

Unidad 2. Teoría de probabilidad

Conceptos básicos

El desarrollo inicial de la probabilidad se asocia con los juegos de azar. Por ejemplo, considérense dos dados que se distinguen y que no están cargados; el interés recae en los números que aparecen cuando se tiran los dados. En la siguiente tabla se dan los 36 posibles pares de números:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Una característica clave de este ejemplo, así como también de muchos otros relacionados con los juegos de azar, es que los 36 resultados son mutuamente excluyentes debido a que no pueden aparecer más de un par en forma simultánea. Los 36 resultados son igualmente probables puesto que sus frecuencias son prácticamente las mismas, si se supone que los dados no están cargados y que el experimento se lleva a cabo un número suficientemente grande de veces. Nótese que de los 36 resultados posibles, seis dan una suma de siete, cinco dan una suma de ocho, etc. Por lo tanto, puede pensarse de manera intuitiva que la probabilidad de obtener un par de números cuya suma sea siete es la proporción de resultados que suman siete con respecto al número total, en este caso $6/36$. Es importante que usted comprenda que la proporción $6/36$ se obtiene únicamente después de que el experimento se realiza un número grande de veces, es decir, después de efectuar el experimento muchas veces se observará que, alrededor de la sexta parte de éste, la suma de los números que aparecen es igual a siete. La proporción $6/36$ no significa que en seis tiradas, forzosamente una dará como resultado un siete. Para situaciones de este tipo es apropiado el siguiente concepto de probabilidad.

PROBABILIDAD. Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes, y si n_A de estos resultados tienen un atributo A , la probabilidad de A es la proporción de n_A con respecto a n .

Concepto como frecuencia relativa.

En muchas situaciones prácticas, los posibles resultados de un experimento no son igualmente probables. Por ejemplo, en una fábrica las oportunidades de observar un artículo defectuoso normalmente será mucho más rara que observar un artículo bueno. En este caso, no es correcto estimar la probabilidad de encontrar un artículo defectuoso mediante el empleo del concepto clásico. En lugar de éste, en muchas ocasiones se emplea la interpretación de la probabilidad como una frecuencia relativa.

La interpretación de una frecuencia relativa descansa en la idea de que un experimento se efectúa y se repite muchas veces, y prácticamente bajo las mismas condiciones. Cada vez que un experimento se lleva a cabo, se observa un resultado. Este es impredecible dada la naturaleza aleatoria del experimento, la probabilidad de la presencia de cierto atributo se aproxima por la frecuencia relativa de los resultados que posee dicho atributo. Conforme aumenta la repetición del experimento, la frecuencia relativa de los resultados favorables se aproxima al verdadero valor de la probabilidad para ese atributo. Por ejemplo: supóngase que se desea determinar la proporción de artículos defectuosos en un proceso de

fabricación. Para llevar a cabo lo anterior, se muestra un determinado número de artículos; cada observación constituye un experimento. Los resultados pueden clasificarse como defectuosos o no defectuosos. Si el proceso de fabricación es estable, y asegura así las condiciones uniformes, al aumentar el número de artículos muestreados, la frecuencia relativa de artículos defectuosos con respecto al número de unidades muestreadas se aproximará cada vez más a la verdadera proporción de artículos defectuosos.

Para ilustrar la interpretación de la probabilidad como frecuencia relativa se simuló en una computadora un proceso de muestreo de n unidades, suponiendo que el proceso de fabricación producía un 5% de artículos defectuosos. Para cada n se observó el número de unidades defectuosas; los resultados se dan a continuación, para valores de n entre 20 y 10 000:

<i>Número de unidades Muestreadas (n)</i>	<i>Número de unidades defectuosas observadas</i>	<i>Frecuencia relativa</i>
20	2	0.1
50	3	0.06
100	4	0.04
200	12	0.06
500	28	0.056
1000	54	0.054
2000	97	0.0485
5000	244	0.0488
10 000	504	0.0504

A partir de esto es razonable concluir que la frecuencia relativa tiende a un valor verdadero de 0.05 conforme n crece. De esta manera, se sugiere el siguiente concepto de la probabilidad como frecuencia relativa.

PROBABILIDAD. Si en un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y nB de los resultados son favorables a un atributo B , el límite de nB/n conforme n se vuelve grande, se conceptualiza como la probabilidad del atributo B .

2.1 experimento, espacio muestral, eventos

EVENTOS

Para calcular la probabilidad de eventos es necesario que éstos se comporten de una manera más o menos estable. Precisamente, se echa mano de la regularidad estadística, que es la propiedad de los fenómenos aleatorios, y que consiste en que al aumentar el número de repeticiones de un experimento en condiciones prácticamente constantes, la frecuencia relativa de ocurrencia para cada evento tiende a un valor fijo.

Sin embargo, al momento de definir la probabilidad de un evento podemos tomar en cuenta los siguientes criterios:

La probabilidad subjetiva de un evento se la asigna la persona que hace el estudio, y depende del conocimiento que esta persona tenga sobre el tema.

Precisamente por su carácter de subjetividad no se considera con validez científica, aunque en la vida diaria es de las más comunes que se utilizan al no apoyarse más que en el sentido común y los conocimientos previos, y no en resultados estadísticos.

La probabilidad frecuencial de un evento es el valor fijo al que tienden las frecuencias relativas de ocurrencia del evento de acuerdo a la regularidad estadística. Esta definición sería la más real, pero proporciona probabilidades aproximadas, es decir, proporciona estimaciones y no valores reales. Además, los resultados son a posteriori, pues se necesita realizar el experimento para poder obtenerlo. (Para ver un ejemplo haz click aquí.)

La probabilidad clásica de un evento E , que denotaremos por $P(E)$, se define como el número de eventos elementales que componen al evento E , entre el número de eventos elementales que componen el espacio muestral:

$$P(E) = \frac{\text{número de eventos elementales del evento } E}{\text{número de eventos elementales del espacio muestral}}$$

Es la definición más utilizada porque supone de antemano, y se necesita como requisito indispensable, que todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir.

ESPACIO MUESTRAL

El conjunto de todos los resultados posibles diferentes de un determinado experimento aleatorio se denomina *Espacio Muestral* asociado a dicho experimento y se suele representar por Ω . A los elementos de Ω se les denomina *sucesos elementales*.

Así por ejemplo, el espacio muestral asociado al experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de una moneda es $\Omega = \{\text{Cara, Cruz}\}$; el espacio muestral asociado al lanzamiento de un dado es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, siendo Cara y Cruz los sucesos elementales asociados al primer experimento aleatorio y 1, 2, 3, 4, 5 y 6 los seis sucesos elementales del segundo experimento aleatorio.

A pesar de la interpretación que tiene el espacio muestral, no es más que un conjunto abstracto de puntos (los sucesos elementales), por lo que el lenguaje, los conceptos y propiedades de la teoría de conjuntos constituyen un contexto natural en el que desarrollar el Cálculo de Probabilidades.

Sea A el conjunto de las partes de, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de Ω . En principio, cualquier elemento de A , es decir, cualquier subconjunto del espacio muestral contendrá una cierta incertidumbre, por lo que trataremos de asignarle un número entre 0 y 1 como medida de su incertidumbre. En Cálculo de Probabilidades dichos subconjuntos reciben en el nombre de *sucesos*, siendo la medida de la incertidumbre su probabilidad. La tripleta (Ω, A, P) recibe el nombre de espacio probabilístico.

Por tanto, asociado a todo experimento aleatorio existen tres conjuntos: El espacio muestral, la clase de los sucesos, es decir, el conjunto de los elementos con incertidumbre asociados a nuestro experimento aleatorio A , y una función real, $P: A \rightarrow [0, 1]$, la cual asignará a cada suceso (elemento de A) un número entre cero y uno como medida de su incertidumbre.

Advertimos no obstante, que la elección del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio no tiene por qué ser única, sino que dependerá de que sucesos elementales queramos considerar como distintos y del problema de la asignación de la probabilidad sobre esos sucesos elementales.

Ejemplo: : "Urna"

Consideremos el experimento aleatorio consistente en extraer una bola al azar de una urna compuesta por tres bolas rojas, dos blancas y una verde.

Podemos considerar como espacio muestral

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

en donde sea ω_1 = bola roja, ω_2 = bola blanca y ω_3 = bola verde, aunque también podíamos haber considerado como espacio muestral el conjunto

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

en donde ω_i = bola roja, $i = 1,2,3$, ω_i = bola blanca, $i = 4,5$ y ω_6 = bola verde, haciendo las bolas distinguibles.

Ambos pueden ser considerados espacios muestrales del experimento descrito, eligiendo el que más nos convenga, por ejemplo, a la hora de asignar la probabilidad a los sucesos elementales de uno u otro espacio muestral.