Distribución muestral de medias

Distribuciones muestrales

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE MEDIAS

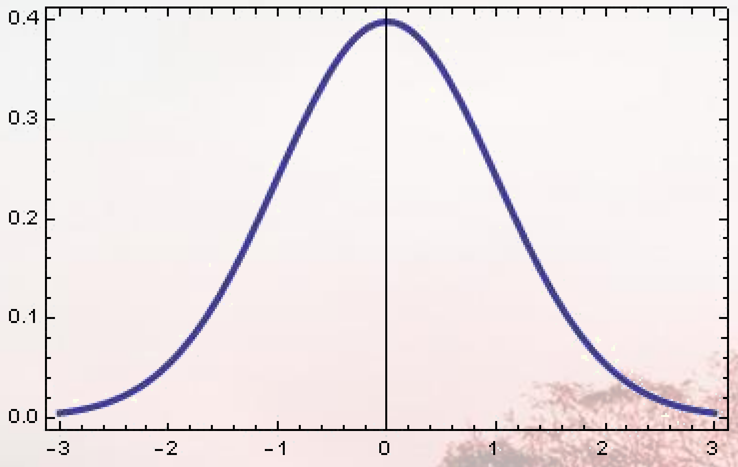
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

La distribución normal es una distribución continua, en forma de campana donde la media, la mediana y la moda tienen un ***mismo valor*** y es **simétrica**. Con esta distribución podemos calcular la probabilidad de algún evento relacionado con la variable aleatoria.

z es una variable estandarizada con media igual a cero y varianza igual a uno. ($\mu = 0$, $\sigma^2=1$)

Con esta fórmula se pueden a hacer los cálculos de probabilidad para cualquier ejercicio, utilizando la distribución ***z***.

La experiencia indica que si se extraen muestras de tamaño $n \geq 30$ o bien de cualquier tamaño de una *población normal*, la distribución muestral de medias tiene un comportamiento aproximadamente ***normal***, por lo que se puede utilizar la formula de la distribución normal con $\mu = \mu_x$ y $\sigma = \sigma_x$



Función de distribución normal (μ= #, σ^2=#)

$$z(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}$$

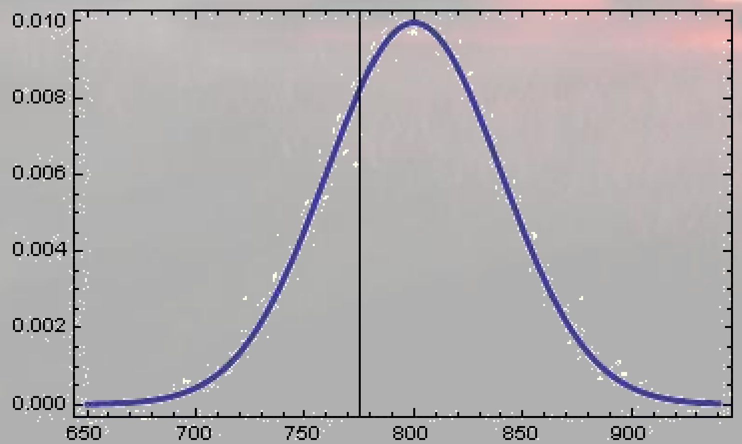
Función de distribución normal estandar (μ= 0, σ^2=1)

$$z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Función de densidad normal estandar (μ= 0, σ^2=1)

$$P(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x'}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$$

$$P(z\leq\#)=\frac{1}{2}(1+Erf\,(\frac{z}{\sqrt{2}}))$$



Puede existir un número infinito de distribuciones normales, cada una con su propia media y su desviación estándar. Y como es imposible analizar un número tan grande de posibilidades, será necesario convertir todas estas distribuciones normales a una forma estándar. Esta conversión a la función de distribución normal estándar se realiza de la siguiente manera:

Fórmula-Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Donde Z se conoce como la desviación normal, X es la variable aleatoria, μ es la media, σ es la desviación estándar

Observación

Una vez realizada la conversión la media $\mu=0$ y la desviación estándar es $\sigma= 1$, por lo que los resultados finales ya son determinados sobre la función de distribución normal estándar.

Ejemplo

Telmex presta servicios de comunicación a los negocios del área metropolitana de Cuauatitlan Izcalli. Los ingenieros indican que la transmisión satélite promedio es de 150 segundos, con una desviación estándar de 15 segundos. Los tiempos parecen estar distribuidos normalmente

A fin de estimar de forma apropiada la demanda del cliente por sus servicios, los funcionarios establecen una estructura de tarifa que maximice las utilidades corporativas. Telmex debe determinar que tan probable es que algunas llamadas se presenten. El director de servicios desea que un estudiante de Negocios de la UAPCI estime la probabilidad de que una llamada dure:

a) entre 125 y 150 segundos

b) Menos de 125 segundos.

c) Entre 145 y 155 segundos.

d) Entre 160 y 165 segundos.

a) entre 125 y 150 segundos

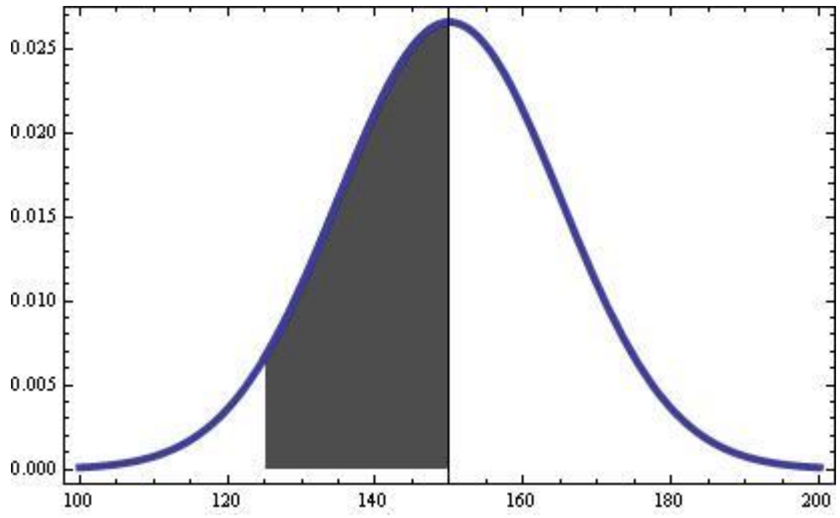
μ= 150 segundos es la media, ***σ =15*** segundos es la desviación estándar

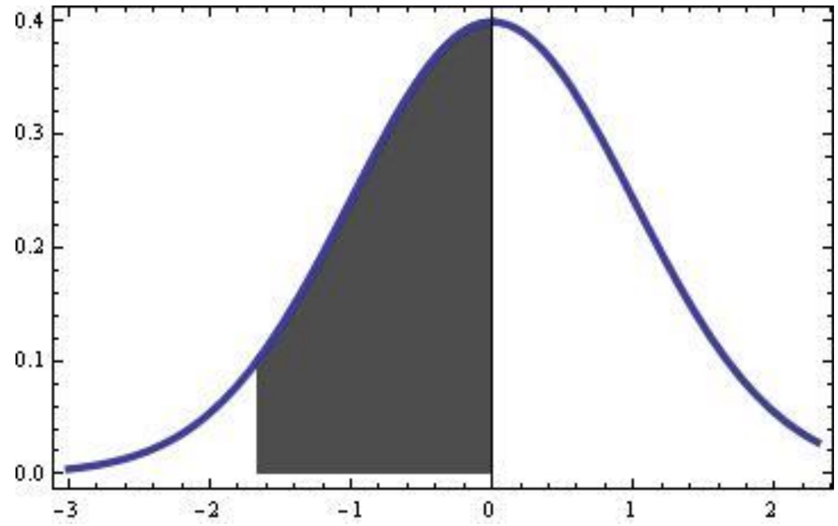
$$Z = \frac{125 - 150}{15} = -1.66667$$

$$Z = \frac{150 - 150}{15} = 0$$

Función de distribución normal original

Función de distribución normal transformada en estándar





μ= 150, σ =15

Intervalo de interés: (125-150)

μ= 0, σ =1

Intervalo de interés: (-1.6667-0)

La probabilidad estará dada por la integral de la fdd y ésta se obtiene calculando el área debajo de la curva para la función normal estándar.

$$P(X \leq 125) = P(z \leq -1.67) = 0.04746$$

$$P(X \leq 150) = P(z \leq 0) = 0.5$$

$$P(125 \leq X \leq 150) = P(-1.67 \leq z \leq 0) = 0.5 - 0.04746 = 0.45254$$

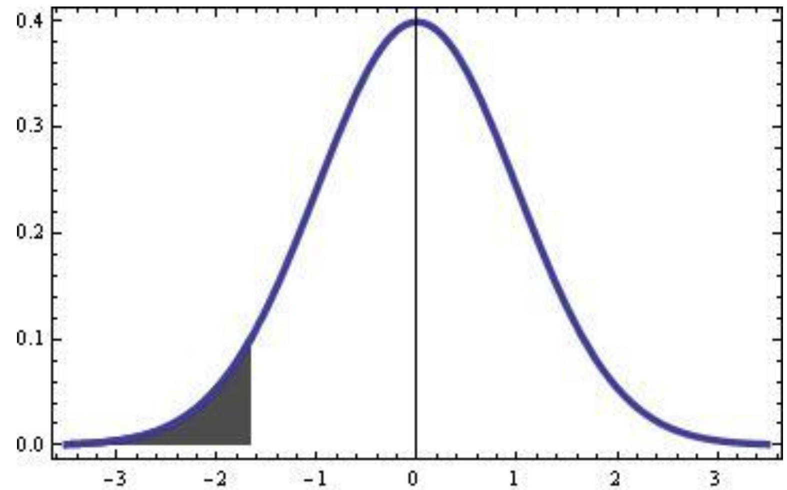
$$P(125 \leq X \leq 150) = 45.25\%$$

b) Menos de 125 segundos

$$Z=\frac{125-150}{15}=-1.66667$$

P(X≤125) = P(z≤-1.66) = 0.04846

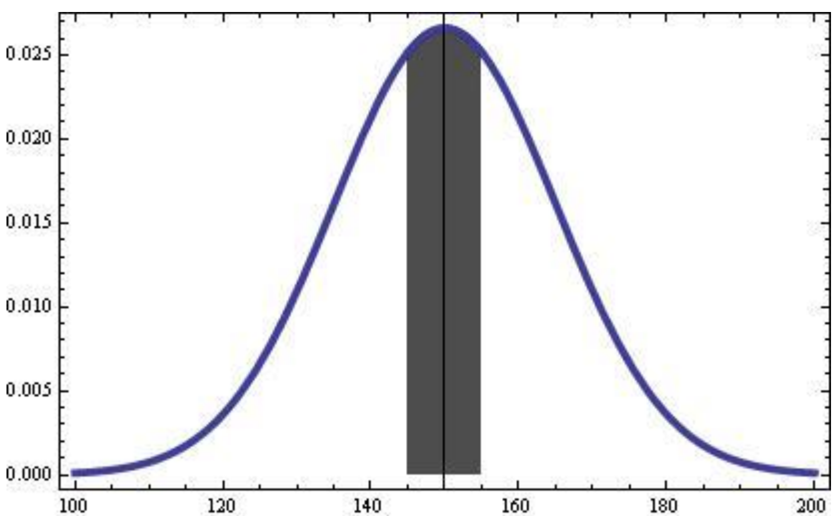
P(X≤125) = P(z≤-1.66) = 4.84%

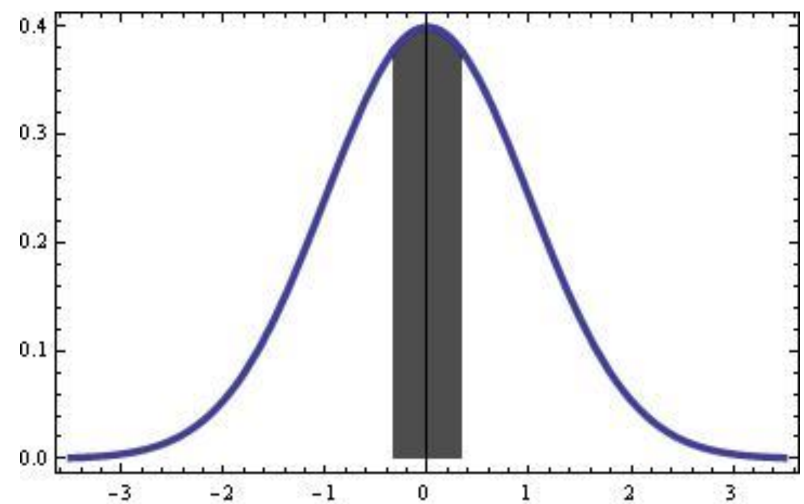


c) Entre de 145 y 155 segundos

$$Z=\frac{145-150}{15}=-\frac{5}{15}=-0.3333$$

$$Z=\frac{155-150}{15}=\frac{5}{15}=0.3333$$



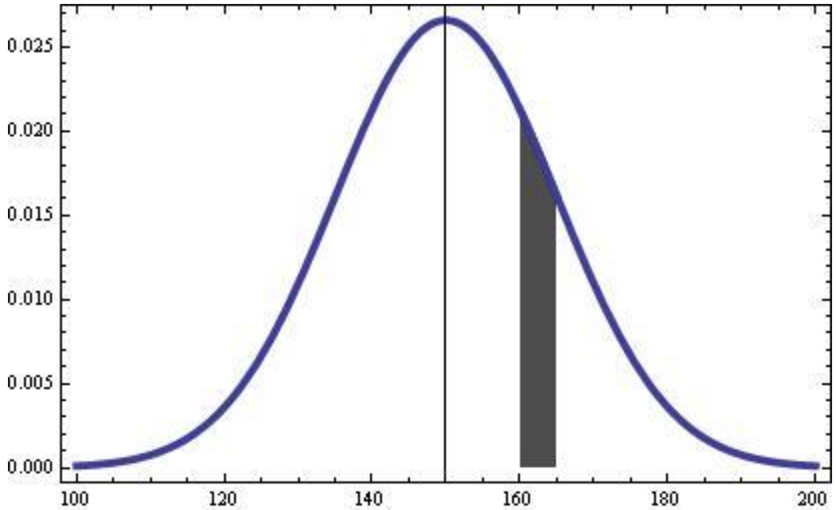


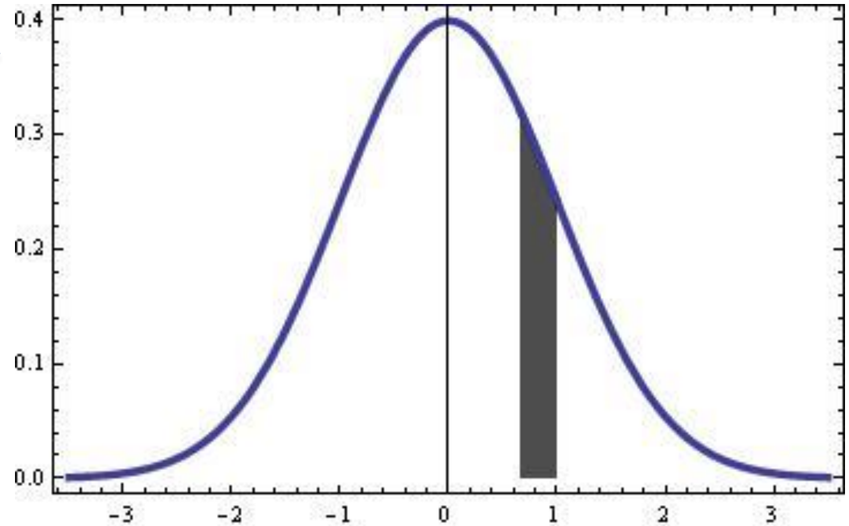
P(145 ≤ X≤155) = P(-033≤ z ≤0.33) =2×(0.5-0.3707)=2×0.12934=0.2586

P(145 ≤ X≤155) =25.86%

d) Entre de 160 y 165 segundos

$$Z = \frac{160 - 150}{15} = \frac{10}{15} = 0.66 \qquad Z = \frac{165 - 150}{15} = \frac{15}{15} = 1.00$$





P(160) = P(0.66) =0.25462
P(165) = P(1.00)= 0.15865

P(160 ≤ X ≤ 165) = P(0.66 ≤ z ≤ 1.00) =
0.25462-0.15865= 0.09597

P(160 ≤ X ≤165) =9.59%

Con base en estas probabilidades, es posible para Telmex desarrollar un sentido de demanda por sus servicios que le ayudará a establecer políticas respecto al uso de los servicios por parte de los clientes, así como también una estructura de tarifas óptima que Telmex pueda cobrar

Ejemplo

Los paquetes de cereal Cherios, vienen en cajas de 36 onzas que tienen una desviación estándar de 1.9 onzas. Se piensa que los pesos están distribuidos normalmente. Si se selecciona una caja aleatoriamente, ¿Cuál es la probabilidad de que la caja pese:

Menos de 34.8 onzas

Mas de 34.8 onzas

Entre 34.3 y 38.9 onzas

Entre 39.5 y 42.1 onzas

26.434 % a)

$$Z=\frac{34.8-36}{1.9}=\frac{-1.2}{1.9}=-0.63$$

P(z ≤ -0.63)= 0.26434

73.56 % b)

$$Z=\frac{34.8-36}{1.9}=\frac{-1.2}{1.9}=-0.63$$

P(z ≥ -0.63)=1.0- 0.26434=0.7356

74.9 % c)

$$Z=\frac{34.3-36}{1.9}=\frac{-1.7}{1.9}=-0.89$$

$$Z=\frac{38.9-36}{1.9}=\frac{2.9}{1.9}=1.52$$

P(- 0.89≤ z ≤ 1.52)=1-0.18673-0.06425
=0.749

3.22 % d)

$$Z=\frac{39.5-36}{1.9}=\frac{3.5}{1.9}=1.84$$

$$Z=\frac{42.1-36}{1.9}=\frac{6.1}{1.9}=3.21$$

P(1.84≤ z ≤ 3.21)=0.03288- 0.00066
=0.03222

Distribución muestral de medias

Recordar

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

fórmula para calcular la probabilidad del comportamiento del estadístico, en este caso la media muestral, si la población es infinita o el muestreo se realizado con reemplazamiento

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}}$$

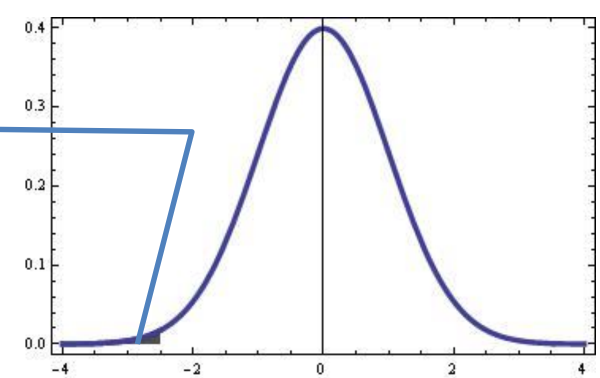
Para poblaciones finitas y muestro sin reemplazo

Ejemplo

Las lámparas incandescentes caseras (focos) tienen una duración que se distribuye aproximadamente en forma normal, con una media de 800 horas y una desviación estándar de 40 horas. Encuentra la probabilidad de que una muestra aleatoria de 16 lámparas tenga una vida promedio de menos de 775 horas.

$$z = \frac{775 - 800}{40 / \sqrt{16}} = -2.5$$

P(X≤775)=P(Z≤-2.5)=0.00621



Interpretación: la probabilidad de que la media de la muestra de 16 lámparas sea menor a 775 horas es de 0.62%

Ejemplo

a)

$$\frac{6.9}{\sqrt{25}}\sqrt{\frac{1000-25}{1000-1}}=1.363$$

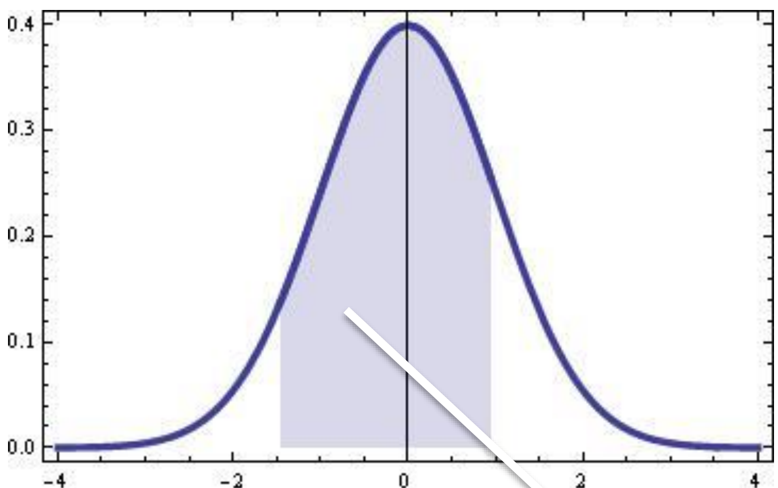
$$z=\frac{172.5-174.5}{1.363}=\frac{-2}{1.363}=-1.467$$

$$z=\frac{175.8-174.5}{1.363}=\frac{-1.3}{1.363}=0.9537$$

Las estaturas de 1000 estudiantes están distribuidas aproximadamente en forma normal con una media de 174.5 centímetros y una desviación estándar de 6.9 centímetros. Si se extraen 200 muestras aleatorias de tamaño 25 ***sin reemplazo*** de esta población, determine:

a) El número de las medias muestrales que caen entre 172.5 y 175.8 centímetros.

b) El número de medias muestrales que caen por debajo de 172 centímetros.



P(-1. 467 ≤ z) = 0.5- 0.07078 = 0.42922

P(0.9537 ≤ z) = 0.5-0.17105 = 0.32895

P(-1. 467≤ z ≤ 0.9537) = 0.42922 + 0.32895

P(-1. 467≤ z ≤ 0.9537) = 0.75817

P(172.5≤ z ≤ 175.8) = 75.82 %

0.75817×200=151.63≈152 medias muestrales

Ejemplo

b)

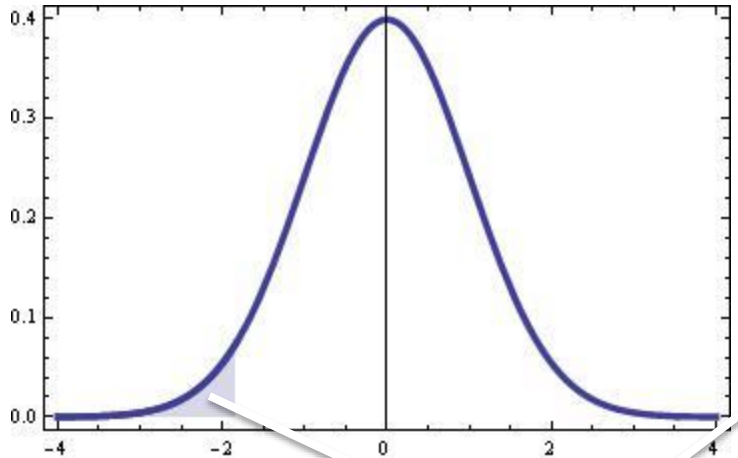
$$\frac{6.9}{\sqrt{25}}\sqrt{\frac{1000-25}{1000-1}}=1.363$$

$$z=\frac{172-174.5}{1.363}=\frac{-2.5}{1.363}=-1.834$$

Las estaturas de 1000 estudiantes están distribuidas aproximadamente en forma normal con una media de 174.5 centímetros y una desviación estándar de 6.9 centímetros. Si se extraen 200 muestras aleatorias de tamaño 25 ***sin reemplazo*** de esta población, determine:

a) El número de las medias muestrales que caen entre 172.5 y 175.8 centímetros.

b) El número de medias muestrales que caen por debajo de 172 centímetros.



P(-1. 834 ≤ z) = 0.03362

P(X≤ 172) = 3.36 %

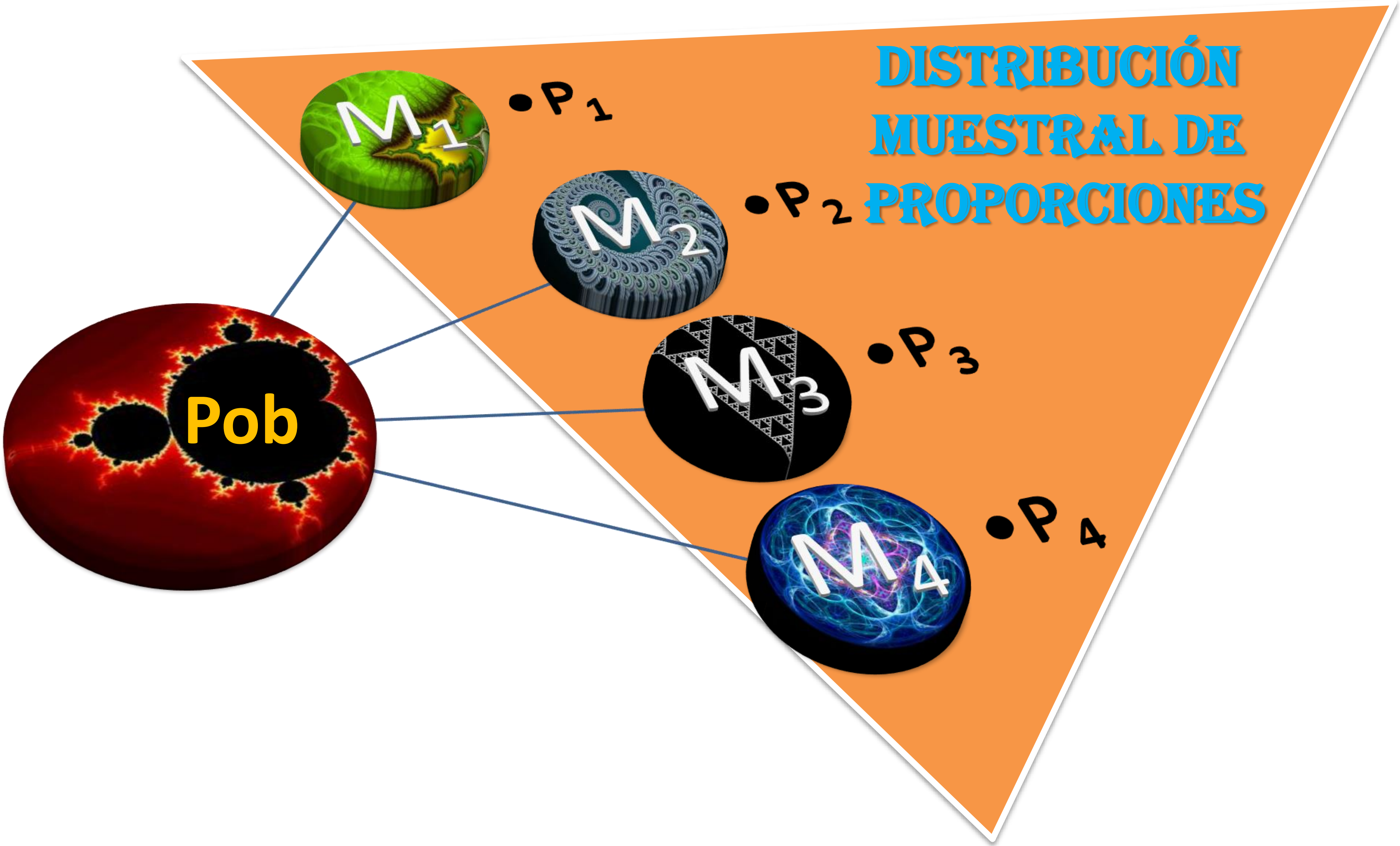
0.03362×200=6.724≈7 medias muestrales

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE PROPORCIONES

Definición

$$p = \frac{x}{n}$$

En ocasiones no estamos interesados en la media de la muestra, sino deseamos investigar la proporción de artículos defectuosos o la proporción de alumnos reprobados en la muestra. La distribución muestral de proporciones es la adecuada para dar respuesta a estas situaciones. Esta distribución se genera de igual manera que la distribución muestral de medias, salvo que al extraer las muestras de la población se calcula el estadístico proporción (ver fórmula), donde “x” es el número de éxitos u observaciones de interés y “n” el tamaño de la muestra, en lugar del estadísitico media.


DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE PROPORCIONES
M1
P1
M2
P2
M3
P3
M4
P4
Pob

Una población binomial está estrechamente relacionada con la distribución muestral de proporciones; una población binomial es una colección de éxitos y fracasos, mientras que una distribución muestral de proporciones contiene las posibilidades o proporciones de todos los números posibles de éxitos en un experimento binomial, y como consecuencia de esta relación, las afirmaciones probabilísticas referentes a la proporción muestral pueden evaluarse usando la aproximación normal a la binomial, siempre que $n(\pi)\geq 5$ y $n(1-\pi)\geq 5$. Cualquier evento se puede convertir en una proporción si se divide el número obtenido entre el número de intentos.

Recordar

$$P(x) = {}_nC_x(\pi)^x \times (1-\pi)^{n-x}$$

Ejemplo

Suponga que se cuenta con un lote de 12 piezas, el cual tiene 4 artículos defectuosos. Seleccionamos 5 artículos al azar sin reemplazo de ese lote. Generar la distribución muestral de proporciones para el número de piezas defectuosas.

$N=12$, $n = 5$, $N_d=4$, $N_c=7$

Solución

$$p = \frac{4}{12} = 0.333$$

Proporción de artículos defectuosos de esta población

33%

Porcentaje de piezas defectuosas

$${}_{12}C_5 = \boxed{792}$$

Número posible de muestras de tamaño 5 a extraer de una población de 12 elementos

artículos buenos	artículos malos	Prop. defect.		NMOM	
1	4	4/5	0.8	${}_8C_1 * {}_4C_4$	8
2	3	3/5	0.6	${}_8C_2 * {}_4C_3$	112
3	2	2/5	0.4	${}_8C_3 * {}_4C_2$	336
4	1	1/5	0.2	${}_8C_4 * {}_4C_1$	280
5	0	0/5	0	${}_8C_5 * {}_4C_0$	56
		Totales	2		792

Media de la proporción

$$\mu_P = \frac{1}{\aleph}\sum_i p_i x_i = \frac{1}{792}\left[(0.8\times 8)+(0.6\times 112)+(0.4\times 336)+(0.2\times 280)+(0\times 56)\right]$$

$\mu_p = p$

$$\mu_P = 0.333$$

Varianza de la proporción

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{\aleph}\sum_i (p_i - \mu_P)^2 x_i =$$

$$\frac{1}{792}\begin{bmatrix}(0.8-0.33)^2\times 8+(0.6-0.33)^2\times 112+ \\ (0.4-0.33)^2\times 336+(0.2-0.33)^2\times 280+(0-0.33)^2\times 56\end{bmatrix} = \boxed{0.02829}$$

Varianza de la distribución binomial

$$\sigma^2 = n(\pi)(1-\pi)$$

$$\sigma^2 = \mu_p(1-\pi)$$

Pero debido a que es un estadístico por el TLC sabemos que:

$$\sigma_p^2 = \frac{\mu_p(1-\pi)}{n} \therefore$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\mu_p(1-\pi)}{n}}$$

Sin embargo

$$\sigma_p^2 = \frac{1/3 \times 2/3}{5} = \boxed{0.0444}$$

Nos falta agregar la corrección por una muestra finita y obtenida sin reemplazamiento

Factor de corrección

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{12-5}{12-1}} = \sqrt{\frac{7}{11}} = 0.7977$$

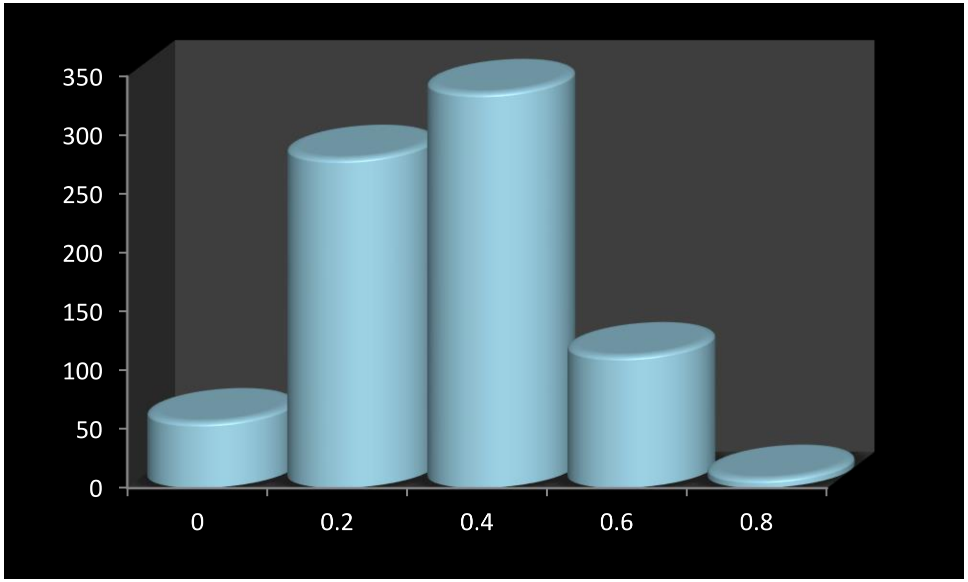
Desviación estandar

$$\sigma_P = \sqrt{0.04444} \times 0.79772 = 0.1681$$

Desviación estándar de la proporción

$$\sigma_p = \sqrt{0.02829} = 0.1681$$

Resultados equivalentes



Grafica de frecuencias para la proporción de las muestras

$$z = \frac{p - P}{\frac{\sqrt{pP}}{\sqrt{n}}}$$

La fórmula que utilizaremos para el cálculo de probabilidad en una distribución muestral de proporciones está basada en la aproximación de la distribución normal a la binomial. Esta fórmula nos servirá para calcular la probabilidad del comportamiento de la proporción en la muestra.

Donde *p* es la propoción, *P* es la media de la proporción y *n* es el tamaño de la muestra

$$\sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

Debe agregarse el factor de corrección si se cumple con las condiciones necesarias

Ejemplo:

Se determina que el 60% de los estudiantes de la UAEMex almuerzan café americano y sincronizadas. Se toma una muestra aleatoria de 800 estudiantes. Calcula la probabilidad de que la proporción de la muestra de la gente que almuerza café y sincronizadas sea menor que 0.55.

Este ejercicio lo resolvemos por dos métodos. El primero con la aproximación de la distribución normal a la binomial y el segundo al utilizar la fórmula de la distribución muestral de proporciones.

normal a la binomial

Datos

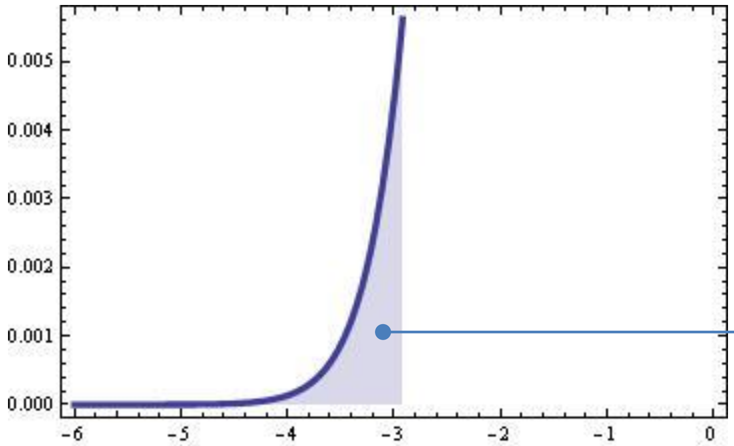
n = 800; π=0.6, x=0.55×800=440

Media de proporciones

$$\mu_P = P = n\pi = 800 \times 0.6 = 480$$

Desviación media de la binomial

$$z = \frac{x - P}{\sqrt{P(1-\pi)}} = \frac{439.5 - 480}{\sqrt{480 \times 0.4}} = \frac{-40.5}{13.85} = -2.92$$



P(x<480)=P(z<-2.92)=0.00175

distribución muestral de proporciones

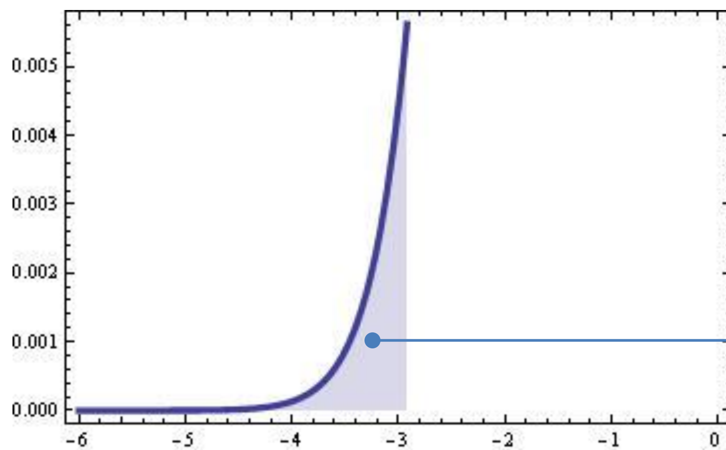
Datos

n = 800; π=0.6, x=0.55, P(x<0.55)=?

Desviación media de la binomial

$$z=\frac{x-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}=\frac{0.549-0.6}{\sqrt{\frac{0.6\times 0.4}{800}}}=\frac{-0.051}{0.01732}=-2.94$$

Se debe de tomar en cuenta que el factor de corrección de 0.5 se esta dividiendo entre el tamaño de la muestra, ya que estamos hablando de una proporción.



P(x<480)=P(z<-2.94)= 0.00164

La interpretación en esta solución, estaría enfocada a la proporción de la muestra, por lo que diríamos que ***la probabilidad de que al extraer una muestra de 800 estudiantes de la UAEMEX, la proporción de estudiantes que almuerzan café con sincronizadas que sea menor al 55% es del 0.17%.***

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00103	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02067	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04456	0.04363	0.04272	0.04181	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06425	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07214	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09852
-1.1	0.13566	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15865	0.15625	0.15386	0.15150	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17878	0.17618	0.17361	0.17105	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21185	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23269	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21769	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26434	0.26108	0.25784	0.25462	0.25143	0.24825	0.24509
-0.5	0.30853	0.30502	0.30153	0.29805	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28095	0.27759
-0.4	0.34457	0.34090	0.33724	0.33359	0.32997	0.32635	0.32276	0.31917	0.31561	0.31206
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36692	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34826
-0.2	0.42074	0.41683	0.41293	0.40904	0.40516	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38590
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43250	0.42857	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48404	0.48006	0.47607	0.47209	0.46811	0.46414