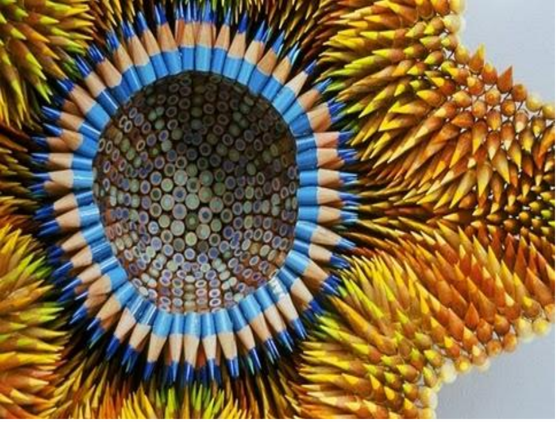
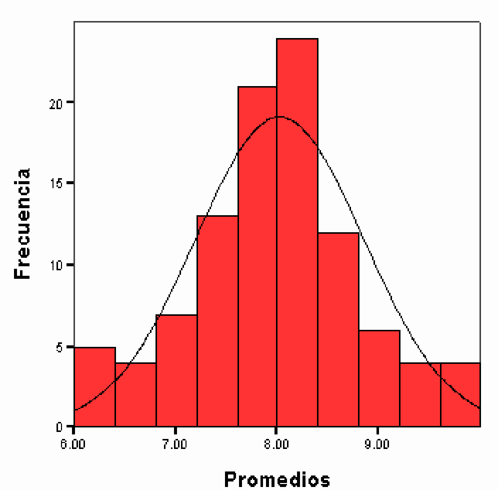

Bondad de ajuste
teoría



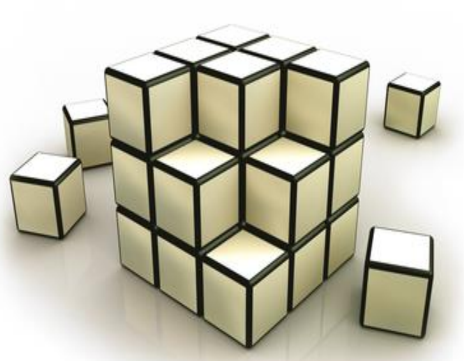
Una hipótesis estadística es una afirmación con respecto a una característica que se desconoce de una población de interés. En la sección anterior tratamos los casos discretos, es decir, en forma exclusiva el valor de algún parámetro.

Ahora examinaremos las pruebas de hipótesis estadísticas en las que la característica que se desconoce es alguna propiedad de la forma funcional de la distribución que se está muestreando.



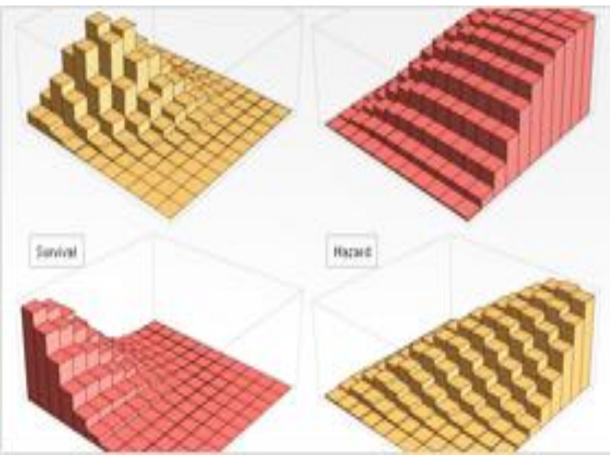
Discutiremos las pruebas de independencia entre dos variables aleatorias en las cuales la evidencia muestral se obtiene mediante la clasificación de una variable aleatoria en un cierto número de categorías.

Este tipo de pruebas recibe normalmente el nombre de **bondad de ajuste** debido a que ésta compara los resultados de una muestra aleatoria con aquellos que se espera observar si la hipótesis nula es correcta.



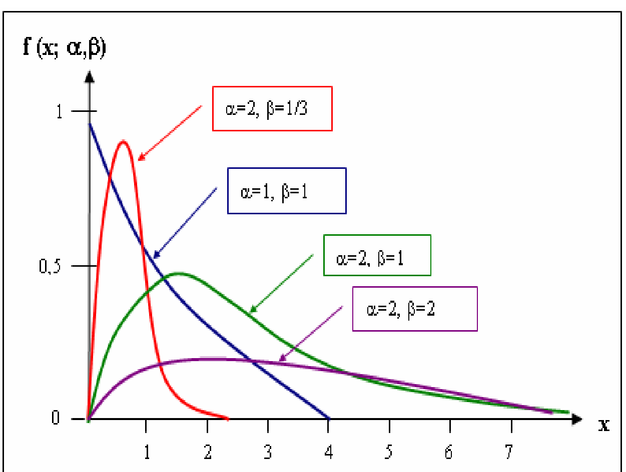
La comparación se hace mediante la clasificación de los datos que se observan en cierto número de categorías y entonces compara las frecuencias observadas con las esperadas para cada categoría. La hipótesis nula será rechazada si existe una diferencia suficiente entre las frecuencias observadas y las esperadas. (error tipo I α)

En casos como este, la hipótesis alternativa es compuesta y, en muchas ocasiones, no se encuentra identificada de manera explicita.
Y La función de potencia es muy difícil de obtener de forma analítica.



Entonces, una prueba de bondad de ajuste no debe usarse por si misma para aceptar la afirmación de la hipótesis nula. La decisión va en el sentido de no rechazar la hipótesis nula más que aceptarla, si la diferencia que existe entre las frecuencias observadas y esperadas es en cierta forma relativamente pequeña

Definición



Una prueba de bondad de ajuste se emplea para decidir cuando un conjunto de datos se apega a una distribución dada. Es conocida también dentro de las pruebas no paramétricas, es decir la bondad de ajuste y pruebas de independencia.

Las decisiones en los negocios requieren que se pruebe alguna hipótesis sobre la distribución poblacional desconocida. Por ejemplo, se puede plantear la hipótesis que la distribución poblacional es uniforme y que todos los valores posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir las hipótesis que se probarán son:

H_0: La distribución poblacional es uniforme

H_1: La distribución poblacional no es uniforme

La prueba de bondad de ajuste se utiliza para determinar si la distribución de los valores en la población se ajusta a alguna forma en particular, la cual fue planteada como hipótesis nula (en este caso una distribución uniforme.) De la misma manera que en todas las pruebas estadísticas de esta naturaleza, los datos muestrales se toman de la población y constituyen la base de las conclusiones.

Si existe una diferencia considerable entre lo que se observa en la muestra y lo que se esperaría observar si la hipótesis nula fuera correcta, es menos probable que la hipótesis nula sea verdadera, por lo que la hipótesis nula debe rechazarse.

Cuando las observaciones obtenidas en la muestra difieren mucho del patrón que esperamos que ocurra si la distribución planteada como hipótesis sí se presenta, entonces no nos queda otra alternativa que rechazar.

Distribución chi-cuadrado (χ^2)

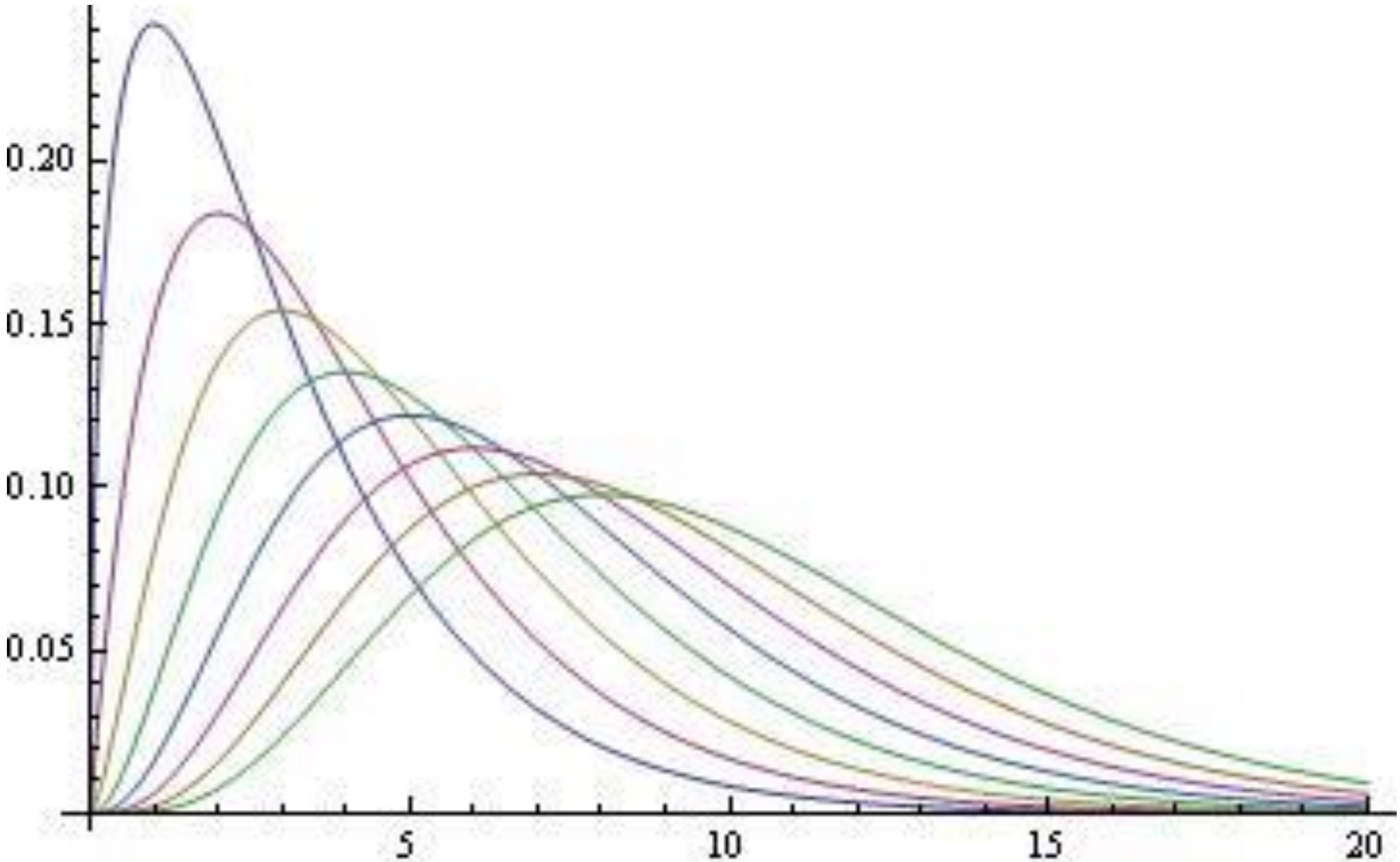
Para contrastar la hipótesis relativa a una distribución poblacional, debemos analizar la diferencia entre las expectativas con base en la distribución planteada como hipótesis y los datos reales que aparecen en la muestra. La prueba chi-cuadrado de bondad de ajuste hace esto. Determina si las observaciones muestrales "se ajustan" a las espectativas. La prueba toma la siguiente forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde O_i=es la frecuencia de los eventos observados en los datos muestrales
E_i=es la frecuencia de los eventos esperados si la hipótesis nula es correcta.
k= es el numero de categorías o clases.

La prueba posee $gl=k\text{-}m\text{-}1$ grados de libertad, donde m es el numero de parámetros a estimar. El numerador de la formula lo que mide es la diferencia entre las frecuencias de los eventos observados y las frecuencias de los eventos esperados al cuadrado. Cuando estás diferencias son grandes, haciendo que χ^2 se incremente, debería rechazarse la hipótesis nula.

Funciones χ^2



Ejemplo 1

Solución

El director de mercadeo de una tienda departamental, tiene la responsabilidad de controlar el nivel de existencias para cuatro tipo de botes vendidos. En el pasado ha ordenado nuevos botes bajo la premisa de que los cuatro tipos son igualmente demandados. Sin embargo, recientemente las existencias se han vuelto más difíciles de controlar y considera que debería probar su hipótesis respecto de una demanda uniforme.

Ensayo de hipótesis

H_o; La demanda es uniforme para los cuatro tipos de bote

H_1; ; La demanda no es uniforme para los cuatro tipos de bote

Suponiendo uniformidad en la demanda, la hipótesis nula presume que de una muestra aleatoria de botes, los usuarios de fin de semana comprarían un numero igual de cada tipo.

Para probar está hipótesis el director selecciona una muestra de n= 48 botes vendidos durante los últimos meses. Si la demanda es uniforme, puede esperar que 48/4= 12 botes de cada tipo se vendan. La tabla muestra esta expectativa junto con el número de cada tipo que en realidad se vendió.

Tipo de bote	Ventas observadas	Ventas esperadas
1	15	12
2	11	12
3	10	12
4	12	12
	48	48

Cálculo

Se nota que $\Sigma(0_i) = \Sigma(E_i)$. El director debe determinar ahora si los números vendidos realmente en cada una de las categorías ***k* = 4** está lo suficientemente cerca de lo que se esperaría si la demanda fuese uniforme. La fórmula para χ^2da

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(15-12)^2}{12} + \frac{(11-12)^2}{12} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(12-12)^2}{12}$$

$$= \frac{1}{12}\left(3^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (0)^2\right) = 1.1666 \approx 1.17$$

El valor **1.17** lo vamos a comparar con un valor crítico de χ^2 tomado de la tabla correspondiente. Debido a que no hay parámetros que tengan que estimarse, *m* = 0 y hay *gl=k-m-1=4-0-1=3* grados de libertad. Si se deseara probar al nivel del 5% se tendría que buscar en la tabla $\chi^2_{0.05,3}$

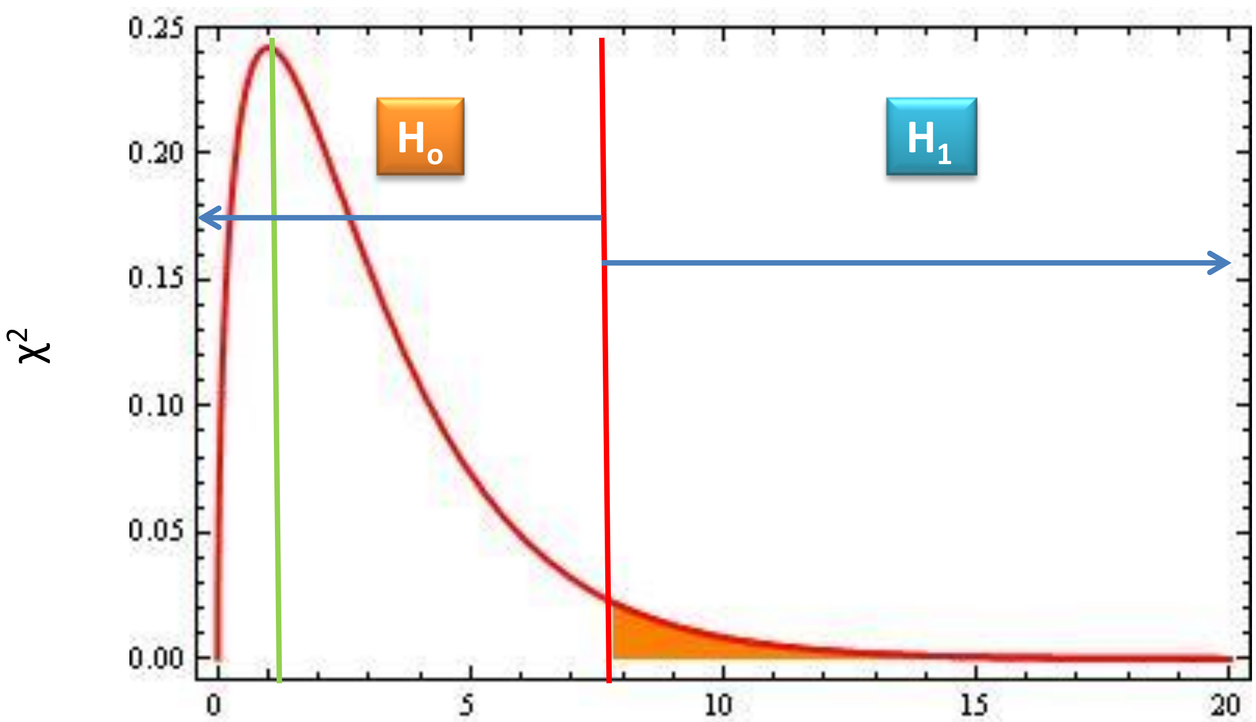
g.l.	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.990}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.900}$	$\chi^2_{0.700}$	$\chi^2_{0.500}$	$\chi^2_{0.300}$	$\chi^2_{0.200}$	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.020}$	$\chi^2_{0.010}$	$\chi^2_{0.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860

Regla de decisión:

No rechazar si $\chi^2 < 7.815$.
Rechazar si $\chi^2 > 7.815$.

Conclusión y justificación

Debido a que 1.17 < 7.815, la hipótesis nula de que la demanda es uniforme no se rechaza. Las diferencias entre lo que se observó en realidad, “0”, y lo que el director esperaba observar si la demanda fuera la misma para los cuatro tipos de botes, “*E*”, no son lo suficientemente grandes como para refutar la hipótesis nula. Las diferencias no son significativas y pueden atribuirse simplemente a un error de muestreo.



Prueba de ajuste a un patrón específico En el ejemplo de los botes, supusimos que la demanda de los cuatro tipos de botes era la misma. Los valores para las frecuencias esperadas eran por ello las mismas. Sin embargo, surgen muchos casos en los cuales las frecuencias se prueban contra un patrón determinado, en el cual las frecuencias esperadas no son todas iguales. En su lugar deben determinarse así:

$$\boxed{\text{Frecuencias esperadas} \quad E_i = n\,p}$$

donde *n* es el tamaño de la muestra *p* es la probabilidad de cada categoría como se especificó en la hipótesis nula.

Ejemplo 2

Cierto banco en Nueva York, trata de seguir una política de extender un 60% de sus créditos a empresas comerciales, un 10% a personas naturales y un 30% a prestatarios extranjeros.

Para determinar si la política se estaba siguiendo, el vicepresidente de mercadeo, selecciona aleatoriamente 85 créditos que se aprobaron recientemente. Encuentra que 62 de tales créditos se otorgaron a negocios, 10 a personas naturales, y 13 a prestatarios extranjeros. Al nivel del 10%, ¿Parece que el patrón de cartera deseado se preserva? Pruebe la hipótesis de que

H_1 Se mantuvo el patrón deseado: 60%, 10% y 30%

H_A: No se mantuvo el patrón deseado.

Ensayo de hipótesis

H_o; Se mantuvo el patrón deseado: 60%, 10% y 30%

H_1; No se mantuvo el patrón deseado: 60%, 10% y 30%

Si la hipótesis nula es correcta, el vicepresidente esperaría que el 60% de los 85 créditos de la muestra sean créditos comerciales. De manera que para la primera categoría:

$E_1 = np_1 = (85)\times(0.60) = 51$ créditos comerciales.

Además, esperaría que

$E_2 = np_2 = (85)\times(0.10) = 8.5$ créditos a personas físicas.

y

$E_3 = np_3 = (85)\times(0.30) = 25.5$ créditos a clientes extranjeros.

Los datos se resumen en la siguiente tabla.

Tipo de crédito	Frecuencias observadas	Frecuencias esperadas
comercial	62	51
personal	10	8.5
extranjero	13	25.5
	85	85

Cálculo

El valor de χ^2 se obtiene

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(62-51)^2}{51} + \frac{(10-8.5)^2}{8.5} + \frac{(13-25.5)^2}{25.5}$$

$$= \left(\frac{121}{51} + \frac{2.25}{8.5} + \frac{156.25}{25.5} \right) = 2.37 + 0.26 + 6.13 \approx 8.76$$

Nuevamente, no se estimaron parámetros, por lo que m = 0. Con **α** al 10% y *k* = 3 dado que hay 3 categorías de crédito (comerciales, privados y extranjeros), existen gl = *K-m-l=3-0-l=2* grados de libertad. El vicepresidente encuentra en la tabla que el valor crítico de $\chi^2_{0.10,22}$ = 4.605.

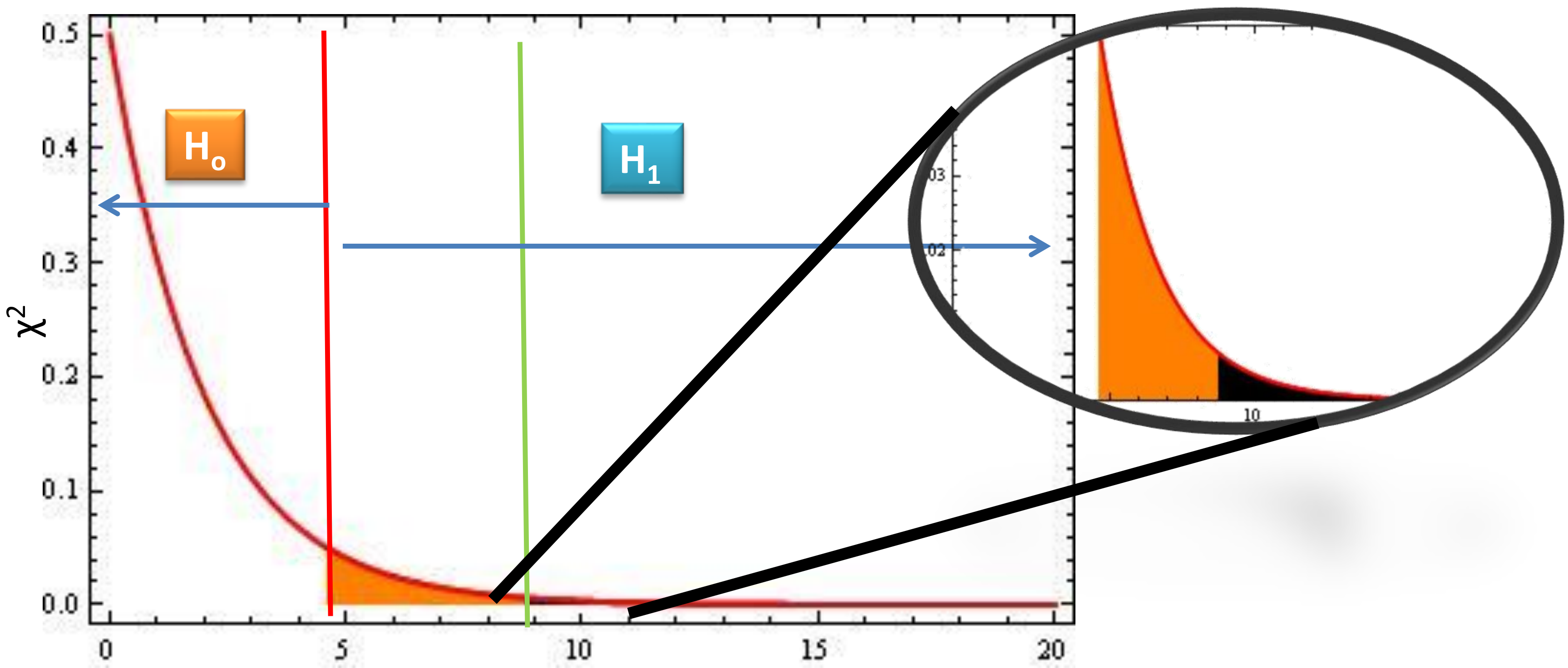
g.l.	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.990}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.900}$	$\chi^2_{0.700}$	$\chi^2_{0.500}$	$\chi^2_{0.300}$	$\chi^2_{0.200}$	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.020}$	$\chi^2_{0.010}$	$\chi^2_{0.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.713	1.386	2.408	3.219	$\boxed{4.605}$	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860

Regla de decisión:

No rechazar H_0 si $\chi^2 < 4.605$.
Rechazar H_0 si $\chi^2 > 4.605$.

Conclusión y justificación

Las diferencias entre lo que vicepresidente observó y lo que esperaba observar si el patrón de crédito deseado se alcanzaba era demasiado grande como para ocurrir por simple azar. Existe sólo un 10% de probabilidad de que una muestra de 85 créditos seleccionados aleatoriamente pudieran producir las frecuencias observadas aquí demostradas, si el patrón deseado en la cartera de crédito del banco se estuviera manteniendo.



g.l.	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.990}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.900}$	$\chi^2_{0.700}$	$\chi^2_{0.500}$	$\chi^2_{0.300}$	$\chi^2_{0.200}$	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.020}$	$\chi^2_{0.010}$	$\chi^2_{0.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	43.194	44.140	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	34.872	39.335	44.165	47.269	51.805	55.758	59.342	60.436	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	44.313	49.335	54.723	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	53.809	59.335	65.227	68.972	74.397	79.082	83.298	84.580	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	63.346	69.334	75.689	79.715	85.527	90.531	95.023	96.388	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	72.915	79.334	86.120	90.405	96.578	101.879	106.629	108.069	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	82.511	89.334	96.524	101.054	107.565	113.145	118.136	119.648	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	92.129	99.334	106.906	111.667	118.498	124.342	129.561	131.142	135.807	140.169