
Distribuciones muestrales
Distribución muestral de proporciones

Distribución de diferencia de Proporciones

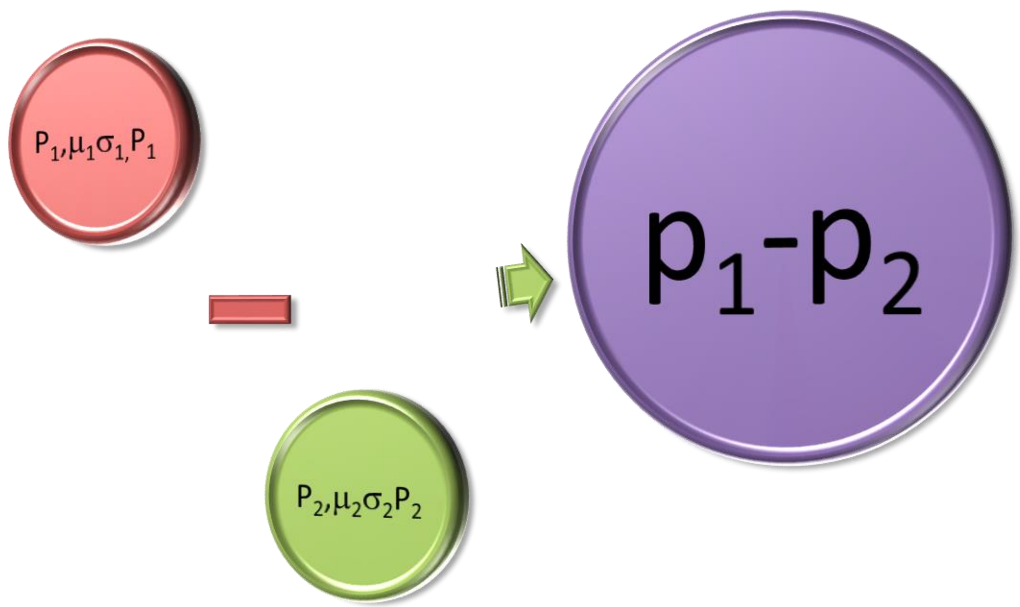
Existen diversidad de aplicaciones que involucran poblaciones de datos cualitativos que deben compararse utilizando proporciones o porcentajes. Por Ejemplo:

· **Educación**.- ¿Es mayor la proporción de los estudiantes que aprueban matemáticas que las de los que aprueban inglés?

· **Medicina**.- ¿Es menor el porcentaje de los usuarios del medicamento A que presentan una reacción secundaria que el de los usuarios del fármaco B que también presentan una reacción de ese tipo?

· **Administración**.- ¿Hay diferencia entre los porcentajes de hombres y mujeres en jerarquías laborales

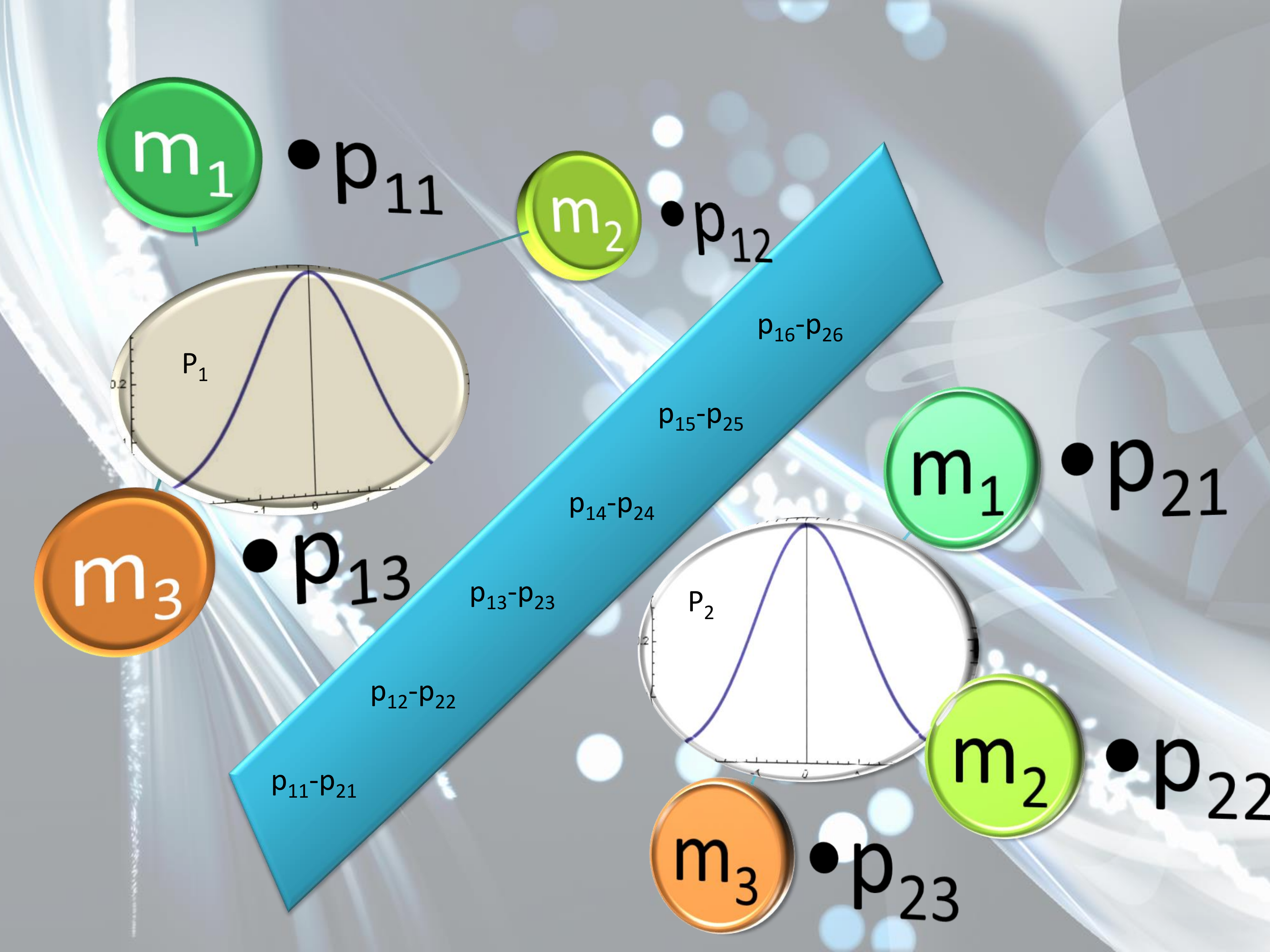
· **Ingeniería**.- ¿Existe diferencia entre la proporción de artículos defectuosos que genera la máquina A con respecto a los que genera la máquina B?



Cuando los datos de la muestra proceden de dos poblaciones **binomiales** y se trabaja con dos proporciones muestrales, la distribución muestral de diferencia de proporciones es aproximadamente normal para tamaños de muestra *grande* .

$$(n_1 \times p_1 \geq 5,\ n_1 \times q_1 \geq 5, n_2 \times p_2 \geq 5 \text{ y } n_2 \times q_2 \geq 5). \qquad \text{(A)}$$

Donde p_1 y p_2, son las proporciones de las poblaciones P_1 y P_2 respectivamente, q_1 y q_2 son la proporción restante. Entonces si se cumple (A), p_1 y p_2 tienen distribuciones muestrales aproximadamente normales, así que su diferencia p_1-p_2 también tendrá una distribución muestral aproximadamente normal.



m1
•p11
m2
•p12
P1
m3
•p13
p16-p26
p15-p25
p14-p24
p13-p23
p12-p22
p11-p21
m1
•p21
P2
m2
•p22
m3
•p23

DEL TLC

$$\mu = \mu_x \quad y \quad \sigma_x = \sigma/\sqrt{n}$$

DISTRIBUCION DE PROPORCIONES

$$\mu = P = n\pi \quad y \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{Pq}{n}} = \sqrt{\pi(1-\pi)}$$

$$\mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = P_1 - P_2 \quad y \quad \sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1} + \frac{P_2q_2}{n_2}}$$

Se utilizan para demostrar

$$\mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = n_1\pi_1 - n_2\pi_2 \quad y \quad \sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{n_1\pi_1(1-\pi_1) + n_2\pi_2(1-\pi_2)}$$

La formula que se utilizará para obtener el calculo de probabilidad del estadístico diferencias de proporciones es

$$z = \frac{[p_1 - p_2] - [P_1 - P_2]}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1} + \frac{P_2q_2}{n_2}}}$$

$$z = \frac{[p_1 - p_2] - [n_1\pi_1 - n_2\pi_2]}{\sqrt{n_1\pi_1(1-\pi_1) + n_2\pi_2(1-\pi_2)}}$$

Ejemplo

Los hombres y mujeres adultos radicados en una ciudad grande del norte difieren en sus opiniones sobre el establecimiento de una nueva zona comercial. Se cree que el 12% de los hombres adultos están a favor, mientras que sólo 10% de las mujeres adultas lo están. Si se pregunta a dos muestras aleatorias de 100 hombres y 100 mujeres su opinión sobre el asunto, determina la probabilidad de que el porcentaje de hombres a favor sea al menos 3% mayor que el de las mujeres.

Ejemplo

Datos

z

Los hombres y mujeres adultos radicados en una ciudad grande del norte difieren en sus opiniones sobre el establecimiento de una nueva zona comercial. Se cree que el 12% de los hombres adultos están a favor, mientras que sólo 10% de las mujeres adultas lo están. Si se pregunta a dos muestras aleatorias de 100 hombres y 100 mujeres su opinión sobre el asunto, determina la probabilidad de que el porcentaje de hombres a favor sea al menos 3% mayor que el de las mujeres.

$p_1=0.12$

$p_2=0.10$

$n_1=100$

$n_2=100$

$P(p_1-p_2> 0.03)=?$

$$z=\frac{[p_1-p_2]-[n_1\pi_1-n_2\pi_2]}{\sqrt{n_1\pi_1(1-\pi_1)+n_2\pi_2(1-\pi_2)}}$$

$p_1-p_2=(0.03\times100)-0.5=3-0.5=2.5$

$P_1=n_1\times p_1=100\times0.12=12 \qquad P_2=n_2\times p_2=100\times0.10=10$

$$z=\frac{[2.5]-[12-10]}{\sqrt{100[(0.12\times0.88)+(0.10\times0.90)]}}=\frac{0.5}{4.423}=0.113$$

$P(p_1-p_2\geq 0.03)=P(z>0.113)=0.4562$

$P(p_1-p_2\geq0.03)=45.62\ \%$

Ejemplo

Datos

Z

$P_1=0.12$

$P_2=0.10$

$n_1=100$

$n_2=100$

$P(p_1-p_2> 0.03)=?$

$$z=\frac{[p_1-p_2]-[P_1-P_2]}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}}$$

$P(p_1-p_2\geq 0.03)=45.62\%$

Los hombres y mujeres adultos radicados en una ciudad grande del norte difieren en sus opiniones sobre el establecimiento de una nueva zona comercial. Se cree que el 12% de los hombres adultos están a favor, mientras que sólo 10% de las mujeres adultas lo están. Si se pregunta a dos muestras aleatorias de 100 hombres y 100 mujeres su opinión sobre el asunto, determina la probabilidad de que el porcentaje de hombres a favor sea al menos 3% mayor que el de las mujeres.

$p_1-p_2=0.03-(0.5/100)=0.025$ $P_1-P_2=0.12-0.10=0.02$

$$\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}=\sqrt{\frac{0.12\times 0.88}{100}+\frac{0.10\times 0.90}{100}}=0.04423$$

$$z=\frac{[0.025]-[0.02]}{0.04423}=\frac{0.005}{0.04423}=0.113$$

$P(p_1-p_2\geq 0.03)=P(z>0.11)= 0.45620$

Ejemplo

Una encuesta laboral sobre 320 trabajadores de una fabrica que fueron despedidos entre 1979 y 1984, encontró que 20% habían estado sin trabajo durante por lo menos dos años. Supóngase que tuviera que seleccionar otra muestra aleatoria de 320 trabajadores de entre todos los empleados despedidos entre 1979 y 1984. ¿Cuál sería la probabilidad de que su porcentaje muestral de trabajadores sin empleo durante por lo menos dos años, difiera del porcentaje obtenido en la primera encuesta, en 5% o más?

Ejemplo

Datos

$p_1=0.2$
$p_2=?$
$P_1=?$
$P_2=?$
$n_1=320$
$n_2=320$
$P(P_1-P_2> 0.05)=?$

$$z=\frac{[p_1-p_2]-[P_1-P_2]}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}}$$

Z

Una encuesta laboral sobre 320 trabajadores de una fabrica que fueron despedidos entre 1979 y 1984, encontró que 20% habían estado sin trabajo durante por lo menos dos años. Supóngase que tuviera que seleccionar otra muestra aleatoria de 320 trabajadores de entre todos los empleados despedidos entre 1979 y 1984. ¿Cuál sería la probabilidad de que su porcentaje muestral de trabajadores sin empleo durante por lo menos dos años, difiera del porcentaje obtenido en la primera encuesta, en 5% o más?

$P_1=P_2$ Por ser una misma población

$p=0.2$ Se tomará como estimación puntual

$p_1-p_2=0.05-(0.5/320)=0.04843$ $p_1-p_2=-0.05+(0.5/320)=-0.04843$

$$z=\frac{[0.04843]-[0]}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{320}+\frac{0.2\times0.8}{320}}}=\frac{0.04843}{0.031622}=1.53$$

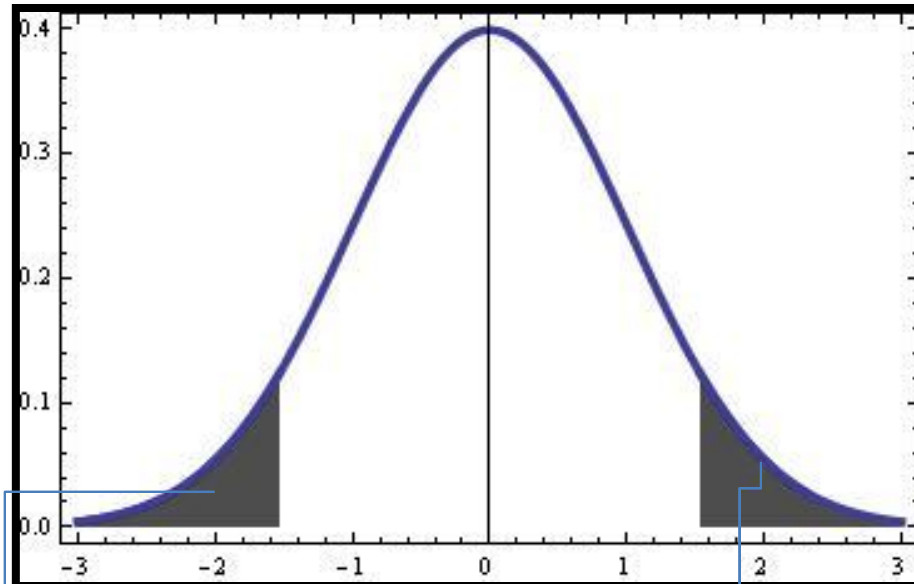
$$z=\frac{[-0.04843]}{\sqrt{2\frac{0.2\times0.8}{320}}}=\frac{-0.04843}{0.031622}=-1.53$$

Ejemplo

Datos

p_1=0.2
p_2=?
P_1=?
P_2=?
n_1=320
n_2=320
$P(P_1-P_2> 0.05)$=?

Una encuesta laboral sobre 320 trabajadores de una fabrica que fueron despedidos entre 1979 y 1984, encontró que 20% habían estado sin trabajo durante por lo menos dos años. Supóngase que tuviera que seleccionar otra muestra aleatoria de 320 trabajadores de entre todos los empleados despedidos entre 1979 y 1984. ¿Cuál sería la probabilidad de que su porcentaje muestral de trabajadores sin empleo durante por lo menos dos años, difiera del porcentaje obtenido en la primera encuesta, en 5% o más?



$$z=\frac{[p_1-p_2]-[P_1-P_2]}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}}$$

z

$P(p_1-p_2=-0.05)=0.06301$

$P(p_1-p_2=0.05)=0.06301$

$P(-0.05\geq p_1-p_2\geq 0.05)=0.1262$

La probabilidad de que su proporción de trabajadores sin empleo durante por lo menos dos años, difiera del porcentaje obtenido en la primera encuesta es en 0.05 es de 0.1260.

Ejemplo

Se sabe que 3 de cada 6 productos fabricados por la máquina 1 son defectuosos y que 2 de cada 5 objetos fabricados por la máquina 2 son defectuosos; se toman muestras de 120 objetos de cada máquina:

a) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la máquina 2 rebase a la máquina 1 en por lo menos 0.10?

b) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la máquina 1 rebase a la máquina 2 en por lo menos 0.15?

Ejemplo

Datos *a)*

z

P_1=3/6

P_2=2/5

n_1=120

n_2=120

$P(p_1-p_2> -0.10)=?$

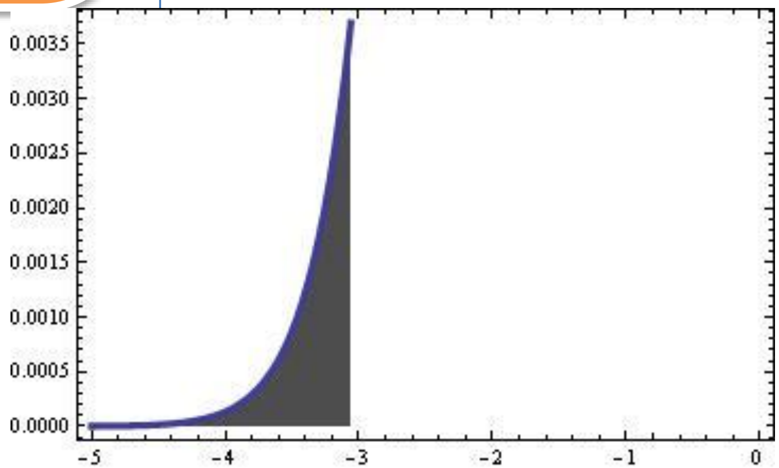
$$z=\frac{[p_1-p_2]-[P_1-P_2]}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}}$$

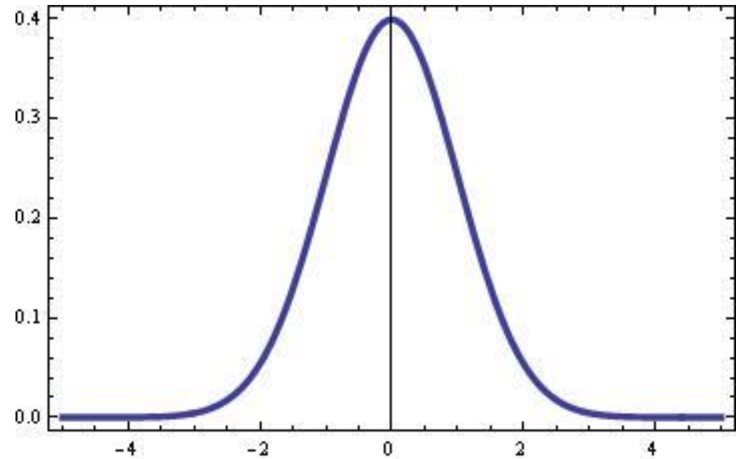
Se sabe que 3 de cada 6 productos fabricados por la máquina 1 son defectuosos y que 2 de cada 5 objetos fabricados por la máquina 2 son defectuosos; se toman muestras de 120 objetos de cada máquina: a) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la máquina 2 rebase a la máquina 1 en por lo menos 0.10? b) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la máquina 1 rebase a la máquina 2 en por lo menos 0.15?

$p_1-p_2=-0.1+(0.5/120)=-0.0958$

$P_1-P_2=0.5-0.4=0.1$

$$z=\frac{[-0.0958]-[0.1]}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{120}+\frac{0.4\times0.6}{120}}}=\frac{-0.1958}{0.0639}=-3.06$$





Ejemplo

Datos *a)*

Z

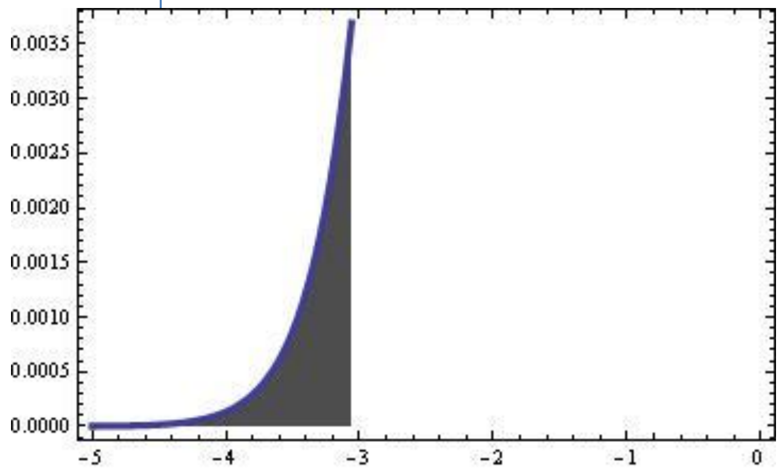
$P_1=3/6$
$P_2=2/5$
$n_1=120$
$n_2=120$
$P(p_1-p_2> -0.10)=?$

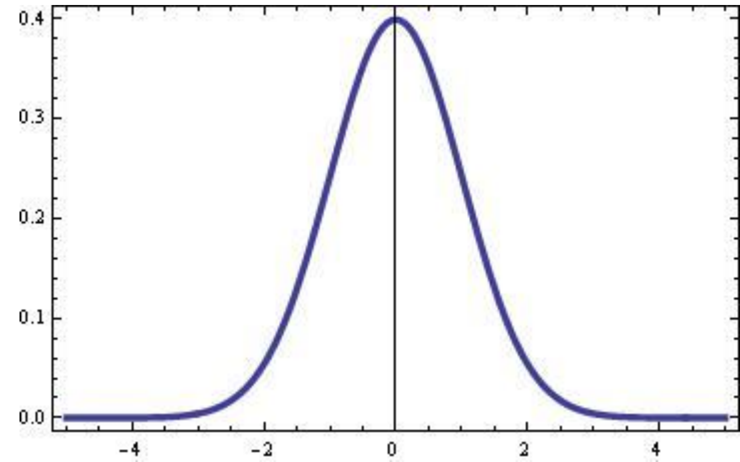
Se sabe que 3 de cada 6 productos fabricados por la máquina 1 son defectuosos y que 2 de cada 5 objetos fabricados por la máquina 2 son defectuosos; se toman muestras de 120 objetos de cada máquina: a) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la máquina 2 rebase a la máquina 1 en por lo menos 0.10? b) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la máquina 1 rebase a la máquina 2 en por lo menos 0.15?

$$z=\frac{[-0.0958]-[0.1]}{\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{120}+\frac{0.4\times 0.6}{120}}}=\frac{-0.1958}{0.0639}=-3.06$$

$P(p_1-p_2\geq -0.1)=0.111\ \%$

$P(p_1-p_2\geq -0.1)= 0.00111$





Ejemplo

Datos *b)*

Z

$P_1=3/6$
$P_2=2/5$
$n_1=120$
$n_2=120$
$P(p_1-p_2\geq 0.15)=?$

$$z=\frac{[p_1-p_2]-[P_1-P_2]}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}}$$

Se sabe que 3 de cada 6 productos fabricados por la máquina 1 son defectuosos y que 2 de cada 5 objetos fabricados por la máquina 2 son defectuosos; se toman muestras de 120 objetos de cada máquina: a) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la máquina 2 rebase a la máquina 1 en por lo menos 0.10? b) ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos de la máquina 1 rebase a la máquina 2 en por lo menos 0.15?

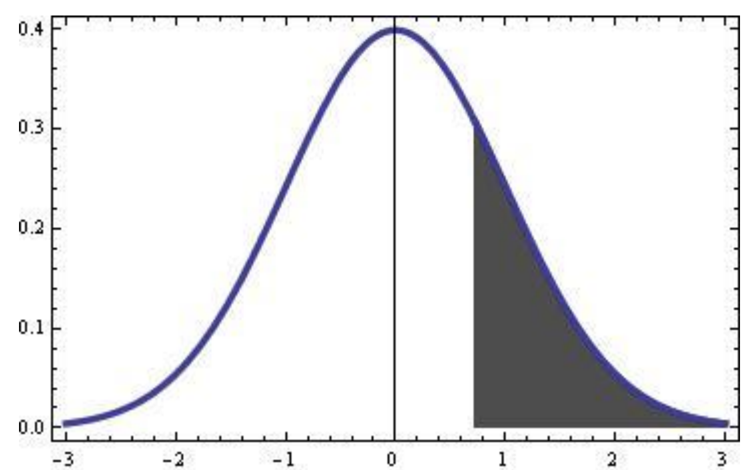
$p_1-p_2=0.15-(0.5/120)=0.1458$

$P_1-P_2=0.5-0.4=0.1$

$$z=\frac{0.1458-[0.1]}{\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{120}+\frac{0.4\times 0.6}{120}}}=\frac{0.045}{0.0639}=0.72$$

$P(p_1-p_2\geq 0.15)= 0.23576$

$P(p_1-p_2\geq 0.15)=23.57\ \%$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00103	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02067	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04456	0.04363	0.04272	0.04181	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06425	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07214	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09852
-1.1	0.13566	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15865	0.15625	0.15386	0.15150	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17878	0.17618	0.17361	0.17105	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21185	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23269	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21769	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26434	0.26108	0.25784	0.25462	0.25143	0.24825	0.24509
-0.5	0.30853	0.30502	0.30153	0.29805	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28095	0.27759
-0.4	0.34457	0.34090	0.33724	0.33359	0.32997	0.32635	0.32276	0.31917	0.31561	0.31206
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36692	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34826
-0.2	0.42074	0.41683	0.41293	0.40904	0.40516	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38590
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43250	0.42857	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48404	0.48006	0.47607	0.47209	0.46811	0.46414

2. Una población de las producciones semanales de una fábrica en miles de toneladas es 200, 250, 150, 200 y 300. Realice una distribución muestral y calcule la media de las medias y el error estándar para las muestras de tamaño $n = 2$.

3. ¿Qué pasará con el error estándar del ejercicio anterior si $n = 3$? ¿Por qué hay diferencia?

Población							muestral																
xi	Pi	mu		sigma2	DST		Xi	xi+xj/2	frec			fi*medi	mux	(Xi-mux)2	frec			fi*sigm i	sigma x	(sig x)2= (sig)2/n	dst x		dst x=sig x/raiz(2)
					50.9901951																36.0555127		
200	0.20	220	400	2600		4	200 200	200	300	1	0.04	12	220	400	6400	1	0.04	256	1300	1300		5	36.05551275
250	0.20		900				200 250	225	275	2	0.08	22		25	4900	1	0.04	196					
150	0.20		4900				200 150	175	250	5	0.2	50		2025	3025	2	0.08	242					
200	0.20		400				200 200	200	225	6	0.24	54		400	2025	4	0.16	324					
300	0.20		6400				200 300	250	200	6	0.24	48		900	900	5	0.2	180					
							250 200	225	175	4	0.16	28		25	400	6	0.24	96					
							250 250	250	150	1	0.04	6		900	25	6	0.24	6					
							250 150	200		25				400		25	1						
							250 200	225						25									
							250 300	275						3025									
							150 200	175						2025									
							150 250	200						400									
							150 150	150						4900									
							150 200	175						2025									
							150 300	225						25									
							200 200	200						400									
							200 250	225						25									
							200 150	175						2025									
							200 200	200						400									
							200 300	250						900									
							300 200	250						900									
							300 250	275						3025									
							300 150	225						25									
							300 200	250						900									
							300 300	300						6400									
								25															