

# Compactones, soluciones de ecuaciones no lineales con estructura tipo esferas duras

MÁXIMO AGÜERO\*, JORGE BERNAL\*\*, GUADALUPE FRÍAS\* Y MAURICIO PAULIN\*

**Resumen.** *Se estudian ciertas soluciones de ecuaciones no lineales que modelan procesos físicos, que tienen semejanzas con estructuras coherentes del tipo de esferas duras, modelo de partículas muy usado en varias ramas de la física. Estas soluciones compactas (gotas, kinks, etcétera.) interactúan entre sí sólo a cortas distancias, porque no poseen colas infinitas como los solitones clásicos.*

**Palabras clave:** *solitones, compactones, ecuaciones Klein-Gordon.*

## Compactions, Solutions for Non Linear Equations with a Hard Sphere Structure

**Abstract.** *This paper studies certain solutions of non linear equations that model physical processes having similarities with coherent structures of the hard sphere type—a model for particles that is widely used in various branches of physics. These compact solutions (drops, kinks, etc.) interact among themselves only across short distances, because they do not possess infinite tails like classical solitons.*

**Keywords:** *solitons, compactons, Klein-Gordon equations.*

Recepción: 8 de noviembre de 2000

Aceptación: 2 de abril de 2001

## Introducción

En mecánica cuántica, aparte de la interpretación ortodoxa de las llamadas “funciones de onda”, existe otra interpretación de estas variables debido a Louis De Broglie quien consideró a las partículas subatómicas como paquetes de ondas reales. La dificultad que saltó a la vista en los inicios de la creación de la mecánica cuántica para no considerarlas como

paquetes de onda de algún campo material, fue precisamente la propiedad lineal de la ecuación de Schrödinger. Como es bien conocido, esta propiedad de linealidad sólo inducía la producción de paquetes de onda que se dispersaban con el tiempo. Retomando las ideas de De Broglie, las distintas ecuaciones no lineales de la física en casos muy interesantes producen soluciones solitónicas, como resultado de la interacción de dos fuerzas antagonicas: no linealidad + dispersión. La primera produce el reforzamiento de los componentes del paquete de mayor amplitud en comparación con las del menor. La segunda produce la descomposición del paquete al forzar a cada componente a viajar con su propia velocidad intrínseca distinta de los demás. Entonces, los solitones aparecen de un delicado equilibrio entre estas dos fuerzas. Pero también pueden surgir del delicado equilibrio entre otras dos fuerzas antagonicas, por ejemplo en las ecuaciones de difusión de materia condensada, la no linealidad compensa la difusión de partículas y se origina un patrón tipo solitónico en la dinámica del material en estudio (Kolmogorov, Piskunov, Petrovsky (KPP), 1937; véase Fillipov, 1988).

\* Universidad Autónoma del Estado de México, Facultad de Ciencias. Instituto Literario 100, Toluca. 50000, Estado de México. Correo electrónico: mag@coatepec.uaemex.mx

\*\* Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Unidad de Chontalpa, Escuela de Ciencias, Tabasco, México.

Se agradecen los comentarios al artículo por parte de los investigadores participantes al Taller de Fenómenos No lineales. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto UAEM 1240/2000 y por el proyecto de investigación CONACYT 33741-E.

En esencia, lo que se publicó en aquella época fue un modelo simple del impulso nervioso. Sólo después de 20-30 años se pudieron entender mejor las implicaciones científicas del trabajo de KPP. Existe una vasta literatura referente a las estructuras solitónicas (por ejemplo se puede consultar Makhankov, 1990; Ablowitz y Segur, 1981; Infeld y Rowlands, 1990).

Una característica importante de las ondas solitónicas es que mantienen su velocidad y forma constantes, por ende su energía es finita y concentrada. Pero comúnmente los solitones poseen colas infinitas (véase la figura 1).

A diferencia de los solitones comunes, los compactones son estructuras compactas sin colas infinitas. Pero antes, veamos un tema que es común en física teórica cuando se analiza y se modela el comportamiento de materia condensada, sea gas o líquido, por ejemplo. Es común que en física estadística se estudie a un conjunto de partículas confinadas en algún recipiente bajo condiciones de temperatura y presión adecuadas: se modela así al gas real. Inicialmente al gas real se le considera como un conjunto de esferas duras, es decir, un conjunto de partículas con un potencial de interacción de la forma (véase la figura 2).

$$U = \begin{cases} 0, & r \geq a \\ \infty, & r < a \end{cases}$$

donde  $a$  es el radio de la esfera.

Las esferas entran en interacción solamente cuando chocan entre sí, es decir que un contacto explícito debe de existir entre ellas. De la misma manera interaccionan los compactones, es decir, a diferencia de los solitones que pueden interaccionar a largas distancias entre sí debido a sus colas, éstas sólo interaccionarán al entrar en contacto directo con otras de su especie.

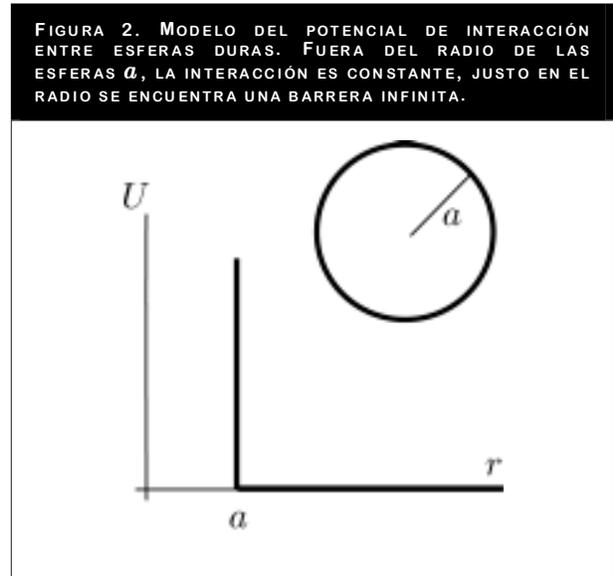
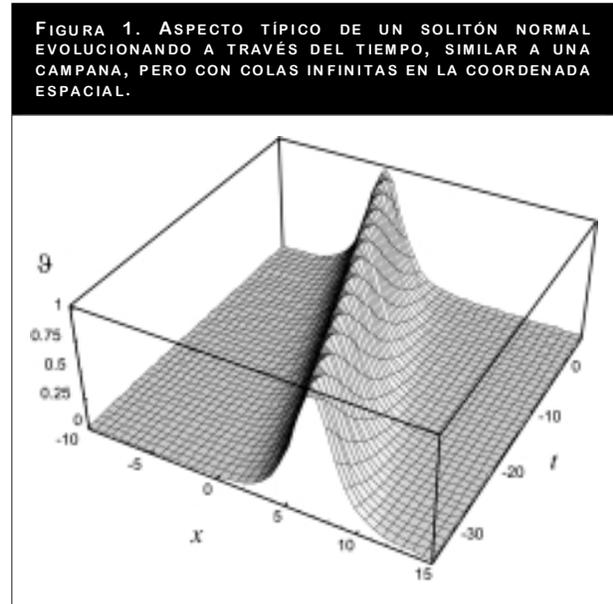
**I. Compactones en la familia de ecuaciones tipo KdV**

Veamos ahora cómo aparecen los compactones. Empecemos con un solitón de la ecuación de Kortweg y De Vries (KdV)

$$u_t + (u^2)_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

Una solución solitónica está localizada en el espacio y tiene la forma proporcional a  $Sech^2(x - vt + x_0)$ , por lo que posee colas infinitas.

Rosenau y Hyman (1993) hicieron un análisis de la dispersión no lineal en la formación de patrones en líquidos y se encontró una familia de ecuaciones de KdV ( $K(m, n)$ ):



$$u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad m > 0, 1 < n \leq 3 \tag{2}$$

Para  $K(2, 2)$  se considera una cuerda densa inarmónica con muchas interacciones entre vecinos. Esto consiste en que no sólo fueron tomadas en cuenta las interacciones entre los primeros vecinos, sino también las interacciones entre los segundos (es decir el problema del SNI, por sus siglas en inglés Second Neighbour Interaction). Al final, ellos obtuvieron la ecuación no lineal

$$u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0 \tag{3}$$

Las ondas viajeras  $u$  ( $\xi = x - \lambda t$ ) de la ecuación (3) satisfacen  $\lambda$

$$p_1 = u\xi^2 + p(u, p_0)$$

$$p = \frac{-\lambda u}{3} + \frac{u^2}{4} + \frac{p_0}{u^2} \tag{4}$$

donde  $p_0$  y  $p_1$  son constantes. Igualando  $p_0$  y  $p_1$  a cero se obtiene una onda no lineal con soporte compacto.

$$u_c(x, t) = \frac{4\lambda}{3} \cos^2[(x - \lambda t)/4] \tag{5}$$

donde  $|x - \lambda t| \leq 2\pi$  y  $u_c = 0$  fuera de este intervalo.

Las propiedades importantes que soportan estas soluciones son: 1. No tienen colas infinitas como los solitones comunes; 2. Se asemejan a esferas duras, elásticas; 3. Sólo pueden interactuar al entrar en contacto entre ellos; 4. La invariancia ante transformaciones  $u \rightarrow -u$  y  $t \rightarrow -t$  produce anticompactones.

Durante la realización de experimentos numéricos con dos, o hasta con cinco compactones, se observó la estabilidad de las soluciones y no se percibieron pérdidas por radiaciones o de otra índole.

Por otro lado, en la teoría clásica de solitones la integrabilidad del sistema y la interacción elástica entre las soluciones se interpreta en muchos casos como propiedades sinónimas. Como se puede observar, el sistema  $K(2, 2)$  no es un sistema integrable en términos clásicos de integrabilidad. Pero aquí tenemos interacciones entre soluciones del sistema que sí son elásticas. Entonces, el mecanismo de elasticidad entre las soluciones podría no ser originado por la integrabilidad. De la fórmula (5) podemos inferir que los compactones podrían jugar el papel de una base no lineal local de funciones y cualquier dato inicial compacto podría ser descompuesto en compactones y anticompactones.

### 1. Ecuación no lineal de Klein-Gordon con interacción inarmónica

Ahora haremos una pequeña introducción al método de campos efectivos de partícula análoga. Comúnmente, la ecuación clásica de Klein-Gordon toma la siguiente forma

$$u_{tt} - u_{xx} + \Phi'(u) = 0, \quad -\infty < x, t < +\infty \tag{6}$$

con un potencial suficientemente continuo. La ecuación (6) se obtiene del principio variacional

$$\delta \int dt \int dx \mathcal{L}(u, u_x, u_t) = 0$$

con densidad de Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2) - \Phi(u)$$

Al encontrar soluciones tipo ondas viajeras  $u(z) = u(x - ct)$ ,  $c = const$ , se obtiene una ecuación diferencial ordinaria o ecuación de Newton para una “partícula análoga”.

$$(c^2 - 1)u_{zz} + \Phi'(z) = 0$$

Seguidamente analizaremos un sistema simple discreto que ha sido un modelo donde se han encontrado soluciones solitónicas tipo compactones.

Supongamos que tenemos una serie de partículas cuyo comportamiento está modelado por un sistema del tipo Klein-Gordon. Las partículas pueden estar acopladas por el potencial de interacción  $U(\Phi_{n+1} - \Phi_n)$  y sujetas a un potencial no lineal de sustrato en cada punto  $V(\Phi_n)$ . La magnitud  $\Phi_n(t)$  es el grado de libertad en cada punto, que representa el resultado de la influencia de los demás átomos en la red y efectos externos (Paulin, 2000).

Consideramos ahora el potencial no lineal de sustrato de la forma

$$V(\Phi_n) = \frac{V_0}{2}(1 - \Phi_n^2)^2 \tag{7}$$

y al potencial de interacción entre vecinos como:

$$U(\Phi_{n+1} - \Phi_n) = \frac{C_l}{2}(\Phi_{n+1} - \Phi_n)^2 + \frac{C_{nl}}{4}(\Phi_{n+1} - \Phi_n)^4 \tag{8}$$

Aquí  $V_0$ ,  $C_l$  y  $C_{nl}$  son constantes y controlan la barrera de potencial de doble pozo y las fuerzas de acoplamiento lineal y no lineal, respectivamente. Entonces el Hamiltoniano tendrá la forma

$$H = \sum_n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi_n}{dt} \right)^2 + \frac{V_0}{2} (1 - \Phi_n^2)^2 + U(\Phi_{n+1} - \Phi_n) \right] \tag{9}$$

La ecuación de movimiento en caso general será:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} - [U'(\Phi_{n+1} - \Phi_n) - U'(\Phi_{n-1} - \Phi_n)] + V'(\Phi_n) = 0 \quad (10)$$

Sustituyendo aquí los valores de los potenciales para la  $n$ -ésima partícula tendremos

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dt^2} = & C_l(\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1} - 2\Phi_n) + 2V_0(\Phi_n - \Phi_n^3) + \\ & + C_{nl}[(\Phi_{n+1} - \Phi_n)^3 + (\Phi_{n-1} - \Phi_n)^3] +. \end{aligned} \quad (11)$$

Cuando las interacciones  $U'$  entre partículas son lineales, las soluciones tipo kink pueden ser calculadas. Cuando  $U'$  incluye interacciones inarmónicas, aparecen nuevas estructuras.

En la aproximación estándar continua  $\Phi_n(t) \rightarrow \Phi(X, t)$  y extendiendo  $\Phi_{n\pm 1}$ , haciendo además  $x = \frac{X}{a}$  (que es la medida de la distancia  $X$  en unidades de distancia entre los puntos discretos de la red  $a$ ), se obtiene la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$\Phi_{tt} - C_l\Phi_{xx} + 3C_{nl}\Phi_x^2\Phi_{xx} - 2V_0(\Phi - \Phi^3) = 0 \quad (12)$$

donde  $C_l$  representa el cuadrado de la velocidad de onda lineal. Para  $C_{nl} = 0$  la ecuación se reduce al modelo continuo de  $\varphi^4$  con acoplamiento lineal, el cual admite soluciones tipo kinks de la forma *tanh*.

## 2. Condición de frontera trivial

Considerando ondas viajeras con velocidad  $u$ , hacemos un cambio de variables:  $\xi = x - ut$  y con la condición de frontera trivial:

$$\xi \rightarrow \pm\infty, \Phi \rightarrow 0, \Phi_\xi \rightarrow 0, \quad \text{y} \quad \Phi(\xi) = \Phi(x-ut), \quad (13)$$

se puede simplificar la ecuación (12) usando las relaciones (13) y considerando  $\Phi_t = -u\Phi_\xi$ ,  $\Phi_x = \Phi_\xi$  que después de integrar tenemos:

$$(\Phi_\xi)^4 - F(\Phi_\xi)^2 + G\left(1 - \frac{\Phi^2}{2}\right)\Phi^2 = 0 \quad (14)$$

con los nuevos parámetros

$$F = \frac{2(u^2 - C_l)}{3C_{nl}}, \quad \text{y} \quad G = \frac{V_0}{3C_{nl}}.$$

Para integrar la ecuación (14), es necesario el cumplimiento de la siguiente relación:

$$2(u^2 - C_l)^2 - 3V_0C_{nl} = 0 \quad (15)$$

En seguida expondremos las distintas soluciones que se obtienen para el modelo.

**Gotas compactas.** La ecuación no lineal que las produce es

$$\Phi_\xi = -\sqrt{\frac{F}{2}}\sqrt{2 - \Phi^2}$$

de donde obtenemos la solución:

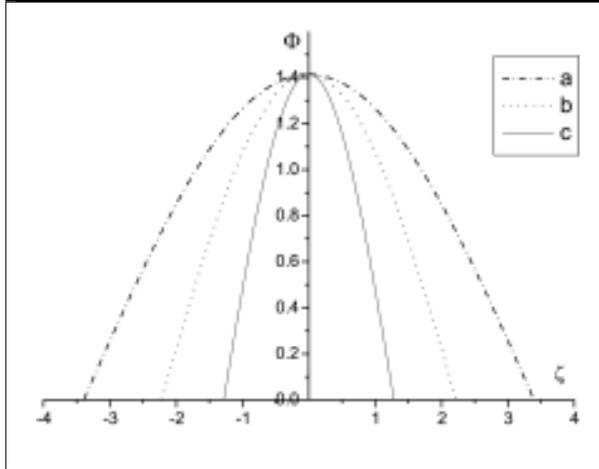
$$\Phi = \pm\sqrt{2}\text{sen}(\zeta - \zeta_0) \quad (16)$$

con  $\zeta = \sqrt{\frac{E}{2}}\xi$  y estando  $\Phi$  acotado entre  $-\sqrt{2}$  y  $\sqrt{2}$ . Sabemos que  $\Phi = 0$  cuando  $\xi \rightarrow \pm\infty$  y está definido solamente en el sector  $|\zeta + \zeta_0| < \frac{\pi}{2}$ . El valor de  $\zeta_0$  se determina al centrar la solución. La solución (16) también puede escribirse como  $\pm\sqrt{2}\cos(\zeta)$ , donde el argumento de la función coseno está definido en el intervalo  $-\pi/2 \leq \zeta \leq \pi/2$ . Como es obvio, la anchura de la solución toma el aspecto

$$L = \pi\sqrt{\frac{2}{F}}$$

A este tipo de solución le damos el nombre de “gota compacta”. ¿Por qué el nombre? Es fácil de verificar que cuando  $u^2$  se aproxima a  $C_l$  (esto es, cuando  $F = \frac{V_0}{u^2 - C_l}$  incrementa su valor) y fijamos el valor de  $V_0$  en la ecuación (15), el “área” del compacton tipo gota decrece. En el caso opuesto, cuando la velocidad se aleja del parámetro  $C_l$ , la magnitud  $F$  decrece mientras su anchura aumenta. En ambos casos la altura es constante (véase la figura 3), es decir sólo aumenta o disminuye de tamaño a lo largo de la

FIGURA 3. DROP-COMPACTONS. ELLAS CAMBIAN SU FORMA A LO LARGO DEL ESPACIO  $\zeta$ , MIENTRAS SUS AMPLITUDES PERMANECEN COSTANTES. PRESENTAMOS AQUÍ TRES CURVAS FIJANDO LOS VALORES:  $V_0 = 1/2$ ,  $U = 3$  Y HACIENDO VARIAR EL PARÁMETRO  $C_l$ . ENTONCES TENEMOS PARA A)  $C_l = 2$  B)  $C_l = 5$  Y C)  $C_l = 8$ .



coordenada  $\zeta$ , como una gota común sobre una superficie lisa. El tercer parámetro  $C_{nl}$  se define de la ecuación (15). Los anti-compactones tipo gota surgen al tomar el signo negativo de (16). La energía se calcula haciendo uso de la siguiente expresión:

$$E_{total}^1 = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1}{2} \Phi_t^2 + \frac{1}{2} C_l \Phi_x^2 + \frac{1}{4} C_{nl} \Phi_x^4 - \frac{1}{2} V_0 (1 - \Phi^2) \Phi^2 \right] dx \quad (17)$$

Donde los valores de los puntos  $x_i$  están determinados por la región de existencia en cada caso concreto de las estructuras solitónicas. Finalmente obtenemos:

$$E_{dc} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \sqrt{V_0(u^2 - C_l)} + \pi C_l \sqrt{\frac{V_0}{2(u^2 - C_l)}} \quad (18)$$

Cuando  $u^2 \rightarrow C_l$ , la energía (18) tiende a infinito. Por lo que las velocidades no utilizadas para estas soluciones son  $u_0 = \pm \sqrt{C_l}$ . Estos valores habilitan la existencia de los compactones tipo kink (podemos llamarlas del “primer tipo”) descubiertas con el mismo modelo (Dusuel *et al.*, 1988).

Aquí podemos inferir que gotas compactas no pueden coexistir con los kinks compactos del primer tipo, ya que ambos compactones viven en diferentes regiones de los parámetros principales delimitados por sus velocidades. Este

crucial valor puede ser considerado como un punto de bifurcación. Cuando las velocidades de onda viajera se aproximan al valor de  $u_0$ , los kinks compactos surgen. En consecuencia, este sistema característico nos sugiere la apariencia de transición de fase de segundo orden en este punto de bifurcación. Esto es así porque fuera del valor de  $u_0$ , el sistema está situado en un estado que muestra compactones de tipo gota y exactamente para el valor  $u_0$ , tenemos compactones tipo kink, que es el segundo estado del sistema.

### 3. Kink compactones

Como en el caso de gotas compactas, para soluciones tipo ondas viajeras escribimos

$$\Phi(\zeta) = \Phi(x-ut), \text{ tal que}$$

a)  $\Phi \rightarrow \pm 1$  y

b)  $\Phi_\zeta \rightarrow 0$  cuando  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ , (19)

Retornamos a la ecuación (12), integramos con respecto a  $\Phi$  y tomamos en consideración la condición de frontera (19), y obtenemos

$$(u^2 - C_l) \Phi_\zeta^2 - 3C_{nl} \Phi_\zeta^4 + \frac{V_0}{2} (1 - \Phi^2)^2 = 0 \quad (20)$$

La ecuación (20) puede ser integrada cuando  $u^2 - C_l = 0$ . Se tienen dos casos: a) si  $C_l = 0$  (acoplamiento lineal cero, no existirán ondas lineales); entonces  $u = 0$ ; b)  $u = \pm \sqrt{C_l}$  las soluciones correspondientes son del tipo de kinks con soporte compacto o compactones (Dusuel *et al.*, 1988)

$$\Phi(x) = \pm \text{sen} \left[ \left( \frac{V_0}{6C_{nl}} \right)^{\frac{1}{4}} (x - x_0) \right] \quad (21)$$

que existen sólo en el sector

$$(V_0 / 6C_{nl})^{\frac{1}{4}} |x - x_0| < \pi / 2 \text{ y } \Phi = \pm 1$$

fuera de este sector,  $x_0$  define la posición del centro del kink. Para el caso  $\zeta = x - \sqrt{C_l}t$  tendremos

$$\Phi(\zeta) = \pm \operatorname{sen} \left[ \left( \frac{V_0}{6C_{nl}} \right)^{\frac{1}{4}} (\zeta - \zeta_0) \right], \quad (22)$$

en el segmento

$$(V_0 / 6C_{nl})^{\frac{1}{4}} |x - \sqrt{C_l}| < \pi / 2, \text{ y } \Phi = \pm 1$$

fuera de este sector. Estas soluciones fueron llamados kink-compactones. Desde las ecuaciones (21) y (22) podemos calcular la anchura de la onda:

$$L = \pi \left( \frac{C_{nl} 6}{V_0} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Entonces cuando está presente el acoplamiento no lineal en los términos de la energía potencial se descubre al solitón dinámico con velocidad:  $\sqrt{C_l} (-\sqrt{C_l})$  (Dusuel *et al.*, 1988).

La energía total se obtiene fácilmente usando la fórmula:

$$E_{total} = \int_{x_i}^{x_f} \left[ \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \frac{1}{2} C_l \Phi_x^2 + \frac{1}{4} C_{nl} \Phi_x^4 + \frac{1}{2} V_0 (1 - \Phi^2)^2 \right] dx \quad (23)$$

Donde  $x_i$  y  $x_f$  determina la región de existencia de la estructura solitónica del campo  $\Phi$ .

$$E_{total} = a\gamma C_l \frac{\pi}{2} + a\gamma^3 C_{nl} \frac{3\pi}{32} + \frac{a}{\gamma} V_0 \frac{3\pi}{16}$$

Para el caso de ondas estáticas:  $u = \sqrt{C_l} = 0$  se obtiene

$$E^*_{total} = a\gamma^3 C_{nl} \frac{3\pi}{32} + \frac{a}{\gamma} V_0 \frac{3\pi}{16}$$

$$\text{donde } \gamma = \left( \frac{V_0}{6C_{nl}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

y podemos notar que la energía está estrictamente localizada. Como es conocido, un kink con sus largas colas puede interactuar con un antikink, pero en el caso del

compactón la interacción es más local, es decir, sólo existe en contacto directo con el antcompactón. Este comportamiento es similar a las esferas duras usado en varias ramas de la física.

### Conclusiones

Como se ha analizado, la existencia de soluciones y especialmente cierta versión particular de estructuras compactas en ecuaciones no lineales (diferenciales y discreto-integro diferenciales) implica estrictos requisitos que deben ser satisfechos. Debido a que las estructuras solitónicas son soluciones muy especiales, en la segunda parte de este trabajo hemos obtenido nuevas condiciones referentes a los parámetros del modelo de Klein-Gordon no lineal para integrar la correspondiente ecuación no lineal evolutiva. Hemos demostrado que la anarmonicidad en la interacción entre “partículas” puede llevar a la aparición de una rica variedad de estructuras solitónicas estacionarias viajeras. Las configuraciones obtenidas aquí están determinadas específicamente aplicando las condiciones de frontera trivial, además, considerando los signos de los acoplamientos de los términos inarmónicos del potencial en cada punto que proporciona una interacción atractiva o repulsiva entre puntos de la red. Las condiciones de frontera trivial permiten la aparición de compactones tipo gota, cuando los parámetros han satisfecho las ecuaciones algebraicas específicas (15). Estas estructuras complementan la rica familia de estructuras solitónicas ya reportadas en la literatura.

Las gotas compactas no pueden coexistir con los kinks compactos del “primer tipo” (compactones tipo kink), ya que ambos compactones existen en diferentes regiones de los parámetros principales delimitados por sus velocidades. El valor de la velocidad cuando  $u^2 \rightarrow C_l$  en (12) habilitan la existencia de los compactones tipo kink descubiertas con el mismo modelo en Dusuel *et al.*, (1998). Para el caso cuando  $u^2 - C_l \neq 0$ , según las condiciones de frontera, las estructuras viajan con distintas velocidades de acuerdo a las ecuaciones (15) para condición de frontera trivial.

La característica esencial de solitones es su región de estabilidad, la cual determina las condiciones de validez de tal descripción y la transición de fase a un nuevo estado. Todavía no hemos tocado la parte correspondiente a las interacciones de estas estructuras nuevas solitónicas. Esta clase de problemas serán abordados en otras publicaciones. Además, la aplicación práctica de estos resultados en fenómenos ópticos sería un tema relevante con posibilidades de aplicaciones futuras. ☺



**BIBLIOGRAFÍA**

- Ablowitz, M. y H. Segur (1981). *Solitons and Inverse Scattering Transform*. SIAM Philadelphia.
- Dodd, R.; J. Eilbeck; J. Gibbon y H. Morris (1988). *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Academic Press Inc. London.
- Dusuel, S.; P. Michaux y M. Remoissent (1998). *Phys. Rev. E* 57-No 2, 2320.
- Fillipov, A. (1988). "Mnogoliky Soliton" (En ruso), *Nauka*, No. 48. Moscu.
- Infeld, E. y G. Rowlands (1990). *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*. Cambridge University Press.
- Makhankov, V. (1990). *Soliton Phenomenology*. Kluwer Academic Publisher.
- Makhankov, V.; R. Myrzakulov; A. Makhankov (1987). *Physica Scripta*, 35, 233-237.
- Rosenau, P. y J. Hyman (1993). *Phys. Rev. Lett.* 70, 564.
- Paulín, J. (2000). *Estructuras solitónicas en fenómenos no lineales*, Tesis de Licenciatura en Física, UAEM Toluca, México.