Universidad Autónoma de Estado de México
Facultad de Economía
Maestría en Estudios Sustentables, Regionales y Metropolitanos

CONTEO EFICIENTE DE ELEMENTOS

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Universidad Autónoma de Estado de México
Facultad de Economía
Maestría en Estudios Sustentables, Regionales y Metropolitanos

Material didáctico	Visual
Título	Conteo Eficiente de Datos
Espacio Académico	Facultad de Economía-Arquitectura
Plan de estudios	Maestría en Estudios Sustentables, Regionales y Metropolitanos
Unidad de Aprendizaje	Estadística aplicada 1
Núcleo de formación	
Modalidad	Presencial
Tipo	Obligatoria

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Guion para el uso del juego de diapositivas

Este material se compone de 98 diapositivas para apoyar el desarrollo de la unidad de aprendizaje "Estadística Aplicada I" de la Maestría en Estudios Sustentables, Regionales y Metropolitanos cuyos contenidos temáticos corresponden al modulo III: "Métodos y Técnicas de la Estadística Básica"

1. Principios básicos de conteo.
2. Permutaciones.
3. Combinaciones.

Cada diapositiva se encuentra ordenada: el primer tema comprende las diapositivas de la 4 a la 45; el segundo de la 46 a la 73 y el tercero, de la 74 a 97.La Diapositiva 98 es la bibliografía

Principios Básicos de Conteo

- **Partición de un conjunto**
- **Principio de adición**
- **Principio de multiplicación**
- **Principio de inclusión exclusión**

Partición

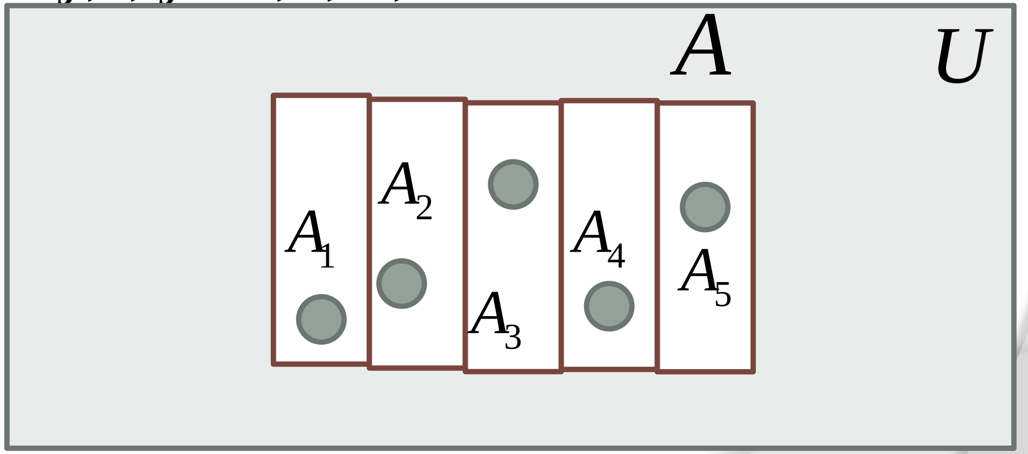
- Definición
- Recubrimiento
- Cardinal de un conjunto

Dado un conjunto A, sus subconjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, constituyen una partición del mismo si se cumplen las siguientes condiciones:

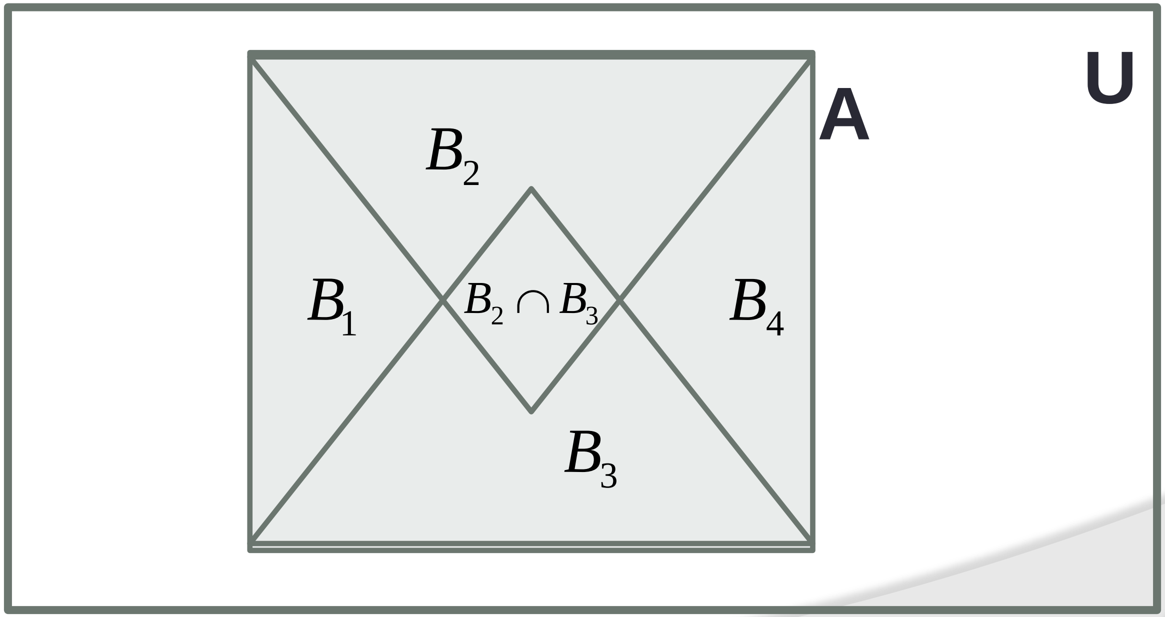
$1)\ A_i \neq \phi; \forall i = 1,2,\ldots,n$

$2)\ A_i \cap A_j = \phi; \forall i \neq j; i, j = 1,2,\ldots,n$

$3)\ \cup_{i=1}^{n} A_i = A$



Si los subconjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de un conjunto A cumplen las condiciones 1 y 3 de la definición anterior, diremos que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ constituyen un recubrimiento de A.



Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Si A es un conjunto finito no vacío, el cardinal de A es el número de elementos que tiene A. notación |A|.

Si A es el conjunto vacío, entonces su cardinal es cero.

$$A = \phi \Rightarrow |A| = 0$$

$$A = \{\phi\} \Rightarrow |A| = 1$$

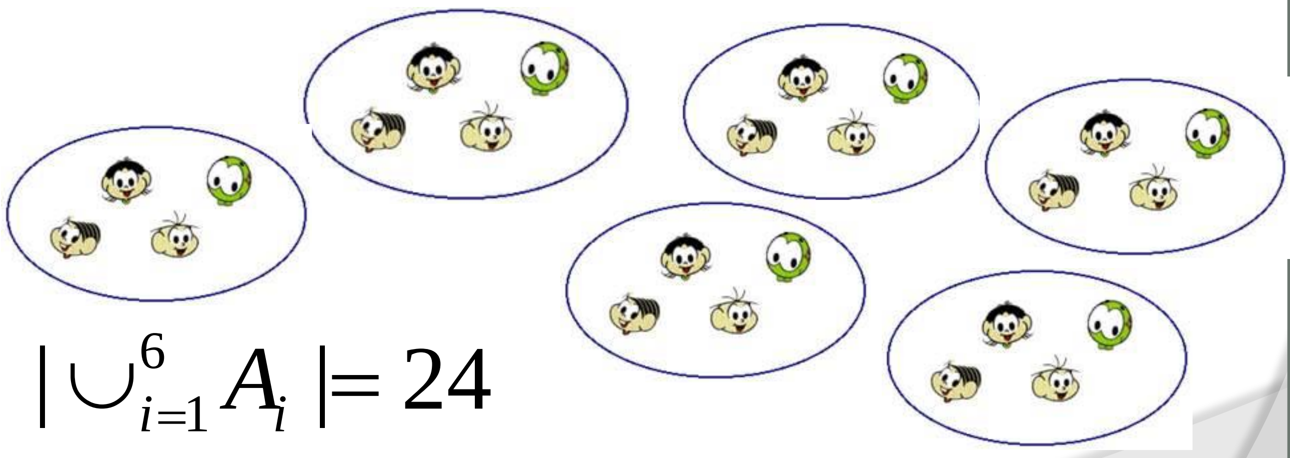
Princio de adición

[Teorema]

[Regla de la suma]

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, disjuntos dos a dos, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$



$$|\cup_{i=1}^{6} A_i| = 24$$

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Si una 1ª tarea puede realizarse de m formas distintas, mientras que una 2ª tarea puede realizarse de n formas distintas, y <u>no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea</u>, entonces, para llevar a cabo <u>cualquiera de ellas</u> pueden utilizarse:

$$\boxed{m + n}$$

Se lanza al aire una moneda cuatro veces. ¿De cuántas formas distintas pueden obtenerse una, dos, tres o cuatro caras?

Si una 1ª tarea puede realizarse de m formas distintas, mientras que una 2ª tarea puede realizarse de n formas distintas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse:

$$\boxed{m + n}$$

Sea A_i el conjunto formado por todos los resultados posibles en los que aparezcan, exactamente, "i soles" al lanzar cuatro veces la moneda. Entonces,

Designemos por s :"ocurre sol" y a :"ocurre águila"

$$A_1 = \{(s,a,a,a),(a,s,a,a),(a,a,s,a),(a,a,a,s),\}$$

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{l} (s,s,a,a),(s,a,s,a),(s,a,a,s),(a,s,s,a), \\ (a,s,a,s),(a,a,s,s) \end{array} \right\}$$

$$A_3 = \{(s,s,s,a),(s,s,a,s),(s,a,s,s),(a,s,s,s),\}$$

$$A_4 = \{(s,s,s,s)\}$$

y el conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ estará formado por todos los resultados en los que aparecen uno, dos, tres o cuatro soles, por tanto el número pedido es el cardinal de dicho conjunto.

Al ser los conjuntos, dos a dos, disjuntos, por el principio de adición, tendremos que habrá

$$|A_1| = 4; |A_2| = 6; |A_3| = 4; |A_4| = 1$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$$

Princio de multiplicación

- Teorema
- Regla de Del producto

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, entonces

$$|A_1 \mathrm{x} A_2 \mathrm{x} \cdots \mathrm{x} A_n| = |A_1| * |A_2| * \cdots * |A_n|$$

Si un procedimiento puede descomponerse en las etapas primera y segunda, y si existen m resultados posibles de la 1ª etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen n resultados posibles para la 2ª etapa, entonces todo el procedimiento puede realizarse, en el orden dado, de mn formas.

$$\boxed{m*n}$$

¿Cuántos resultados distintos son posibles al tirar tres dados diferentes?

Veamos dos resultados posible $(3,1,6);(1,6,3)$

Sean A_1, A_2 y A_3 los conjuntos formados por los posibles resultados que podamos obtener al tirar cada uno de los tres dados,

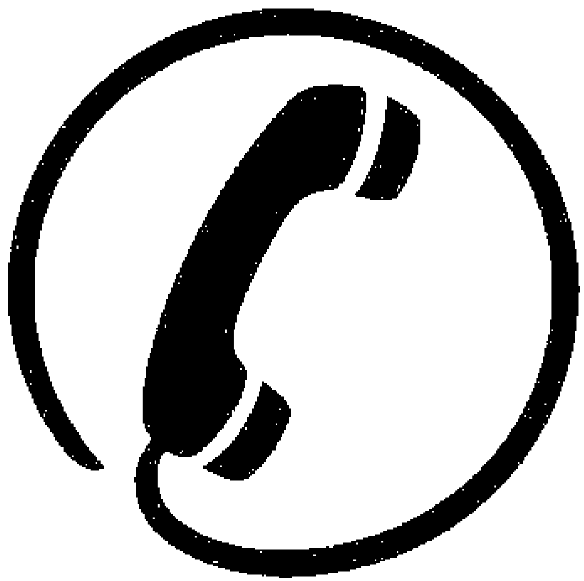
$\Rightarrow |A_i| = 6 \forall i = 1,2,3$ y cada resultado es un elemento del producto cartesiano $A_1 x A_2 x A_3$

luego por el principio de multiplicación, habrá

,

$$|A_1 x A_2 x A_3| = |A_1| * |A_2| * |A_3| = 6*6*6 = 216$$

Un número de teléfono consta de siete dígitos. Si el primero ha de ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive, el segundo y el tercero han de ser números entre 1 y 9 ambos inclusive. ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?



3-111-009

Sean los conjuntos y sus cardinales

$$A_1 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow |A_1| = 8$$

$$A_2 = A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow |A_2| = |A_3| = 9$$

$$A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow |A_4| = |A_5| = |A_6| = |A_7| = 10$$

Teléfonos con numeraciones distintas que pueden formarse son, por el principio de multiplicación,

$$A_1 \mathrm{x} A_2 \mathrm{x} A_3 \mathrm{x} A_5 \mathrm{x} A_6 \mathrm{x} A_7$$

$$|A_1 \mathrm{x} A_2 \mathrm{x} A_3 \mathrm{x} A_5 \mathrm{x} A_6 \mathrm{x} A_7| = |A_1| * |A_2| * |A_3| * |A_4| * |A_5| * |A_6| * |A_7|$$

$= 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
$= 6.480.000$

Se dispone de una baraja de 40 cartas de la cual extraemos 4 de dos formas diferentes:

a. Sin devolución de cada carta extraída.
b. Con devolución de la carta en cada extracción.

Calcular el número de formas diferentes de obtener 4 cartas en cada caso.

Consideraremos el experimento como una acción con cuatro pasos independientes.

a. 1er paso hay 40 opciones posibles y como la carta extraída no se devuelve quedarán 39 opciones para el segundo paso y, por la misma razón, 38 y 37 opciones para el tercero y el cuarto, respectivamente.

Así pues el experimento podrá hacerse de

$40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2{,}193{,}360$ formas distintas.

b. Cada carta extraída se devuelve a la baraja.

Por tanto, para cada una de las 4 extracciones dispondremos de las cuarenta cartas.

$$40 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 40 = 2{,}560{,}000$$

Se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo, a continuación se registra el resultado de cada tirada.

a. ¿En cuántos resultados la suma es 7 u 11?
b. ¿En cuántos resultados uno y sólo uno de los dados muestra un 2?
c. ¿En cuántos resultados ninguno de los dados muestra un 2?

Sean a y b los resultados de los dados azul y rojo, respectivamente.
Entonces, $a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}$ y el par (a, b) puede considerarse como un par ordenado.
Si A: "Pares ordenados cuya suma sea 7"
B: "Pares ordenados que suman 11"
Entonces A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}
B = {(5, 6), (6, 5)}
y $A \cup B$ es el número de resultados en los cuales la suma es 7 u 11 . Al ser A y B disjuntos, por el principio de adición, habrá

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 6 + 2 = 8$$

Sean

$$A_1 = \{2\}$$

$$B_1 = \{1,3,4,5,6\}, \text{ y}$$

$$A_2 = \{1,3,4,5,6\}$$

$$B_2 = \{2\}$$

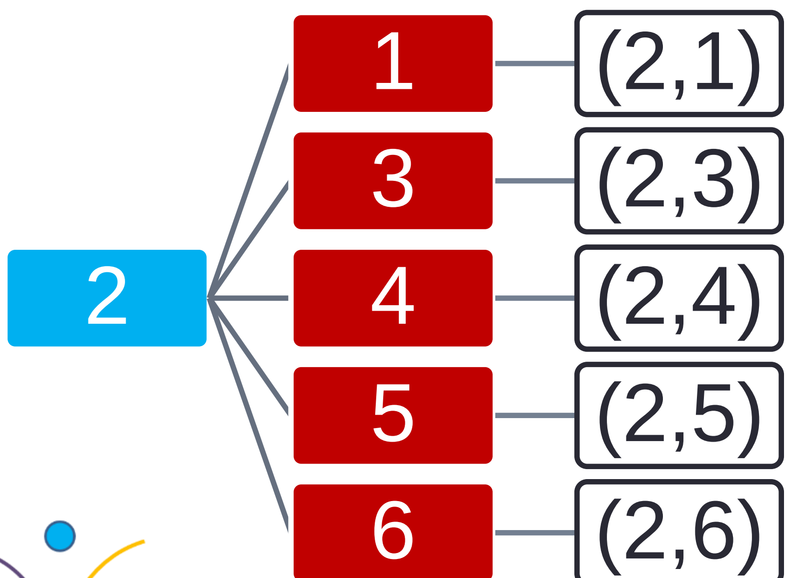
$\therefore A_i$ y B_i : representan, respectivamente, los resultados de los dados azul y rojo. Entonces, todos los resultados en los cuales aparece un 2 en uno sólo de los dados, son los elementos del conjunto $(A_1 \text{ x } B_1) \cup (A_2 \text{x} B_2)$

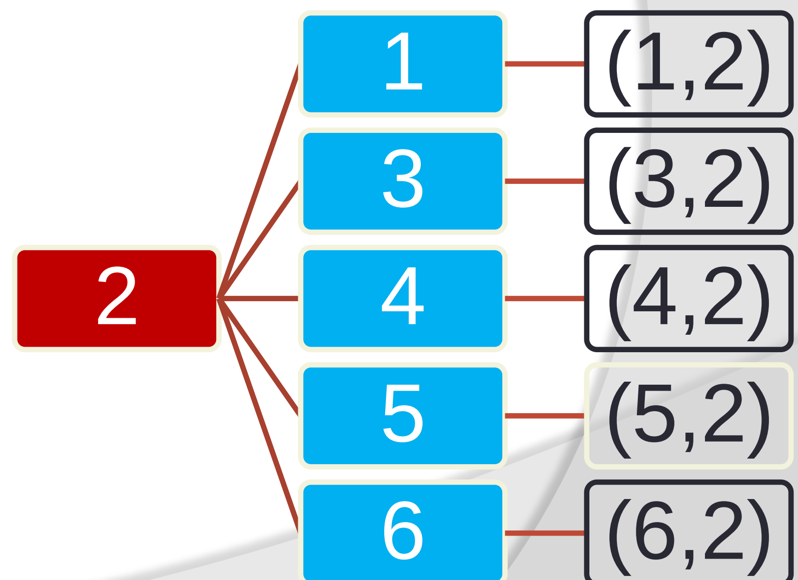
Siendo $A_1 \text{ x } B_1$ y $A_2 \text{x} B_2$ disjuntos.

Consecuentemente, por el principio de adición y luego por el de multiplicación tendremos que el número de resultados en los que uno sólo de los dados muestra un 2 es

$$|(A_1 \text{ x } B_1) \cup (A_2 \text{x} B_2)| = |A_1|*|B_1| + |A_2|*|B_2||$$

$$= (1*5) + (5*1) = 10$$





Utilizando los mismos conjuntos que en el apartado anterior, los resultados en los que ninguno de los dos dados muestra un 2 son los elementos de A2 ×B1. Por el principio de multiplicación, habrá

$$|(A_2 \text{ x } B_1)| = |A_2| * |B_1|$$
$$= 5 * 5 = 25$$

resultados que cumplen la condiciones pedidas.

Princio de Inclusión exclusión

- Teorema 1
- Teorema 2
- Generalización del principio

El principio de adición establece que si X es la unión de una colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **disjuntos dos a dos**, entonces

$$|X| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

En muchas ocasiones, necesitaremos calcular el numero de elementos de un conjunto X que es la unión de una colección de conjuntos que **no sean disjuntos**

El **principio de inclusión-exclusión** nos dice como hacerlo …

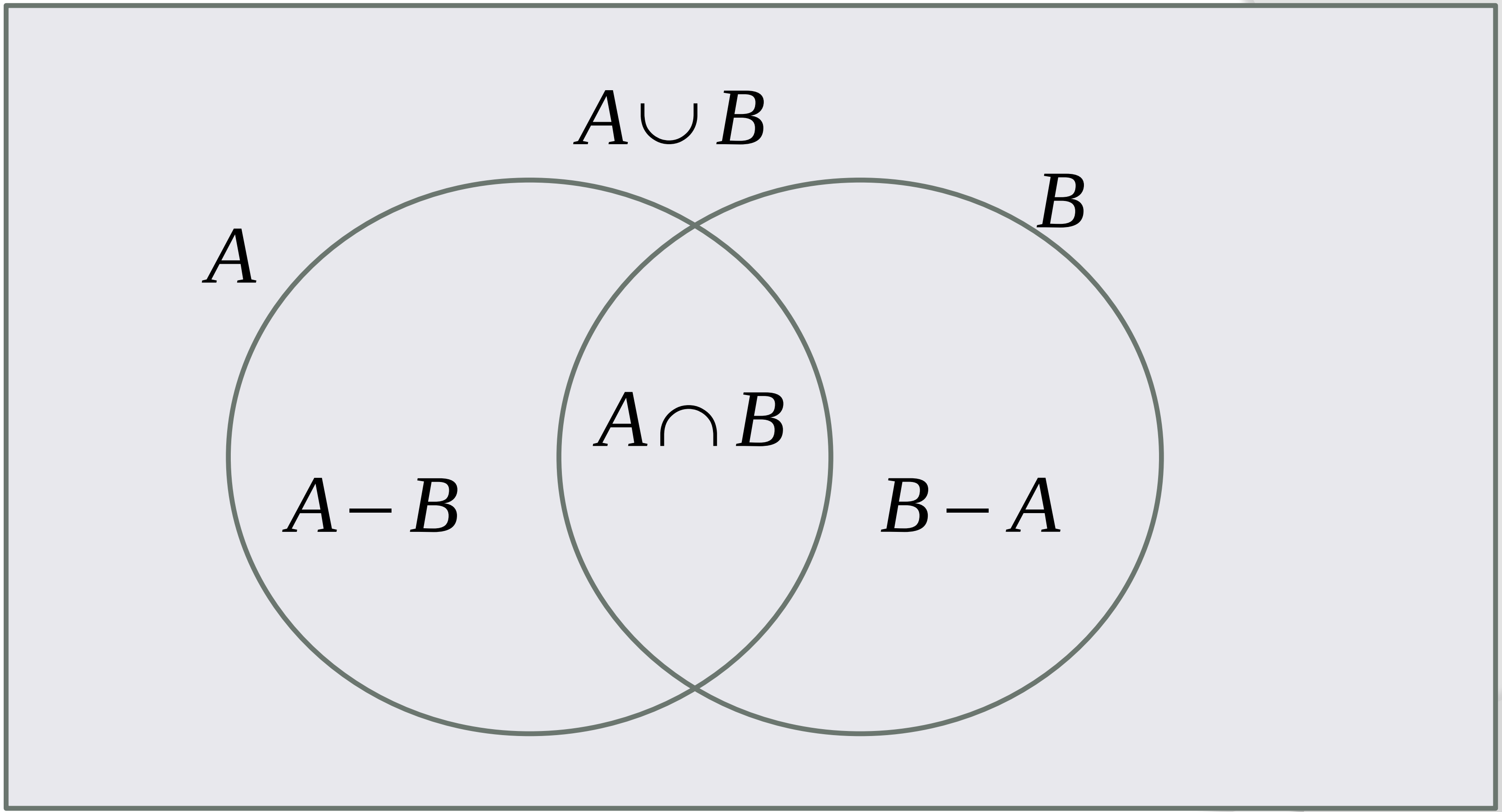
Principio: si sabemos contar elementos de intersecciones de conjuntos, entonces podremos determinar el tamaño de la unión de dichos conjuntos.

Teorema

Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto universal arbitrario, U. Entonces,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Principio de inclusión-exclusión



Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

De un grupo de profesionistas, 35 están familiarizados con la estadística descriptiva, 41 con la estadística inferencial y 46 con alguna de las dos. ¿Cuántos están familiarizados con ambos?

Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de todos los profesionistas y sean A y B los subconjuntos de $\mathscr{P}$ formados por los que están familiarizados con la estadística descriptiva y con la estadística inferencial, respectivamente. Los que lo están con ambas son, por tanto, los del conjunto $A \cap B$. Según los datos del enunciado,

$$|A| = 35$$

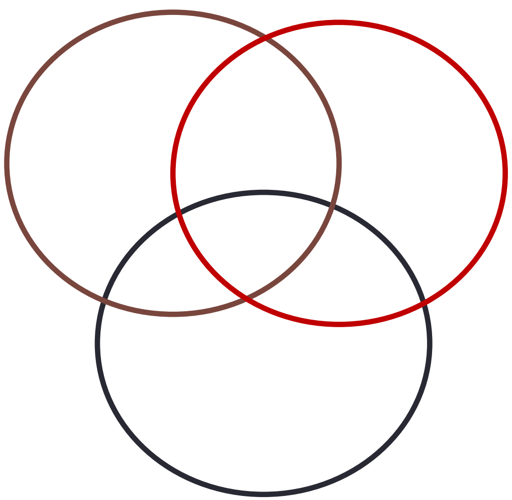
$$|B| = 41$$

$$|A \cap B| = 46$$

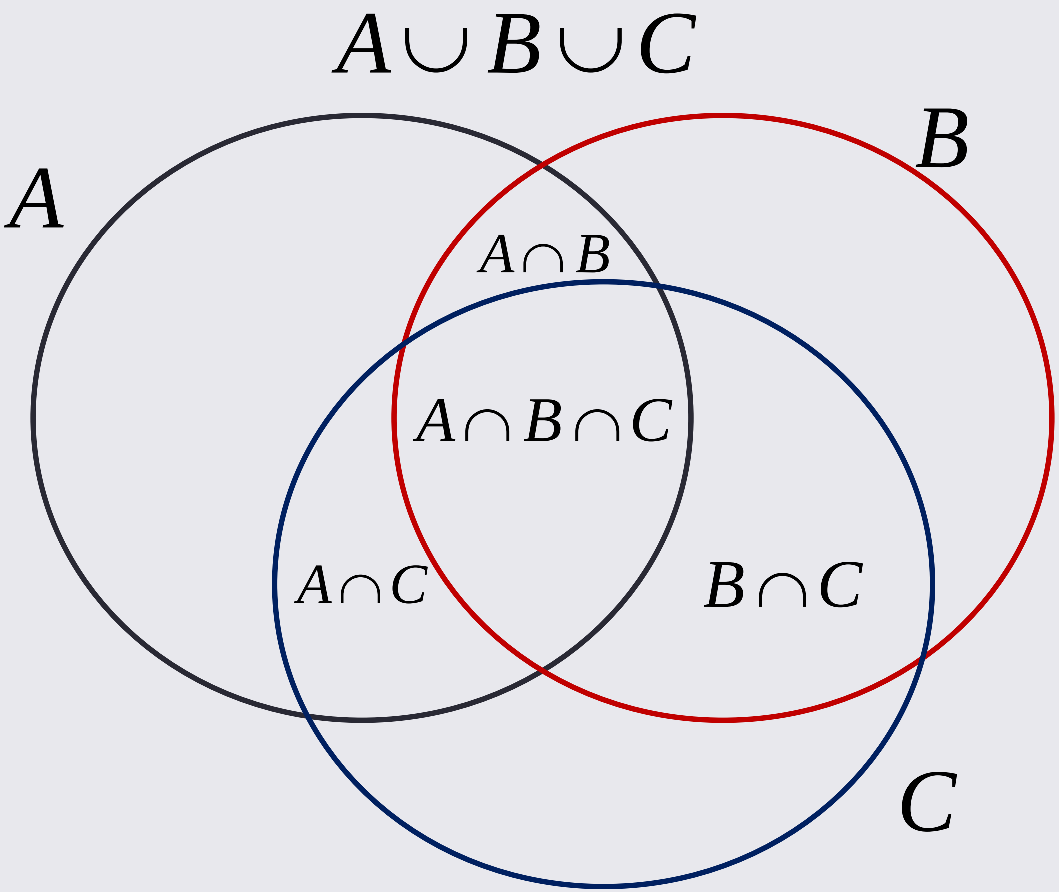
$$\therefore |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 35 + 41 - 46 = 30$$

Sean A,B y C tres subconjuntos de un conjunto universal arbitrario, U. Entonces,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Principio de inclusión-exclusión



Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Una encuesta realizada entre 200 personas arrojó el resultado siguiente:

40 leen el diario El Economista.
42 leen el diario Reforma.
45 leen el diario La Jornada.
13 leen El Economista y Reforma.
20 leen Reforma y la Jornada.
18 leen El Economista y la Jornada.
7 leen los tres periódicos.

La Jornada
Poner freno a la violencia, clamor de intelectuales

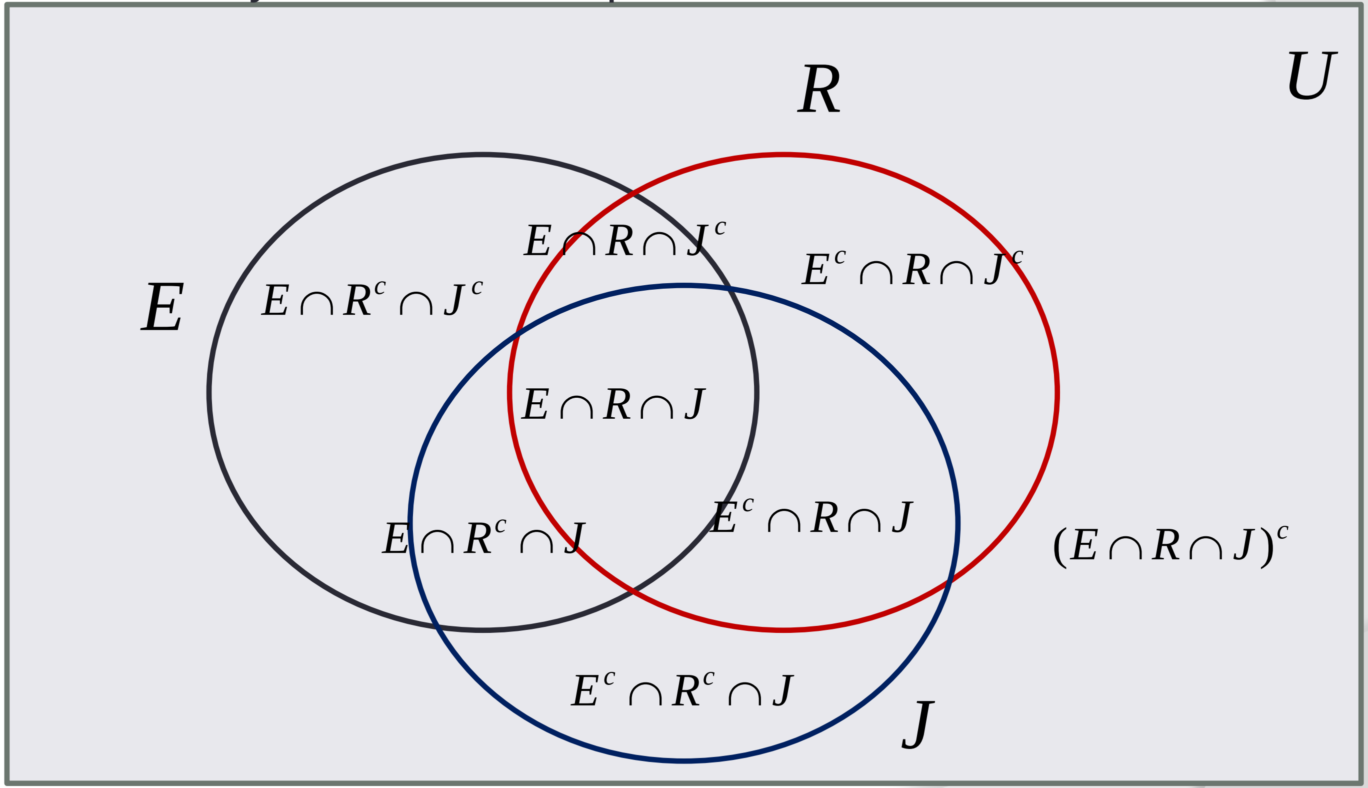
REFORMA
Llegan diputados, checan... y se van
Asesinan a Alcalde en el tercer intento

a. ¿Cuántas personas no leen ninguno de los tres periódicos?
b. ¿Cuántas personas leen únicamente El Economista?
c. ¿Cuántas personas leen un sólo periódico?

elEconomista.es
El poder de las cajas en bolsa se reduce a casi la mitad desde 2007
El salario mínimo, un obstáculo en la lucha contra el paro juvenil

Principio de inclusión-exclusión

En un diagrama de Venn sea U el conjunto formado por todas las personas encuestadas y sean E,R y J los conjuntos formados por las personas que leen El Economista; Reforma y La Jornada respectivamente, entonces



Datos:

$|E| = 40$

$|R| = 42$

$|J| = 45$

$|E \cap R| = 13$

$|R \cap J| = 20$

$|E \cap J| = 18$

$|E \cap R \cap J| = 7$

Veamos cuántas personas no leen ninguno de los 3 periódicos.

$E \cup R \cup J$ Es el conjunto formado por las personas que leen, al menos, uno de los 3 periódicos, luego $E^c \cup R^c \cup J^c$ será el conjunto complementario esto es las personas que no leen ninguno de los 3 periódicos. Ambos conjuntos son disjuntos y por el principio de adición, tendremos

$$|U| = |E \cup R \cup J| \cup |(E \cup R \cup J)^c|$$

$$= |E \cup R \cup J| + |(E \cup R \cup J)^c|$$

$$\therefore |(E \cup R \cup J)^c| = |U| - |E \cup R \cup J|$$

Por el principio de inclusión-exclusión para tres conjuntos, tendremos

$$|E\cup R\cup J| = |E| + |R| + |J| - |E\cap R| - |E\cap J| - |R\cap J| + |E\cap R\cap J|$$

$$= 40 + 42 + 45 - 13 - 20 - 18 + 7$$

$$= 134 - 51 = 83$$

$$\therefore |(E\cap R\cap J)^c| = 200 - 83 = 117$$

Calculemos ahora el número de personas que leen únicamente El Economista

Las personas que leen únicamente El Economista se representa por el conjunto

$$E\cap R^c\cap J^c$$

Para calcular el número de estas personas, y teniendo en cuenta los datos que proporciona el enunciado, habrá que hacerlo en función de

$$|E|, |E\cap R|, |E\cap J| \text{ y de } |E\cap R\cap J|$$

Pues bien, las personas que leen El Economista puede que lean alguno de los otros dos periódicos $E \cap (R \cup J)$
o que no lean ninguno de los otros dos $E \cap (R \cup J)^c$; es decir,

$$E = [E \cap (R \cup J)] \cup [E \cap (R \cup J)^c]$$

Siendo esta descomposición en unión de disjuntos. Aplicando el principio de adición y, posteriormente, el de inclusión-exclusión,

$$|E| = |E \cap (R \cup J)| + |E \cap (R \cup J)^c|$$

$$|E| = |(E \cap R) \cup (E \cap J)| + |E \cap R^c \cap J^c|$$

$$|E| = |E \cap R| + |E \cap J| - |E \cap R \cap J| + |E \cap R^c \cap J^c|$$

$$\therefore |E \cap R^c \cap J^c| = |E| - |E \cap R| - |E \cap J| + |E \cap R \cap J|$$

$$= 40 - 13 - 18 + 7 = 16$$

Las personas que leen únicamente un sólo periódico serán aquellas que lean únicamente El Economista (ni Reforma, ni La Jornada) , esto es $E \cap R^c \cap J^c$
o que únicamente lean Reforma (ni El Economista ni La Jornada) $E^c \cap R \cap J^c$
o que lean únicamente La Jornada (ni El Economista ni Reforma), $E^c \cap R^c \cap J$
es decir las del conjunto $(E \cap R^c \cap J^c) \cup (E^c \cap R \cap J^c) \cup (E^c \cap R^c \cap J)$

Si hacemos este conjunto igual con X y como contiene tres conjuntos disjuntos dos a dos, por el principio de adición, tendremos

$$|X| = |E \cap R^c \cap J^c| + |E^c \cap R \cap J^c| + |E^c \cap R^c \cap J|$$

El primero de los sumandos lo hemos calculado en el apartado anterior. Si seguimos un camino análogo para calcular los otros dos, tendremos:

$$|E \cap R^c \cap J^c| = |E| - |E \cap R| - |E \cap J| + |E \cap R \cap J|$$

$$|E^c \cap R \cap J^c| = |R| - |E \cap R| - |E \cap J| + |E \cap R \cap J|$$

$$|E^c \cap R^c \cap J| = |J| - |E \cap J| - |R \cap J| + |E \cap R \cap J|$$

$$E^c \cap R \cap J^c |=| R| - |E \cap R| - |E \cap J| + |E \cap R \cap J|$$

$$= 42 - 20 - 13 + 7 = 16$$

$$E^c \cap R^c \cap J |=| J| - |E \cap J| - |R \cap J| + |E \cap R \cap J|$$

$$= 45 \text{ - } 20 \text{ - } 18 + 7 = 14$$

Sustituyendo en |X| tenemos que el número de personas que leen únicamente un periódico es

$$|X| = |E \cap R^c \cap J^c| + |E^c \cap R \cap J^c| + |E^c \cap R^c \cap J|$$

$$|X| = 16 + 16 + 14 = 46$$

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de algún universal U . Entonces

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^{n} A_i|$$

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Permutaciones

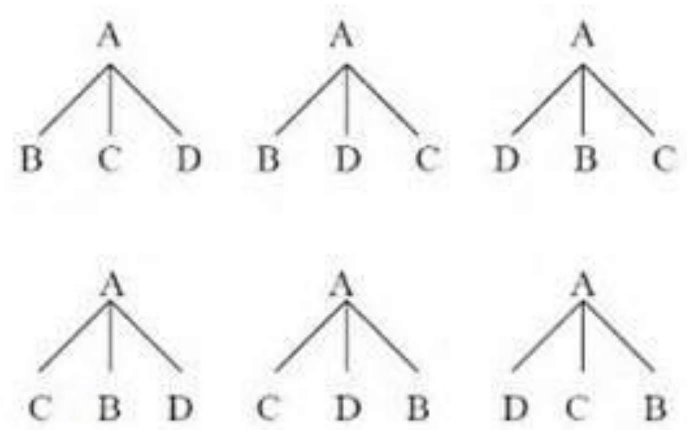
- Permutaciones
- Permutaciones con repetición
- Variaciones
- Variaciones con repetición

- permutaciones
  - Definición
  - Número de permutaciones

Dada una colección de n objetos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ llamaremos permutación a cualquier ordenación de los mismos.

Dos permutaciones serán distintas si los objetos están colocados en orden diferente.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \neq a_5, a_4, a_3, a_2, a_1$$

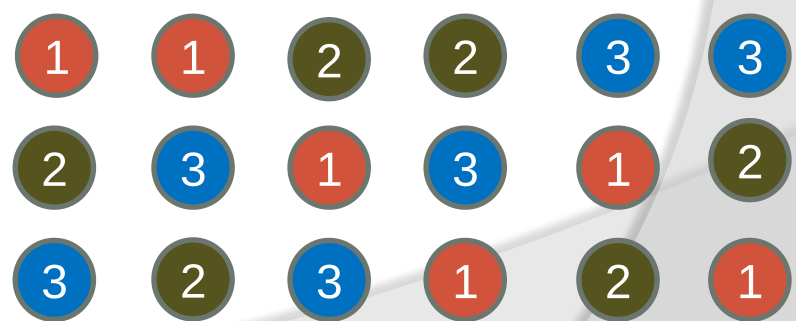


El número de permutaciones de n objetos lo designaremos por P_n y su valor es, por el principio de multiplicación, $P_n = 1*2*\cdots*(n-1)*n$

$$P_n = n! = n*(n-1)*\cdots*1$$

$$n! = n*(n-1)!$$

$$P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$$



Calcular el número de ordenaciones posibles que pueden hacerse con las cinco vocales.

Consideramos las cinco vocales a, e, i, o, u. como n=5, entonces

$$P_5 = 5! = 5*4*3*2*1 = 120$$

¿Cuál de estas 120 ordenaciones ocupa el décimo lugar en orden alfabético?

Fijando la a en la primera posición y permutando las otras cuatro vocales, tendremos que habrá

$$P_4 = 4! = 4*3*2*1 = 24$$

ordenaciones que comienzan por a, luego la que buscamos tendrá la forma

$$av_2v_3v_4v_5$$

De estas 24 ordenaciones distintas, fijando cualquiera de las otras vocales en la segunda posición y permutando las tres restantes, habrá

$$P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$$

6 ordenaciones que comienzan por **a** y continúan por cada una de las restantes vocales en orden alfabético esto significa que

- ✓ desde la primera a la sexta comienzan por **"ae"**
- ✓ de la séptima a la duodécima por "**ai**",

por tanto nuestra permutación es una de las seis de la forma:

$$aiv_3v_4v_5$$

De estas 6, y por analogía, habrá: $P_2 = 2! = 2*1 = 2$

2 ordenaciones que comienzan por **"ai"** y siguen con cualquiera de las tres vocales que restan.

.

En orden alfabético significa que:

- ✓ La séptima y la octava empiezan por **“aie”**
- ✓ La novena y la décima por **“aio”**
- ✓ Las dos restantes por “**aiu”**

por tanto la permutación que andamos buscando es

$$aiov_4v_5$$

De las dos ordenaciones posibles para la cuarta y quinta vocales, la primera en orden alfabético es **“eu”** y la segunda **“ue”,** consecuentemente

$$aioue$$

es la que **ocupa el décimo lugar** en el orden alfabético.

Calcular cuantos números de cuatro cifras distintas pueden formarse con los dígitos 2, 4, 6 y 8 así como la suma de todos ellos. Decir que lugar ocupará el número 6248 si los suponemos ordenados en orden creciente.

Suma de todos los número de 4 cifras.
Hay $P_4 = 4! = 24$ números distintos de los cuales habrá $P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$ que terminen en dos (bastaría fijar el 2 y permutar los otros tres), y lo mismo podemos decir de los números que terminan en 4,6 y 8, luego habrá 6 números que terminen en cada uno de los cuatro dígitos.

El mismo razonamiento puede aplicarse a cada una de las tres posiciones restantes. Esquemáticamente, seria:

UM	Suma parcial	C	Suma parcial	D	Suma parcial	U	Suma parcial
6x2	12	6x2	12	6x2	12	6x2	12
6x4	24	6x4	24	6x4	24	6x4	24
6x6	36	6x6	36	6x6	36	6x6	36
6x8	48	6x8	48	6x8	48	6x8	48
	120		120		120		120

120
1200
12000
120000
133320

la suma de todos los números es 133,320.

Posición que ocupa el número 6248.

6248 es el numero más pequeño de los que empiezan por 6 (será el primero de todos ellos).

- ✓ Fijando el 2, tendremos $P_3 = 6$ números que empiezan por 2.
- ✓ Fijamos el 4, tendremos también, $P_3 = 6$ números que empiezan por 4.
- ✓ Luego desde el primero hasta el 12º empiezan por 2 los seis primeros y por 4 los seis restantes.
- ✓ El 13º número empezará por 6 y es, precisamente, nuestro número.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras a, b, c, d, e, e, e, e y e de forma que ninguna e sea adyacente a otra?

Dado que hay cinco e y cuatro letras distintas entre sí y distintas de la e, para que éstas no sean adyacentes las ordenaciones han de empezar y acabar con e, es decir, serán de la forma

e	**1**	**e**	**2**	**e**	**3**	**e**	**4**	**e**

Donde las posiciones 1, 2, 3 y 4 pueden estar ocupadas por las cuatro letras restantes de $P_4 = 4! = 4*3*2*1 = 24$ formas distintas.

Tú tienes 7 libros distintos sobre Investigación. 3 de los libros tratan de Estadística Aplicada y los otros 4 de Metodología. Calcular de cuántas formas puedes ordenar los libros en una estantería, si

a. No hay restricciones.
b. Deben alternarse los libros.
c. Todos los libros de Estadística Aplicada deben estar juntos.

d. Todos los libros de Estadística Aplicada deben estar juntos y los de Metodología también.

e. Los tres libros de Estadística Aplicada están colocados en la estantería con dos libros de Metodología a cada lado.

Designemos los 3 libros de Estadística(E) por E_1, E_2, E_3 los 4 de Metodología (M) por M_1, M_2, M_3, M_4

a. Al no haber restricciones, el número total de formas distintas es: $P_7 = 7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$

b. Al haber 3E y 4M libros, para que los temas se alternen las ordenaciones han de empezar y acabar con M. Ordenamos, pues, los 4 libros de M de todas las formas posibles, lo cual puede hacerse de P_4 formas, y para cada una de ellas alternamos las P_3 formas distintas en que pueden ordenarse los libros de E.

b. Por el principio de la multiplicación, habrá $P_4 \, P_3$ maneras diferentes de colocar los 7 libros en la estantería de forma que se alternen los temas. $P_4 * P_3 = 4!*3! = 4*3*2*1*3*2*1 = 144$

c. Llamamos E al bloque formado por los 3 libros de Estadística y ordenamos los elementos M_1, M_2, M_3, M_4, E de todas las formas posibles, es decir de P_5 formas distintas.
Ahora, para cada una de ellas ordenamos los 3 libros que hay en E de P_3 formas, nuevamente por el principio de la multiplicación habrá $P_5 * P_3 = 720$ formas diferentes de ordenar los 7 libros con la condición de que los de Estadística estén juntos.

d. Por analogía: E es el bloque de los libros de estadística y M el de los de Metodología, entonces los bloques E y M pueden ordenarse de P_2 formas distintas. Dentro de E los libros E_1, E_2, E_3 pueden ordenarse de P_3 formas y para cada una de ellas, los cuatro libros del bloque M pueden ordenarse de P_4 formas diferentes. Entonces

$$P_2 * P_3 * P_4 = 2!*3!*4! = 288$$

.

e. Ordenamos los 4M de todas las formas posibles, es decir, de P_4 formas y en cada una de ellas introducimos entre el 2º y el 3º libros una de las P_3 posibles ordenaciones de los 3E.

Aplicando la regla del producto, habrá

$$P_4 * P_3 = 4! * 3! * 4! = 144$$

144 formas distintas de colocar los 7 libros en la estantería, estando los 3E juntos con 2M a cada lado.

Sea una colección de n objetos entre los que hay n_1 iguales entre sí, n_2 iguales entre sí pero distintos de los n_1; n_3 iguales entre sí, pero distintos de los n_1, n_2 y así sucesivamente hasta n_r iguales entre sí, pero distintos de todos los anteriores. Llamamos permutaciones con repetición a las distintas formas de ordenarlos.

$$\text{Notación}: PR_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

$$\therefore n = n_1, n_2, \ldots, n_r$$

El número de permutaciones con repetición de n elementos es

$$PR_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{P!}{P_1! P_2! \cdots P_r!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

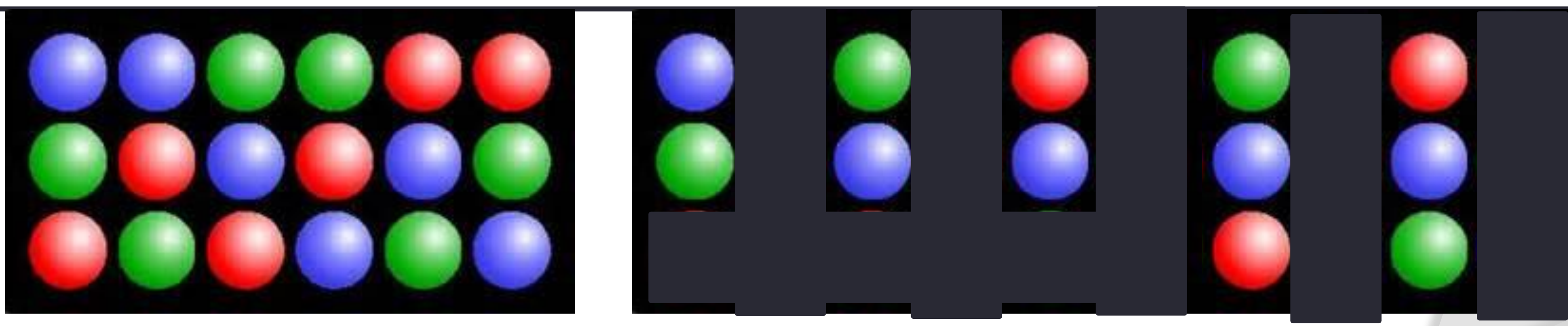
Con las letras A, A,B,C,C,D,D,
a. ¿Cuántas palabras pueden construirse?
b. ¿Cuántas empiezan y acaban en D?

a) $$PR_7^{2,1,2,2,} = \frac{7!}{2!1!2!2!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{2*2*2} = 630$$

b) Al fijar una E delante y otra detrás queda por permutar con repetición las restantes letras, luego el resultado es

$$PR_5^{2,1,2,} = \frac{5!}{2!1!2!} = \frac{5*4*3*2*1}{2*2} = 30$$

Dada una colección de m objetos $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$ distintos y un número entero positivo $n < m$, llamaremos variación de orden n a cualquier subcolección, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de n objetos de la colección dada.



dos variaciones serán diferentes cuando difieran en algún o algunos elementos o bien cuando teniendo los mismos elementos difieran en el orden de colocación de los mismos.

Al número de variaciones de orden n de una colección de m objetos lo notaremos V_m^n diciendo que es el número de variaciones de m elementos tomados n en n.

$$V_m^n = m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

Con los dígitos del 1 al 9.

¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras pueden formarse sin que se repita ninguna cifra?

¿Cuántos de estos números contienen al 1?

a. Son variaciones de 9 elementos tomados 4 en 4

$$V_9^4 = 9*8*7*6 = 3024$$

b. El problema es idéntico al de construir números de tres cifras con los dígitos 2,3,4,5,6,7,8 y 9 y añadir, posteriormente el 1 a cada uno de ellos considerando que el 1 puede colocarse en cuatro posiciones distintas, originando cuatro números diferentes.

$$4*V_8^3 = 4*8*7*6 = 1344$$

Dada una colección de m objetos $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$ distintos y un número entero positivo n, llamaremos variación con repetición de orden n a cualquier subcolección de n objetos de la colección dada pudiendo repetirse los mismos.

dos variaciones con repetición serán diferentes cuando difieran en algún o algunos elementos o bien cuando teniendo los mismos elementos difieran en el lugar que ocupan elementos distintos.

Al número de variaciones con repetición de orden n de una colección de m objetos lo notaremos VR_m^n y diremos que es el número de variaciones con repetición de m elementos tomados n en n.

$$VR_m^n = m^n$$

Calcular cuántas palabras de tres letras pueden formarse con las letras A,B,C,D y E en los siguientes casos:

a. Comienzan por A.
b. No contienen la letra A.
c. Contienen la letra A.

a. Se precisa anteponer la letra A a cada una de las variaciones con repetición de 2º orden de las cinco letras dadas.

$$VR_5^2 = 5^2 = 25$$

b. En este caso, basta calcular el número de palabras de 3 letras que pueden formarse con B,C,D y E, es decir,

$$VR_4^3 = 4^3 = 64$$

c. En este caso es el número total de palabras de 3 letras menos el número de palabras que no contienen la letra A

$$VR_5^3 - VR_4^3 = 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$$

Combinaciones

- Combinaciones
- Teorema del binomio
- Combinaciones con repetición

Dada una colección de m objetos $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$ distintos y un número entero positivo $n < m$, llamaremos combinación de orden n a cualquier subcolección, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de n objetos de la colección dada.

Dos **combinaciones serán distintas** si algún o algunos elementos de uno de los grupos no se encuentra en el otro, es decir, si **difieren en algún o algunos elementos**.

Al número de combinaciones de orden n de una colección de m objetos, lo designaremos por C_m^n y diremos que es el numero de combinaciones de m elementos tomados n en n.

$$\binom{m}{n} = C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Un estudiante tiene que responder 7 preguntas de un cuestionario de 10. ¿de cuántas formas puede hacer su elección si

a. No hay restricciones?
b. Debe responder a las 2 primeras preguntas?
c. Debe responder, como mínimo, a 3 preguntas de las 5 primeras?

Supongamos que las diez preguntas son: $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$

y elegimos algunos grupos de siete de ellas,

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 = p_2, p_3, p_1, p_4, p_5, p_6, p_7$$

Pero los grupos

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 \neq p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_8$$

Por tanto los grupos de siete preguntas serán combinaciones de orden siete elegidas entre las diez del cuestionario.

a. Sin restricciones la elección podrá hacerse de

$$\binom{10}{7} = C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10*9*8}{3*2*1} = \frac{720}{6} = 120$$

b. Se debe responder las 2 primeras preguntas

$$\binom{8}{5} = C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8*7*6}{3*2*1} = \frac{720}{6} = 56$$

c. Se deben responder, como mínimo, a 3 preguntas de entre las 5 primeras

Hallamos todos los grupos distintos de k preguntas, con k = 3, 4 o 5 que pueden elegirse entre las cinco primeras y para cada uno de ellos elegimos 7 − k preguntas entre las cinco restantes.

El número total de formas distintas de hacer la elección será, por tanto,

$$\sum_{k=3}^{5}\binom{5}{k}\binom{5}{7-k}=\binom{5}{3}\binom{5}{4}+\binom{5}{4}\binom{5}{3}+\binom{5}{5}\binom{5}{2}$$

$$=\left(\frac{5!}{3!2!}\right)\left(\frac{5!}{4!1!}\right)+\left(\frac{5!}{4!1!}\right)\left(\frac{5!}{3!2!}\right)+\left(\frac{5!}{5!0!}\right)\left(\frac{5!}{2!3!}\right)$$

$$=10*5+5*10+1*10$$

$$=50+50+10=110$$

Se quiere elegir un comité de doce personas de un grupo formado por 10 hombres y 10 mujeres. Decir de cuántas formas puede hacerse la elección

(a) Si no hay restricciones.
(b) Si debe haber 6 hombres y 6 mujeres.
(c) Si debe haber un número par de mujeres.
(d) Si debe haber 8 hombres como mínimo.

a. Si no hay restricciones, $\binom{20}{12} = \frac{20!}{12!8!} = 125970$

b. comité con seis hombres y seis mujeres

$$\binom{10}{6}\binom{10}{6} = \left(\frac{10!}{6!4!}\right)^2 = 210^2 = 44100$$

c. Si debe haber un número par de mujeres, entonces podemos representar su número en el comité por 2k y el número de hombres por 12 − 2k, donde k = 1, 2, 3, 4, 5.

$$\sum_{k=1}^{5}\binom{10}{2k}\binom{10}{12-2k}=\binom{10}{2}\binom{10}{10}+\binom{10}{4}\binom{10}{8}+\binom{10}{6}\binom{10}{6}+$$

$$=\binom{10}{8}\binom{10}{4}+\binom{10}{10}\binom{10}{2}$$

$$=45*1+210*45+210*210+45*210+45*1$$

$$=63090$$

d. Sea k el número de hombres que integran el comité, entonces k = 8, 9 ´o 10, siendo el de mujeres 12 − k, razonando igual que en el apartado anterior:

$$\sum_{k=8}^{10}\binom{10}{k}\binom{10}{12-k}=\binom{10}{8}\binom{10}{4}+\binom{10}{9}\binom{10}{3}+\binom{10}{10}\binom{10}{2}$$

$$=10695$$

Un comité de selección entrevista a cinco candidatos para un puesto de trabajo, entregando al final una lista con las personas que propone.¿ cuántas listas distintas puede entregar el comité en los casos siguientes:

a. La lista ordena a los candidatos del uno al cinco.
b. El comité selecciona un primer candidato, un segundo y un tercero.
c. El comité decide proponer a un candidato para el puesto y seleccionar un grupo de dos suplentes.

$$5 * C_4^2 = 30 \qquad P_5 = 120 \qquad V_5^3 = 60$$

Si n es un número entero positivo, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

,

$$\text{Si } a,b=1 \rightarrow (a+b)^n = (1+1)^n = 2^n$$

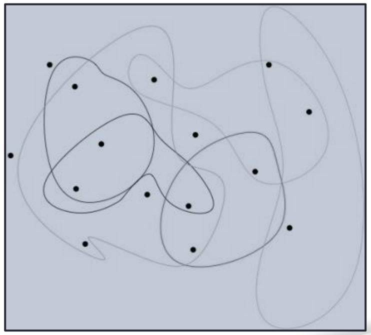
De cuántas maneras puede elegir un profesor a uno o más estudiantes entre seis?

$$\sum_{k=1}^{6} C_6^k = \sum_{k=1}^{6} \binom{6}{k} = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} - \binom{6}{0} =$$

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 1^k 1^{k-6} - \binom{6}{0} = (1+1)^6 - 1 = 2^6 - 1 = 63$$

Dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, determinar el número de

a. Subconjuntos de A.
b. Subconjuntos no vacíos de A.
c. Subconjuntos de A que contienen tres elementos.
d. Subconjuntos de A que contienen a los elementos 1 y 2.
e. Subconjuntos de A con un número par de elementos.
f. Subconjuntos de A con un número impar de elementos y que incluyan al elemento 3.



a. Subconjuntos que tiene A. $\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}1^{7}1^{7-k}=(1+1)^{7}=2^{7}=128$

b. Subconjuntos no vacíos de A: 128-1=127

c. Subconjuntos de A que contienen tres elementos $C_7^3=35$

d. Subconjuntos que contienen al 1 y al 2, $2^5=32$

e. Subconjuntos de A para k = 2, 4 y 6, $C_7^2+C_7^4+C_7^6=63$

f. subconjuntos de {1, 2, 4, 5, 6, 7} que tengan cero, dos, cuatro y seis elementos y añadirle a cada uno de ellos el 3

$$C_6^0+C_6^2+C_6^4+C_6^6=32$$

Si n y k son dos números enteros no negativos tales que $0 \le k \le n$ entonces, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Fórmula de Pascal.

Si n y k son dos enteros positivos tales que $1 \le k \le n-1$ entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Llamaremos combinaciones con repetición de orden n definidas en un conjunto A con m elementos, a los diferentes grupos de n elementos, iguales o distintos, que pueden formarse con los m elementos dados, de modo que dos grupos sean distintos cuando difieran, al menos, en un elemento.

El orden n de una combinación con repetición puede ser mayor que el número de elementos con los cuales se forma. Cuando $n \leq m$ entre las combinaciones con repetición figuran las combinaciones simples del mismo orden.

El número de combinaciones con repetición de orden n de una colección de m objetos es

$$CR_m^n = \binom{m-1+n}{n} = \frac{(m-1+n)!}{(m-1)!n!}$$

Se dispone de tres bolsas iguales con caramelos de frambuesa, mielimón, y eucalipto. Cada una de las bolsas contiene, al menos, diez caramelos. ¿De cuántas formas pueden seleccionarse diez caramelos en los siguientes casos:

a. Sin ninguna restricción.
b. En cada selección deben figurar, al menos, un caramelo de frambuesa, dos de mielimón y tres de eucalipto.
c. En cada selección han de figurar exactamente, uno de frambuesa y, al menos, uno de mielimón.

a. Una de las posibles distribuciones de los diez caramelos es

f	f	m	f	e	m	m	f	e	e

$$CR_3^{10} = \binom{3-1+10}{10} = \binom{12}{10} = \frac{12!}{2!10!} = 66$$

b. En cada selección fijamos 1f, 2m y 3e, quedarán, por tanto, 4 caramelos de entre los 3 sabores para elegir

$$CR_3^{4} = \binom{3-1+4}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

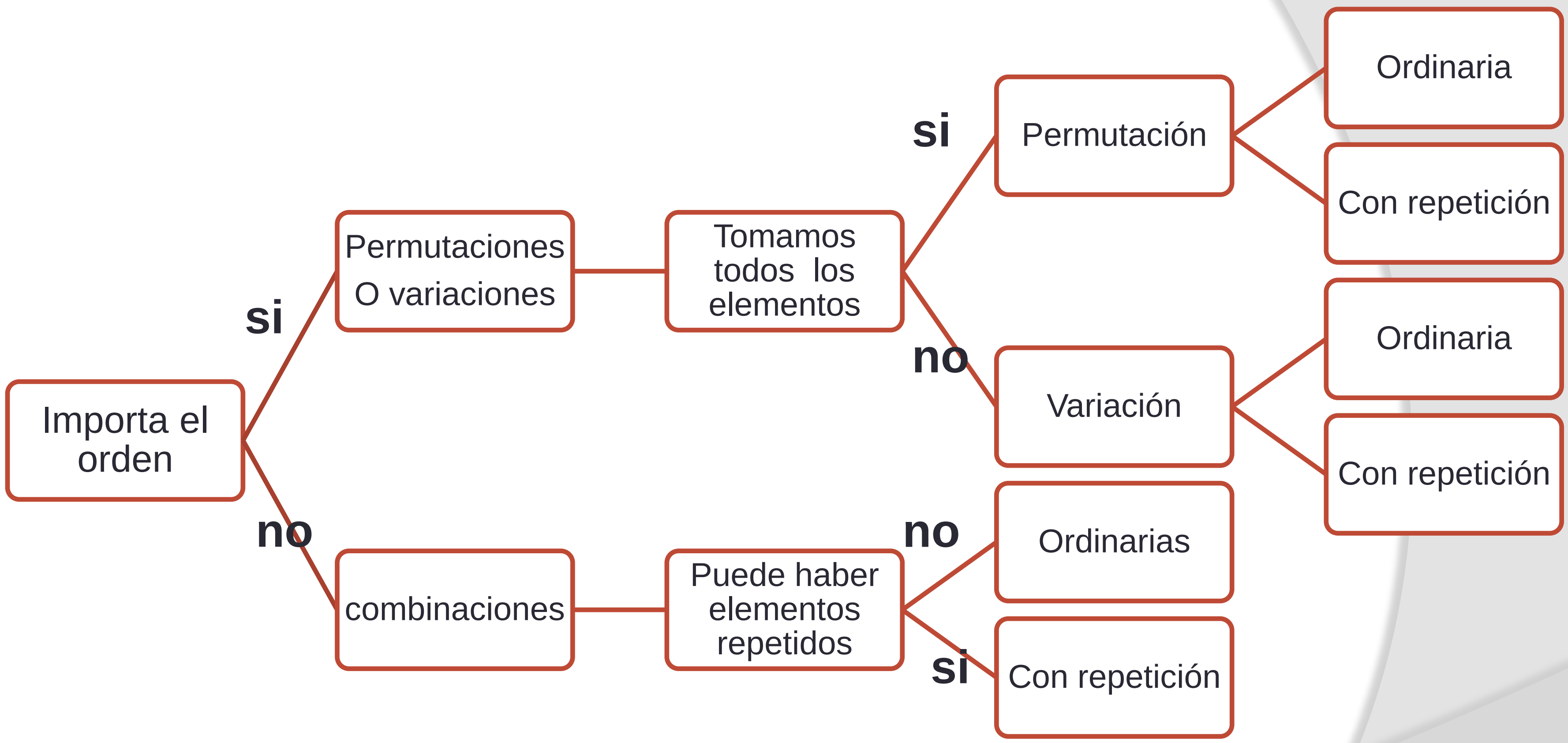
c. Ahora fijamos en cada selección un caramelo de f y uno de m. Entonces, quedarán por elegir ocho caramelos de entre dos sabores, m y e, ya que ha de haber, exactamente, uno de f en cada selección,

$$CR_2^8 = \binom{2-1+8}{8} = \binom{9}{8} = \frac{9!}{8!1!} = 9$$

Universidad Autónoma de Estado de México

Facultad de Economía

Maestría en Estudios Sustentables, Regionales y Metropolitanos



Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Bibliografía

Wackerly, D.D.,W. Mendenhall y R. L.Scheaffer (2002), ***Estadística matemática con aplicaciones***, México, Thomson.

Mendenhall, W., R.J. Beaver y B. Beaver(2007) ***Introducción a la probabilidad y estadística. Internacional*** Thomson Editores S. A. de C. V.

Freund, J.E., I. Miller y M. Miller (2000), **Estadística matemática con aplicaciones, México**, Prentice Hall.

Canavos, C. George (1998), ***Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos,*** México, Mc Graw-Hill.

¡Muchas Gracias!

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán