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap (K^c)^+$. Entonces

$$E \in \mathcal{V} \cap C(X) \subset \mathcal{U}.$$

Dado que C es un abierto y conexo que contiene al compacto $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$, por el Lema 1.15, existe un continuo $M \subset C$ que contiene a L en su interior. Entonces $M \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Por lo tanto $C_K(X)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$.

Caso II. Supongamos que $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{n} U_i^- \cap C(X)$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X.
Sean $E \in \mathcal{U}$ y C la componente de X que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos un punto $x_i \in U_i \cap E$. Dado que C es un abierto y conexo que contiene al compacto $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$, por el Lema 1.15, existe un continuo $M \subset C$ que contiene a L en su interior. Entonces $M \in \mathcal{U} \cap C_K(X)$. Por lo tanto $C_K(X)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$.

Caso III. Supongamos que $\mathcal{U} = (K^c)^+ \cap C(X)$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.
Sean $E \in \mathcal{U}$, $x \in E$ y C la componente de $X \backslash K$ que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Así, dado que C es un conexo que contiene al compacto $\{x\}$, por el Lema 1.15, existe un continuo $M \subset C$ que contiene a $\{x\}$ en su interior. Entonces $M \in \mathcal{U} \cap C_K(X)$. Por lo tanto $C_K(X)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$.

□

2.2. Conexidad de $(C(X), \tau_F)$ y $(C_K(X), \tau_F)$

Proposición 2.15. *Sea X un espacio de Hausdorff y compacto. Entonces, X es conexo si y sólo si $(C(X), \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Para probar la necesidad, supongamos que X es conexo. Entonces $\mathcal{F}_1(X)$ es conexo y está contenido en $(C(X), \tau_F)$ (por Proposición 2.7). Sea $A \in C(X)$. Entonces A es conexo y cerrado en X. Por la compacidad de X, A es compacto. Así, por el Lema 2.11, $(C(A), 2^\tau)$ es compacto y conexo en $(CL(X), 2^\tau)$. Por el Lema 1.36, a), $(C(A), \tau_F)$ es conexo en $(CL(X), \tau_F)$. Como $\mathcal{F}_1(X) \cap C(A) \neq \emptyset$ para cada $A \in C(X)$ y $C(X) = \bigcup\{C(A) : A \in C(X)\}$, $(C(X), \tau_F)$ es conexo.

Para probar la suficiencia, supongamos que $(C(X), \tau_F)$ es conexo. Por la Proposición 2.12, $\bigcup C(X)$ es conexo en X. Dado que $X = \bigcup C(X)$, X es conexo. □

Proposición 2.16. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces, X es conexo si y sólo si $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Para probar la necesidad, supongamos que X es conexo. Entonces $\mathcal{F}_1(X)$ es conexo y está contenido en $(C_K(X), \tau_F)$ (por Proposición 2.7). Sea $A \in C_K(X)$. Entonces A es conexo y compacto en X. Así, por el Lema 2.11, $(C(A), 2^\tau)$ es compacto y conexo en $(CL(X), 2^\tau)$. Por el Lema 1.36, a), $(C(A), \tau_F)$ es conexo en $(CL(X), \tau_F)$.

Como $C(A) \subset C_K(X)$ para cada $A \in C_K(X)$, $C_K(X) = \bigcup\{C(A) : A \in C_K(X)\}$. Dado que $\mathcal{F}_1(X) \cap C(A) \neq \emptyset$ para cada $A \in C_K(X)$, $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo.

Para probar la suficiencia, supongamos que $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo en $(C(X), \tau_F)$. Por la Proposición 2.12, $\bigcup C_K(X)$ es conexo en X. Dado que $X = \bigcup C_K(X)$, X es conexo. □

Corolario 2.17. *Sea X un espacio de Hausdorff, localmente compacto y localmente conexo. Entonces, X es conexo si y sólo si $(C(X), \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Para probar la necesidad, supongamos que X es conexo. Como X es un espacio de Hausdorff, por la Proposición 2.16, $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo. Por hipótesis, $(C_K(X), \tau_F)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$. Por lo que $(C(X), \tau_F)$ es conexo.

Para probar la suficiencia, supongamos que $(C(X), \tau_F)$ es conexo. Por la Proposición 2.12, $X = \bigcup C(X)$ es conexo. $\square$

Capítulo 3

Conexidad local en hiperespacios

3.1. Algunas propiedades en $(C_K(X), \tau_F)$ y $(C(X), \tau_F)$

Proposición 3.1. *Si X es un espacio topológico conexo y de Hausdorff, entonces $(CL(X), \tau_F)$ es localmente conexo en X.*

Demostración. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Sea $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-$ un abierto básico de X en $(CL(X), \tau_F)$, donde $V_1, \ldots, V_n$ son conjuntos abiertos no vacíos de X.
Dado que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- = \langle V_1, \ldots, V_n, X\rangle$, X es conexo y $V_1, \ldots, V_n$ conjuntos abiertos no vacíos de X tales que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i \cup X = X$, por el Lema 2.9, $\langle V_1, \ldots, V_n, X\rangle$ es un subconjunto conexo en $(CL(X), 2^\tau)$. Así por el Lema 1.36, a), $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-$ es conexo en $(CL(X), \tau_F)$.

Caso II. Sea $(K^c)^+$ una vecindad básica de X en $(CL(X), \tau_F)$, donde $K = \emptyset$.
Entonces $(K^c)^+ = CL(X)$. Por el Caso I, cualquier abierto básico $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-$ que contenga a X es conexo y está contenido en $(CL(X), \tau_F)$.

Caso III. Sea $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+$ una vecindad básica de X en $(CL(X), \tau_F)$, donde $K = \emptyset$ y $V_1, \ldots, V_n$ son conjuntos abiertos no vacíos de X.
Entonces $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+ = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap CL(X) = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right)$. Por el Caso I, $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right)$ es un abierto conexo que contiene a X contenido en $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^-\right) \cap (K^c)^+$.

□

Proposición 3.2. *Sea X un espacio de Hausdorff, localmente conexo y localmente compacto. Sea $\mathcal{U}$ un abierto básico en $CL(X)$. Si $E \in \mathcal{U} \cap C_K(X)$, entonces existe un abierto básico $\mathcal{V}$ en $CL(X)$ tal que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es un abierto conexo en $C_K(X)$ y $E \in \mathcal{V} \cap C_K(X) \subset \mathcal{U} \cap C_K(X)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ un abierto básico en $CL(X)$ y $E \in \mathcal{U} \cap C_K(X)$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Supongamos $\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^- \right) \cap (K^c)^+$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X y $K \in \mathcal{K}(X)$.

Sea C la componente de $X \backslash K$ que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos un punto $x_i \in U_i \cap E = U_i \cap C \cap E$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $V_i = U_i \cap C$. Hagamos $\mathcal{V} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap ((K^c)^+)$. Entonces

$$E \in \mathcal{V} \cap C_K(X) \subset \mathcal{U} \cap C_K(X).$$

Mostraremos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo. Sea $F \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Como F es conexo, $F \subset X \backslash K$, $F \cap C \neq \emptyset$ y C es una componente de $X \backslash K$, $F \subset C$. Dado que $E \cup F$ es un compacto y C es un abierto y conexo, por el Lema 1.15, existe un continuo M contenido en C que contiene al conjunto compacto $E \cup F$ en su interior. Ahora, sean

$$\mathcal{L}_E = \{G \in C(M) : E \subset G\}$$

y

$$\mathcal{L}_F = \{G \in C(M) : F \subset G\}.$$

Por Lema 2.11, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto de 2^τ. Por Lema 1.36, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto a la τ_F. Claramente $E, F \in \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$. Como $M \in \mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es conexo. Mostraremos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es un subconjunto de $\mathcal{V} \cap C_K(X)$.

Sea $G \in \mathcal{L}_F$. Como $F \subset G \subset M \subset C \subset X \setminus K$ y $F \cap V_i \neq \emptyset$ para cada i, $G \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Concluimos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es un conexo que contiene a E y F, y $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Así, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo.

Caso II. Supongamos que $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{n} U_i^-$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X.
Sea C la componente de X que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos un punto $x_i \in U_i \cap E = U_i \cap C \cap E$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $V_i = U_i \cap C$. Hagamos $\mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^{n} V_i^-$. Entonces

$$E \in \mathcal{V} \cap C_K(X) \subset \mathcal{U} \cap C_K(X).$$

Mostraremos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es un conexo. Sea $F \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Como F es conexo, $F \cap C \neq \emptyset$ y C es una componente de X, $F \subset C$. Entonces por el Lema 1.15, existe un continuo M en C que contiene al conjunto compacto $E \cup F$ en su interior. Ahora sean

$$\mathcal{L}_E = \{G \in C(M) : E \subset G\}$$

y

$$\mathcal{L}_F = \{G \in C(M) : F \subset G\}.$$

Por Lema 2.11, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto de 2^τ y por Lema 1.36, éstos son compactos y conexos con respecto a la τ_F. Como $M \in \mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es conexo. Claramente $E, F \in \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$. Finalmente, mostraremos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Sea $G \in \mathcal{L}_F$. Como $F \subset G$ y $F \cap V_i \neq \emptyset$ para cada i, $G \cap V_i \neq \emptyset$ para cada i. Así, $G \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Concluimos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo.

Caso III. Supongamos que $\mathcal{U} = (K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.
Sea C la componente de $X \backslash K$ que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Hagamos $\mathcal{V} = C^- \cap ((K^c)^+)$. Claramente

$$E \in \mathcal{V} \cap C_K(X) \subset \mathcal{U} \cap C_K(X).$$

Mostraremos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo. Sea $F \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Como F es conexo, $F \subset X \backslash K$, $F \cap C \neq \emptyset$ y C es una componente de $X \backslash K$, $F \subset C$. Dado que $E \cup F$ es un compacto y C es un abierto y conexo, por el Lema 1.15, existe un continuo M contenido en C que contiene al conjunto compacto $E \cup F$ en su interior. Ahora, sean

$$\mathcal{L}_E = \{G \in C(M) : E \subset G\}$$

y

$$\mathcal{L}_F = \{G \in C(M) : F \subset G\}.$$

Por Lema 2.11 $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto de 2^{τ}. Por Lema 1.36, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto a la τ_F. Claramente $E, F \in \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$.

Como $M \in \mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es conexo. Mostraremos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es un subconjunto de $\mathcal{V} \cap C_K(X)$. Sea $G \in \mathcal{L}_F$. Como $F \subset G \subset M \subset C \subset X \setminus K$, $G \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Concluimos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es un conexo que contiene a E y F, y $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Así, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo. □

Proposición 3.3. *Sea X un espacio de Hausdorff, localmente conexo y localmente compacto. Si $\mathcal{V}$ es un abierto en $CL(X)$, entonces $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es denso en $\mathcal{V} \cap C(X)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.14, sabemos que $(C_K(X), \tau_F)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$. Sea $\mathcal{V}$ un abierto en $CL(X)$. Sea $\mathcal{W}$ un abierto en $CL(X)$ tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \cap C(X) \neq \emptyset$. Notemos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \cap C(X)$ es un abierto en $\mathcal{V} \cap C(X)$. Mostraremos que

$$(\mathcal{V} \cap C_K(X)) \cap (\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \cap C(X)) \neq \emptyset.$$

Dado que $(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}) \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$ y $(C_K(X), \tau_F)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$, $(\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \cap C(X)) \cap C_K(X) \neq \emptyset$.

Usando que

$$(\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \cap C(X)) \cap C_K(X) = (\mathcal{V} \cap C_K(X)) \cap (\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \cap C(X),$$

$$(\mathcal{V} \cap C_K(X)) \cap (\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \cap C(X) \neq \emptyset.$$

Por lo que $\mathcal{V} \cap C_K(X) \neq \emptyset$ es denso en $\mathcal{V} \cap C(X)$. □

Lema 3.4. *Sean X un espacio de Hausdorff, localmente conexo y localmente compacto, $K \subset X$ un compacto, C una componente de $X \setminus K$ y $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X. Si $\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap C)^- \cap (K^c)^+\right) \cap C_K(X) \neq \emptyset$, entonces $(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap C)^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X)$ es conexo en $C_K(X)$. En particular, $\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap C)^- \cap (K^c)^+\right) \cap C_K(X)$ es conexo en $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.2, C es un abierto no vacío en X. Entonces $U_i \cap C$ es un abierto en X para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Hagamos $\mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap C)^- \cap (K^c)^+$. Sea

$$E \in \mathcal{V} \cap C_K(X).$$

Mostraremos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo. Sea $F \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Como F es conexo, $F \subset X \backslash K$, $F \cap C \neq \emptyset$ y C es una componente de $X \backslash K$, $F \subset C$. Dado que $E \cup F$ es un compacto y C es un abierto y conexo, por el Lema 1.15, existe un continuo M contenido en C que contiene al conjunto compacto $E \cup F$ en su interior. Ahora, sean

$$\mathcal{L}_E = \{G \in C(M) : E \subset G\}$$

y

$$\mathcal{L}_F = \{G \in C(M) : F \subset G\}.$$

Por Lema 2.11, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto de 2^{τ}. Por Lema 1.36, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto a la τ_F. Claramente $E, F \in \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$. Como $M \in \mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es conexo. Mostraremos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es un subconjunto de $\mathcal{V} \cap C_K(X)$. Sea $G \in \mathcal{L}_F$. Como $F \subset G \subset M \subset C \subset X \setminus K$ y $F \cap (U_i \cap C) \neq \emptyset$ para cada i, $G \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Concluimos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es un conexo que contiene a E y F, y $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Así, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo.

$\square$

Lema 3.5. *Sean X un espacio de Hausdorff, localmente conexo y localmente compacto, C una componente de X y $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X. Si $\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap C)^-\right) \cap C_K(X) \neq \emptyset$, entonces $\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap C)^-\right) \cap C_K(X)$ es conexo en $C_K(X)$. En particular, $\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap C)^-\right) \cap C_K(X)$ es conexo en $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Entonces $U_i \cap C$ es un abierto en X para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Hagamos $\mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap C)^-$. Sea

$$E \in \mathcal{V} \cap C_K(X).$$

Mostraremos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es un conexo. Sea $F \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Como F es conexo, $F \cap C \neq \emptyset$ y C es una componente de X, $F \subset C$. Entonces, por el Lema 1.15, existe un continuo M en C que contiene al conjunto compacto $E \cup F$ en su interior. Ahora, sean

$$\mathcal{L}_E = \{G \in C(M) : E \subset G\}$$

y

$$\mathcal{L}_F = \{G \in C(M) : F \subset G\}.$$

Por Lema 2.11, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto de 2^τ y por Lema 1.36, éstos son compactos y conexos con respecto a la topología τ_F. Como $M \in \mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es conexo. Claramente $E, F \in \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$.

Finalmente, mostraremos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Sea $G \in \mathcal{L}_F$. Como $F \subset G$ y $F \cap (U_i \cap C) \neq \emptyset$ para cada i, $G \cap (U_i \cap C) \neq \emptyset$ para cada i. Así, $G \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Concluimos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo.

$\square$

Lema 3.6. *Sean X un espacio de Hausdorff, conexo, localmente conexo y localmente compacto y $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X. Si $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^-\right) \cap C_K(X) \neq \emptyset$, entonces $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^-\right) \cap C_K(X)$ es conexo en $C_K(X)$. En particular, $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^-\right) \cap C_K(X)$ es conexo en $C(X)$.*

Demostración. Hagamos $\mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^{n} U_i^-$. Sea

$$E \in \mathcal{V} \cap C_K(X).$$

Mostraremos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es un conexo. Sea $F \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Como $F \subset X$ y X es abierto y conexo, por el Lema 1.15, existe un continuo M en X que contiene al conjunto compacto $E \cup F$ en su interior. Ahora, sean

$$\mathcal{L}_E = \{G \in C(M) : E \subset G\}$$

y

$$\mathcal{L}_F = \{G \in C(M) : F \subset G\}.$$

Por Lema 2.11, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto de 2^τ y por Lema 1.36, éstos son compactos y conexos con respecto a la τ_F. Como $M \in \mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es conexo. Claramente $E, F \in \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$.

Finalmente, mostraremos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Sea $G \in \mathcal{L}_F$. Como $F \subset G$ y $F \cap U_i \neq \emptyset$ para cada i, $G \cap U_i \neq \emptyset$ para cada i. Así, $G \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Concluimos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo.

$\square$

Lema 3.7. *Sean X un espacio de Hausdorff, localmente conexo y localmente compacto, $K \subset X$ un compacto, C una componente de $X \setminus K$ y $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X. Si $(K^c)^+ \cap C_K(X) \neq \emptyset$, entonces $(K^c)^+ \cap C_K(X)$ es conexo en $C_K(X)$. En particular, $(K^c)^+ \cap C_K(X)$ es conexo en $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.2, C es un abierto no vacío en X. Entonces $U_i \cap C$ es un abierto en X para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Hagamos $\mathcal{V} = C^- \cap ((K^c)^+)$. Sea

$$E \in \mathcal{V} \cap C_K(X).$$

Mostraremos que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo. Sea $F \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Como F es conexo, $F \subset X \setminus K$, $F \cap C \neq \emptyset$ y C es una componente de $X \setminus K$, $F \subset C$. Dado que $E \cup F$ es un compacto y C es un abierto y conexo, por el Lema 1.15, existe un continuo M contenido en C que contiene al conjunto compacto $E \cup F$ en su interior. Ahora, sean

$$\mathcal{L}_E = \{G \in C(M) : E \subset G\}$$

y

$$\mathcal{L}_F = \{G \in C(M) : F \subset G\}.$$

Por Lema 2.11, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto de 2^τ. Por Lema 1.36, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ son compactos y conexos con respecto a la τ_F. Claramente $E, F \in \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$. Como $M \in \mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es conexo. Mostraremos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es un subconjunto de $\mathcal{V} \cap C_K(X)$. Sea $G \in \mathcal{L}_F$. Como $F \subset G \subset M \subset C \subset X \setminus K$, $G \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Concluimos que $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F$ es un conexo que contiene a E y F, y $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F \subset \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Así, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo. $\square$

3.2. Conexidad local en $(C_K(X), \tau_F)$ y $(C(X), \tau_F)$

Definición 3.8. *Un espacio X es* **conexo en pequeño** *en $x \in X$ si para cada vecindad U de x existe una componente de U que contenga a x en su interior.*

Proposición 3.9. *Sean X un espacio localmente compacto, de Hausdorff y $x \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es conexo en pequeño en x.

b) $(C_K(X),\tau_F)$ *es conexo en pequeño en* x.

Demostración. Vamos a probar $a)$ implica $b)$.
Supongamos que X es conexo en pequeño en x. Sea $\mathcal{U}$ una vecindad básica de $\{x\}$ en $(C_K(X),\tau_F)$. Consideremos los siguientes casos.

Caso I. Supongamos que $\mathcal{U} = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- \cap (K^c)^+\right) \cap C_K(X)$ donde $V_1,\ldots,V_n \in \tau_X$ y $K \in \mathcal{K}(X)$.
Entonces $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \cap K^c$. Haganos $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \cap K^c$. Claramente $\{x\} \in (U^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X) \subset \mathcal{U}$.

Por la compacidad local de X, existe una vecindad V de x en X tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto y $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Como X es conexo en pequeño en x, sea M la componente de V que continene a x en su interior. Sean $K' = \mathrm{cl}\,(V)\setminus V$, $W = \mathrm{Int}\,(M)$, $W' = \mathrm{Int}\,(V)$ y $\mathcal{W} = (W^- \cap ((K \cup K')^c)^+) \cap C_K(X)$. Entonces

$$\{x\} \in \mathcal{W} \subset (W'^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X) \subset (U^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X) \subset \mathcal{U}.$$

Demostraremos que $(U^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X)$ tiene una componente que contiene a $\mathcal{W}$. Sea $E \in \mathcal{W}$. Dado que $X\setminus K' = (X\setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$, $E \subset (X\setminus(K\cup K')) = (X\setminus K)\cap(X\setminus K') \subset (X\setminus \mathrm{cl}\,(V))\cup V$. De donde, $E \subset (X\setminus \mathrm{cl}\,(V))\cup V$. Así, dado que $X\setminus \mathrm{cl}\,(V)$ y V son dos abiertos ajenos, E es conexo y $\emptyset \neq E \cap W = E \cap \mathrm{Int}\,(M) \subset E \cap M \subset E \cap V$, se tiene que $E \subset V$. Como E y $\mathrm{cl}\,(M)$ son subconjuntos compactos de $\mathrm{cl}\,(V)$ y $E \cap M \neq \emptyset$, $E \cup \mathrm{cl}\,(M)$ es un subcontinuo de $\mathrm{cl}\,(V) \subset U \subset X\setminus K$. Por lo que $E\cup\mathrm{cl}\,(M) \in (U^-\cap(K^c)^+)\cap C_K(X)$.

Por otra parte, sean

$$\mathcal{L}_E = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : E \subset F\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : \mathrm{cl}\,(M) \subset F\}.$$

Entonces, por el Lema 2.11 y el Lema 1.36, $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ y $\mathcal{L}_E$ son conexos en $(C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)),\tau_F)$. Si $G \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$, $\mathrm{cl}\,(M) \subset G \subset E \cup \mathrm{cl}\,(M)$. Así, dado que $E, \mathrm{cl}\,(M) \subset \mathrm{cl}\,(V) \subset U \subset X \setminus K$, se tiene que

$$\emptyset \neq \mathrm{cl}\,(M) \subset G \cap U \text{ y}$$

$$G \subset E \cup \mathrm{cl}\,(M) \subset X \setminus K.$$

Así, $G \in (U^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \subset (U^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset (U^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X)$. Como $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cap \mathcal{L}_E$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ es un subconjunto compacto y conexo de $(U^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X)$. También $E \in \mathcal{L}_E$ y $\mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$. Así, $\mathrm{cl}\,(M) \in \bigcap_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ y $\bigcup_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ es un conexo que contiene a $\mathcal{W}$. Por lo tanto, la componente de $\mathcal{U}$ que contiene $\bigcup_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ tiene a $\{x\}$ en su interior.

Caso II. Supongamos que $\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap C_K(X)$ donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau_X$.
Entonces $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Hagamos $U = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Claramente $\{x\} \in (U^-) \cap C_K(X) \subset \mathcal{U}$.

Por la compacidad local de X, existe una vecindad V de x en X tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto y $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Como X es conexo en pequeño en x, sea M la componente de V que continene a x en su interior.

Sean $K' = \mathrm{cl}\,(V) \setminus V$, $W = \mathrm{Int}\,(M)$ y $\mathcal{W} = (W^- \cap ((K')^c)^+) \cap C_K(X)$. Entonces

$$\{x\} \in \mathcal{W} \subset (U^-) \cap C_K(X) \subset \mathcal{U}.$$

Demostraremos que $(U^-) \cap C_K(X)$ tiene una componente que contiene a $\mathcal{W}$. Sea $E \in \mathcal{W}$. Dado que $X \setminus K' = (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$, $E \subset (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$. Así, dado que $X \setminus \mathrm{cl}\,(V)$ y V son dos abiertos ajenos, E es conexo y $\emptyset \neq E \cap W = E \cap \mathrm{Int}\,(M) \subset E \cap M \subset E \cap V$, se tiene que $E \subset V$. Como E y $\mathrm{cl}\,(M)$ son subconjuntos compactos de $\mathrm{cl}\,(V)$ y $E \cap M \neq \emptyset$, $E \cup \mathrm{cl}\,(M)$ es un subcontinuo de $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Por lo que $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in (U^-) \cap C_K(X)$.

Por otra parte, sean

$$\mathcal{L}_E = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : E \subset F\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : \mathrm{cl}\,(M) \subset F\}.$$

Entonces, por el Lema 2.11 y el Lema 1.36, $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ y $\mathcal{L}_E$ son conexos en $(C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)), \tau_F)$. Si $G \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$, $\mathrm{cl}\,(M) \subset G \subset E \cup \mathrm{cl}\,(M)$. Así, dado que $E, \mathrm{cl}\,(M) \subset \mathrm{cl}\,(V) \subset U$, se tiene que $\emptyset \neq \mathrm{cl}\,(M) \subset G \cap U$. Así $G \in (U^-) \cap C_K(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \subset (U^-) \cap C_K(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset (U^-) \cap C_K(X)$. Como $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cap \mathcal{L}_E$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ es un subconjunto compacto y conexo de $(U^-) \cap C_K(X)$. También $E \in \mathcal{L}_E$ y $\mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$. Así, $\mathrm{cl}\,(M) \in \bigcap_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ y $\bigcup_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ es un conexo que contiene a $\mathcal{W}$. Por lo tanto la componente de $\mathcal{U}$ que contiene $\bigcup_{E\in\mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ tiene a $\{x\}$ en su interior.

Caso III. Supongamos que $\mathcal{U} = (K^c)^+ \cap C_K(X)$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.
Entonces $x \in K^c$. Por la compacidad local de X, existe una vecindad V de x en X tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto y $\mathrm{cl}\,(V) \subset K^c$. Como X es conexo en pequeño en x, sea M la componente de V que continene a x en su interior. Sean $K' = \mathrm{cl}\,(V)\setminus V$, $W = \mathrm{Int}\,(M)$ y $\mathcal{W} = (W^- \cap ((K \cup K')^c)^+) \cap C_K(X)$. Entonces

$$\{x\} \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U}.$$

Demostraremos que $\mathcal{U}$ tiene una componente que contiene a $\mathcal{W}$. Sea $E \in \mathcal{W}$. Dado que $X \setminus K' = (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$, $E \subset (X\setminus(K \cup K')) = (X\setminus K) \cap (X\setminus K') \subset (X\setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$. De donde, $E \subset (X\setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$. Así, dado que $X\setminus \mathrm{cl}\,(V)$ y V son dos abiertos ajenos, E es conexo y $\emptyset \neq E \cap W = E \cap \mathrm{Int}\,(M) \subset E \cap M \subset E \cap V$, se tiene que $E \subset V$. Como E y $\mathrm{cl}\,(M)$ son subconjuntos compactos de $\mathrm{cl}\,(V)$ y $E \cap M \neq \emptyset$, $E \cup \mathrm{cl}\,(M)$ es un subcontinuo de $\mathrm{cl}\,(V) \subset X \setminus K$. Por lo que $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{U}$.

Por otra parte, sean

$$\mathcal{L}_E = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : E \subset F\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : \mathrm{cl}\,(M) \subset F\}.$$

Entonces, por el Lema 2.11 y el Lema 1.36, $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ y $\mathcal{L}_E$ son conexos en $(C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)), \tau_F)$. Si $G \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$, $\mathrm{cl}\,(M) \subset G \subset E \cup \mathrm{cl}\,(M)$. Así, dado que $E, \mathrm{cl}\,(M) \subset \mathrm{cl}\,(V) \subset X\setminus K$, se tiene que $G \subset E \cup \mathrm{cl}\,(M) \subset X\setminus K$. Así $G \in \mathcal{U}$. Por lo que $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \subset \mathcal{U}$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{U}$. Como $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cap \mathcal{L}_E$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ es un subconjunto compacto y conexo de $\mathcal{U}$. También $E \in \mathcal{L}_E$ y $\mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$. Así, $\mathrm{cl}\,(M) \in \bigcap_{E\in\mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ y $\bigcup_{E\in\mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ es un conexo que contiene a $\mathcal{W}$. Por lo tanto, la componente de $\mathcal{U}$ que contiene $\bigcup_{E\in\mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ tiene a $\{x\}$ en su interior.
Esto demuestra $a)$ implica $b)$.

Vamos a probar $b)$ implica $a)$.
Supongamos que $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo en pequeño en x. Sea U una vecindad de x en

X. Sea V un abierto de x tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto y $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Sea $K = \mathrm{cl}\,(V) \setminus V$. Entonces,

$$\{x\} \in \mathcal{V} = (V^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X) \subset (U^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X).$$

Dado que $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo en pequeño, existe $\mathcal{C}$ la componente de $\mathcal{V}$ que contiene a $\{x\}$ en su interior. Probaremos que $\bigcup \mathcal{C} \subset V$. Sea $E \in \mathcal{C}$. Entonces, $E \subset X \setminus K = X \setminus (\mathrm{cl}\,(V) \cap X \setminus V) = (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$. Así, dado que $X \setminus \mathrm{cl}\,(V)$ y V son dos abiertos ajenos, E es conexo y $E \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $E \subset V$. Esto muestra que $\bigcup \mathcal{C} \subset V$. Entonces, por la Proposición 2.1, existe una vecindad N de x tal que $N \subset \bigcup \mathrm{Int}\,(\mathcal{C}) \subset \bigcup \mathcal{C}$. Por la Proposición 2.12, $\bigcup \mathcal{C}$ es conexo. Esto prueba que la componente D de U que contiene a x, satisface que $x \in N \subset \bigcup \mathcal{C} \subset D$ y $x \in \mathrm{Int}_X\,(D)$. Por lo tanto X es conexo en pequeño en x. $\square$

Proposición 3.10. *Sean X un espacio localmente compacto, de Hausdorff y $x \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es conexo en pequeño en x.

b) $(C(X), \tau_F)$ es conexo en pequeño en x.

Demostración. Vamos a probar a) implica b).
Supongamos que X es conexo en pequeño en x. Sea $\mathcal{U}$ una vecindad básica de $\{x\}$ en $(C(X), \tau_F)$. Consideremos los siguientes casos.

Caso I. Supongamos que $\mathcal{U} = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i^- \cap (K^c)^+ \right) \cap C(X)$ donde $V_1, \ldots, V_n \in \tau_X$ y $K \in \mathcal{K}(X)$.
Entonces $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \cap K^c$. Haganos $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \cap K^c$. Claramente $\{x\} \in (U^- \cap (K^c)^+) \cap C(X) \subset \mathcal{U}$.

Por la compacidad local de X, existe una vecindad V de x en X tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto y $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Como X es conexo en pequeño en x, sea M la componente de V que continene a x en su interior. Sean $K' = \mathrm{cl}\,(V) \setminus V$, $W = \mathrm{Int}\,(M)$, $W' = \mathrm{Int}\,(V)$ y $\mathcal{W} = (W^- \cap ((K \cup K')^c)^+) \cap C(X)$. Entonces

$$\{x\} \in \mathcal{W} \subset (W'^- \cap (K^c)^+) \cap C(X) \subset (U^- \cap (K^c)^+) \cap C(X) \subset \mathcal{U}.$$

Demostraremos que $(U^-\cap(K^c)^+)\cap C(X)$ tiene una componente que contiene a $\mathcal{W}$. Sea $E\in\mathcal{W}$. Dado que $X\setminus K'=(X\setminus \mathrm{cl}\,(V))\cup V$, $E\subset(X\backslash(K\cup K'))=(X\backslash K)\cap(X\backslash K')\subset(X\backslash \mathrm{cl}\,(V))\cup V$. De donde, $E\subset(X\backslash \mathrm{cl}\,(V))\cup V$. Así, dado que $X\backslash \mathrm{cl}\,(V)$ y V son dos abiertos ajenos, E es conexo y $\emptyset\neq E\cap W=E\cap \mathrm{Int}\,(M)\subset E\cap M\subset E\cap V$, se tiene que $E\subset V$. Como E y $\mathrm{cl}\,(M)$ son subconjuntos cerrados de $\mathrm{cl}\,(V)$ y $E\cap M\neq\emptyset$, $E\cup \mathrm{cl}\,(M)$ es un subconjunto conexo y cerrado de $\mathrm{cl}\,(V)\subset U\subset X\setminus K$. Por lo que $E\cup \mathrm{cl}\,(M)\in(U^-\cap(K^c)^+)\cap C(X)$.

Por otra parte, sean

$$\mathcal{L}_E=\{F\in C(E\cup \mathrm{cl}\,(M)):E\subset F\}\text{ y}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}=\{F\in C(E\cup \mathrm{cl}\,(M)):\mathrm{cl}\,(M)\subset F\}.$$

Entonces, por el Lema 2.11 y el Lema 1.36, $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ y $\mathcal{L}_E$ son conexos en $(C(E\cup \mathrm{cl}\,(M)),\tau_F)$. Si $G\in\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$, $\mathrm{cl}\,(M)\subset G\subset E\cup \mathrm{cl}\,(M)$. Así, dado que $E,\mathrm{cl}\,(M)\subset \mathrm{cl}\,(V)\subset U\subset X\setminus K$, se tiene que

$$\emptyset\neq \mathrm{cl}\,(M)\subset G\cap U\text{ y}$$

$$G\subset E\cup \mathrm{cl}\,(M)\subset X\setminus K.$$

Así $G\in(U^-\cap(K^c)^+)\cap C(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}\subset(U^-\cap(K^c)^+)\cap C(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E\subset(U^-\cap(K^c)^+)\cap C(X)$. Como $E\cup \mathrm{cl}\,(M)\in\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}\cap\mathcal{L}_E$, $\mathcal{L}_E\cup\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ es un subconjunto cerrado y conexo de $(U^-\cap(K^c)^+)\cap C(X)$. También $E\in\mathcal{L}_E$ y $\mathrm{cl}\,(M)\in\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$. Así, $\mathrm{cl}\,(M)\in\bigcap_{E\in\mathcal{W}}(\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}\cup\mathcal{L}_E)$ y $\bigcup_{E\in\mathcal{W}}(\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}\cup\mathcal{L}_E)$ es un conexo que contiene a $\mathcal{W}$. Por lo tanto la componente de $\mathcal{U}$ que contiene $\bigcup_{E\in\mathcal{W}}(\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}\cup\mathcal{L}_E)$ tiene a $\{x\}$ en su interior.

Caso II. Supongamos que $\mathcal{U}=\left(\bigcap_{i=1}^{n}V_i^-\right)\cap C(X)$ donde $V_1,\ldots,V_n\in\tau_X$.
Entonces $x\in\bigcap_{i=1}^{n}V_i$. Hagamos $U=\bigcap_{i=1}^{n}V_i$. Claramente $\{x\}\in(U^-)\cap C(X)\subset\mathcal{U}$.

Por la compacidad local de X, existe una vecindad V de x en X tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto y $\mathrm{cl}\,(V)\subset U$. Como X es conexo en pequeño en x, sea M la componente de V que continene a x en su interior.

Sean $K'=\mathrm{cl}\,(V)\backslash V$, $W=\mathrm{Int}\,(M)$ y $\mathcal{W}=(W^-\cap((K')^c)^+)\cap C(X)$. Entonces

$$\{x\}\in\mathcal{W}\subset(U^-)\cap C(X)\subset\mathcal{U}.$$

Demostraremos que $(U^-) \cap C(X)$ tiene una componente que contiene a $\mathcal{W}$. Sea $E \in \mathcal{W}$. Dado que $X \setminus K' = (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$, $E \subset (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$. Así, dado que $X \setminus \mathrm{cl}\,(V)$ y V son dos abiertos ajenos, E es conexo y $\emptyset \neq E \cap W = E \cap \mathrm{Int}\,(M) \subset E \cap M \subset E \cap V$, se tiene que $E \subset V$. Como E y $\mathrm{cl}\,(M)$ son subconjuntos cerrados de $\mathrm{cl}\,(V)$ y $E \cap M \neq \emptyset$, $E \cup \mathrm{cl}\,(M)$ es un subconjunto cerrado y conexo de $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Por lo que $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in (U^-) \cap C(X)$.

Por otra parte, sean

$$\mathcal{L}_E = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : E \subset F\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : \mathrm{cl}\,(M) \subset F\}.$$

Entonces por el Lema 2.11 y el Lema 1.36, $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ y $\mathcal{L}_E$ son conexos en $(C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)), \tau_F)$. Si $G \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$, $\mathrm{cl}\,(M) \subset G \subset E \cup \mathrm{cl}\,(M)$. Así, dado que $E, \mathrm{cl}\,(M) \subset \mathrm{cl}\,(V) \subset U$, se tiene que $\emptyset \neq \mathrm{cl}\,(M) \subset G \cap U$. Así $G \in (U^-) \cap C(X)$. Por lo que $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \subset (U^-) \cap C(X)$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset (U^-) \cap C(X)$. Como $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cap \mathcal{L}_E$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ es un subconjunto cerrado y conexo de $(U^-) \cap C(X)$. También $E \in \mathcal{L}_E$ y $\mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$. Así, $\mathrm{cl}\,(M) \in \bigcap_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ y $\bigcup_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ es un conexo que contiene a $\mathcal{W}$. Por lo tanto la componente de $\mathcal{U}$ que contiene $\bigcup_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ tiene a $\{x\}$ en su interior.

Caso III. Supongamos que $\mathcal{U} = (K^c)^+ \cap C(X)$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.
Entonces $x \in K^c$. Por la compacidad local de X, existe una vecindad V de x en X tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto y $\mathrm{cl}\,(V) \subset K^c$. Como X es conexo en pequeño en x, sea M la componente de V que continene a x en su interior. Sean $K' = \mathrm{cl}\,(V) \setminus V$, $W = \mathrm{Int}\,(M)$ y $\mathcal{W} = (W^- \cap ((K \cup K')^c)^+) \cap C(X)$. Entonces,

$$\{x\} \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U}.$$

Demostraremos que $\mathcal{U}$ tiene una componente que contiene a $\mathcal{W}$. Sea $E \in \mathcal{W}$. Dado que $X \setminus K' = (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$, $E \subset (X \setminus (K \cup K')) = (X \setminus K) \cap (X \setminus K') \subset (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$. De donde, $E \subset (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$. Así, dado que $X \setminus \mathrm{cl}\,(V)$ y V son dos abiertos ajenos, E es conexo y $\emptyset \neq E \cap W = E \cap \mathrm{Int}\,(M) \subset E \cap M \subset E \cap V$, se tiene que $E \subset V$. Como E y $\mathrm{cl}\,(M)$ son subconjuntos compactos de $\mathrm{cl}\,(V)$ y $E \cap M \neq \emptyset$, $E \cup \mathrm{cl}\,(M)$ es un subcontinuo de $\mathrm{cl}\,(V) \subset X \setminus K$. Por lo que $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{U}$.

Por otra parte, sean

$$\mathcal{L}_E = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : E \subset F\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} = \{F \in C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)) : \mathrm{cl}\,(M) \subset F\}.$$

Entonces, por el Lema 2.11 y el Lema 1.36, $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ y $\mathcal{L}_E$ son conexos en $(C(E \cup \mathrm{cl}\,(M)), \tau_F)$. Si $G \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$, $\mathrm{cl}\,(M) \subset G \subset E \cup \mathrm{cl}\,(M)$. Así, dado que $E, \mathrm{cl}\,(M) \subset \mathrm{cl}\,(V) \subset X \setminus K$, se tiene que $G \subset E \cup \mathrm{cl}\,(M) \subset X \setminus K$. Así $G \in \mathcal{U}$. Por lo que $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \subset \mathcal{U}$. De la misma manera $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{U}$. Como $E \cup \mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cap \mathcal{L}_E$, $\mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$ es un subconjunto cerrado y conexo de $\mathcal{U}$. También, $E \in \mathcal{L}_E$ y $\mathrm{cl}\,(M) \in \mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)}$. Así, $\mathrm{cl}\,(M) \in \bigcap\limits_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ y $\bigcup\limits_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ es un conexo que contiene a $\mathcal{W}$. Por lo tanto, la componente de $\mathcal{U}$ que contiene $\bigcup\limits_{E \in \mathcal{W}} (\mathcal{L}_{\mathrm{cl}(M)} \cup \mathcal{L}_E)$ tiene a $\{x\}$ en su interior.
Esto demuestra $a)$ implica $b)$.

Vamos a probar $b)$ implica $a)$.
Supongamos que $(C(X), \tau_F)$ es conexo en pequeño en x. Sea U una vecindad de x en X. Sea V un abierto de x tal que $\mathrm{cl}\,(V)$ es cerrado y $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Sea $K = \mathrm{cl}\,(V) \setminus V$. Entonces

$$\{x\} \in \mathcal{V} = (V^- \cap (K^c)^+) \cap C(X) \subset (U^- \cap (K^c)^+) \cap C(X).$$

Dado que $(C(X), \tau_F)$ es conexo en pequeño, existe $\mathcal{C}$ la componente de $\mathcal{V}$ que contiene a $\{x\}$ en su interior. Probaremos que $\bigcup \mathcal{C} \subset V$. Sea $E \in \mathcal{C}$. Entonces, $E \subset X \setminus K = X \setminus (\mathrm{cl}\,(V) \cap X \setminus V) = (X \setminus \mathrm{cl}\,(V)) \cup V$. Así, dado que $X \setminus \mathrm{cl}\,(V)$ y V son dos abiertos ajenos, E es conexo y $E \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $E \subset V$. Esto muestra que $\bigcup \mathcal{C} \subset V$. Entonces, por la Proposición 2.3, existe una vecindad N de x tal que $N \subset \bigcup \mathrm{Int}\,(\mathcal{C}) \subset \bigcup \mathcal{C}$. Por la Proposición 2.12, $\bigcup \mathcal{C}$ es conexo. Esto prueba que la componente D de U que contiene a x, satisface que $x \in N \subset \bigcup \mathcal{C} \subset D$ y $x \in \mathrm{Int}_X\,(D)$.
Por lo tanto X es conexo en pequeño en x. □

Proposición 3.11. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si X es localmente conexo, entonces $(C_K(X), \tau_F)$ es localmente conexo.*

Demostración. La demostración se sigue de la Proposición 3.2. □

Proposición 3.12. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Entonces, X es localmente conexo si, y sólo si, $(C_K(X), \tau_F)$ es localmente conexo.*

Demostración. La necesidad se sigue de la Proposición 3.11.
Para la Suficiencia, supongamos que $(C_K(X), \tau_F)$ es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Por la compacidad local de X, existe un abierto V de X tal que $x \in V$, $\mathrm{cl}\,(V)$ es un compacto en X y $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Sea $K = \mathrm{cl}\,(V) \backslash V = \mathrm{Fr}\,(V)$. Claramente K es compacto en X. Entonces, $\mathcal{V} = (V^- \cap (K^c)^+) \cap C_K(X)$ es un abierto que contiene a $\{x\}$ en $(C_K(X), \tau_F)$. Como $(C_K(X), \tau_F)$ es localmente conexo en $\{x\}$, existe un conjunto abierto conexo $\mathcal{W}$ que contiene a $\{x\}$ en $(C_K(X), \tau_F)$ tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

Por otra parte, probaremos que $\bigcup \mathcal{W}$ es una vecindad conexa de x en X tal que $\bigcup \mathcal{W} \subset U$. Dado que $\{x\} \in \mathcal{W}$, $x \in \bigcup \mathcal{W}$. Ahora, sea $y \in \bigcup \mathcal{W}$. Entonces, existe $E \in \mathcal{W}$ tal que $y \in E$. Dado que E es conexo, $E \in \mathcal{V}$, $E \cap V \neq \emptyset$, $E \subset V \cup (X \backslash K)$ y $X \backslash \mathrm{Fr}\,(V) = V \cup (X \setminus \mathrm{cl}\,(V))$ es la unión de dos abiertos no vacíos y ajenos, $E \subset V$. Así, $y \in V$. Esto muestra que $\bigcup \mathcal{W} \subset V \subset U$. Además, por la Proposición 2.1, existe una vecindad W de x tal que $W \subset \bigcup \mathcal{W}$. Entonces, $\bigcup \mathcal{W}$ es una vecindad de x. Por Proposición 2.13, $\bigcup \mathcal{W}$ es conexo. Esto muestra que X es conexo en pequeño en x.
Por lo que, X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Por lo tanto X es localmente conexo. □

Proposición 3.13. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *X es localmente conexo;*

(b) *$(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo;*

(c) *$(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo en cada $E \subset C_K(X)$.*

Demostración. Para probar (a) implica (b), sea $E \in C(X)$ y $\mathcal{U}$ un abierto básico en $CL(X)$ tal que $E \in \mathcal{U} \cap C(X)$. Observemos que si X no es conexo, entonces $X \notin C(X)$. En el caso de que X sea conexo, un abierto básico en $C(X)$ que contiene a X, es de la forma $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i{}^-\right) \cap C(X)$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X.

Consideremos los siguientes casos:
Caso I. Supongamos $\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i{}^-\right) \cap (K^c)^+$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X y

$K \in \mathcal{K}(X)$.

Sea C la componente de $X \backslash K$ que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos un punto $x_i \in U_i \cap E = U_i \cap C \cap E$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $V_i = U_i \cap C$. Hagamos $\mathcal{V} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^- \right) \cap ((K^c)^+)$. Entonces,

$$E \in \mathcal{V} \cap C(X) \subset \mathcal{U} \cap C(X).$$

Probaremos que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es conexo. Dado que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$ y $C_K(X)$ es denso en $C(X)$, $(\mathcal{V} \cap C(X)) \cap C_K(X) \neq \emptyset$. De donde $\mathcal{V} \cap C_K(X) \neq \emptyset$. Así, por el Lema 3.4, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo en $C(X)$. Usando la Proposición 3.3, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es denso en $\mathcal{V} \cap C(X)$. Por lo que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es conexo en $C(X)$.

Caso II. Supongamos $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{n} U_i^-$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X.

Subcaso A. Supongamos que X no es conexo.

Sea C la componente de X que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de X. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos un punto $x_i \in U_i \cap E = U_i \cap C \cap E$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $V_i = U_i \cap C$. Hagamos $\mathcal{V} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^- \right)$. Entonces,

$$E \in \mathcal{V} \cap C(X) \subset \mathcal{U} \cap C(X).$$

Probaremos que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es conexo. Dado que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$ y $C_K(X)$ es denso en $C(X)$, $(\mathcal{V} \cap C(X)) \cap C_K(X) \neq \emptyset$. De donde $\mathcal{V} \cap C_K(X) \neq \emptyset$. Así, por el Lema 3.5, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo en $C(X)$. Usando la Proposición 3.3, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es denso en $\mathcal{V} \cap C(X)$. Por lo que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es conexo en $C(X)$.

Subcaso B. Supongamos que X es conexo y $X \in \mathcal{U} \cap C(X)$.

Probaremos que $\mathcal{U} \cap C(X)$ es conexo. Dado que $\mathcal{U} \cap C(X)$ es un abierto y $C_K(X)$ es denso en $C(X)$, $(\mathcal{U} \cap C(X)) \cap C_K(X) \neq \emptyset$. De donde $\mathcal{U} \cap C_K(X) \neq \emptyset$. Así, por el Lema 3.6, $\mathcal{U} \cap C_K(X)$ es conexo en $C(X)$. Usando la Proposición 3.3, $\mathcal{U} \cap C_K(X)$ es denso en $\mathcal{U} \cap C(X)$. Por lo que $\mathcal{U} \cap C(X)$ es conexo en $C(X)$.

Caso III. Supongamos $\mathcal{U} = (K^c)^+$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.

Sea C la componente de $X \backslash K$ que contiene a E. Por el Teorema 1.2, C es un abierto de

X. Hagamos $\mathcal{V} = C^- \cap ((K^c)^+)$. Entonces

$$E \in \mathcal{V} \cap C(X) \subset \mathcal{U} \cap C(X).$$

Probaremos que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es conexo. Dado que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$ y $C_K(X)$ es denso en $C(X)$, $(\mathcal{V} \cap C(X)) \cap C_K(X) \neq \emptyset$. De donde $\mathcal{V} \cap C_K(X) \neq \emptyset$. Así, por el Lema 3.7, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo en $C(X)$. Usando la Proposición 3.3, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es denso en $\mathcal{V} \cap C(X)$. Por lo que $\mathcal{V} \cap C(X)$ es conexo en $C(X)$.
Esto termina la prueba de (a) implica (b).

La prueba de que (b) implica (c), se sigue de que $C_K(X)$ es un subconjunto de $C(X)$.

Para probar (c) implica (a), es suficiente probar que X es conexo en pequeño. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Por la compacidad local, existe un abierto V en X tal que $x \in V$, $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto y $\mathrm{cl}\,(V) \subset U$. Sea $K = \mathrm{cl}\,(V) \setminus V$. Claramente K es compacto en X y $\{x\} \in (V^- \cap (K^c)^+) \cap C_(X)$. Como $(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo en $\{x\}$, existe un conjunto abierto conexo $\mathcal{U}$ en $(C(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U} \subset (V^- \cap (K^c)^+) \cap C(X)$. Por Proposición 2.12 y Proposición 2.1, $\bigcup \mathcal{U}$ es conexo y contiene una vecindad W de x. De donde $\bigcup \mathcal{U}$ es una vecindad conexa de x.

Finalmente, veamos que $\bigcup \mathcal{U} \subset U$. Sea $E \in \mathcal{U}$. Entonces, $E \in (V^- \cap (K^c)^+)$ y $E \subset X \setminus K = V \cup (X \setminus \mathrm{cl}\,(V))$. Así, dado que $E \cap V \neq \emptyset$, E es conexo y, V y $(X \setminus \mathrm{cl}\,(V))$ están separados, $E \subset V \subset U$. Por lo que $\bigcup \mathcal{U} \subset V \subset U$. Esto muestra que X es conexo en pequeño en x. Por lo tanto X es conexo en pequeño. $\square$

Bibliografía

[1] Goodykoontz, J. T., Jr., *Connectedness im kleinen and local connectedness in* 2^X *and* $C(X)$, Pacif. J. Math., 53 (1994), 387-397

[2] Hur K., Moon J. R., Rhee C. J., *Local connectedness in Fell Topology*. J. Korean Math. Soc., 36, 6 (1999), 1047-1059.

[3] McWater, M. M., *Arcs, semigroups, and hyperspaces*, Canadian Math. J., 20 (1968), 1207-1210.

[4] Michael, E., *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1995), 152-182.

[5] Munkres, J. R., *Topología*, 2^a edición, Prentice-Hall Inc., 2002.

[6] Poppe, H., *Einig Bemerkungen uber den Raum der abgesschossenen Mengen*, Found. Math., 59 (1966), 159-169.

[7] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass., 1970.