UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Monografía

CONTINUOS DE TIPO N (UN PRIMER ESTUDIO)

U. de A.: Temas Selectos de Topología

Material de apoyo para la U. de A.
"Temas Selectos de Topología"

Licenciatura en Matemáticas

Autor:
Dr. Félix Capulín Pérez

ÍNDICE

1 PRESENTACIÓN

Dentro del plan de estudios de la Licencatura en Matemáticas, la unidad de aprendizaje "Temas Selectos de Topología" está ubicada dentro del núcleo integral y representa una unidad de aprendizaje optativa, en la que el alumno, junto con el profesor pueden elegir de manera libre los temas a trabajar, pues en muchos de los casos este tipo de unidades van enfocadas a introducir al estudiante a la investigación en temas de vanguardia. En los últimos años la topología ha tomado gran auge y como tal el alumno necesita herramienta que permita un mejor desarrollo y entendimiento de la misma.

2 INTRODUCCIÓN

El siguiente tema está enmarcado en la teoría de continuos. En este contexto un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Entenderemos por un subcontinuo a un continuo contenido en algún espacio. Para la lectura de esta monografía se presupone que el lector está familiarizado con el concepto de continuo, dendroide, abanico y muchas de las propiedades básicas en relación a estos conceptos. Dentro de la topología, en general, siempre es importante estudiar propiedades que tienen los espacios topológicos pero que le "estorban" a otras propiedades. Aquí nos enfocaremos, principalmente, al estudio de la propiedad N o en los continuos de tipo N y a algunas variantes de este concepto. Esta propiedad fué estudiada y definida por Oversteegen en su artículo "Non-contractibility of continua" en 1978, (ver [18]), para determinar la no contractibilidad en continuos, aunque anteriormente Graham en 1977 (ver [9]) había estudiado continuos con un tipo de subconjuntos llamados zig zag (los cuales son un caso particular de continuos de tipo N) los cuales sirvieron para dar una caracterización de contractibilidad en abanicos (ver [17]). Por otra parte, existen otras propiedades como "ser de tipo N generalizado", "la propiedad de intersección doblada", las cuales por su estructura son semejantes a la ser de tipo N (ver [6] y [14]). Todas estas propiedades han sido trabajadas ampliamente por varios investigadores, como lo muestra la bibliografía presentada, por lo que en esta monografía se presentará un estudio básico de estas propiedades en donde nos dedicaremos, escencialmente, a examinar la relación que existe entre ellas.

3 DEFINICIONES BÁSICAS

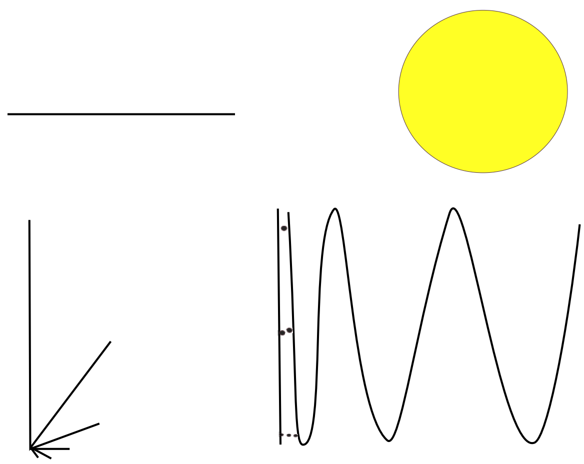
Definición 3.1 *Un* continuo *es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado, es decir, tiene más de un punto.*
Un subcontinuo *es un subconjunto de un continuo que también es un continuo.*

Ejemplo 3.2 *A continuación damos algunos ejemplos sencillos de continuos*

1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, como el intervalo $[a, b]$ es cerrado y acotado se tiene que es un continuo.*

2. *Las bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$, $\overline{B_\epsilon(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n | \; d(x, y) \leq \epsilon\}$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.*

3. *Considere $A_n = \left\{r(cos\frac{\pi}{2^n}, sen\frac{\pi}{2^n}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $F_\omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, F_ω también es un continuo*



1.eps 1.eps

Figure 1: Continuos

Denotemos por $I = [0, 1]$. Diremos que X es un *arco* si existe un homeomorfismo de X en I.

Sean $x, y \in X$, si existe un arco que va de x a y, denotaremos ese arco por $[x, y]$. Si el arco es rectilíneo lo denotaremos por xy.

Definición 3.3 *Un continuo X es* arco conexo *si para cualesquiera dos puntos x, y en X, existe un arco que va de x a y.*

Definición 3.4 *Un continuo X es* unicoherente *si cada vez que $X = A \cup B$ con $A, B \subset X$ se tiene que la intersección $A \cap B$ es conexa.*

Diremos que X es hereditariamente unicoherente *si todo subcontinuo de X es unicoherente.*

Definición 3.5 *Si X es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente diremos que es un* dendroide

Definición 3.6 *Sean (X, d) es un espacio métrico y H_1, H_2 subconjuntos cerrados de X, un continuo $K \subset X$ es* irreducible entre H_1 y H_2 *si $H_i \cap K \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, y para cualquier subcontinuo propio L de K se tiene que $L \cap H_1 = \emptyset$ o $L \cap H_2 = \emptyset$, denotaremos el continuo irreducible por $I(H_1, H_2)$.*

Ejemplo 3.7 *Veamos algunos continuos irreducibles*

1. *El intervalo $I = [0, 1]$ es irreducible entre $\{0\}$ y $\{1\}$, de manera más general, cada arco es irreducible entre sus extremos.*

2. *La curva sinoidal del topólogo es irreducible entre $\{0\} \times [-1, 1]$ y el punto $(1, sen(1))$.*

Con esta última definición podemos probar la siguiente equivalencia para dendroides.

Teorema 3.8 *Un continuo X es un dendroide si y sólo si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe un único continuo irreducible $I(a, b)$ tal que $I(a, b) = [a, b]$*

Demostración. Sea X un dendroide y $a, b \in X$, vamos a demostrar que existe un único continuo irreducible $I(a, b)$ tal que $I(a, b) = [a, b]$.

Como X es arco conexo existe un arco $[a, b]$ irreducible entre a y b, supongamos que existe otro continuo irreducible $I(a, b)$ tal que $I(a, b) \neq [a, b]$.

Se tiene que $I(a, b) \cap [a, b]$ es un subcontinuo propio de $[a, b]$ y de $I(a, b)$ pues X es hereditariamente unicoherente. Dado que $a, b \in I(a, b)$ y $a, b \in [a, b]$ entonces $I(a, b) \cap [a, b]$ es un subcontinuo propio de $I(a, b)$ que contiene tanto a a como a b, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $[a, b] = I(a, b) \cap [a, b] = I(a, b)$.

Supongamos que para cada par de puntos $a, b \in X$ existe un único continuo irreducible $I(a, b)$ tal que $I(a, b) = [a, b]$, demostraremos que X es un dencroide.

Sean $a, b \in X$, por hipótesis existe un único continuo irreducible $I(a, b) = [a, b]$ de donde X es arco conexo.

Hace falta ver que X es hereditariamente unicoherente.
Sean $H_1, H_2 \subset X$ tales que $H_1 \cap H_2 = A \cup B$ donde A y B forman una separación de $H_1 \cap H_2$.

Tomemos $a \in A$ y $b \in B$, dado que $H_1 \cap H_2 = A \cup B$, tenemos que $a, b \in H_1$ y $a, b \in H_2$. Como $a, b \in H_1$, por hipótesis existe un único continuo irreducible entre ellos $I(a, b)$ tal que $I(a, b) = [a, b] \subset H_1$, de manera análoga se tiene que $I(a, b) = [a, b] \subset H_2$, por lo tanto $[a, b] \subset H_1 \cap H_2 = A \cup B$, dado que $[a, b]$ es conexo debe ocurrir que $[a, b] \subset A$ o $[a, b] \subset B$, como A y B son separados en cualquiera de los dos casos llegamos a una contradicción al hecho de que $a \in A$ y $b \in B$.

Esto prueba que X es hereditariamente unicoherente, de lo anterior concluimos que X es un dendroide. ■

Definición 3.9 *Si X es un continuo, definimos las* componentes *o* componentes conexas *de X como las clases de equivalencia de la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$, si existe un conexo en X que contiene a x y y.*

Las arco componentes *de X son las clases de equivalencia de la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$, si $x = y$ ó si existe un arco en X que va de x a y.*

Ejemplo 3.10 *La curva sinoidal del topólogo tiene una sola componente y dos arco componentes.*

Definición 3.11 *Sean X un dendroide y $p \in X$. El* grado de p en X *lo denotamos por $gr(p, X)$ y se define como el número de arco componentes de $X \setminus \{p\}$.*

1. *Si $gr(p, X) \geq 3$ diremos que p es un punto de ramificación.*
2. *Si $gr(p, X) = 2$ diremos que p es un punto ordinario.*
3. *Si $gr(p, X) = 1$, p será llamado punto extremo.*

Un abanico *es un dendroide con exactamente un punto de ramificación, a tal punto le llamaremos* vértice *del abanico.*

Definición 3.12 *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio X, definimos el* límite inferior *y el* límite superior *de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la siguiente manera:*

$$Lim\ inf\ A_n = \left\{ x \in X| \begin{array}{c} \textit{para cada abierto } U \textit{ con } x \in U \textit{ existe} \\ N \in \mathbb{N} \textit{ tal que} \\ U \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para cada } n \geq N \end{array} \right\}$$

$$Lim\ sup\ A_n = \left\{ x \in X| \begin{array}{c} \textit{para cada abierto } U \textit{ con } x \in U, \\ \textit{existe un subconjunto infinito } J \subset \mathbb{N} \\ \textit{tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para cada } n \in J \end{array} \right\}$$

Decimos que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge si existe un conjunto $A \subset X$ que cumple con:

$$Lim\ inf\ A_n = A = Lim\ sup\ A_n$$

y lo denotamos como $Lim\ A_n = A$.

4 Continuos de tipo zig zag, tipo N, tipo N generalizado y propiedad de intersección doblada.

El siguiente concepto fue introducido por B. Graham en [9].

Definición 4.1 *Sea X un continuo, se dice que es de* tipo zig zag *entre los puntos* p *y* q *si existen, un arco $A = [p, q]$, una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ con puntos extremos p_n y q_n y puntos $p'_n, q'_n \in A_n \setminus \{p_n, q_n\}$, con $p_n < q'_n < p'_n < q_n$ (donde "$<$" es el orden usual de recorrer el arco $[p_n, q_n]$ desde p_n hasta q_n, en otras palabras, si $p_n < q'_n < p'_n$ se tiene que $q'_n \in [p_n, p'_n]$) tal que:*
i) $\text{Lim } A_n = A$.
ii) $p = \text{Lim } p_n = \text{Lim } p'_n$.
iii) $q = \text{Lim } q_n = \text{Lim } q'_n$.

Los siguientes dos ejemplos muestran un dendroide y un abanico que son de tipo zig zag.

Ejemplo 4.2 *Sean $p = (-1, 0), q = (1, 0)$ y para cada para $n \in \mathbb{N}$, $p_n = (-1, -1/n)$ y $q_n = (1, 1/n)$*
Definamos

$$D = pq \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (qp_n \cup pq_n)$$

El conjunto así definido es de tipo zig zag entre p y q. Pues si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $q = q'_n$, $p = p'_n$ y $A_n = q_n p'_n \cup p'_n q'_n \cup q'_n p_n$ se cumplen las condiciones de la definición. A este continuo se conoce como abanico doble

5.eps 5.eps

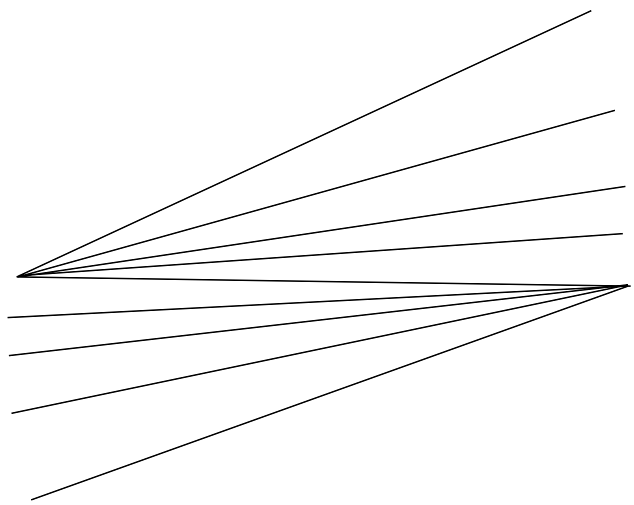


Figure 2: Dendroide de tipo zigzag

Ejemplo 4.3 *Sean* $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$, $p_n = (0, -1/n)$ *y* $d_n = (1, 1/n)$. *Denotemos por*

$$S_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \ \ y \ \ (x - 1)^2 + y^2 = 1/n^2\}$$

el semicírculo que une los puntos $c_n = (1, -1/n)$ *con* d_n *para* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$W = pq \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pd_n \cup S_n \cup c_n p_n)$$

es un abanico de tipo zig zag entre los puntos p *y* q, *ya que si consideramos* $q = q_n$, $p = p'_n$ *y* $A_n = q_n p'_n \cup p'_n d_n \cup d_n p_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se cumplen las condiciones de la definición de tipo zig zag.*

2.eps 2.eps

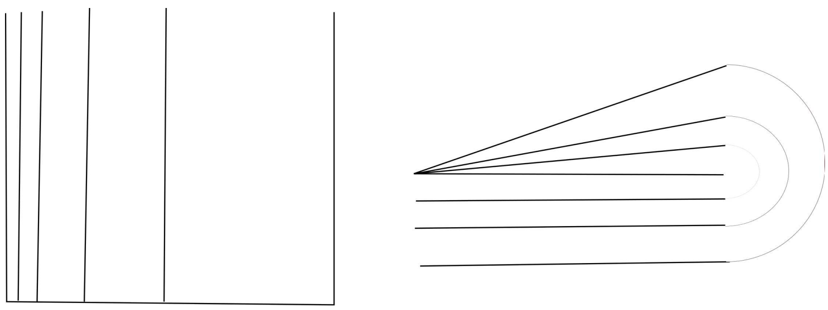


Figure 3: Abanico de la derecha es de tipo zigzag

Posteriormente Lex G. Oversteegen en [16, pág 837] generalizó la definición de zig zag mediante el siguiente concepto.

Definición 4.4 *Un continuo* X *es de* tipo N *si existen, un arco* $A \subset X$ *con puntos extremos* p *y* q, *dos sucesiones de arcos* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ *con puntos extremos* p_n, p'_n *y* q_n, q'_n *respectivamente y puntos* $p''_n \in A'_n \setminus \{q_n, q'_n\}$ *y* $q''_n \in A_n \setminus \{p_n, p'_n\}$ *tal que se cumplen las siguientes condiciones:*
i) $A = \mathrm{Lim}\ A_n = \mathrm{Lim}\ A'_n$,
ii) $p = \mathrm{Lim}\ p_n = \mathrm{Lim}\ p'_n = \mathrm{Lim}\ p''_n$,
iii) $q = \mathrm{Lim}\ q_n = \mathrm{Lim}\ q'_n = \mathrm{Lim}\ q''_n$,
iv) Cada arco que une p_n *con* p'_n *en* X *debe contener a* q''_n, *y*
v) Cada arco que une q_n *con* q'_n *en* X *debe contener a* p''_n.

Observación. Si el espacio X es un dendroide, las condiciones (iv) y (v) de la definición de tipo N se pueden omitir ya que para continuos hereditariamente unicoherentes, el arco que une a dos puntos es único.

Los ejemplos dados anteriormente también cumplen la definición de tipo N entre p y q.
Otro abanico de tipo N se muestra en la siguiente figura.

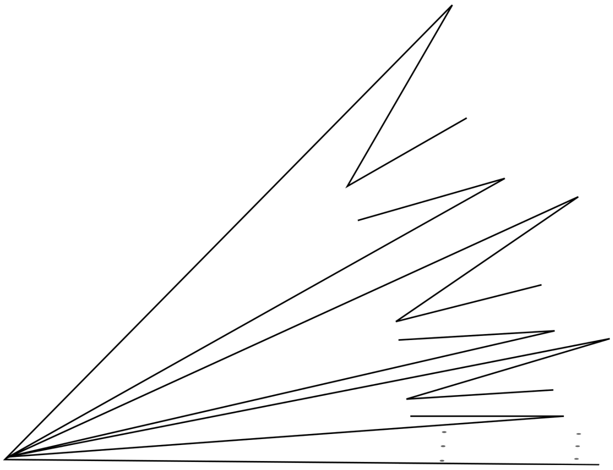
4.eps 4.eps 

Figure 4: Abanico de tipo N

En el artículo [5, pág 78] se introduce el concepto de continuo de tipo N generalizado, la definición es parecida a la de tipo N, sólo se cambia un arco por cualquier otro continuo. En [1] se argumenta porque no podemos tomar la definición de esta manera y el concepto queda de la siguiente forma.

Definición 4.5 *Un continuo X es de tipo N generalizado si existen, un subcontinuo K no degenerado de X, puntos $p, q \in K$, dos sucesiones de arcos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ con puntos extremos p_n, p'_n y q_n, q'_n respectivamente y puntos $p''_n \in A'_n \setminus \{q_n, q'_n\}$ y $q''_n \in A_n \setminus \{p_n, p'_n\}$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:*
i) $K = \text{Lim } [p_n, q''_n] = \text{Lim } [q''_n, p'_n] = \text{Lim } [q_n, p''_n] = \text{Lim } [p''_n, q'_n]$,
ii) $p = \text{Lim } p_n = \text{Lim } p'_n = \text{Lim } p''_n$, *y*
iii) $q = \text{Lim } q_n = \text{Lim } q'_n = \text{Lim } q''_n$.

Ejemplo 4.6 *Considere los puntos $p = (0,0)$, $c = (1,0)$, $b = (0,1)$, $a = (-1,0)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1 + 1/(n+1), 1/n(n+1))$, $b_n = (0, 1 + 1/n)$, $c_n = (1, 1/(n+1))$, $d_n = (-1/n, 1/n)$, $e_n = (1/n, 1/n)$.*

Ahora tomemos

$$T = pa \cup pb \cup pc,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ *sea*

$$L_n = ad_n \cup d_n b_n \cup b_n e_n \cup e_n c_n \cup c_n e_{n+1} \cup e_{n+1} b_{n+1} \cup b_{n+1} d_{n+1} \cup d_{n+1} a_{n+1}.$$

y finalmente

$$X = T \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} (L_{3m}).$$

El continuo X *es de tipo* N *generalizado entre* a *y* c.

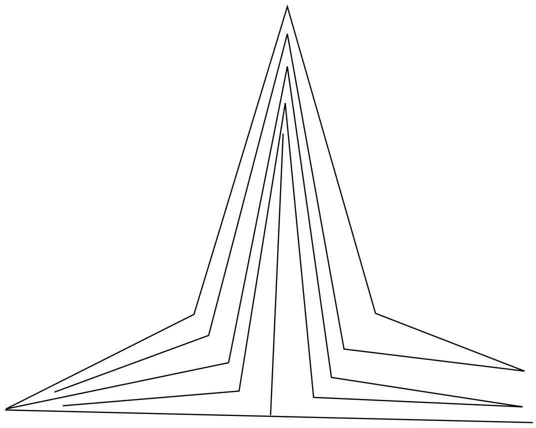
6.eps 6.eps 

Figure 5: Continuo de tipo N generalizado

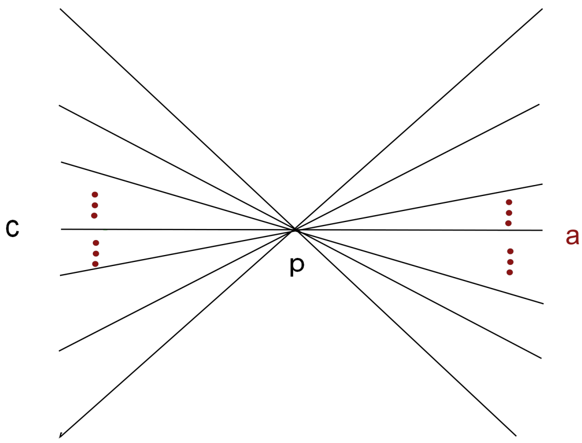
Otra propiedad estudiada en el presente trabajo, que tiene relación con los conceptos anteriores fue introducida en [14] por T. Maćkowiak para probar la selectibilidad en dendroides, a continuación se menciona.

Definición 4.7 *Sean* A *y* B *subcontinuos de un continuo* X *tales que* $B \subseteq A$. *Si existen dos sucesiones de continuos* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ *satisfaciendo las condiciones:*
i) $A_n \cap A'_n \neq \emptyset$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.
ii) $\mathrm{Lim}\ A_n = A = \mathrm{Lim}\ A'_n$.
iii) $B = \mathrm{Lim}\ (A_n \cap A'_n)$.
diremos que B *es un* conjunto de doblez *de* A.

Se dice que X *tiene la* propiedad de intersección doblada *si para cada* A *subcontinuo de* X, *la intersección de todos sus conjuntos de doblez es distinta del vacío.*

Ejemplo 4.8 *Sean* $p = (0,0)$, $a = (1,0)$, $c = (-1,0)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos* $a_n^+ = (1, 1/n)$, $c_n^+ = (-1, 1/n)$, $a_n^- = (1, -1/n)$ *y* $c_n^- = (-1, -1/n)$. *Tomemos*

$$Y = pa \cup pc \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{pa_n^+ \cup pc_n^+ \cup pa_n^- \cup pc_n^-\}.$$



7.eps 7.eps

Figure 6: Continuo con la propiedad de intersección doblada

Para ver que el continuo Y tiene la propiedad de intersección doblada, tenemos que ver que para cada subcontinuo de Y, la intersección de sus conjuntos de doblez es distinta del vacío. Los más interesantes son aquellos subcontinuos $W \subset Y$ para los cuales existen sucesiones de continuos que convergen a W.

Consideremos el subcontinuo $pa \subset Y$, para cada $x \in pa$ podemos elegir sucesiones de continuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$, de tal manera que cumplen las condiciones de la definición y el arco px es conjunto de doblez del arco pa, además la intersección de estos conjuntos de doblez es el conjunto $\{p\}$. De manera analoga, para cada punto $y \in pc$ se tiene que el arco py es conjunto de doblez del arco pc y la intersección nuevamente es el conjunto $\{p\}$.

Ahora si consideramos el arco ca, para cada par de puntos $u \in pc$ y $v \in pa$ podemos elegir sucesiones de continuos $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B'_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que satisfacen las condiciones de conjunto de doblez y el arco uv es conjunto de doblez del arco ac, y la intersección de estos arcos es el conjunto $\{p\}$, con esto se concluye que Y tiene la propiedad de intersección doblada.

Algunos de los continuos anteriores homeomorfos a los que aperecen en las figuras, tambien se pueden encontrar en [1].

5 Interrelación entre continuos de tipo zig zag, tipo N (generalizado) y propiedad de intersección doblada.

A continuación mostraremos la relación que hay entre los continuos de tipo zig zag, tipo N (generalizado) y continuos con la propiedad de intersección doblada, para esto necesitamos los siguientes resultados.

Lema 5.1 *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos que convergen a un arco $A = [a, b]$, tomemos $a_n, b_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones tal que $Lim\ a_n = a$ y $Lim\ b_n = b$, entonces la sucesión $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco $[a, b]$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco $[a, b]$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $H(A_n, [a, b]) < \epsilon$, o equivalentemente,

(i) $[a, b] \subset N(\epsilon, A_n)$ y

(ii) $A_n \subset N(\epsilon, [a, b])$.

Dado que $[a_n, b_n]$ son subarcos de A_n, por (ii) se sigue que

$$[a_n, b_n] \subset A_n \subset N(\epsilon, [a, b]). \tag{1}$$

Para demostrar que $[a, b] \subset N(\epsilon, [a_n, b_n])$ se procederá por contradicción, supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que $[a, b] \not\subset N(\epsilon, [a_n, b_n])$; esto es, existe $z_n \in [a, b]$ tal que $z_n \notin N(\epsilon, [a_n, b_n])$.

Afirmación:

$$B_\epsilon(z_n) \cap [a_n, b_n] = \emptyset. \tag{2}$$

Supongamos que $B_\epsilon(z_n) \cap [a_n, b_n] \neq \emptyset$, entonces existe un punto y tal que $y \in B_\epsilon(z_n)$ y $y \in [a_n, b_n]$. Como $y \in B_\epsilon(z_n)$, entonces $d(y, z_n) < \epsilon$, es decir, $z_n \in B_\epsilon(y) \subset N(\epsilon, [a_n, b_n])$, lo cual no es posible pues $z_n \notin N(\epsilon, [a_n, b_n])$.

Ahora tomemos la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como $[a, b]$ es un espacio compacto existe una subsucesión convergente $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, tomemos $z \in [a, b]$ tal que $Lim\ z_n = z$ y $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2}$, así, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_1$,

$$z_n \in B_{\epsilon_0}(z) \tag{3}$$

Ahora, por hipótesis, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_2$ se tiene que

$$A_n \subset N(\epsilon_0, [a, b]) \tag{4}$$

Si $N = máx\,\{N_1, N_2\}$, para toda $n \geq N$, (3) y (4) se cumplen. Notemos que

$$z_n \in B_{\epsilon_0}(z) \subset B_\epsilon(z_n) \tag{5}$$

y tomemos

$$A = N(\epsilon, [a, z]) \setminus B_{\epsilon_0}(z) \text{ y}$$
$$B = N(\epsilon, [z, b]) \setminus B_{\epsilon_0}(z)$$

Note que $A \neq \emptyset \neq B$, pues $a_n \in A$ y $b_n \in B$, además $A \cap B = \emptyset$, vamos a demostrar que $[a_n, b_n] \subset A \cup B$. Sea $x \in [a_n, b_n]$, por la afirmación (2) tenemos que $B_\epsilon(z_n) \cap [a_n, b_n] = \emptyset$, por (5) se sigue que $B_{\epsilon_0}(z) \cap [a_n, b_n] = \emptyset$, es decir, $x \notin B_{\epsilon_0}(z)$ entonces $x \in A \cup B$ lo que es una contradición pues $[a_n, b_n]$ es conexo.

Esta contradicción muestra que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$[a, b] \subset N(\epsilon, [a_n, b_n]). \tag{6}$$

Como (1) y (6) se cumplen para todo $\epsilon > 0$, entonces la sucesión $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco $[a, b]$ ■

Lema 5.2 *Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de continuos que convergen a un continuo A, entonces $\{A_n \cup A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al continuo A.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que para toda $n \geq máx\{N_1, N_2\}$, se tiene que
(i) $H(A_n, A) < \epsilon$ y
(ii) $H(A'_n, A) < \epsilon$,
tomemos $a \in A$, por (i), tenemos que $A \subset N(\epsilon, A_n)$, de donde $d(a, y) < \epsilon$ para algún $y \in A_n$, es decir, $d(a, y) < \epsilon$ para algún $y \in (A_n \cup A'_n)$ entonces.

$$A \subset N(\epsilon, A_n \cup A'_n). \tag{7}$$

Consideremos ahora $a \in (A_n \cup A'_n)$, se tiene que $a \in A_n$ o $a \in A'_n$. Supongamos que $a \in A_n$, por (i) se tiene que $A_n \subset N(\epsilon, A)$, de donde $d(a, x) < \epsilon$ para algún $x \in A$, entonces tenemos que

$$(A_n \cup A'_n) \subset N(\epsilon, A).$$

Si $a \in A'_n$ utilizando (ii) y de manera análoga se tiene que

$$(A_n \cup A'_n) \subset N(\epsilon, A). \tag{8}$$

de (7) y (8) tenemos que $H(A_n \cup A'_n, A) < \epsilon$, por lo tanto $\{A_n \cup A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A. ■

A continuación se probarán algunos resultados que involucran la interrelación entre los los conceptos principales de este trabajo. Algunos de ellos aparecen en [1].

Teorema 5.3 *Sea X un continuo. Si X es de tipo zig zag entonces X es de tipo N.*

Demostración. Sea X un continuo de tipo zig zag, entonces existe un arco $A = [p, q]$, una sucesión de arcos $[p_n, q_n]$ y dos sucesiones de puntos $\{q'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{p'_n\}_{n=1}^{\infty}$ (con $p_n < q'_n < p'_n < q_n$).

Por el Lema 5.1, las sucesiones de arcos $\{[p_n, q'_n]\}_{n=1}^{\infty}$, $\{[q'_n, p'_n]\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{[p'_n, q_n]\}_{n=1}^{\infty}$ también convergen al arco $[p, q]$.

Tomemos $A_n = [p_n, q'_n] \cup [q'_n, p'_n]$ y $A'_n = [q'_n, p'_n] \cup [p'_n, q_n]$, y puntos $p''_n = p'_n \in A'_n \setminus \{q_n, q'_n\}$ y $q''_n = q'_n \in A_n \setminus \{p_n, p'_n\}$ por definición de continuo de tipo zig zag y como elegimos a A_n y a A'_n, se cumplen las siguientes condiciones:
$i)$ $p = Lim\ p_n = Lim\ p'_n = Lim\ p''_n$,
$ii)$ $q = Lim\ q_n = Lim\ q'_n = Lim\ q''_n$,
$iii)$ Cada arco que une p_n con p'_n en X contiene a q''_n,
$iv)$ Cada arco que une q_n con q'_n en X contiene a p''_n,

Sólo falta probar que $A = Lim\ A_n = Lim\ A'_n$.
Como $A_n = [p_n, q'_n] \cup [q'_n, p'_n]$ y además $Lim\ [p_n, q'_n] = A = Lim\ [q'_n, p'_n]$, por el Lema 5.2, $Lim\ A_n = A$.

De la misma manera $Lim\ A'_n = A$. ■

Teorema 5.4 *Sea X un continuo. Si X es de tipo N, entonces X es de tipo N generalizado.*

Demostración. Por definición de tipo N, existe un arco $A \subset X$ con puntos extremos p y q el cual por definición es un continuo, dos sucesiones de arcos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ con puntos extremos p_n, p'_n y q_n, q'_n respectivamente y puntos $p''_n \in A_n \setminus \{q_n, q'_n\}$ y $q''_n \in A'_n \setminus \{p_n, p'_n\}$.

Solo hay que demostrar que $[p, q] = Lim\, [p_n, q''_n] = Lim\, [q''_n, p'_n]$, pero esto se sigue del Lema 5.1.

Análogamente tenemos que $[p, q] = Lim\, [q_n, p''_n] = Lim\, [p''_n, q'_n]$. ■

Teorema 5.5 *Si X es un continuo de tipo N generalizado, entonces X no tiene la propiedad de intersección doblada.*

Demostración. Sea X un continuo de tipo N generalizado, entonces existen $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de arcos con puntos extremos p_n, p'_n y q_n, q'_n respectivamente y puntos $p''_n \in A'_n \setminus \{q_n, q'_n\}$, $q''_n \in A_n \setminus \{p_n, p'_n\}$ tal que:
1) $K = Lim\ [p_n, q''_n] = Lim\ [q''_n, p'_n] = Lim\ [q_n, p''_n] = Lim\ [p''_n, q'_n]$
2) $p = Lim\ p_n = Lim\ p'_n = Lim\ p''_n$
3) $q = Lim\ q_n = Lim\ q'_n = Lim\ q''_n$

Si tomamos $B_n = [p_n, q''_n]$, $B'_n = [q''_n, p'_n]$ y $B = \{q\} \subset K$ tenemos que
$i)$ $B_n \cap B'_n = \{q''_n\} \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$
$ii)$ $K = Lim\ B_n = Lim\ B'_n$
$iii)$ $Lim\ (B_n \cap B'_n) = Lim\ \{q''_n\} = \{q\} = B$
es decir, $\{q\}$ es conjunto de doblez del subcontinuo K.

Si ahora tomamos $D_n = [q_n, p''_n]$, $D'_n = [p''_n, q'_n]$ y $D = \{p\} \subset K$, de manera análoga $\{p\}$ es conjunto de doblez del subcontinuo K.

Además se tiene que $\{p\} \cap \{q\} = \emptyset$ por lo que concluimos que X no tiene la propiedad de intersección doblada. ■

Se ha demostrado que ser de tipo zig zag implica ser de tipo N, a su vez ser de tipo N generalizado y esto último implica no tener la propiedad de intersección doblada, lo que nos lleva a preguntarnos si las implicaciones inversas se cumplen.

A continuación se dan ejemplos de que no necesariamente las implicaciones inversas se cumplen, aún en abanicos. Para ello también se puede revisar [1] y [13]

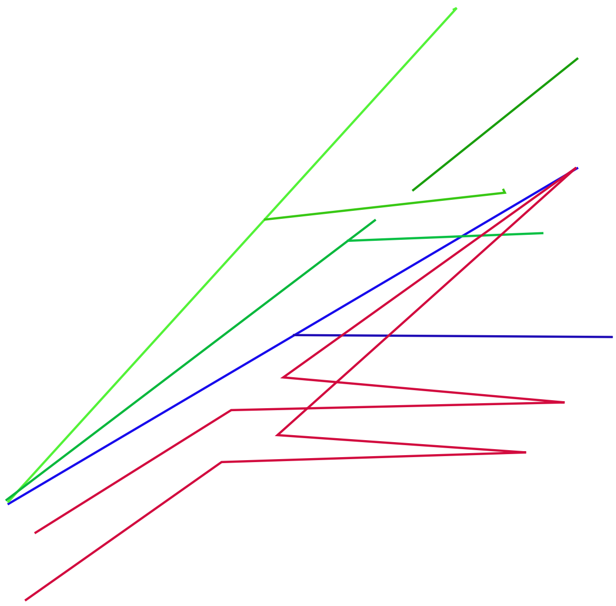
Ejemplo 5.6 ***No propiedad de intersección doblada no implica ser de tipo N generalizado en dendroides.***

Consideremos D como en el Ejemplo 4.2 y $\pi : D \to pq$ dada por

$$\pi(x, y) = (x, 0)$$

Para $(x_1, 0)$, $(x_2, 0) \in pq$, si $x_1, x_2 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y $x_1 = -x_2$ identificamos esos puntos. Ahora tomemos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, si (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in pq_n$, $x_1, x_2 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y $\pi(x_1, y_1) = -\pi(x_2, y_2)$ identificamos (x_1, y_1) con (x_2, y_2).

En este dendroide la imagen de p y q son conjuntos de doblez de Z, es decir, no tiene la propiedad de intersección doblada y además no es de tipo N generalizado.



8.eps 8.eps

Figure 7: Dendoride con la propiedad de intersección doblada
que no es de tipo N generalizado

Ejemplo 5.7 ***No propiedad de intersección doblada no implica ser de tipo N generalizado en abanicos.***

En [1] se da la descripción de un abanico que no tiene la propiedad de intersección doblada y que tampoco es de tipo N generalizado y a continuación la mencionamos.

Considere las dos primeras coordenadas de los siguientes puntos en coordenadas polares.
Sean $v = (0,0,0)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{\pi}{2^n}, 0)$, $c_n = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2^n})$ *y* $b_n = (\frac{1}{n}, \pi, 0)$.

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ *consideremos* $a_{n,m} = ((\frac{1}{2^{n-1}})(1+\frac{1}{m}), \frac{\pi}{2^n}, 0)$, $p_{n,m} = (\frac{1}{(m)(2^{n-1})}, \frac{3\pi}{2^{n+2}}, 0)$, $d_{n,m} = ((\frac{1}{2^{n-1}})(1+\frac{1}{m}), \frac{\pi}{2^n}, \frac{1}{2^{n+(2m+1)}})$,
$e_{n,m} = (\frac{1}{(m)(2^n)}, \frac{3\pi}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+(2m+1)}})$, $f_{n,m} = ((\frac{1}{2^{n-1}})(1+\frac{1}{m}), \frac{\pi}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1+(2m+1)}})$ *y* $g_{n,m} = (\frac{1}{(m)(2^n)}, \frac{3\pi}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1+(2m+1)}})$.

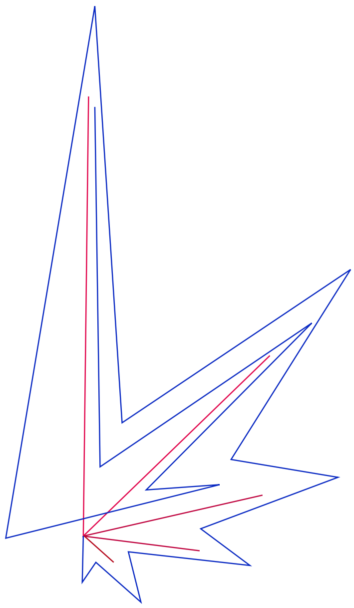
Para cada $m \in \mathbb{N}$ *fijo, sea*

$$vb_m = b_m a_{1,m} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_{n,m} \cup p_{n,m}a_{n+1,m}\} \cup \{v\} \text{ y}$$
$$b_m d_{1,m} = b_m d_{3,m} \cup d_{3,m}e_{2,m} \cup e_{2,m}d_{2,m} \cup d_{2,m}e_{1,m} \cup e_{1,m}d_{1,m}$$

Definamos $H = F_\omega \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (vb_m \cup b_m d_{1,m})$.

Esta figura únicamente muestra el arco $vb_m \cup b_m d_{1m}$. *Se tiene que* $\{v\}$ *y* $\{a_1\}$ *son conjuntos de doblez del triodo*

$$T = va_1 \cup va_2 \cup va_3$$



9.eps 9.eps

Figure 8: Abanico con la propiedad de intersección doblada
que no es de tipo N generalizado

Ejemplo 5.8 ***Tipo N generalizado no implica ser de tipo N en dendroides.***

El Ejemplo 4.6 *muestra un dendroide que es de tipo N generalizado pero no es de tipo N.*

El siguiente ejemplo es de un abanico que no es de tipo N, que es de tipo N generalizado y no tiene la proiedad de interseccón doblada fue dado en [1].

Ejemplo 5.9 ***Tipo N generalizado no implica ser de tipo N en abanicos.***
A continuación se dá la descripción de un abanico que es de tipo N generalizado pero no es de tipo N.

Tomemos el abanico W *como en el Ejemplo* 4.3 , $\mathbb{L} = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$ *y* $w_i = (\frac{1}{2^i}, 0) \in \mathbb{L}$. *Para cada* $z \in [w_n, w_{n+1}]$ *definimos* $z^* \in [w_n, w_{n+1}]$ *tal que* $d(z, w_n) = d(z^*, w_{n+1})$.

Tomemos $z_1, z_2 \in W$, $z_1 \sim z_2$ *si y sólo si* $z_1, z_2 \in \mathbb{L}$ *y* $z_1 = z_2^*$ *ó* $z_1 = p$ *y* $z_2 = w_i$.

10.eps 10.eps

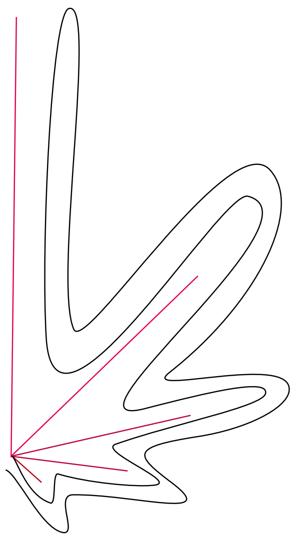


Figure 9: Abanico de tipo N generalizado que no es de tipo N.

Este ejemplo, entre otras cosas, resulta interesante pues contesta también a una pregunta que hace T. J. Lee en [13, pág. 126]. La pregunta es la siguiente: Existirá un abanico que no sea de tipo N y que no tenga la propiedad de intersección doblada? El abanico anterior no es de tipo N pero al ser de tipo N generalizado, no tiene la propiedad de intersección doblada.

Ejemplo 5.10 ***Ser de tipo N no implica ser de tipo zig zag en dendroides.***

El ejemplo se construye de la siguiente manera: consideramos los puntos $a = (0,0)$, $b = (1,0)$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (0, \frac{1}{n})$, $b_n = (1, -\frac{1}{n})$, $p''_n = (\frac{2}{3}, \frac{1}{n})$, $q'_n = (\frac{1}{3}, \frac{2n+1}{2(n^2+n)})$, $q''_n = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{n})$ *y* $p'_n = (\frac{2}{3}, -\frac{2n+1}{2(n^2+n)})$.

Definimos $A_n = a_n p''_n \cup p''_n q'_n$ *y* $B_n = b_n q''_n \cup q''_n p'_n$ *y finalmente tomamos*

$$X = aa_1 \cup ab \cup bb_1 \cup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}$$

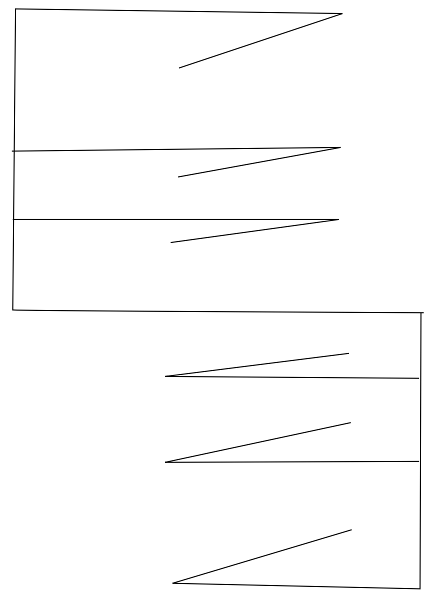


Figure 10: Dendroide no tipo zigzag, de tipo N

Ejemplo 5.11 ***Ser de tipo N no implica ser de tipo zig zag en abanicos.***
El ejemplo se construye de la siguiente manera: tomemos los puntos $r = (0,0), s = (1,0)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (0, \frac{1}{n})$, $b_n = (1, \frac{1}{n})$, $c_n = (\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2(n^2+n)})$, $d_n = (\frac{2}{3}, \frac{2n+1}{2(n^2+n)})$ *y* $e_n = (\frac{2}{3}, \frac{1}{n})$, *tomemos* $A_n = a_{2n-1}b_{2n-1} \cup b_{2n-1}c_{2n-1} \cup c_{2n-1}d_{2n-1}$ *y* $A'_n = a_{2n}e_{2n} \cup e_{2n}c_{2n}$.

Tomemos

$$Y = ra_1 \cup rs \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{A_n\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{A'_n\}$$

Definamos la siguiente relación de equivalencia, $x \sim y$ *si* $x = y$ *o si* $x, y \in pa_1$ *y finalmente* $Z = Y/\sim$ *es el ejemplo buscado.*

Otro ejemplo lo muestra la siguiente figura.

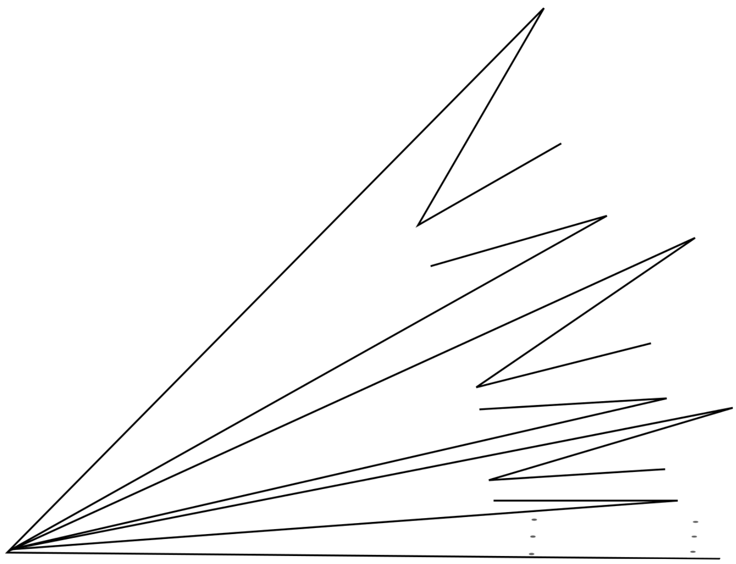
4.eps 4.eps 

Figure 11: Dendroide no tipo zigzag, de tipo N

Estos ejemplos nos dan un panorama más amplio de los continuos con los que se está trabajando.

6 Equivalencias en dendroides que no son de tipo N

A continuación se dará una condición necesaria y suficiente para que un dendroide no sea de tipo N (ver [13]) y determinaremos que en la clase de los abanicos localmente conexos en el vértice, tener la propiedad de intersección doblada, no ser de tipo N generalizado y no ser de tipo N son equivalentes (ver [1]). para ello necesitamos definiciones y resultados previos.

Teorema 6.1 *Sea X un continuo. Si A es un subcontinuo y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de continuos tal que $Lim\ B_n = A$ entonces $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es compacto.*

Demostración. Para demostrar que $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es compacto se probará que es cerrado, es decir, que

$$A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \overline{A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}. \tag{9}$$

Se tiene que $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \overline{A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$.

Así que, solo hay que demostrar la otra contención.
Notemos que

$$\overline{A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = \overline{A} \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = A \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$$

Supongamos que $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ entonces existe una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ tal que $Lim\ x_k = x$, afirmamos que no puede haber una infinidad de x_k en un solo B_n, ya que si fuera así, se tendría que $x \in B_n$ por la compacidad de B_n.

Elijamos una subsucesión $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a A, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_k \in B_{n_k}$ y para $n_k \neq n_l$ se tiene que $x_k \neq x_l$, de esta manera se tiene que $Lim\ \ x_k = x$ y además $Lim\ B_{n_k} = A$, de donde $x \in A$.

Con esto se tiene que:

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset A. \tag{10}$$

De donde

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \subset A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad (11)$$

Es decir, $\overline{A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = A \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \subset A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Con lo cual concluimos que $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es cerrado. ∎

Lema 6.2 *Sea X un continuo, B un conjunto de doblez de un subcontinuo A de X, entonces para cada punto $p \in A \setminus B$ y para cada dos sucesiones de puntos*

$$p_n \in A_n \setminus A'_n \text{ y } p'_n \in A'_n \setminus A_n \text{ con}$$
$$Lim\ p_n = p = Lim\ p'_n$$

existe un punto $a \in B$ y una sucesión de puntos $a_{n_k} \in A_{n_k} \cap A'_{n_k}$ tal que

$$a = Lim\ a_{n_k}$$

y para cada $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} \in I\left(p_{n_k}, p'_{n_k}\right) \subset A_{n_k} \cup A'_{n_k}$ donde $I(p_{n_k}, p'_{n_k})$ es un continuo irreducible entre p_{n_k} y p'_{n_k}.

Demostración. Tomemos A_n, A'_n como en la definición de conjunto de doblez, $p \in A \setminus B$ y dos sucesiones $p'_n \in A'_n \setminus A_n$, $p_n \in A_n \setminus A'_n$ tal que $p = Lim\ p_n = Lim\ p'_n$.

Como $A_n \cap A'_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n \cup A'_n$ es un continuo para toda n, además $p_n, p'_n \in A_n \cup A'_n$, entonces existe algún continuo irreducible $I(p_n, p'_n) \subset A_n \cup A'_n$ (ver[11, pág 192]), más aún, se tiene que

$$I(p_n, p'_n) \cap (A_n \cap A'_n) \neq \emptyset.$$

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ fijamos algún continuo irreducible $I(p_n, p'_n)$ y tomemos puntos $a_n \in I(p_n, p'_n) \cap (A_n \cap A'_n)$.

Por el Lema 5.2, $\{A_n \cup A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al continuo A y, por el Teorema 6.1 $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A'_n)$ es compacto. De donde, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Consideremos $a = Lim\ a_{n_k}$, como $a_{n_k} \in I(p_{n_k}, p'_{n_k}) \cap (A_{n_k} \cap A'_{n_k})$, se tiene que $a_{n_k} \in I(p_{n_k}, p'_{n_k}) \subset A_{n_k} \cup A'_{n_k}$ y $Lim\ a_{n_k} \in Lim\ A_{n_k} \cap A'_{n_k} = B$ con lo cual se demuestra lo requerido. ∎

Corolario 6.3 *Sea X un dendroide, B un conjunto de doblez de un subcontinuo A de X, entonces para cada punto $p \in A \setminus B$ y para cada dos sucesiones de puntos*

$$p_n \in A_n \setminus A'_n \text{ y } p'_n \in A'_n \setminus A_n \text{ con}$$
$$Lim\ p_n = p = Lim\ p'_n$$

existe un punto $a \in B$ y una sucesión de puntos $a_{n_k} \in A_{n_k} \cap A'_{n_k}$ tal que

$$a = Lim\ a_{n_k}$$

y para cada $k \in \mathbb{N}$*,* $a_{n_k} \in [p_{n_k}, p'_{n_k}] \subset A_{n_k} \cup A'_{n_k}$

Demostración. Se sigue del teorema anterior y el Teorema 3.8. ■

Definición 6.4 *Un espacio se dice que es* conexo entre A y B *si no existe un conjunto* F *abierto y cerrado tal que* $A \subset F$ *y* $F \cap B = \emptyset$*.*

Teorema 6.5 *Todo espacio compacto* X *tiene la siguiente propiedad:*
Si el espacio es conexo entre dos subconjuntos cerrados A *y* B*, es conexo entre un par de puntos* a *y* b*, donde* $a \in A$ *y* $b \in B$

Demostración. Sea X un espacio compacto. Supongamos que no es conexo entre todo par de puntos a, b tales que $a \in A$ y $b \in B$.

Como X no es conexo entre cada par de puntos a, b, existe F_{ab} subconjunto abierto y cerrado tal que $a \in F_{ab}$ y $\{b\} \cap F_{ab} = \emptyset$, es decir, $b \notin F_{ab}$.

Recordemos que A y B son compactos pues son subconjuntos cerrados de un compacto.

Para $b \in B$ fijo, $\{F_{ab}\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A, entonces existe un subconjunto finito $A' \subset A$ tal que $\{F_{ab}\}_{a \in A'}$ es una cubierta de A.

Para $b \in B$ hagamos $F_b = \bigcup\limits_{a \in A'} F_{ab}$ el cual es abierto y cerrado en X tal que $A \subset F_b$ y $b \notin F_b$.

Entonces la familia $\{X \setminus F_b\}_{b \in B}$ es una cubierta abierta de B, de donde existe un subconjunto finito $B' \subset B$ tal que $\{X \setminus F_b\}_{b \in B'}$ cubre a B.

Nótese que $\bigcap\limits_{b \in B'} F_b$ es un conjunto abierto y cerrado tal que

$$A \subset \bigcap_{b \in B'} F_b.$$

Además, dado que $\{X \setminus F_b\}_{b \in B}$ es una cubierta de B, se tiene que

$$B \subset \bigcup_{b \in B'} (X \setminus F_b) = X \setminus \bigcap_{b \in B'} F_b.$$

de donde $B \cap \bigcap\limits_{b \in B'} F_b = \emptyset$, con lo cual se tiene que X no es conexo entre A y B contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto X es conexo entre algún par de puntos a, b tal que $a \in A$ y $b \in B$. ■

Teorema 6.6 *Si un espacio compacto* X *es conexo entre dos conjuntos cerrados* A *y* B*, existe una componente* C *de* X *tal que* $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap B$*.*

Demostración. Como X es conexo entre los conjuntos A y B, por el Teorema anterior, X es conexo entre un par de puntos a, b tal que $a \in A$ y $b \in B$, en otras palabras todo conjunto abierto y cerrado F debe contener tanto a a como a b.

Tomemos

$$C = \bigcap \{C' | \, C' \text{ es un conjunto abierto y cerrado con } a \in C'\}.$$

Notemos que C es la cuasi-componente de a y como X es compacto se sigue que la cuasi-componente coinciden con la componente (ver[11, pág. 235]). Así $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap B$. ■

Teorema 6.7 *Si X es conexo, todo subconjunto cerrado propio A es conexo entre su frontera y cada uno de sus puntos.*

Demostración. Supongamos que existe un conjunto cerrado A que no es conexo entre su frontera y cada uno de sus puntos. Entonces existe F un subconjunto abierto y cerrado de A tal que, $a \in F \subset A$ y $F \cap Fr(A) = \emptyset$. En particular $A \setminus F$ es cerrado.

Por otro lado

$$\emptyset = F \cap Fr(A) = F \cap (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) = F \cap \overline{X \setminus A},$$

además tenemos que $a \in F$ y dado que $F \subset A$, se tiene que $(A \setminus F) \neq \emptyset$, de donde $X = F \cup [(A \setminus F) \cup \overline{X \setminus A}]$ que es la unión de dos conjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos, esto nos lleva a una contradicción pues X es conexo. ■

Teorema 6.8 *Si A es un subconjunto cerrado propio del continuo X y C es una componente de A, entonces $C \cap Fr(A) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sean A un subconjunto cerrado propio del continuo X, C una componente de A y $a \in C$. Por el teorema anterior, A es conexo entre a y su frontera $Fr(A)$. Por el Teorema 6.6, existe una componente K de A tal que $K \cap \{a\} \neq \emptyset \neq K \cap Fr(A)$ pero como C es una componente de A que contiene a a, se sigue que $K = C$. Por lo tanto $C \cap Fr(A) \neq \emptyset$. ■

Lema 6.9 *Sean X un continuo y A,B subconjuntos abiertos de X cuyas cerraduras son disjuntas. Entonces existe una componente C del conjunto $X \setminus (A \cup B)$ tal que $C \cap Fr(A) \neq \emptyset \neq C \cap Fr(B)$*

Demostración. Como A y B son conjuntos abiertos disjuntos, $\overline{A} \subset X \setminus B$, $\overline{B} \subset X \setminus A$ y el conjunto $A \cup B$ es abierto. Además se sabe que $Fr(U) = \overline{U} \setminus U$ si y sólo si U es abierto, de donde

$$\begin{aligned} Fr(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap (X \setminus (A \cup B)) \\ &= \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= \left(\overline{A} \cap ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))\right) \cup \left(\overline{B} \cap ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))\right) \\ &= \left(\overline{A} \cap X \setminus A\right) \cup \left(\overline{B} \cap X \setminus B\right) = \left(\overline{A} \setminus A\right) \cup \left(\overline{B} \setminus B\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Fr(X \setminus (A \cup B)) = Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B).$$

Por el Teorema 6.8, cada componente C de $X \setminus (A \cup B)$ cumple que

$$C \cap Fr(X \setminus (A \cup B)) = C \cap [Fr(A) \cup Fr(B)] \neq \emptyset.$$

Esto implica que $C \cap Fr(A) \neq \emptyset$ o $C \cap Fr(B)] \neq \emptyset$.

Denotemos por
$F_A = \{C|\, C$ es componente de $X \setminus (A \cup B)$ y $C \cap Fr(A) \neq \emptyset\ \}$ y por
$F_B = \{C|\, C$ es componente de $X \setminus (A \cup B)$ y $C \cap Fr(B) \neq \emptyset\ \}$.

Afirmamos que $F_A \cap F_B \neq \emptyset$.
Para demostrar la afirmación supongamos que $F_A \cap F_B = \emptyset$.

Consideremos $U = \overline{A} \cup \bigcup F_A$ y $V = \overline{B} \cup \bigcup F_B$. Notemos que U y V son distintos del vacío, $U \cap V = \emptyset$ y además $U \cup V = X$, pero esto no es posible pues X es conexo.

Entonces $F_A \cap F_B \neq \emptyset$, es decir, existe una componente C de $X \setminus (A \cup B)$ tal que $C \cap Fr(A) \neq \emptyset \neq C \cap Fr(B)$ que es lo que se quería demostrar. ■

Lema 6.10 *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de arcos que converge a un arco* A *en un dendroide* X*, y* $[p,q]$ *un subarco de* A*, entonces existen dos subsucesiones de puntos* $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *y* $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$*, con* $p_{n_k}, q_{n_k} \in A_{n_k}$ *convergiendo a* p *y* q *respectivamente tal que la sucesión de subarcos* $\{[p_{n_k}, q_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$ *convergen al arco* $[p,q]$

Demostración. Primero se demostrará que bajo las condiciones del lema, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > N$ existen puntos $p_n \in \overline{B_\epsilon(p) \cap A_n}$ y $q_n \in \overline{B_\epsilon(q) \cap A_n}$ tales que el arco $[p_n, q_n] \subset \overline{N(\epsilon, [p,q])}$.

Llamemos a, b a los puntos extremos del arco A y sea $\epsilon > 0$. Podemos suponer que $a \leq p < q \leq b$, donde $\leq$ es el orden de recorrer el arco $[a,b]$ desde a hasta b.

Hagamos $\epsilon_0 = \frac{1}{3} min\, \{\epsilon, diam\, [p,q]\}$.

Los conjuntos $[a,p] \setminus B_{\epsilon_0}(p)$, $[p,q] \setminus (B_{\epsilon_0}(p) \cup B_{\epsilon_0}(q))$, $[q,b] \setminus B_{\epsilon_0}(q)$ son cerrados y disjuntos, entonces por la normalidad de X, podemos encontrar conjuntos abiertos V_a, V_{pq}, V_b, cuyas cerraduras son disjuntas, además podemos suponer que $V_{pq} \subset N(\epsilon_0, [p,q])$.

Ahora hagamos

$$U_0 = V_a \cup B_{\epsilon_0}(p),$$
$$U_1 = V_{pq} \cup B_{\epsilon_0}(p) \cup B_{\epsilon_0}(q),$$
$$U_2 = V_b \cup B_{\epsilon_0}(q)$$

y finalmente

$$U = U_0 \cup U_1 \cup U_2.$$

Como U es un abierto tal que $[a,b] \subset U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > N$ se tiene que $A_n \subset U$. Como A_n es conexo y además $U_0 \cap A_n$ y $U_2 \cap A_n$ son abiertos cuyas cerraduras son disjuntas, por el lema anterior, existe una componente $C_n \subset A_n \setminus (U_0 \cap A_n) \cup (U_2 \cap A_n)$ tal que

$$C_n \cap Fr(U_0 \cap A_n) \neq \emptyset \neq C_n \cap Fr(U_2 \cap A_n).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean p_n, q_n puntos tal que $p_n \in C_n \cap Fr(U_0 \cap A_n)$ y $q_n \in C_n \cap Fr(U_2 \cap A_n)$.
Tenemos que $[p_n, q_n] \subset C_n$ es un subarco de A_n, además

$$Fr(U_0 \cap A_n) \subset \overline{B_{\epsilon_0}(p)} \text{ y } Fr(U_2 \cap A_n) \subset \overline{B_{\epsilon_0}(q)}$$

entonces $p_n \in \overline{B_{\epsilon_0}(p)} \cap A_n$ y $q_n \in \overline{B_{\epsilon_0}(q)} \cap A_n$ que es lo que se quería demostrar.

Ahora para cada k hacemos $\epsilon = 1/k$ y denotemos por n_k el menor de los números n que satisface:
i) $p_n \in \overline{B_{\epsilon_0}(p)} \cap A_n$
ii) $q_n \in \overline{B_{\epsilon_0}(q)} \cap A_n$
iii) $[p_n, q_n] \subset \overline{N(\epsilon_0, [p, q])}$
lo que nos da los puntos p_{n_k}, q_{n_k} tal que $Lim\ [p_{n_k}, q_{n_k}] = [p, q]$, es decir, $[p_{n_k}, q_{n_k}] \subset \overline{N(\epsilon_0, [p, q])}$. Para ver que $[p, q] \subset N(\epsilon, [p_{n_k}, q_{n_k}])$, se puede retomar la demostración del Lema 5.1 ■

El siguiente teorema que aparece en [13] es uno de los teoremas principales de esta sección

Teorema 6.11 *Un dendroide X no es de tipo N si y sólo si para cada arco de X la intersección de todos sus conjuntos de doblez es distinta del vacío.*

Demostración. Sea X un dendroide que no es de tipo N, probaremos que para cada arco de X la intersección de todos sus conjuntos de doblez es distinta del vacío.

Supongamos que existe un arco $A = [p, q] \subset X$ y B_1, B_2 conjuntos de doblez de A tales que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad que para cada par de puntos $a_0 \in B_1$ y $b_0 \in B_2$ se tiene que

$$a_0 \in [p, b_0] \tag{12}$$

(tomando en cuenta $p \leq a_0 < b_0$).

Por definición de conjunto de doblez, existen sucesiones de continuos A_n, A'_n, D_n, D'_n tales que:

$$A_n \cap A'_n \neq \emptyset \neq D_n \cap D'_n \tag{13}$$

$$Lim\ A_n = Lim\ A'_n = [p, q] = Lim\ D_n = Lim\ D'_n \tag{14}$$

$$Lim\ (A_n \cap A'_n) = B_1 \text{ y } Lim\ (D_n \cap D'_n) = B_2. \tag{15}$$

Por (12) tenemos que $p \in A \setminus B_2$ pues $a_0 \in [p, b_0]$ para cada $a_0 \in B_1$ y $b_0 \in B_2$. De (14) tenemos que existen sucesiones de puntos $p_n \in D_n \setminus D'_n$ y $p'_n \in D'_n \setminus D_n$ tales que $p = Lim\ p_n = Lim\ p'_n$.

Como X es un dendroide, utilizando el Corolario 6.3, existe un punto $a \in B_2$ y una sucesión de puntos $a_{n_k} \in [p_{n_k}, p'_{n_k}]$ con $Lim\ a_{n_k} = a$ y $[p_{n_k}, p'_{n_k}] \subset D_{n_k} \cup D'_{n_k}$.

Tomando una subsucesión si es necesario, asumimos que la sucesión de arcos $\{[p_{n_k}, p'_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente.

Hagamos $Lim\ [p_{n_k}, p'_{n_k}] = [p, x] \subseteq [p, q]$ y notemos que $[p, a] \subset [p, x]$. Como $a_0 \in [p, b_0]$ para cada $a_0 \in B_1$ y $b_0 \in B_2$ y dado que $a \in B_2$ tenemos que $x \in A \setminus B_1$, por (14) y (15) existen dos sucesiones de puntos $x_n \in A_n \setminus A'_n$ y $x'_n \in A'_n \setminus A_n$ tales que $x = Lim\ x_n = Lim\ x'_n$.

Usando nuevamente el Corolario 6.3, obtenemos una sucesión de puntos $y_{n_j} \in [x_{n_j}, x'_{n_j}] \cap (A_{n_j} \cap A'_{n_j})$ tal que $Lim\ y_{n_j} = y \in B_1$.

Supongamos como anteriormente que, $Lim\,[x_{n_j}, x'_{n_j}] = [u, z]$ y notemos que $u \in [p, y] \subset [p, a] \subset [p, x]$ y $[u, x] \subset [u, z]$ de donde $u \neq x$.

Ahora como $Lim\,[p_{n_k}, p'_{n_k}] = [p, x]$ podemos tomar una sucesión de puntos $x^-_{n_k} \in [p_{n_k}, p'_{n_k}]$ que convergen a x y considerando las dos sucesiones de arcos $\left\{[p_{n_k}, x^-_{n_k}]\right\}_{k=1}^{\infty}$ y $\left\{[x^-_{n_k}, p'_{n_k}]\right\}_{k=1}^{\infty}$, se tiene que

$$Lim\,[p_{n_k}, x^-_{n_k}] = [p, x] = Lim\,[x^-_{n_k}, p'_{n_k}]$$

y $[p_{n_k}, x^-_{n_k}] \cap [x^-_{n_k}, p'_{n_k}] = \left\{x^-_{n_k}\right\}$, de donde $\{x\}$ es un conjunto de doblez del arco $[p, x]$.

Como $u \in [p, x]$ y $u \neq x$, tenemos que $u \in [p, x] \setminus \{x\}$, podemos utilizar nuevamente el Corolario 6.3 para obtener sucesiones de puntos $u_{n_k} \in [p_{n_k}, x^-_{n_k}]$, $u'_{n_k} \in [x^-_{n_k}, p'_{n_k}]$ tales que $Lim\ u_{n_k} = Lim\ u'_{n_k} = u$ y además $x^-_{n_k} \in [u_{n_k}, u'_{n_k}]$.

Ahora vamos a demostrar que existe una subsucesión de subarcos de los arcos $[u_{n_k}, u'_{n_k}]$ y puntos extremos los cuales tienden a u mientras algunos puntos intermedios tienden a x.

Si $Lim\,[u_{n_k}, u'_{n_k}] = [u, x]$ entonces lo que queremos ya está demostrado.

En otro caso, para cada k, consideremos

$$[u_{n_k}, u'_{n_k}] = [u_{n_k}, x^-_{n_k}] \cup [x^-_{n_k}, u'_{n_k}]$$

y tenemos que $Lim\,[u_{n_k}, x^-_{n_k}] \neq [u, x]$ o $Lim\,[x^-_{n_k}, u'_{n_k}] \neq [u, x]$.

(Dado que $Lim\ u_{n_k} = Lim\ u'_{n_k} = u$ y $Lim\ x^-_{n_k} = x$).

Supongamos que $Lim\,[u_{n_k}, x^-_{n_k}] \neq [u, x]$, si $[u, x] \subset Lim\,[u_{n_k}, x^-_{n_k}]$, usando el Lema 6.10 obtenemos una sucesión de subarcos $[u''_{n_k}, x''_{n_k}]$ de $[u_{n_k}, x^-_{n_k}]$ que convergen al arco $[u, x]$ con $Lim\ u''_{n_k} = u$ y $Lim\ x''_{n_k} = x$, notemos que los puntos $x^-_{n_k}$ pueden ser tomados como los puntos x''_{n_k} para cada k, entonces podemos denotar por $[u''_{n_k}, x^-_{n_k}]$ a los subarcos de $[u_{n_k}, x^-_{n_k}]$.

También podemos suponer que $Lim\,[x^-_{n_k}, u'_{n_k}] \neq [u, x]$.
De manera análoga si $Lim\,[x^-_{n_k}, u'_{n_k}] \neq [u, x]$, podemos encontrar una subsucesión de subarcos de $[x^-_{n_k}, u'_{n_k}]$ que convergen a $[u, x]$.

Ahora hagamos $[u'_{n_k}, u''_{n_k}] = [u'_{n_k}, x^-_{n_k}] \cup [x^-_{n_k}, u''_{n_k}]$, tenemos una sucesión de arcos $[u'_{n_k}, u''_{n_k}]$ tal que:

$$\begin{gathered} Lim\,[u'_{n_k}, u''_{n_k}] = [u, x], \\ Lim\ u'_{n_k} = Lim\ u''_{n_k} = u \text{ y} \\ Lim\ x^-_{n_k} = x \text{ y } x^-_{n_k} \in [u'_{n_k}, u''_{n_k}] \text{ para cada } k. \end{gathered}$$

De la misma manera para la sucesión de arcos $[x_n, x'_n]$ podemos elegir una subsucesión de arcos $[x^*_n, x^{**}_n] \subset [x_n, x'_n]$ tal que:

$$\begin{gathered} Lim\,[x^*_n, x^{**}_n] = [u, x], \\ Lim\ x^*_{n_k} = Lim\ x^{**}_{n_k} = x, \text{ y} \\ Lim\ u_{n_k} = u \text{ y } u_{n_k} \in [x^*_{n_k}, x^{**}_{n_k}] \text{ para cada } k, \end{gathered}$$

por las condiciones anteriores tenemos que X es de tipo N entre u y x. Esto contradice la suposición inicial de que X no es de tipo N y demuestra que para cada arco, la intersección de sus conjuntos de doblez es distinta del vacío.

Ahora supongamos que para cada arco de X la intersección de todos sus conjuntos de doblez es no vacía. Vamos a demostrar que X no es de tipo N.

Supongamos que X es de tipo N, entonces existe un arco A con puntos extremos p, q y dos sucesiones de arcos A_n, A'_n con puntos extremos p_n, p'_n y q_n, q'_n respectivamente y puntos $p''_n \in A_n \setminus \{q_n, q'_n\}$ y $q''_n \in A'_n \setminus \{p_n, p'_n\}$ tales que se cumplen las siguientes condiciones:
i) $A = Lim\ A_n = Lim\ A'_n$,
ii) $p = Lim\ p_n = Lim\ p'_n = Lim\ p''_n$ y
iii) $q = Lim\ q_n = Lim\ q'_n = Lim\ q''_n$

De donde $\{p\}$ y $\{q\}$ son conjuntos de doblez, además $\{p\} \cap \{q\} = \emptyset$. Esto contradice la hipótesis. ■

Observación. De la sección anterior tenemos que la propiedad de intersección doblada no es equivalente a no ser de tipo N (ver Ejemplo 4.6) o dicho en otros términos, no es equivalente a decir que para cada arco la intersección de sus conjuntos de doblez es distinta del vacío.

A continuación veremos algunos casos particulares en donde no ser de tipo N, con una condición adicional implica tener la propiedad de intersección doblada, y como corolario se verá que no ser de tipo N y la propiedad de intersección doblada son equivalentes en abanicos localmente conexos en el vértice (ver [1]).

Definición 6.12 *Un espacio X se dice que es* localmente conexo en *x, si para cada abierto U que contiene a x, existe un abierto conexo V que contiene a x y que está contenido en U. Se dice que X* es localmente conexo *si es localmente conexo en todos sus puntos.*

Ejemplo 6.13 *La curva sinoidal del topólogo es un espacio conexo que no es localmente conexo en ningún punto del segmento $\{0\} \times [-1, 1]$.*

Definición 6.14 *Un espacio X se dice que es* conexo en pequeño en el punto *x si para cada abierto U de x existe una vecindad conexa V de x que está contenida en U.*

Se sabe que si un conjunto es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos entonces es localmente conexo. (ver [15, Ejercicio 5.22,(b)])

Teorema 6.15 *Sean X un espacio topologico y $A_1, A_2 \subset X$ subconjuntos localmente conexos, entonces $A_1 \cup A_2$ es localmente conexo.*

Demostración. Para demostrarlo probaremos que $A_1 \cup A_2$ es conexo en pequeño en todos sus puntos.

Sea $x \in A_1 \cup A_2 \setminus A_1 \cap A_2$, debe ocurrir que $x \in A_1$ o $x \in A_2$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in A_1$, el cual por hipótesis es localmente conexo, de donde para cada abierto U que contiene a x existe un abierto conexo V que contiene a x y está contenido en U, en particular V es una vecindad conexa.

Ahora si $x \in A_1 \cap A_2$ y $U \subset A_1 \cup A_2$ es un abierto que contiene a x, tenemos que $W_1 = U \cap A_1$, $W_2 = U \cap A_2$ son abiertos en A_1 y A_2 respectivamente.

Por hipótesis existen abiertos V_1, V_2 de x que son conexos.
Notemos que $x \notin \overline{W_i \setminus V_i}$ para $i = 1, 2$, de donde

$$x \notin \overline{W_1 \setminus V_1} \cup \overline{W_2 \setminus V_2} = \overline{W_1 \setminus V_1 \cup W_2 \setminus V_2}.$$

Además

$$\begin{aligned}
(W_1 \setminus V_1) \cup (W_2 \setminus V_2) &\supset [W_1 \setminus (V_1 \cup V_2)] \cup [W_2 \setminus (V_1 \cup V_2)] \\
&= [W_1 \cup W_2] \setminus (V_1 \cup V_2) \\
&= [(U \cap A_1) \cup (U \cap A_2)] \setminus (V_1 \cup V_2) \\
&= [U \cap (A_1 \cup A_2)] \setminus (V_1 \cup V_2) \\
&= U \setminus (V_1 \cup V_2)
\end{aligned}$$

De aquí, se tiene que $x \notin \overline{U \setminus (V_1 \cup V_2)}$, es decir, existe un abierto G de x tal que $G \cap [U \setminus (V_1 \cup V_2)] = \emptyset$, entonces $G \subset (V_1 \cup V_2)$ y además, como $(V_1 \cup V_2)$ es conexo, $(V_1 \cup V_2)$ es una vecindad conexa de x. Por lo tanto $A_1 \cup A_2$ es conexo en pequeño. ■

Para los próximos resultados usaremos la siguiente notación:
$L(X) = \{x \in X |\, X \text{ es localmente conexo en } x\}$
$R(X) = \{x \in X |\, x \text{ es punto de ramificación de } X\}$
$\mathbb{A} = \{A \in C(X) |\, A \text{ es un arco en } X\}$

Lema 6.16 *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Sean $K \in C(X) \setminus F_1(X)$ y B un conjunto de doblez de K, entonces $K \cap L(X) \subset B$.*

Demostración. Sea $K \in C(X) \setminus F_1(X)$ y supongamos que B es conjunto de doblez de K, tal que $[K \cap L(X)] \setminus B \neq \emptyset$.

Sean $v \in [K \cap L(X)] \setminus B \subset K \setminus B$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones que satisfacen las condiciones de conjunto de doblez, entonces, por el Lema 6.2, para cada par de sucesiones $v_n \in A_n \setminus A'_n$, $v'_n \in A'_n \setminus A_n$ con $Lim\ v_n = v = Lim\ v'_n$, existe un punto $b \in B$ y puntos $b_{n_k} \in A_{n_k} \cap A'_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $Lim\ b_{n_k} = b$ y $b_{n_k} \in I(v_n, v'_n)$, donde $I(v_n, v'_n)$ es el único continuo irreducible entre v_n y v'_n.

Por otra parte, como $v \in K \cap L(X) \setminus B$ existe un abierto y conexo W que contiene a v tal que $\overline{W} \cap B = \emptyset$. Dado que $Lim\ v_n = v = Lim\ v'_n$ y $Lim\ b_{n_k} = b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$, $b_{n_k} \notin \overline{W}$ y $v_n, v'_n \in W$. Notemos que $\overline{W}$ es un subcontinuo de un continuo hereditariamente unicoherente que contiene a v_n y a v'_n. Sea $\mathbb{I}_{n_k}$ el irreducible en $\overline{W}$ que contiene a $v_n \in$ y v'_n, por estar contenido en $\overline{W}$, $\mathbb{I}_{n_k}$ no contiene a b_{n_k}, es decir, $\mathbb{I}_{n_k} \neq I(v_n, v'_n)$, esto contradice que $I(v_n, v'_n)$ es el único continuo irreducible entre v_n y v'_n. Por la tanto $K \cap L(X) \subset B$. ■

Teorema 6.17 *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si para cada $K \in C(X) \setminus (\mathbb{A} \cup F_1(X))$, $K \cap L(X) \neq \emptyset$ y para cada $A \in \mathbb{A}$ la intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía entonces X tiene la propiedad de intersección doblada.*

Demostración. Como cada $K \in C(X) \setminus (\mathbb{A} \cup F_1(X))$ satisface que $K \cap L(X) \neq \emptyset$, por el Lema 6.16, cada conjunto de doblez B de K contiene a $K \cap L(X)$, por lo tanto, la intersección de los conjuntos de doblez de K es no vacía. Como para cada $A \in \mathbb{A}$, la intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía se tiene que X tiene la propiedad de intersección doblada. ■

Corolario 6.18 *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si para cada $K \in C(X) \setminus (\mathbb{A} \cup F_1(X))$, $K \cap L(X) \neq \emptyset$ y X no es de tipo N, entonces X tiene la propiedad de intersección doblada.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 6.11 y 6.17. ■

Corolario 6.19 *Sea X un dendroide, si $R(X) \subset L(X)$ y X no es de tipo N, entonces X tiene la propiedad de intersección doblada*

Demostración. Como X no es de tipo N, por el Teorema 6.11, para cada $A \in \mathbb{A}$, la intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía.

Falta demostrar que para todo $K \in C(X) \setminus (\mathbb{A} \cup F_1(X))$, la intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía. Dado que $K \notin \mathbb{A} \cup F_1(X)$ entonces K debe contener un triodo simple, es decir, $\emptyset \neq K \cap R(X)$, por lo que $K \cap L(X) \neq \emptyset$. Así, por el Lema 6.16 la intersección de sus conjuntos de doblez es distinta del vacío.

Por lo tanto X tiene la propiedad de intersección doblada. ■

Corolario 6.20 *Sea X un abanico localmente conexo en el vértice, si X no es de tipo N entonces tiene la propiedad de intersección doblada.*

Demostración. Se sigue del Corolario anterior ya que por hipótesis $R(X) = v = L(X)$ ■

$Q-$puntos

En esta parte introducimos el concepto de $Q-$punto, el cual fue definido por Graham en [9] para dar una caracterización de abanicos contraibles. Primero mostraremos que si un abanico no es de tipo N y no tiene $Q-$puntos entonces tiene la propiedad de intersección doblada.

Definición 6.21 *Sea p un punto en un dendroide X, p es llamado $Q-$*punto*, si existe una sucesión de puntos $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ en X convergiendo a p, tal que Lim sup $[p, p_i] \neq \{p\}$ y si $[p_i, q_i]$ denota el arco irreducible entre p_i y Lim sup $[p, p_i]$, se sigue que la sucesión $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a p.*

Ejemplo 6.22 *Tomemos el Ejemplo* 4.6*, notemos que la sucesión $\{a_{3n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto a, el Lim sup $[a, a_{3n+1}] = pa \cup pb \cup pc$ y si $[p_n, a_{3n+1}]$ denota el arco irreducible entre a_{3n+1} y Lim sup $[a, a_{3n+1}]$ tenemos que $p_n = a$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de donde la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto a, en consecuencia a es un $Q-$punto.*

En este mismo ejemplo, la sucesión $\{c_{3n}\}_{n=1}^{\infty}$ *converge al punto* c*, el* $Lim\ sup\ [c, c_{3n}] = pa \cup pb \cup pc$ *y si* $[p_n, c_{3n}]$ *denota el arco irreducible entre* c_{3n} *y* $Lim\ sup\ [c, c_{3n}]$ *tenemos que* $p_n = a$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*, de donde la sucesión* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge al punto* a*, en consecuencia* c *no es un* $Q-$*punto.*

Teorema 6.23 *Sea* X *un dendroide, supongamos que* X *es localmente conexo en cada punto de* $Cl_X(R(X))$*, donde* Cl_X *denota la cerradura en* X*. Entonces* X *no contiene* $Q-$*puntos.*

Demostración. Supongamos que existe p un $Q-$punto de X.
Tomemos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ como en la definición de $Q-$punto y sea $L = Lim\ sup\ [p, p_n]$. Notemos que L es un subcontinuo de X y afirmamos que L no es un arco.

Para demostrarlo supongamos que L es un arco, tomemos U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$, $Cl_X(U)$ contiene a los más un punto extremo de L y además $Cl_X(U)$ no contiene puntos de ramificación.

Si existe $N \geq 1$ tal que $p_n \in L$ ó $pp_n \subset U$ para cada $n \geq N$, tomemos V un subconjunto abierto tal que $p \in V \subset U$ y $V \cap L$ es conexo. Sea $M \geq 1$ tal que para cada $n \geq M$, $p_n \in V$, entonces se tiene que $[p, p_n] \subset V$, esto implica que $L = Lim\ sup\ [p, p_n] \subset Cl_X(U)$ lo cuál contradice la elección de U. Entonces no puede pasar que $p_n \in L$ o $[p, p_n] \subset U$ para toda n.

Por tanto existe una subsucesión de índices $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $q_{n_k} \in U$, $p_{n_k} \notin L$ y $[p, p_{n_k}] \notin U$ para cada $k \geq 1$. Para $k \geq 1$, q_{n_k} no es punto de ramificación por la elección de U, $q_{n_k} \in L$ y $[p_{n_k}, q_{n_k}] \cap L = q_{n_k}$ por la definición de $Q-$punto, lo cual implica que q_{n_k} es un punto extremo de L y $q_{n_k} = p$ para cada $k \geq 1$.

Pero esto implica que p es un punto de ramificación, lo cual no es posible por la elección de p. Por lo tanto L no es un arco.

Se tiene que L es un dendroide entonces contiene un punto de ramificación a, notemos que $p \neq a$.

De esta manera existen puntos $b, c \in L \setminus \{a\}$ tal que la intersección de los subarcos $[b, a], [c, a]$ y $[p, a]$ dos a dos, es el conjunto $\{a\}$, dado que $b \in Lim\ sup\ [p, p_n]$ existe una subsucesión $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y puntos $b_k \in [p, p_{n_k}]$ tal que $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a b y podemos suponer que la sucesión $\{[p_{n_k}, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un subcontinuo R de X y notemos que $[p, b] \subset R$.

Dado que $a \in [p, b]$ existe una subsucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos tal que para $k \geq 1$, $a_k \in [p_{n_k}, b_k]$ y $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a a, sean V y W vecindades disjuntas de a y b respectivamente tal que $W \cap [a, p] = \emptyset$.

Tomemos $k \geq 1$, tenemos que $a_k \in V$ y $b_k \in W$. Como X es localmente conexo en cada punto de $Cl(R(X))$, existe V' abierto conexo tal que $a_k \in V' \subset V$, así $[a, a_k] \subset V$.

Dado que $[p, p_{n_k}] \subset [p, a] \cup [a, a_k] \cup [a_k, p_{n_k}]$ tenemos que $b_k \notin [p, p_{n_k}]$ lo que nos lleva a una contradicción, ya que $b_k \in [p, p_{n_k}]$. Esta contradicción surgió de suponer que X tenía $Q-$puntos. ∎

Corolario 6.24 *Sea* X *un dendroide, si* $R(X)$ *es finito y* X *es localmente conexo en cada punto de* $R(X)$ *entonces* X *no tiene* $Q-$*puntos.*

Demostración. Se sabe que en espacios métricos, cada conjunto finito es cerrado. Como X es localmente conexo en cada punto de $R(X)$, el resultado se sigue del Teorema 6.23 ■Si X es un abanico se sigue que $R(X) = \{v\}$, entonces se tiene el siguiente corolario.

Corolario 6.25 *Sea X un abanico con vértice v, si X es localmente conexo en v entonces X no tiene $Q-$puntos.*

El siguiente lema fue dado por T. J. Lee en [12]

Lema 6.26 *Sea X un abanico con vértice v, si no tiene $Q-$puntos y si A es un subcontinuo de X que contiene a v entonces la intersección de todos los conjuntos de doblez de A contienen a v.*

Y lo utilizaremos para el siguiente resultado.

Teorema 6.27 *Si un abanico no contiene $Q-$puntos y no es de tipo N, entonces tiene la propiedad de intersección doblada*

Demostración. Por el Lema 6.26, si A es un subcontinuo de X que contiene a v, se tiene que la intersección de todos los conjuntos de doblez es no vacía, pues cada uno contiene a v. Ahora sólo hay que considerar subcontinuos que no contienen a v, como X es un abanico, si D es un subcontinuo tal que $v \notin D$ se tiene que D es un arco. Así, por el Teorema 6.11, y dado que X no es de tipo N se sigue que la intersección de sus conjuntos de doblez es distinta del vacío, por lo tanto X tiene la propiedad de intersección doblada. ■

Finalmente tenemos la siguiente caracterización en abanicos.

Teorema 6.28 *Sea X un abanico localmente conexo en el vértice. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X no es de tipo N*
2. *X no es de tipo N y no tiene $Q-$puntos*
3. *X tiene la propiedad de intersección doblada*
4. *X no es de tipo N generalizado*

Demostración.

(1) implica (2) Por hipótesis X no es de tipo N y localmente conexo en el vértice, por el Corolario 6.25 se tiene que X no contiene $Q-$puntos.

(2) implica (3) Se sigue del Teorema 6.27.

(3) implica (4) Supongamos que X es de tipo N generalizado por el Teorema 5.5, X no tiene la propiedad de intersección doblada, contradiciendo la hipótesis.

(4) implica (1) Si suponemos que X es de tipo N, del Teorema 5.4, X es de tipo N generalizado, lo cual es una contradicción. ■

7 Conclusiones

Los continuos de Tipo N son muy importantes en el estudio de espacios contraibles, existencia de retracciones de $C(X)$ sobre X, funciones promedio entre otras, por lo que es fundamental un estudio básico de esta clase de continuos dentro de la Teoría de Continuos, en otras palabras, es necesario saber como esta propiedad se relaciona con otras semejantes a ellas, incluso saber si hay equivalencias con otras más. Además este estudio permite generar uno mismo los propios ejemplos o resultados que ayuden a reponder a preguntas generadas en la literatura.

References

[1] F. Capulín, *Distintas funciones entres continuos y sus hiperespacios*, Tesis Doctoral. UNAM. 2006

[2] F. Capulín and W. J. Charatonik, *Retractions from C(X) onto X and continua of type N*, Houston journal of mathematics, Vol. 33, N 1, 2007, págs.261-272

[3] F. Capulín, Alejandro Illanes, Fernando Orozco-Zitli, Pavel Pyrih and Isabel Puga-Espinosa, *Q-Points in Fans* (Por aparecer)

[4] J. Carrut, *A note on partially ordered compacta*, Pacific. J. Math. 24 (1968) págs. 229-231.

[5] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluent mappings of fans* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 301 (1990),págs. 1-86

[6] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, K. Omiljanowski And J. R. Prajs, *Hyperspace retractions for curves*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 370 (1997), págs.134.

[7] J. J. Charatonik and A. Illanes, *Bend sets, N-sequences and mappings*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2004 (2004), Issue 55, págs. 2927-2936.

[8] S. T. Czuba, *A new class of non-contractible continua*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI (Prague,1986), Proceedings Sixth Prague Topological Symposium 1986; Z. Frolik (ed.), R & E Res. Exp. Math., 16, Heldermann, Berlin, 1988, págs. 121-123.

[9] B. G. Graham, *On contractible fans*, Fund. Math. 111 (1981), págs.77-93.

[10] A. Illanes, *Modelos de hiperespacios*,Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios, Aportaciones matemáticas, SMM, 2006, págs. 153-194.

[11] K. Kuratowski, *Topology, Vol 2*, Acad. Press and PWN,1968.

[12] T. J. Lee, *Every contractible fan has the bend intersection property*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astrom. Phys. Vol 36(1998), págs. 314-417.

[13] T. J. Lee, *Bend intersection property and dendroids of type N*, Period. Math. Hungar. 23 (1991), págs. 121-127.

[14] T. Maćkowiak, *continuous selections for C(X)*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astrom. Phys. Vol 26 (1978), págs. 547-551

[15] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory*, M. Dekker, New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[16] L. G. Oversteegen, *Non-contractibility of continua*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astrom. Phys. Vol 26. No. 9,10(1978), págs.837-840.

[17] L. G. Oversteegen, *Internal characterizations of contractibility for fans*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astrom. Phys. Vol 27. No. 5(1979), págs.391-395.

[18] L. G. Oversteegen, *Every contractible fan is locally connected at vertex*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 260. No 2 (1980), págs. 379-402.