Análisis dimensional

José Luis Cortés Martínez[1]

RESUMEN

El alto número de variables que intervienen en los fenómenos del flujo de fluidos y los altos requerimientos de costo y tiempo en la experimentación hacen necesario el uso de técnicas que permitan optimizar estos recursos mediante la determinación del menor número de variables posibles. El problema consiste en determinar, en primera instancia, las variables involucradas y, posteriormente, los parámetros de los que depende el fenómeno, de modo que el número de éstos sea menor que el de las variables. Se presenta aquí la técnica de análisis dimensional utilizada en la determinación de dichos parámetros.

Palabras clave: análisis dimensional, flujo de fluidos, experimentación, optimización, costos, tiempo.

ABSTRACT

The variables involved in a fluid flow phenomenon are known and it may be formulated as a relation between a set of dimensionless parameters of the variables, the quantity of the parameters is lower than the variables. The advantage is that less experimentation is required to determine the dependence between variables. Dimensional Analysis offers a procedure to identify the relationships of parameters whose dependence may be determined experimentally.

Key Words: analysis dimensional, flow, experimentation, variables, parameters.

INTRODUCCIÓN

La solución de una buena parte de los problemas de flujos reales sólo puede encontrarse mediante la aplicación de métodos tanto analíticos como experimentales, dado que, en general, ninguno de los dos por sí solos es suficiente para resolver dichos problemas.

[1] Facultad de Ingeniería, UAEM. jlcortes_m@hotmail.com

El trabajo experimental en laboratorio debe ser realizado bajo las condiciones obtenidas a partir de un análisis cuidadoso de los datos experimentales, de tal manera que los requerimientos de costo y tiempo sean mínimos. En este sentido, el análisis dimensional permite apoyar el objetivo de obtener la mayor información posible en el menor número de experimentos.

Dentro del propósito de ahorro de tiempo y dinero, la experimentación llevada a un mínimo se realiza utilizando una técnica denominada *análisis dimensional*, basada en el teorema π de Buckingham, que garantiza la homogeneidad dimensional. Esta técnica no es exclusiva de la Mecánica de fluidos, sino que es útil para todas las disciplinas en las que es necesario diseñar y realizar experimentos (Cengel & Cimbala, 2006).

Un ejemplo típico de los requerimientos de costo y tiempo en la experimentación es el problema planteado por Shames (1992) sobre la determinación de la fuerza de arrastre (F) sobre una esfera lisa de diámetro (D) que se mueve a través de un fluido incompresible de viscosidad (μ) y de densidad (ρ) a la velocidad (V). El arrastre se puede establecer mediante la expresión:

$$F = f(D, \mu, \rho, V)$$

La determinación de esta relación encierra la dificultad de tener que modificar una de las variables dentro del paréntesis en cada ocasión. De esto se obtienen muchos gráficos que relacionan la fuerza con la velocidad para distintos diámetros de la esfera. En algunos casos existe densidad variable y viscosidad constante y, en otros, viscosidad variable y densidad constante; a manera de ejemplo la figura 1 muestra un gráfico posible. La gran cantidad de gráficos que se pueden generar complican el manejo de la información. De esta manera se genera gran cantidad de información y gráficas con las consecuentes dificultades para el análisis y la obtención de resultados. La complejidad de esta situación se puede reducir al utilizar la técnica de análisis dimensional, la cual se discute a continuación, cuya aplicación conduce a una relación entre parámetros de la siguiente forma:

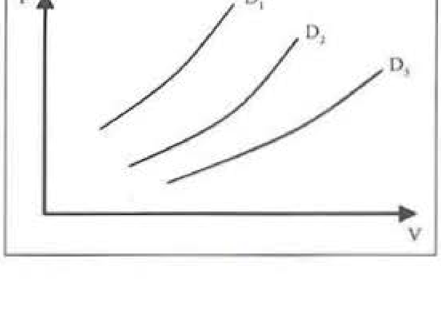
$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} F = \left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

La función (f) se determina experimentalmente como se explica más adelante.

Figura 1

GRÁFICO DE FUERZA-VELOCIDAD

PARA UNA ESFERA DE DIÁMETROS D_1, D_2 Y D_3 MOVIÉNDOSE DENTRO DE UN FLUIDO CUYA VISCOSIDAD Y DENSIDAD PUEDEN SER VARIABLES



TEOREMA π

El análisis dimensional está basado en el Teorema π de Buckingham y tiene el propósito de reducir el número n de variables que intervienen en un fenómeno físico. Éstas se pueden expresar en términos de r dimensiones fundamentales al agruparlas, formando $n - r$ parámetros adimensionales e independientes, con los cuales se puede describir dicho fenómeno.

El proceso de este análisis consiste en:

1. Identificar todas las magnitudes físicas significativas que intervengan en un fenómeno o problema determinado, dando lugar a la ecuación:

$$F(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = 0$$

Donde n es el número de magnitudes físicas (X_i) que intervienen en el fenómeno a estudiar.

2. Determinar las r dimensiones fundamentales en que se puedan expresar las n magnitudes físicas identificadas, por ejemplo [M, L, t] o [F, L, t]. En el caso de problemas de transferencia de calor deberá incluirse la temperatura (T).

3. Como la relación de las n magnitudes físicas debe ser dimensionalmente homogénea, el Teorema π establece la existencia de otra relación, derivada de la anterior, entre $n - r$ parámetros adimensionales de la forma:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-r}) = 0$$

Donde cada parámetro adimensional (π_i) es un monomio independiente de los demás y se forma con los productos de las variables o magnitudes físicas elevadas a las potencias (k_i) de la siguiente manera:

$$\pi_i = X_1^{k_1} * X_2^{k_2} * X_3^{k_3} * \ldots * X_n^{k_n}$$

De acuerdo con esta última relación y con la condición de adimensionalidad de cada parámetro se puede establecer lo siguiente:

$$[\pi] = [M^0 L^0 t^0]$$

Si a_1, b_1 y c_1 son los exponentes a los que están elevadas las dimensiones de masa (M), longitud (L) y tiempo (t) de la primera magnitud física, a_2, b_2 y c_2 las de la segunda y así sucesivamente hasta a_n, b_n, y c_n las de la última de las magnitudes físicas, entonces:

$$[\pi] = [(M^{a_1} L^{b_1} t^{c_1})^{k_1} * (M^{a_2} L^{b_2} t^{c_2})^{k_2} * \ldots * (M^{a_n} L^{b_n} t^{c_n})^{k_n}]$$

Realizando las operaciones indicadas resulta:

$$[\pi] = [M^{a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n} L^{b_1 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + b_n k_n} t^{c_1 k_1 + c_2 k_2 + \ldots + c_n k_n}]$$

Aplicando la condición de adimensionalidad para los parámetros π, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n = 0$$
$$b_1 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + b_n k_n = 0$$
$$c_1 k_1 + c_2 k_2 + \ldots + c_n k_n = 0$$

Las ecuaciones anteriores constituyen un sistema de r ecuaciones (número de dimensiones fundamentales) y n incógnitas (k_i), cuyos valores corresponden a los exponentes en que deben elevarse las variables o magnitudes físicas que intervienen en el fenómeno en cada uno de los n - r parámetros π_i.

Matriz de exponentes

El sistema anterior de ecuaciones se puede determinar a partir de una matriz de unidades fundamentales contra magnitudes físicas, la cual se conoce como matriz de exponentes. En este sentido, la matriz se construye con los exponentes a los que están elevadas las unidades fundamentales de cada una de las magnitudes físicas.

Tabla 1
Matriz de relación
entre exponentes de las dimensiones de las variable
y los exponentes k_i para determinar los parámetros π_i

Dimensiones	*Magnitudes físicas*				
	X_1	X_2	X_3	-	X_n
M	a_1	a_2	a_3	-	a_i
L	b_1	b_2	b_3	-	b_i
t	c_1	c_2	c_3	-	c_i
Exponentes	k_1	k_2	k_3	-	k_i

Las ecuaciones se determinan para cada una de las tres dimensiones (M, L y t), igualando a cero la suma de los productos de los exponentes de las dimensiones (a_i, b_i y c_i) de cada magnitud física por el exponente k_i correspondiente.

Para resolver el sistema deben elegirse arbitrariamente los valores de n - r de las incógnitas k_i. Para ello conviene escoger r de las magnitudes físicas A_i para que sus respectivos exponentes aparezcan en cada uno de los parámetros π_i. Es decir, el sistema de ecuaciones obtenido se resuelve para los exponentes k de las r magnitudes seleccionadas, por esta razón se suelen denominar variables repetitivas. Según Sotelo (2006), las magnitudes físicas mencionadas se eligen de tal manera que:

- Contengan en conjunto las r dimensiones fundamentales.
- Sean una propiedad del fluido, una dimensión geométrica importante y una característica del flujo.

- La magnitud física que se desea despejar no debe ser una variable repetitiva.

En el ejemplo de la esfera, la aplicación del análisis dimensional tiene como propósito la obtención de un conjunto de parámetros adimensionales que se puedan utilizar para correlacionar los resultados experimentales.

La relación funcional de las magnitudes físicas es:

$$F(F, V, D, \rho, \nu) = 0$$

Por lo tanto, si $n = 5$, $r = 3$, el número de parámetros adimensionales es $n - r = 2$

Utilizando como unidades fundamentales la masa (M), longitud (L) y tiempo (t), la matriz de exponentes queda de la siguiente forma:

Tabla 2

MATRIZ DE EXPONENTES

EN EL FENÓMENO DE UNA ESFERA QUE SE MUEVE EN UN FLUIDO

	F	V	D	ρ	υ
M	1	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1
T	-2	-1	0	0	-1
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5

Se seleccionan a las magnitudes físicas ρ, V y D para que aparezcan en cada parámetro y a los exponentes k_2, k_3 y k_4 como variables repetitivas. El sistema de ecuaciones queda en la forma:

$$k_1 + k_4 + k_5 = 0$$

$$k_1 + k_2 + k_3 - 3k_4 - k_5 = 0$$

$$2k_1 + k_2 + k_5 = 0$$

Para el primer parámetro se eligen arbitrariamente los valores $k_1 = 1$ y $k_5 = 0$, con lo cual resulta que $k_2 = -2$, $k_3 = -2$ y $k_4 = -1$. Por lo tanto, el primer parámetro π es:

$$\pi_1 = F^1 V^{-2} D^2 \rho^{-1} = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

Para el segundo parámetro se eligen arbitrariamente los valores $k_1 = 0$ y $k_5 = -1$ con lo cual $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ y $k_4 = 1$. Así, el segundo parámetro π es:

$$\pi_2 = V^1 D^1 \rho^1 \mu^{-1} = \frac{VD\ \rho}{\mu} = \frac{VD}{\upsilon}$$

Con estos resultados se obtiene la relación funcional de los parámetros π_1 y π_2, que es equivalente a la relación inicial de las cinco variables, por lo tanto:

$$F(F, V, D, \rho, \mu) = F(\pi_1, \pi_2)$$

Obviamente, esta última relación es más simple y permite que el número de experimentos a realizar sea mucho menor. La relación de los dos parámetros π se puede ver a su vez en la siguiente forma:

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

Y, entonces:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{VD}{v}\right) f(R_e)$$

Donde R_e es el número de Reynolds, y la fuerza de arrastre se calcula mediante la ecuación:

$$F = f(R_e) * \rho V^2 D^2$$

Esta ecuación se puede ver en la forma:

$$F = C_D * \rho V^2 D^2$$

Donde C_D es un coeficiente cuyo valor es una función del número de Reynolds de la forma:

$$C_D = f(R_e)$$

La determinación del coeficiente de arrastre para un flujo alrededor de una esfera ha sido ampliamente estudiada en términos de su relación con el número de Reynolds. Los resultados se presentan en forma de curvas y mediante tablas de comportamiento del coeficiente C_D para valores de $Re > 10^6$, sin embargo, se acepta que $C_D = 0.2$ para valores de Re más grandes (Potter & Wiggert, 2002).

Conclusiones

Como se ha mostrado en este trabajo, el análisis dimensional es una técnica eficaz que permite disminuir el número de parámetros necesarios para resolver un problema, reduciendo así la cantidad de trabajo experimental y el tiempo de uso de recursos humanos, de infraestructura y de equipamiento.

Las ventajas del análisis empírico se han incluido en forma más amplia y con mayor rigor en la producción bibliográfica más reciente relacionada con la Mecánica de fluidos, se destaca en ella su importancia para determinar, entre otros aspectos, los coeficientes de pérdida, los factores de fricción en el flujo en tuberías útiles para el análisis del comportamiento del flujo y para resolver el diseño de las mismas tuberías, y los coeficientes de arrastre y de sustentación en objetos de diferentes formas de perfil con los cuales es posible mejorar el desempeño de vehículos y lograr mejores condiciones de confort y de ahorro de combustible.

Referencias

Cengel, Y. A. & Cimbala, J. A. (2006). *Mecánica de fluidos, fundamentos y aplicaciones*. México: McGraw Hill.

Potter, M. C. & Wiggert, D. C. (2002). *Mecánica de fluidos* (3a. ed.). México: Thomson.

Sotelo Ávila, G. (2006). *Hidráulica genral. Volumen I. Fundamentos* (3a. ed.). México: Limusa.

Shames, I. (1992). *Mechanics of fluids*. New York: McGraw Hill.