Universidad Autónoma del Estado de México

Licenciatura en Matemáticas 2003

Programa de Estudios:

Cálculo en Variedades

I. Datos de identificación

Licenciatura	**Matemáticas 2003**			
Unidad de aprendizaje	**Cálculo en Variedades**	**Clave**	**L31764**	
Carga académica	5	0	5	10
	Horas teóricas	Horas prácticas	Total de horas	Créditos

Período escolar en que se ubica	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	UA Antecedente	UA Consecuente
Seriación	Topología de Conjuntos Geometría Diferencial intrínseca	Topología Diferencial Temas Selectos de Geometría Temas Selectos de Topología Geometría Diferencial Global Geometría Riemanniana

Tipo de Unidad de Aprendizaje

Curso	X	Curso taller	
Seminario		Taller	
Laboratorio		Práctica profesional	
Otro tipo (especificar)			

Modalidad educativa

Escolarizada. Sistema rígido		No escolarizada. Sistema virtual	
Escolarizada. Sistema flexible	X	No escolarizada. Sistema a distancia	
No escolarizada. Sistema abierto		Mixta (especificar)	

Formación común

Biología 2003		Biotecnología 2010	
Física 2003			

Formación equivalente

	Unidad de Aprendizaje
Biología 2003	
Biotecnología 2010	
Física 2003	

II. Presentación

Riemann, en el siglo XIX, observó la importancia de definir la noción de variedad de un modo intrínseco, sin requerir que el espacio topológico subyacente estuviera embebido en un espacio afín. La definición formal precisa fue introducida por primera vez por Hermann Weyl en 1913.

Una variedad es un espacio abstracto localmente difeomorfa a un espacio euclidiano, es decir, para cada punto de la variedad, existe un homeomorfismo entre una vecindad del punto y un abierto de un espacio euclidiano (el mismo espacio en toda la variedad), y la composición de dichos homeomorfismo es diferenciable. Estos espacios surgen como necesidad de generalizar la geometría y el análisis. El concepto de forma diferencial es una generalización sobre ideas previas como el gradiente, la divergencia, el rotacional, etc. Esa generalización y la moderna notación usada en el estudio de las formas difenciales se debe al matemático francés Elie Cartan (1869 – 1951).

Cartan definió la noción general de forma diferencial antisimétrica, en el modo en el que se utiliza actualmente; su enfoque a los grupos de Lie con las ecuaciones de Maurer-Cartan requería 2-formas para su determinación. En aquella época, lo que se dio en llamar sistemas de Pfaff (es decir, ecuaciones diferenciales de primer orden dadas como 1-formas) eran de uso general; por medio de la introducción de las variables nuevas para las derivadas, y formas adicionales, se pudo llegar a una formulación muy general de los sistemas de EDP. Cartan agregó la derivada exterior, como operación enteramente geométrica e independiente de las coordenadas, lo que conduce naturalmente a la necesidad de discutir *p*formas, de grado general *p*. Con estos fundamentos (Grupos de Lie y formas diferenciales) produjo un gran *corpu* de trabajo, y también algunas técnicas generales, como el marco móvil, que quedaron incorporadas gradualmente en la corriente principal de las matemáticas.

En geometría diferencial, una forma diferencial puede ser entendida como un operador multilineal antisimétrico definido sobre el espacio vectorial tangente a una variedad diferenciable. En un espacio o variedad de dimensión n, pueden definirse 0-formas, 1-formas,... y n-formas.

El teorema fundamental del cálculo establece que la integral de una función f en el intervalo $[a, b]$ puede ser calculado por medio de su antiderivada F de f:

En el lenguaje de las formas diferenciales, $f(x)\,dx$ es la derivada exterior de la 0-forma F: $dF = f\,dx$. El teorema general de Stokes aplica para formas diferenciales mayores ω en vez de F y puede ser considerado como generalización del teorema fundamental del cálculo y, de hecho, se prueba fácilmente usando este teorema. Precisando, el teorema de Stokes se es una variedad en sí misma y hereda la orientación natural de *M*. Por ejemplo, la orientación natural del intervalo da una orientación de los dos puntos frontera. Intuitivamente *a* hereda la orientación opuesta a *b*, al ser extremos opuestos del intervalo. Entonces, integrando *F* en los dos puntos frontera *a*, *b* es equivalente a tomar la diferencia $F(b) - F(a)$. El teorema de Stokes se enuncia de la siguiente manera:

Sea *M* una variedad de dimensión *n* diferenciable por trozos orientada compacta y sea ω una forma diferencial en *M* de grado *n*-1 y de clase C1.

Si ∂ *M* denota el límite de *M* con su orientación inducida, entonces donde *d* es la derivada exterior, que se define usando solamente la estructura de variedad. El teorema se utiliza a menudo en situaciones donde *M* es una subvariedad orientada sumergida en una variedad más grande en la cual la forma ω se define. El teorema se extiende fácilmente a las combinaciones lineales de las subvariedades diferenciables por trozos, las, así llamadas, cadenas. El teorema de Stokes demuestra entonces que las formas cerradas definidas módulo una forma exacta se puede integrar sobre las cadenas definidas módulo la frontera. Ésta es la base para el apareamiento entre los grupos de homología y la cohomología de de Rham. aplica a variedades orientadas *M* con frontera. La frontera ∂*M* de *M*

III. Ubicación de la unidad de aprendizaje en el mapa curricular

Núcleo de formación:	**Integral**
Área Curricular:	**Análisis Matemático**
Carácter de la UA:	**Optativa**

IV. Objetivos de la formación profesional.

Objetivos del programa educativo:

Formar matemáticos competentes, capaces de resolver problemas de matemática pura y aplicada, participar en proyectos de investigación en su área, así como auxiliar a otras áreas del conocimiento y de la actividad social, tales como otras científicas y tecnológicas; formar también profesionistas con espíritu crítico y actitud de servicio

Objetivos del núcleo de formación:

Objetivos del área curricular o disciplinaria:

Dominar con suficiente rigor las herramientas del cálculo diferencial e integral en una y varias variables reales y complejas, y ser capaz de aplicarlas en diversas áreas del conocimiento.

V. Objetivos de la unidad de aprendizaje.

Conocer la teoría de integración de formas diferenciales en Rn y en variedades, en particular los teoremas clásicos del cálculo vectorial: Teorema de Green, Teorema de Stokes, Teorema de Gauss.

VI. Contenidos de la unidad de aprendizaje y su organización

Unidad 1. Integración de formas diferenciales

Objetivo: Definir y estudiar las formas diferenciales para generalizar el cálculo diferencial e integral a espacios más abstractos que los espacios euclidianos, conocidos como variedades

Unidad 2. Variedades
Objetivo: Estudiar las variedades, subvariedades y variedades con frontera y su estructura diferencial para desarrollar el cálculo diferencial e integral en ellas

Unidad 3. Integración y medidas sobre variedades

Objetivo: Estudiar y analizar los teoremas clásicos: Teorema de Green, Teoremade Stokes, Teorema de Gauss, en su forma general y unificada (conocido como Teorema de Stokes) y sus aplicaciones en la geometría diferencial, la física y la ingeniería

VII. Sistema de evaluación

Exámenes 60%
Tareas escritas 15%
Exposiciones orales 15%
Otras actividades 10 %

VIII. Acervo bibliográfico

Abraham, R., Marsden J. E. and Rativ T. Manifolds, Tensor, Análisis, and Applications, Springer, 1998.

Cartan H. Formas Diferenciales, Ediciones Omega, Barcelona, 1972.

Flanders H. Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Mathematics in Science and Engineering, vol. 11, Academic Press, 1963.

Guillemin , V. Pollack A., Topología Diferencial, Aportaciones Matemáticas, SMM. México, 2003.

Lang S. Real Analysis, Addison – Wesley, 1969.

Marsden, J. E. y Tromba, A. J. Cálculo Vectorial, Peason Educación , 2004.

Munkres, J. R., Topology, A first course, Prentice Hall Inc, N. Jersey, 1975.

Spivak, M., Differential Geometry, (5 volumenes), Publish or Perish, Berkeley, 1979.

Spivak M. Cálculo en Variedades, Reverté, 1987.