
Prueba de hipótesis
problemas

Ejemplo

Solución

Se evalúan dos tipos diferentes de soluciones para pulir, para su posible uso en una operación de pulido en la fabricación de lentes intraoculares utilizados en el ojo humano después de una cirugía de cataratas. Se pulen 300 lentes con la primera solución y, de éstos, 253 no presentaron defectos inducidos por el pulido. Después se pulen otros 300 lentes con la segunda solución, de los cuales 196 resultan satisfactorios. ¿Existe alguna razón para creer que las dos soluciones para pulir son diferentes? Utilice α = 0.01

1) Se trata de una distribución muestral de diferencia de proporciones.

2) Datos

$p_1=253/300$

$p_2=196/300$

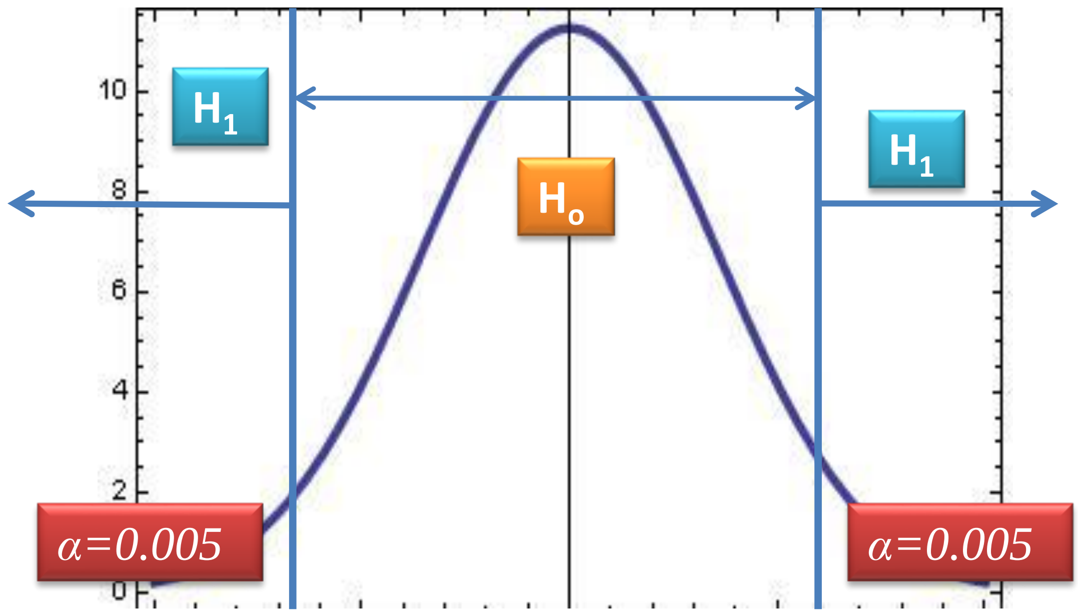
$n_1=n_2=300$

$\alpha=0.01$

3) Ensayo de hipótesis

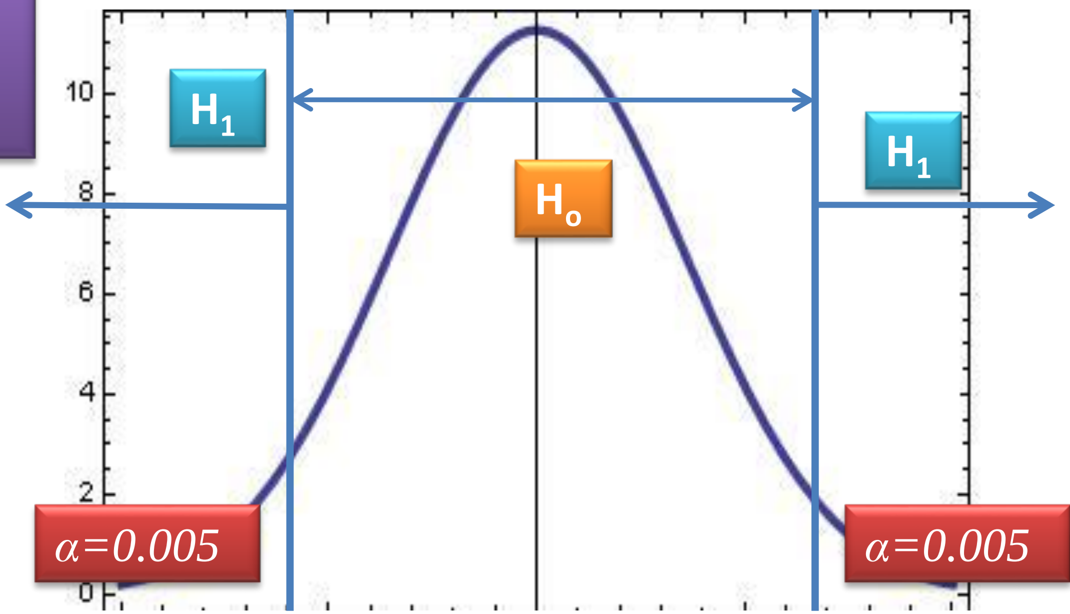
$H_o;\ p_1-p_2 = 0$

$H_1;\ p_1-p_2 \neq 0$



z =±2.575

4) Regla de decisión:
Si –2.575 ≤ z ≤ 2.575 No se rechaza Ho
Si z < -2.575 ó si z > 2.575 Se rechaza Ho



z =±2.575

5. Cálculos

$$z = \frac{[x_1 - x_2] - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}} =$$

En esta fórmula puede observarse que en el denominador se requieren a las proporciones poblacionales, es decir los parámetros, pero estos no son conocidos.
Para evaluar el ensayo de hipótesis, estimamos el parámetro común ***P*** de la siguiente forma:

$$P = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \quad ó \quad P = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

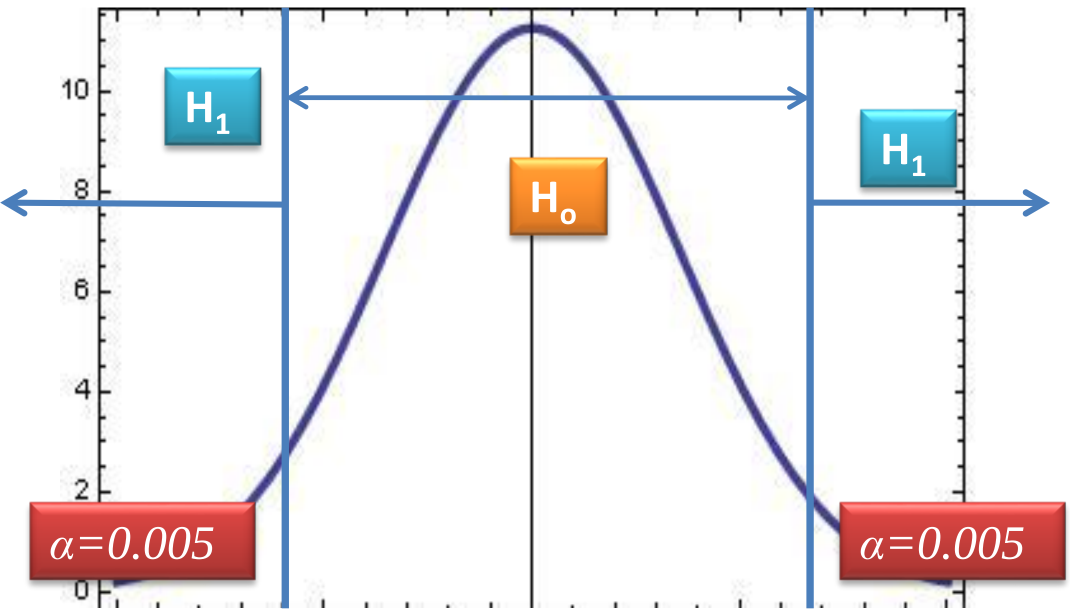
Y como ***P*** es ahora un parámetro común tenemos:

$$z = \frac{[p_1 - p_2] - (P_1 - P_2)}{\sqrt{Pq \times \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}}$$

5. Cálculos

$$P = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{(253)+(196)}{300+300} = 0.7483$$

$$z = \frac{[p_1 - p_2]-(P_1 - P_2)}{\sqrt{Pq \times \left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}} = \frac{[0.8433 - 0.6533]-(0)}{\sqrt{0.7483 \times 0.2517 \times \left[\frac{1}{300}+\frac{1}{300}\right]}} = \frac{0.1899}{0.0354} = 5.3662$$



z =±2.575

6) Justificación y decisión:

Puesto que 5.3662 > 2.575, se rechaza la hipótesis nula y se concluye con un nivel de significancia de 0.01 que los dos fluidos para pulir son diferentes.

Ejemplo

Solución

1) Se trata de una distribución muestral de diferencia de proporciones.

2) Datos

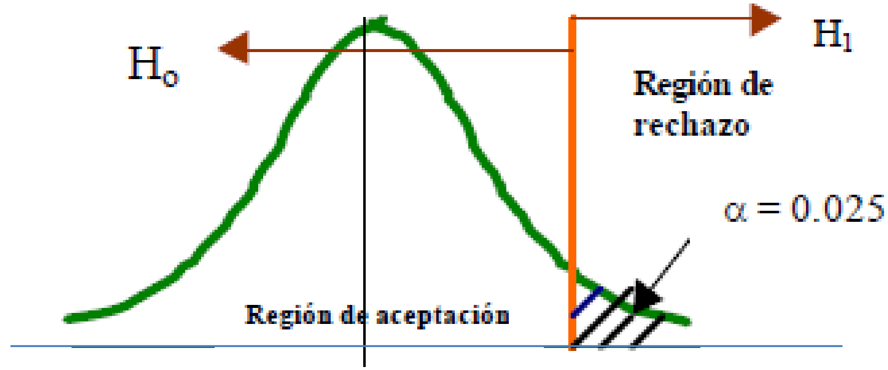
$p_1=120/200$
$p_2=240/500$
$n_1=200$
$n_2=500$
$\alpha=0.025$

3) Ensayo de hipótesis

H_o; $p_1-p_2 = 0$

H_1; $p_1- p_2 > 0$

Se tomará el voto entre los residentes de una ciudad y el municipio para determinar si se debe construir una planta química propuesta. El lugar de construcción está dentro de los límites de la ciudad y por esta razón muchos votantes del municipio consideran que la propuesta pasará debido a la gran proporción de votantes que favorecen la construcción. Para determinar si hay una diferencia significativa en la proporción de votantes de la ciudad y votantes del municipio que favorecen la propuesta, se realiza una encuesta.
Si 120 de 200 votantes de la ciudad favorecen la propuesta y 240 de 500 residentes del municipio también lo hacen, ¿Estaría de acuerdo en que la proporción de votantes de la ciudad que favorecen la propuesta es más alto que la proporción de votantes del municipio? Utilice un nivel de significancia de 0.025.

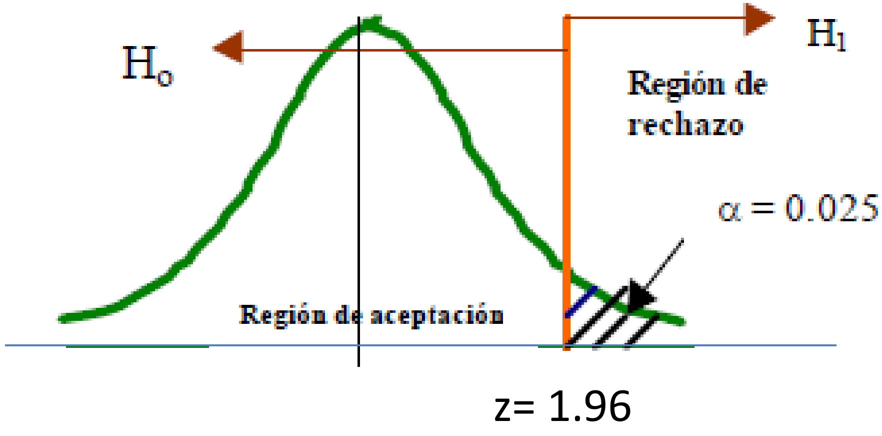


z= 1.96

4) Regla de decisión:

Si $z \leq 1.96$ no se rechaza H_o.

Si $z > 1.96$ se rechaza H_o.



5. Cálculos

Obtenemos el valor de ***P***

$$P = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{240 + 150}{200 + 500} = \frac{390}{700} = 0.5571$$

Ahora calculamos z:

$$z = \frac{[p_1 - p_2] - (P_1 - P_2)}{\sqrt{Pq \times \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}} = \frac{[120 - 240] - (0)}{\sqrt{0.5571(0.4429) \times \left[\frac{1}{200} + \frac{1}{500}\right]}} = \frac{0.12}{0.04156} = 2.887$$

6) Justificación y decisión:

Dado que $2.887 > 1.96$, se rechaza H_0 y se concluye con un nivel de significancia de 0.025 que la proporción de votantes de la ciudad a favor de la propuesta es más alta que la proporción de votantes del municipio.

USO DE VALORES *P* PARA LA TOMA DE DECISIONES

Al probar hipótesis en las que la estadística de prueba es discreta, la región crítica puede elegirse de forma arbitraria y determinar su tamaño. Si α es demasiado grande, puede reducirse al ajustar el valor crítico. Para ello puede ser necesario aumentar el tamaño de la muestra y compensar la disminución que ocurre de manera automática en la potencia de la prueba (probabilidad de rechazar H_o dado que una alternativa específica es verdadera).

Se ha acostumbrado elegir un nivel de significancia de 0.05 ó 0.01 y la región crítica en consecuencia está establecida. Entonces, por supuesto, el rechazo o aceptación estricto de H_o dependerá de esa región crítica. En estadística aplicada se ha adoptado de forma extensa la aproximación del ***valor P.*** La aproximación se diseña para dar al usuario una alternativa a la simple conclusión de "rechazo" o "no rechazo".

La aproximación del ***valor P*** como ayuda en la toma de decisiones es bastante natural pues casi todos los paquetes de computadora que proporcionan el cálculo de prueba de hipótesis entregan **valores *P*** junto con valores de la estadística de la prueba apropiada.

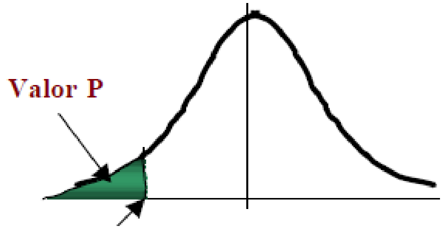
Características principales de el ***valor P***

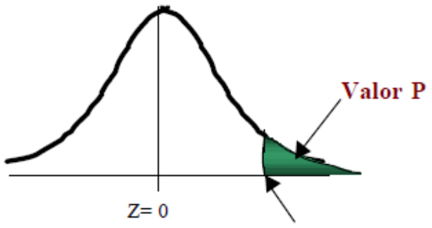
Un ***valor P*** es el nivel (de significancia) más bajo en el que el valor observado de la estadística de prueba es significativo.

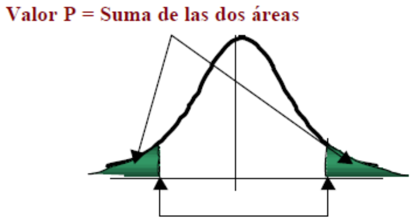
El ***valor P*** es el nivel de significancia más pequeño que conduce al rechazo de la hipótesis nula H_o.

El ***valor P*** es el mínimo nivel de significancia en el cual H_o sería rechazada cuando se utiliza un procedimiento de prueba especificado con un conjunto dado de información. Una vez que el valor de ***P*** se haya determinado, la conclusión en cualquier nivel a particular resulta de comparar el valor ***P*** con α:

1. ***Valor P*** ≤ α→ Rechazar H_o al nivel α.
2. ***Valor P*** > α→ No rechazar H_o al nivel α







Ejemplo

Solución

Calcular el **valor *P*** para el primer ejemplo de ensayo de hipótesis en donde se quería probar que la edad media de los habitantes de Estados Unidos es superior a 70 años.

Una muestra aleatoria de 100 muertes registradas en Estados Unidos el año pasado muestra una vida promedio de 71.8 años. Supongamos una desviación estándar poblacional de 8.9 años, ¿Esto parece indicar que la vida media hoy en día es mayor que 70 años? Utilice un nivel de significancia de 0.05.

1) Datos

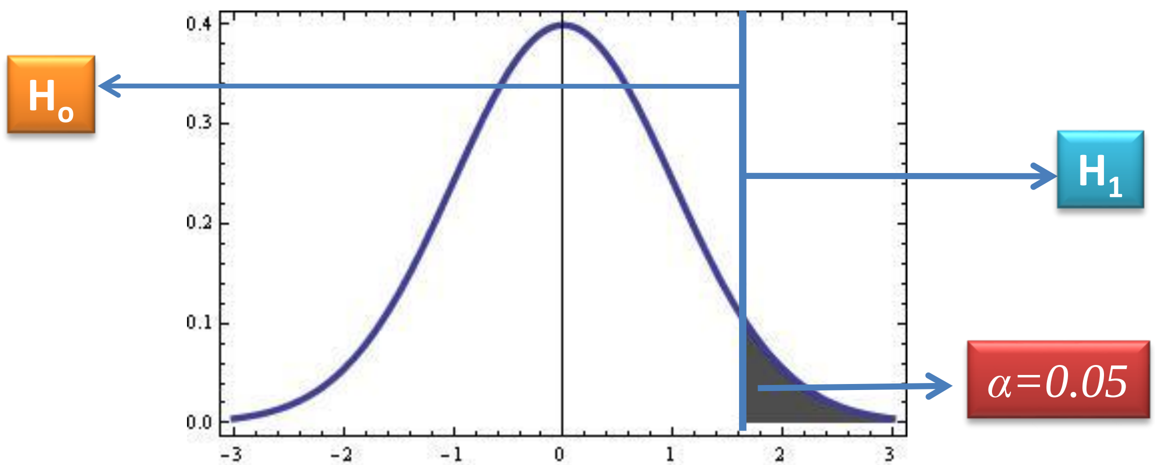
$x=71.8$

$n=100$

$\sigma=8.9$

$\alpha=0.05$

$\mu=70=?$



z = 1.645

2) Ensayo de hipótesis

H_o; μ = 70 años.

H_1; μ > 70 años.

3) Regla de decisión

Si el **valor *P*** ≤ 0.05 se rechaza H_o.
Si el **valor *P*** > 0.05 No se rechaza H_o.

4) Cálculos

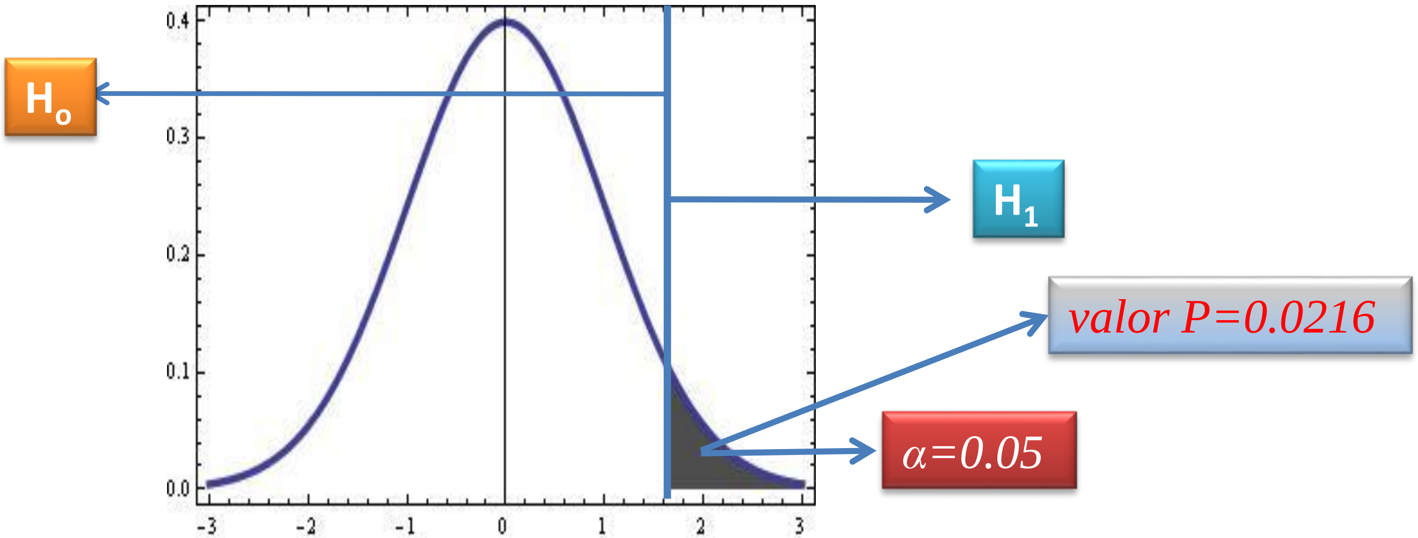
$$z=\frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{71.8-70}{8.9/\sqrt{100}}=2.02$$

Esta es el valor de z que se utilizará para calcular el **valor *P***. Dado que es un ensayo unilateral derecho se calculará el área a la derecha de este valor.

valor *P* = 0.02169

5) Justificación y decisión

Como el **valor *P*** es **0.2169** y es menor al valor del nivel de significancia de **0.05** entonces se rechaza H_0, y se concluye que la edad media de los habitantes es mayor a 70 años.



z = 1.645

Ejemplo

Solución

Calcular el **valor P** para el ejemplo donde se tiene dos máquinas y se quiere ver si tienen la misma cantidad promedio de llenado en las botellas de plástico.

Se utilizan dos máquinas para llenar botellas de plástico con un volumen neto de 16.0 onzas. Las distribuciones de los volúmenes de llenado pueden suponerse normales, con desviaciones estándar $\sigma_1 = 0.020$ y $\sigma_2 = 0.025$ onzas. Un miembro del grupo de ingeniería de calidad sospecha que el volumen neto de llenado de ambas máquinas es el mismo, sin importar si éste es o no de 16 onzas. De cada máquina se toma una muestra aleatoria de 10 botellas. ¿Se encuentra el ingeniero en lo correcto? Utilice $\alpha = 0.05$

MAQUINA 1		MAQUINA 2	
16.03	16.01	16.02	16.03
16.04	15.96	15.97	16.04
16.05	15.98	15.96	16.02
16.05	16.02	16.01	16.01
16.02	15.99	15.99	16.00

1) Datos

$x_1 =$

$x_2 =$

$\sigma_1 = 0.02$

$\sigma_2 = 0.025$

$\alpha = 0.05$

$n_1 = n_2 = 10$

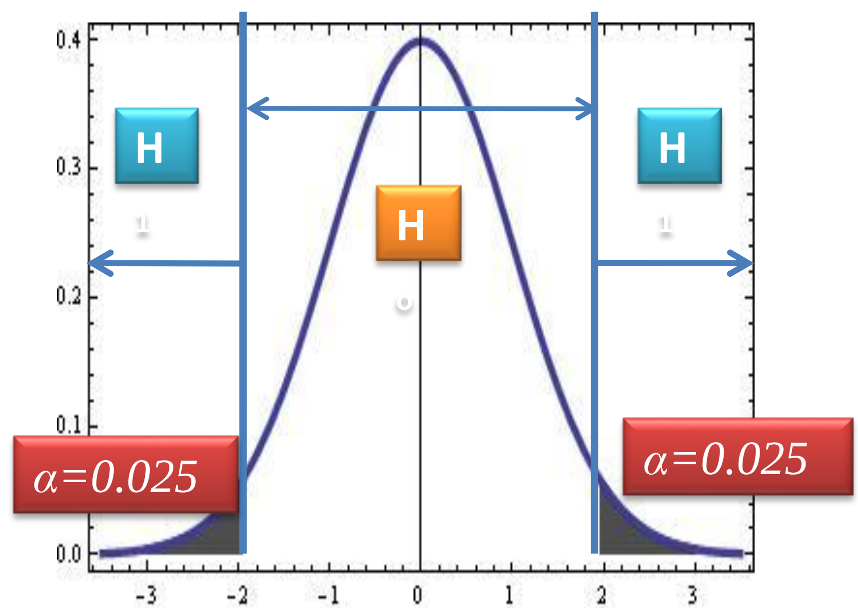
2) Ensayo de hipótesis

$H_o;\ \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1;\ \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

3) Regla de decisión

Si el **valor *P*** ≤ 0.05 Se rechaza H_o.
Si el **valor *P*** > 0.05 No se rechaza H_o.



4) Cálculos

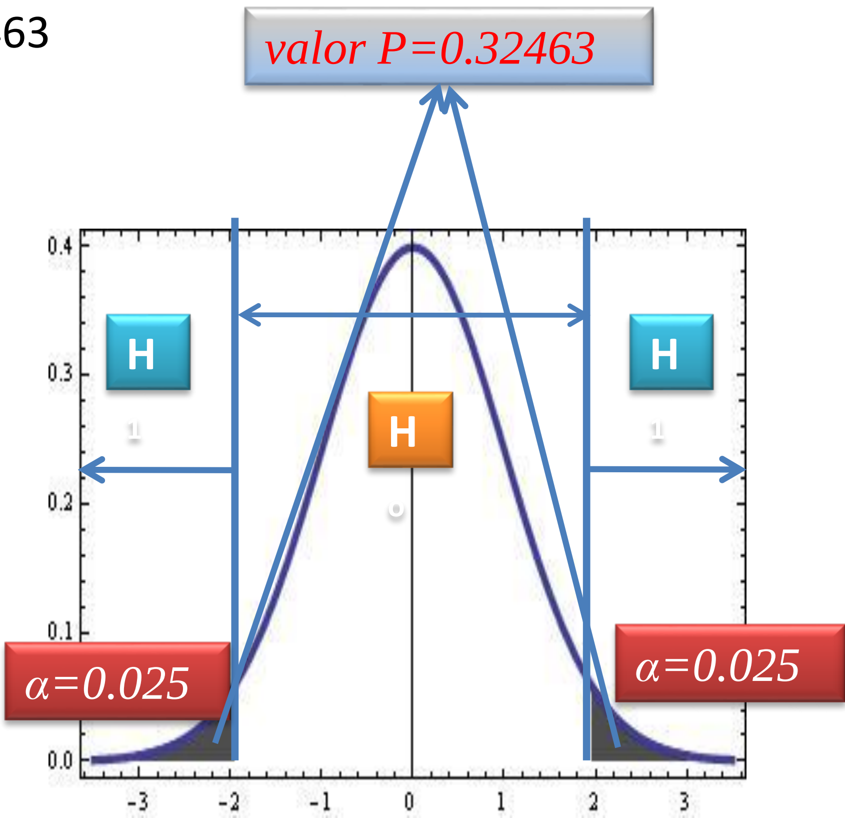
$$z=\frac{[x_1-x_2]-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{[16.015-16.005]-(0.0)}{\sqrt{\left(\frac{0.02^2}{10}+\frac{0.025^2}{10}\right)}}=\frac{0.01}{0.01012}=0.9877$$

Como este es un ensayo bilateral se procede a calcular el **valor *P*** mediante el valor de la z, positiva y negativa y luego se sumarán las áreas.

valor *P* = 0.162315 + 0.162315=2(0.162315)= 0.32463

5) Justificación y decisión

Como el **valor *P*** > α, se no se rechaza H_o, y se concluye que las dos máquinas tienen el mismo llenado promedio.



Error tipo II o β

Al evaluar un procedimiento de prueba de hipótesis, es importante también examinar la probabilidad del error tipo II, el cual se denota por β. Esto es,

$$\beta = P(error\, tipo\; II) = P(Aceptar\, H_0 | H_0 es\; falsa)$$

Para calcular β se debe tener una hipótesis alternativa específica; esto es, debe tenerse un valor particular del parámetro.

Por ejemplo, supongamos que resulta importante rechazar cierta la hipótesis nula H_o: μ = 50 cm/s cada vez que la rapidez promedio de combustión μ es mayor que 52 cm/s o menor que 48 cm/s.

Para ello, puede calcularse la probabilidad β de un error tipo II para los valores μ = 52 y μ = 48, y utilizar dicho resultado para averiguar algo con respecto a la forma en que se desempeñará la prueba.

De manera específica, ¿Cómo trabajará el procedimiento de prueba si lo que se desea detectar, es rechazar H_o, para un valor medio de μ= 52 ó μ = 48?

Dada la simetría, sólo es necesario evaluar uno de los dos casos, esto es, encontrar la probabilidad de aceptar la hipótesis nula H_o: μ = 50 cuando el valor verdadero es μ = 52.

Para hacer este cálculo se tendrá un tamaño de muestra de n=10 y una desviación estándar de la población de σ =2.5 cm/s. Además se evaluará el error tipo II con un nivel de significancia de α = 0.06.

Ensayo de hipótesis

H_o; μ = 50 cm/s

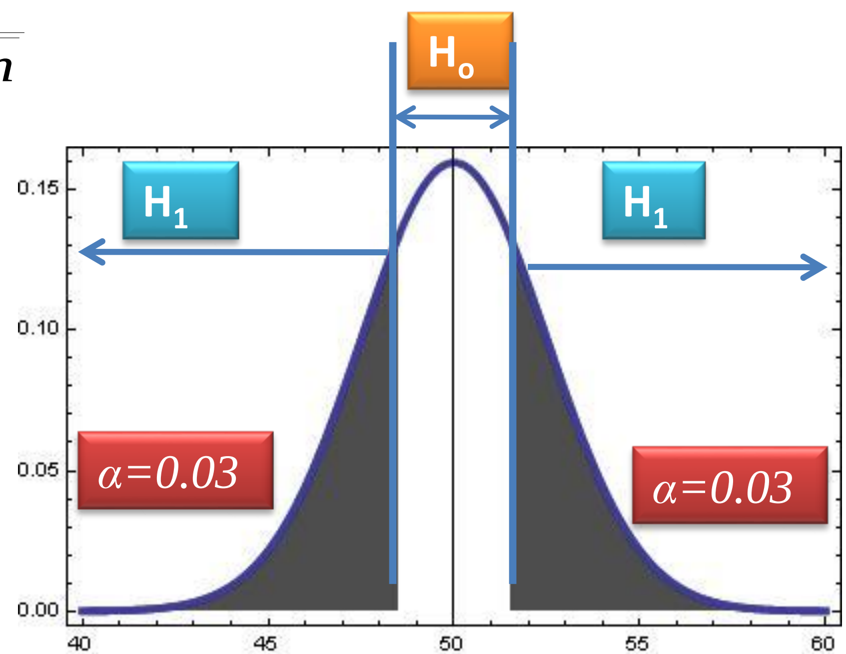
H_1; μ ≠ 50 cm/s

Sabemos que se trata de un ensayo bilateral por lo que se tendrá que calcular el valor del estadístico x de la siguiente manera:

$$x = \mu \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Cálculo

$$x = \mu \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 \pm 1.88\frac{2.5}{\sqrt{10}} = \begin{cases} 48.51 \\ 51.48 \end{cases}$$



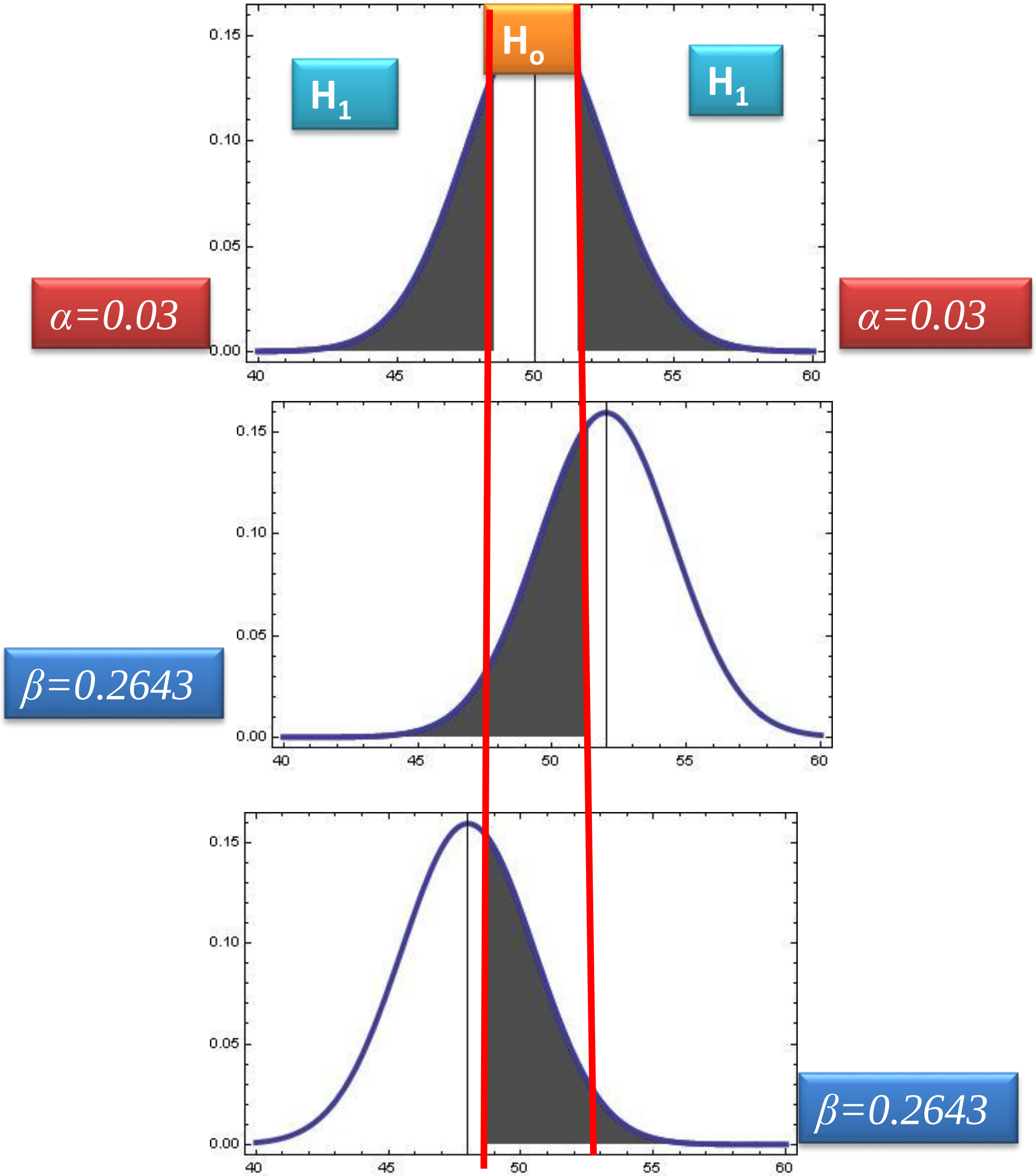
Para poder comprender mejor el cálculo del error tipo II se delimitará el área de la región de aceptación con dos líneas ya que es bilateral y se evaluará la probabilidad de caer en esa área cuando la media tiene un valor de 52 y de 48.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{48.5 - 52}{2.5 / \sqrt{10}} = -4.43$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{51.5 - 52}{2.5 / \sqrt{10}} = -0.63$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{48.5 - 48}{2.5 / \sqrt{10}} = 4.43$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{51.5 - 48}{2.5 / \sqrt{10}} = 0.63$$



$$z = -4.43$$

$$z = -0.63$$

$$z = 4.43$$

$$z = 0.63$$

- Como se puede observar en cada calculo del valor β se tuvieron que evaluar los dos valores de z. En el primer calculo de β se tiene un valor de z=-4.43, esto quiere decir que no existe área del lado izquierdo del 48.5, por lo que β sólo será el área que corresponda a la z=-0.63.
- Lo mismo pasa con el segundo cálculo de β. Como las medias de 52 y 48 son equidistantes del 50 por este motivo los valores del error tipo II son los mismos.
- En caso que no estén equidistantes se tienen que calcular por separado y calcular los valores correspondientes de z porque en ocasiones se tiene un área que no está dentro de la región de aceptación, la cual no se tiene que tomar en cuenta para evaluar al error tipo II.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00103	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02067	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04456	0.04363	0.04272	0.04181	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06425	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07214	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09852
-1.1	0.13566	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15865	0.15625	0.15386	0.15150	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17878	0.17618	0.17361	0.17105	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21185	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23269	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21769	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26434	0.26108	0.25784	0.25462	0.25143	0.24825	0.24509
-0.5	0.30853	0.30502	0.30153	0.29805	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28095	0.27759
-0.4	0.34457	0.34090	0.33724	0.33359	0.32997	0.32635	0.32276	0.31917	0.31561	0.31206
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36692	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34826
-0.2	0.42074	0.41683	0.41293	0.40904	0.40516	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38590
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43250	0.42857	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48404	0.48006	0.47607	0.47209	0.46811	0.46414