



## AGRIBUSINESS REVIEW FOR MEXICO AND LATIN AMERICA

### SEPTIMA EPOCA, AÑO XIX, VOLUMEN 37 JULIO-DICIEMBRE 2015

- ◆ Canales y márgenes de comercialización de chile manzano en el estado de México.
- ◆ La función de producción cúbica, su aplicación en la agricultura.
- ◆ Trabajo cooperativo y desempeño académico de estudiantes de economía en la unidad temática: economía agraria.
- ◆ La metodología "UALAE" implementada en la administración de una empresa lechera.
- ◆ Prácticas técnico – administrativas de la producción de leche en la provincia del Tundama, Boyaca, Colombia.
- ◆ Evaluación financiera de la producción bajo condiciones de invernadero: análisis del agronegocio "SPR de RL El Sureño Invernaderos".
- ◆ Caracterización de productores de piña (*Ananas comosus*) de la zona del Papaloapan de Veracruz, México.
- ◆ Correlación entre el uso de las tecnologías de la información y la comunicación y la competitividad de las micro, pequeñas y medianas vinícolas de la ruta del vino del Valle de Guadalupe, B.C.
- ◆ Creación de un centro de gestión y desarrollo empresarial en el programa de administración de empresas agropecuarias UPTC-sede Duitama.
- ◆ Análisis económico, ecológico y cultural de baños secos en la Comarca Lagunera, México.
- ◆ Rendimiento en la conversión cármica en ganado bovino con el uso de microclima. Caso Engorda-Pozo Enrique, San Miguel de Horcasitas, Sonora.
- ◆ Efectos de la reforma al Artículo 27 en la producción agropecuaria en México.
- ◆ Viabilidad económica para la producción y venta de tilapia (*Oreochromis niloticus*) en Amatepec, Estado de México.
- ◆ Redes sociales empresariales y desarrollo local: Esquemas de colaboración en agroempresas de Chiapas.
- ◆ Características socioeconómicas y rentabilidad de los sistemas de producción de maíz bajo condiciones de temporal de la península de Yucatán, México.
- ◆ Agroturismo y competitividad, como oferta diferenciadora: el caso de la ruta agrícola de San Quintín, Baja California.
- ◆ Análisis del mercado internacional de los becerros producidos en Sonora, México.

XVI Encuentro Académico Nacional en Administración de Agronegocios y Disciplinas Afines. Ensenada, B.C. Febrero de 2016.

[www.somexaa.com.mx](http://www.somexaa.com.mx)

ORGANO OFICIAL DE LA SOCIEDAD MEXICANA DE ADMINISTRACION AGROPECUARIA

# **REVISTA MEXICANA DE AGRONEGOCIOS**

SÉPTIMA ÉPOCA. AÑO XIX. VOLUMEN 37  
JULIO-DICIEMBRE DEL 2015  
(Páginas 1 a 208)

**El Consejo Editorial de la Revista**, está integrado por un grupo distinguido de directivos, académicos universitarios y representantes de los productores regionales, líderes nacionales en su ramo. Así como por una mayoría de profesionales que de acuerdo a su localización geográfica, áreas de especialidades e interés profesional, son miembros activos de organismos internacionales entre los que destacan la International Food and Agribusiness Management Association, American Agricultural Economics Association, Canadian Agricultural Economics and Farm Management Society and The European Association of Agricultural Economics. Algunos de los miembros del Consejo forman parte activa del Sistema Nacional de investigadores-SEP-CONACYT.

**REVISTA MEXICANA DE AGRONEGOCIOS.** Revista semestral. Editor Responsable: Salomón Moreno Medina. Co-editor: Martha H. Martín Rivera, Rafael Retes López. Asesor Editorial: Alfredo Aguilar Valdés. No. de Reserva al Título en Derechos de Autor: 04-1999-042716093200-102. No. de Certificado de Solicitud de Título y Contenido: 1/432 "99"/14592. Domicilio de la publicación: Obregón No. Colonia Centro. C.P. 84600. Santa Ana, Sonora. Imprenta: PUBLIMPRESOS: Calle Revolución C.P. 83000. Hermosillo, Sonora. Distribuidor: SOMEXAA A.C.- México. Tiraje: Mil ejemplares más los derechos de reserva.

## **Índices Internacionales que han evaluado y aceptado a la Revista:**

**La Revista fue evaluada y aceptada por el Índice Bibliográfico CLASE.**

**(Of.517.01.HL/1999), Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades. Universidad Nacional Autónoma de México.** Dirección General de Bibliotecas. Biblioteca – Hemeroteca Latinoamericana. Ciudad Universitaria, 04510, D.F.

**La Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe en Ciencias Sociales y Humanidades-Red AlyC** con sede en la Universidad Autónoma del Edo. de México, ha seleccionado a la Revista por su relevancia en la Región Latinoamericana. (noviembre 2002).

**[www.redalyc.uaemex.mx](http://www.redalyc.uaemex.mx)**

**Latindex.-Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, El Caribe, España y Portugal**, ha considerado que la Revista cumple con los criterios exigidos para ser seleccionada dentro de este índice iberoamericano a nivel internacional (Folio 14827 del 26 de noviembre del 2005).

<http://www.latindex.org/larga.php?opcion=1&folio=7225>

<http://www.latindex.org/larga.php?opcion=1&folio=14827>

**Índice HELA–Catálogo Electrónico de la Hemeroteca Latinoamericana**, Universidad Nacional Autónoma de México. Oficio de confirmación UNAM (26 de marzo del 2007).

<http://dgb.unam.mx/hela.html>

**El Índice Electrónico Internacional titulado AgEcon Search** (Research in Agricultural & Applied Economics), editado por la Universidad de Minnesota (Depto. de Economía Aplicada) en colaboración con la Asociación de Economía Agrícola Aplicada-AAEA.

<http://ageconsearch.umn.edu/handle>

Desde el volumen 22 del 2008, el **Índice RePEc–Research papers in Economics-** ha incorporado los artículos de nuestra revista en la página titulada EconPapers (Economics at your fingertips), publicada por la Swedish Business School at Orebro University.

<http://econpapers.org/article/agsremeag/>

A partir del 2009, el **Hispanic American Periodicals Index-HAPI**, del Instituto Latinoamericano de la Universidad de California en los Angeles-UCLA, ha incluido a la revista para su difusión latinoamericana, por su calidad en la investigación aplicada en Agronegocios.

<http://hapi.ucla.edu>

**ISSN – 1405 – 9282**

---

## LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN CÚBICA, SU APLICACIÓN EN LA AGRICULTURA

---

Marcos Portillo Vázquez<sup>1</sup>, Francisco Pérez Soto<sup>1</sup>, Esther Figueroa Hernández<sup>2</sup>, Lucila Godínez Montoya<sup>2</sup>, Ma. Teresa Pérez Soto<sup>3</sup> y Geronimo Barrios Puente<sup>1</sup>

---

### Cubic production function, its application in agriculture

#### ABSTRACT

The Cobb-Douglas production function is most frequently mentioned in texts of Economic Theory and cubic production function proposed here is more convenient to show evidence when applied to agricultural production where producers try to streamline their production process at low levels of input use. In general, if the producer of low investment capacity has only money to implement a number of the units required for maximum efficiency in the production of a hectare of land, quantity of variable input to apply is the amount of available factor applied the proportion of fixed factor and in no way to get out of this usage rate of input. This result is particularly important because without that producer a single penny increase in spending relative to available, you can generate a recommendation that leads to higher incomes with their resource. Increased amount of product to obtain without increasing investment is one of the few technical-economic recommendations that may be available to low-income producers and limited availability of investment capital.

**Keywords:** Agricultural production, cubic function, economic efficiency, optimization, variable inputs.

#### RESUMEN

La función de producción tipo Cobb-Douglas se menciona con mayor frecuencia en los textos de Teoría Económica y la función de producción cúbica, aquí propuesta, trata de demostrar evidencias de mayor conveniencia cuando se aplica en el análisis de la producción agrícola en los casos en los cuales los productores tratan de hacer eficiente su proceso productivo a niveles reducidos de uso de los insumos. En general, si el productor de baja capacidad de inversión sólo posee dinero para aplicar una fracción de la cantidad de unidades necesarias para obtener la máxima eficiencia en la producción de una hectárea de tierra, el tanto de insumo variable a ser aplicado es la cantidad disponible de dicho factor, aplicado en la proporción del insumo fijo y por ningún motivo debe salirse de dicha proporción. Este resultado es de particular importancia porque sin que el productor aumente un solo peso en gasto con respecto al presupuesto disponible, se le puede generar una recomendación que le conduce a mejores ingresos con su recurso disponible. Así obtendrá una mayor cantidad de producto sin incrementar su inversión, siendo ésta una de las pocas recomendaciones técnico-económicas que pueden estar al alcance de los productores de bajos ingresos y de poca disponibilidad de capital de inversión.

**Palabras clave:** Producción agrícola, función cúbica, eficiencia económica, optimización, insumos variables.

#### INTRODUCCIÓN

La función de producción tipo Cobb-Douglas se menciona con mayor frecuencia en los textos de Teoría Económica. Las razones que favorecen la aparición de esta función de producción en los textos

---

<sup>1</sup> Doctor en Ciencias en Economía. División de Ciencias Económico Administrativas, Universidad Autónoma Chapingo. Carretera México-Texcoco Km 38.5, C. P. 56230, Texcoco, Estado de México.

<sup>2</sup> Doctor en Ciencias en Economía Agrícola, Licenciatura en Economía. Centro Universitario UAEM Texcoco, Universidad Autónoma del Estado de México. Av. Jardín Zumpango S/N Fracc. El Tejocote, Texcoco, Estado de México. E-mail: esfigue\_3@yahoo.com.mx

<sup>3</sup> Investigadora independiente

de teoría de la producción, se relacionan con los procesos más comunes que se realizan en países desarrollados en los que, normalmente, no se contemplan cantidades relativamente pequeñas a producir. En esos casos, cuando se trabaja en procesos de optimización para determinar cuál es la cantidad de bienes a producir que generen la máxima ganancia a la empresa, se realizan en cuantías de miles o decenas de millares de unidades a producir. Una empresa automovilística, por ejemplo, no menciona cantidades de 100 o 200 vehículos a producir en un año, es decir ellos trabajan en la segunda etapa de la producción y nunca producen en la llamada "primera etapa de la producción" ya que de acuerdo a la teoría de la producción, se recomienda, y es una recomendación totalmente válida, que no se debe producir en esa etapa de la producción (Bishop y Toussaint, 1991). La razón pragmática de tal sugerencia es que en la primera etapa la producción crece a un ritmo mayor que el correspondiente a la aplicación del insumo variable y por ello crece más el ingreso que el costo ocasionando que la ganancia en dinero o en especie sea cada vez mayor mientras se mueve a mayores dosis del insumo dentro de esa etapa.

En cambio, en la segunda etapa se requiere un análisis más minucioso para saber hasta qué nivel de aplicación del insumo variable se debe llegar con tal de obtener la máxima ganancia pues al inicio de esta etapa el valor de los incrementos en el valor de la producción compensan sobradamente el incremento en los costos del insumo variable pero más adelante esa brecha favorable se ve disminuida. Por su parte, las funciones de producción tipo Cobb-Douglas sólo exhiben rendimientos positivos marginales decrecientes (incrementos en producto cada vez menores como respuesta a incrementos unitarios del insumo variable que se analiza en los procesos de optimización). Así, está característica de la función de producción tipo Cobb-Douglas significa que en ella sólo se encuentra presente la segunda etapa de la producción. Por ello, una función de producción tipo Cobb-Douglas es apropiada en el análisis económico de los procesos de producción a mayor escala tales como la agricultura netamente comercial y en la producción industrial. Otra razón que le da preferencia a esta función, está dada porque además, posee propiedades en las que se refleja con belleza y armonía la disciplina de las matemáticas (Henderson y Quandt, 1994).

El objetivo del trabajo fue la comparación de propiedades de una ecuación cúbica y la de una función de producción tipo Cobb-Douglas ambas aplicadas a la agricultura así como el análisis de la función cúbica por separado para demostrar evidencias de mayor conveniencia cuando este tipo de funciones se aplican al análisis de la producción agrícola

## METODOLOGÍA

### La función de producción cúbica

Una función de producción es la relación que existe entre la producción resultante y la cantidad o las cantidades de insumo(s) aplicado(s) a una unidad de insumo fijo.

En el caso de una función de producción de un factor, aquella suele tener un rango de rendimientos crecientes, seguido por una etapa de rendimientos decrecientes positivos los cuales posteriormente se tornan negativos. La forma más sencilla de representar tal situación es la ecuación cúbica o también llamada polinomio de tercer grado, la cual según Yunker (2008) puede ser representada, en su forma aditiva, por:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 - \alpha_3 X^3$$

Dónde: Y corresponde al producto total por unidad de insumo fijo o rendimiento, X es el factor variable de la producción,  $\alpha_0$  corresponde al intercepto y  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  son parámetros positivos. Yunker (2008) señala que aunque la función de producción cúbica suele estar presente en los libros teóricos, presenta escasa aplicación en la investigación económica profesional, mencionado la dificultad de trabajar matemáticamente con polinomios.

---

Para ejemplificar las características económicas de las funciones de producción cúbicas, a continuación se abordará el caso de la aplicación de diferentes cantidades de nitrógeno como único insumo variable en la producción de maíz. De esa manera la expresión de la función genérica es la siguiente:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 - \alpha_3 N^3$$

donde:

Y=Producción de maíz por hectárea

N=Cantidad aplicada de nitrógeno por hectárea

$\alpha_0$  corresponde al intercepto y

$\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  son parámetros positivos tal como fue explicado anteriormente

Como en todo recurso que puede aplicarse en diferentes cantidades y proporciones, con respecto a otros factores de la producción, que permanecen constantes en su nivel de uso en la empresa, la respuesta de la producción de maíz a las diferentes cantidades aplicadas de nitrógeno devienen en una función cúbica que tiene las siguientes propiedades:

Al principio, refleja incrementos en producción cada vez mayores ante cambios unitarios del recurso variable (productos marginales crecientes). El uso de las primeras unidades de nitrógeno aplicadas al suelo, presentan respuesta vigorosa en rendimientos de maíz. Gráficamente, este fenómeno le imprime una concavidad a la función de producción vista desde arriba (Mas-Collel, *et al.*, 1995).

A cierto nivel de utilización del insumo variable se empiezan a tener incrementos en producción, positivos pero de cada vez menor magnitud (productos marginales decrecientes) en este nivel se da un punto de inflexión de la función de producción. Se llega a un nivel de utilización del insumo variable en el que la última unidad de este no incrementa en nada a la producción (producto marginal cero). En este nivel de utilización del insumo variable se alcanza la máxima producción producto total máximo o producto máximo por unidad de insumo fijo o rendimiento.

Después de alcanzar el mayor nivel de producción, los incrementos en la utilización del insumo variable hacen disminuir la producción total (productos marginales decrecientes negativos): por ejemplo esto puede ocurrir cuando se emplean cantidades excesivas de nitrógeno por hectárea aplicados a un cultivo. En estos casos las disminuciones en producto total debido a aumentos en el nitrógeno se explican porque grandes cantidades de dicho fertilizante elevan la salinidad del suelo inhibiendo el intercambio catiónico por lo cual la tensión que debe vencer la planta para extraer agua del suelo aumenta más allá de las 14 atmósferas de presión, límite en el cual la fuerza de la planta ya no puede vencer al efecto de "succión" edáfica. Así en los tejidos de la planta hace falta humedad a pesar de que en el suelo sí podría haber agua pero no en una forma disponible. La expresión popular en estos casos reza que "se quema la planta por exceso de nitrógeno".

Adicionalmente al incremento en el producto total o rendimiento, ocurren dos procesos económicos simultáneos. El primero se refiere a que el producto medio o promedio alcanza su máximo cuando una recta que parte del origen y toca por arriba a la función de producción ese punto de tangencia se da en una cantidad mayor de nitrógeno aplicado que la que corresponde al punto de inflexión. Mochón (1987), y Vargas (2002) El máximo producto medio que puede alcanzar el nitrógeno aplicado al cultivo puede enunciarse como el nivel de empleo del nitrógeno donde se obtiene la máxima conversión de nitrógeno en producto o grano.

La segunda cuestión es que el aumento en el producto que se obtiene por la aplicación de cada unidad adicional de insumo variable (producto marginal) alcanza su máximo en el punto de inflexión

precisamente, lo cual significa que ése es el límite entre los rendimientos marginales crecientes y los rendimientos marginales decrecientes.

La representación gráfica de la función de producción para nitrógeno en kilogramos por hectárea aplicados a un cultivo de maíz, toma la siguiente forma (Figura 1):

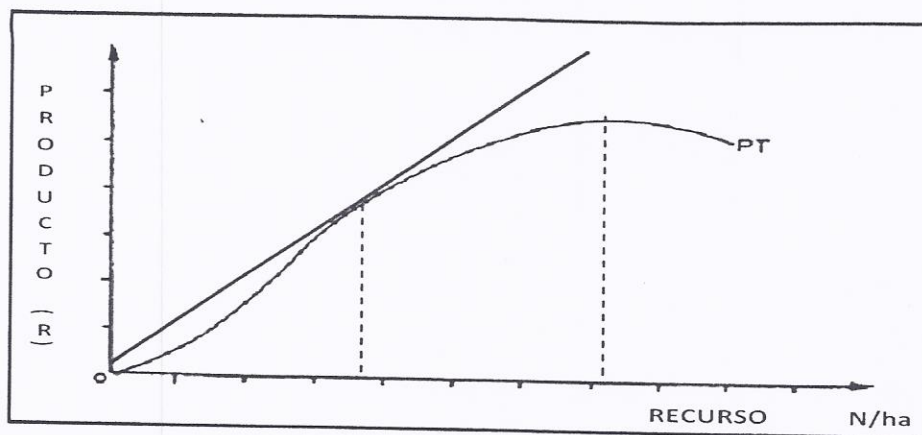


Figura 1. Función de producción para nitrógeno aplicado a un cultivo de maíz (Kg/ha)

Su expresión algebraica particular tiene la forma general siguiente:

$$\text{Maíz} = a + bN + cN^2 + dN^3$$

Donde  $a$ , es la ordenada al origen que representa la producción atribuible a los demás factores, tierra, fósforo, potasio, semilla y otros, incluso el nitrógeno existente en el suelo. Para procesar la función e identificar el uso óptimo de nitrógeno, simplemente se elimina con lo cual manda la función al origen y los diferentes niveles de producción se deben exclusivamente al efecto del nitrógeno aplicado. El coeficiente  $b$  es de signo positivo, el  $c$  es positivo y de menor magnitud que el  $b$ . El coeficiente  $d$ , es negativo y de magnitud menor que la del  $c$ . El término cuadrático le da concavidad a la función. El término cúbico le da una segunda concavidad a la función, lo que permite captar tanto los productos marginales crecientes como los decrecientes positivos y negativos (Portillo, 2011). Si el orden de los factores y los signos matemáticos de los mismos ocurren en otra secuencia, no se cumplirían las condiciones de segundo orden o de suficiencia y habría que establecer otro tipo de restricciones para optimizarlas. Además es posible que otras formas funcionales, como las funciones trascendentales puedan ayudar a representar las características económicas de las funciones de producción aquí mostradas pero, el nivel de matemáticas sería más exigente.

La recta que parte del origen, en su punto de tangencia por arriba de la función, proyectado sobre el eje de la  $x$ , identifica el nivel de máxima conversión de nutriente en producto (producción de máxima eficiencia del recurso nitrógeno). El punto más alto de la función, proyectado sobre el eje horizontal, señala la cantidad de nitrógeno por hectárea que genera el máximo rendimiento de grano en una hectárea cantidad que es conocida como nivel máximo-eficiente de aplicación del insumo variable (NME).

#### Proceso de optimización del uso de nitrógeno por hectárea

A partir de la figura 1, se formulan las dos funciones auxiliares mencionadas: la de producto medio (PMe) y la de producto marginal (PMg). El PMe resulta de dividir la función de producción original o producto total entre el insumo  $N$ , dando lugar a una función cuadrática que corresponde a la parte inferior de la figura 2, con nivel máximo que corresponde al punto de tangencia  $E$ , en la figura original;

es decir, en  $E$ , el PMe toma su valor máximo, después empieza a disminuir. El PMg es el resultado de derivar la función original con respecto a la variable  $N$ , que se conoce como primera derivada de la

función. La primera derivada, se identifica con el nombre de producto marginal, dado que significa el incremento que se obtiene en producción al aumentar una unidad de insumo variable, en este caso el nitrógeno. Su punto máximo corresponde al punto de inflexión de la función original y delimita la fase de los rendimientos físicos marginales crecientes de los rendimientos físicos marginales decrecientes.

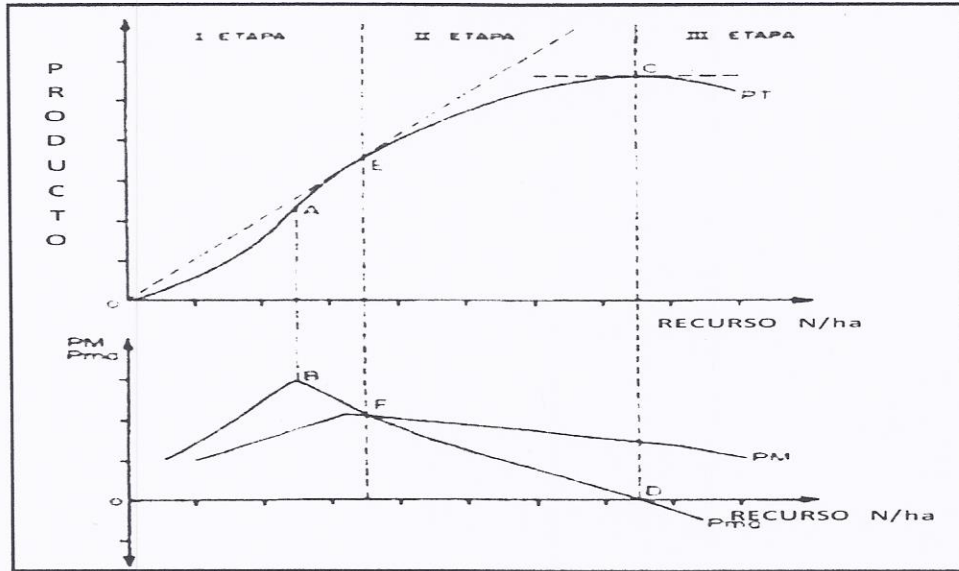


Figura 2. Etapas de la función de producción del rendimiento de grano de maíz

A la cantidad de insumo variable que genera el máximo producto medio (PMe) se le conoce como nivel de máxima eficiencia del recurso. Este nivel delimita la etapa I de la producción que está dada por cantidades menores de uso del insumo variable, en este caso el nitrógeno (Bishop y Toussaint, 1991). La etapa II inicia en el nivel de máxima eficiencia del insumo variable N y, termina en el que corresponde a la máxima producción (PT) o NOT o máximo producto total por unidad de insumo fijo (o hectárea del cultivo en el caso de un producto agrícola). La etapa III va desde el punto de máxima producción y contiene al rango de cantidades mayores de nitrógeno (insumo variable), caída de la producción total o de productos marginales decrecientes negativos (Figura 2).

El primer razonamiento lógico es que nadie debería emplear cantidades de nitrógeno pertenecientes a la tercera etapa, es decir, nadie debería aplicar cantidades adicionales de nitrógeno que generan caída del nivel de producción. Por lo cual debiera descartarse la etapa III de la producción (Bishop y Toussaint, 1991).

Por otra parte, cantidades de nitrógeno que pertenecen a la primera etapa de la producción tampoco debieran utilizarse. Esta afirmación merece una mayor atención pues en dicha etapa a medida que no movemos a la derecha el producto obtenido crece más que la cantidad de insumo variable aplicado razón por lo cual los ingresos crecen más que los costos, puesto que hemos asumido que los demás insumos permanecen fijos; por ser de esa naturaleza o porque en el experimento así fue determinado. Así puede entenderse fácilmente que al trabajar en la etapa I de la producción siempre habrá un punto a la derecha de mayor ganancia.

En ese sentido, en el caso de la aplicación de nitrógeno en el cultivo del maíz, si se toma únicamente la parte de la función de producción que contiene cantidades menores e igual a la de máxima eficiencia y



considerando que en este intervalo, la función de producción tiene productos marginales crecientes y una pequeña porción de productos marginales decrecientes, el análisis resulta más claro.

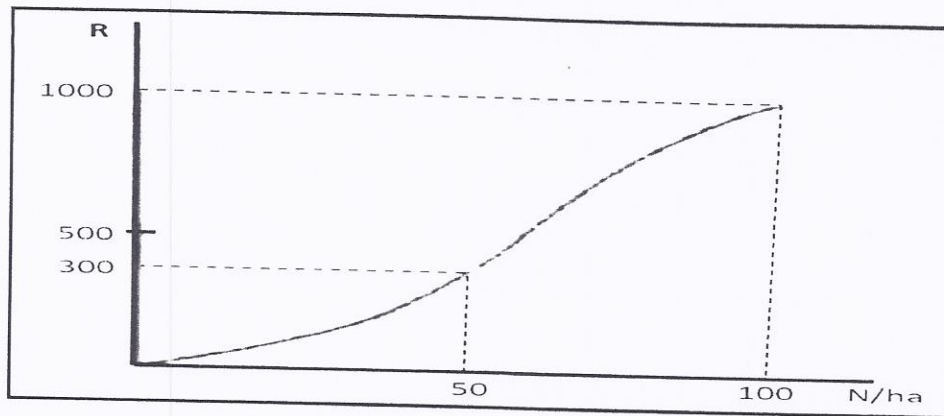


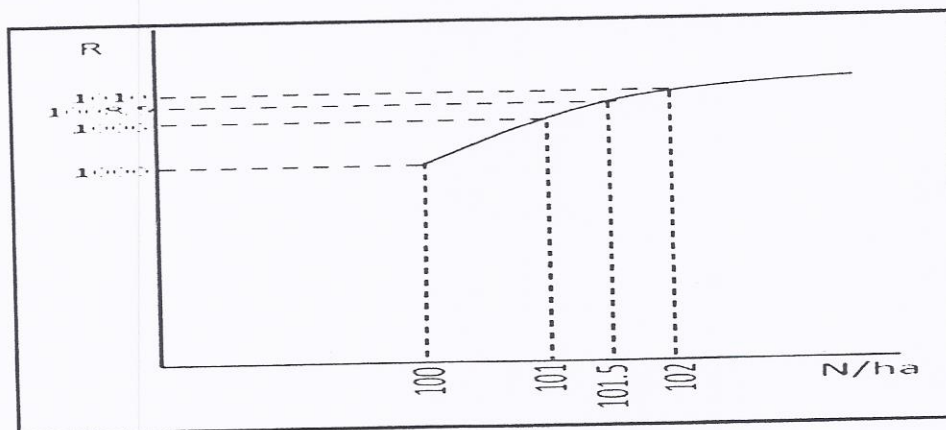
Figura 3. Función de producción de cantidades de la etapa I y II

Si el producto medio máximo corresponde a una cantidad de 100 kilogramos por hectárea aplicada al cultivo y a una producción de 1,000 kilogramos de maíz por hectárea. Asignando un precio de \$10 al kilogramo de nitrógeno incluyendo su aplicación, el costo de estos 100 kg de fertilizante sería de 1,000 pesos y con esa inversión el producto a obtener es de 1,000 kilogramos de grano. Situación muy frecuente, según Volke y Sepúlveda (1987) en agricultura de temporal en predios minifundistas y con cultivos básicos como el maíz, condiciones en las cuales el agricultor, normalmente, no posee el capital necesario para aplicar la cantidad de 100 kilogramos por hectárea. Suponiendo que sólo posee 500 pesos, sólo puede adquirir la mitad del fertilizante que le llevaría al nivel de máxima eficiencia o máximo producto promedio. Se puede apreciar en la figura 3 que 50 kilogramos de Nitrógeno aplicados a la tierra (la mitad de los 100 necesarios) no llevaría la producción a la mitad de los 1,000 kilogramos sino que puede apreciarse que le llevaría la producción a menos de la mitad de 1,000 kg de grano. También puede hacerse el razonamiento de que si aplica los 50 kilogramos de nitrógeno en la mitad de la hectárea, sería el equivalente a 100 kilogramos por hectárea y por lo tanto obtendría 500 kilogramos de grano en esa hectárea. Eso significa un mayor nivel de producción con el mismo costo de la inversión en fertilizante. De la misma forma puede comprobarse que si sólo posee 750 pesos, puede aplicar 75 kilogramos de nitrógeno y aplicarlo en tres cuartas partes de la hectárea y obtendría 750 kilogramos de grano equivalentes al rendimiento de 100 kilogramos aplicados por hectárea.

En general, si el productor de baja capacidad de inversión, sólo posee dinero para aplicar una cantidad de los kilogramos necesarios para obtener la máxima eficiencia en la producción de una hectárea de tierra, el nitrógeno a aplicar es el de la cantidad de nitrógeno disponible aplicado en la proporción de la superficie a fertilizar y de ninguna forma salirse de esta proporción de uso de insumo. Este resultado, es de particular importancia, porque sin que el productor aumente un solo peso en gasto con respecto al disponible, se le puede generar una recomendación que le conduce a mejores ingresos con su recurso disponible lo cual significa mayor cantidad de producto a obtener, sin incrementar su inversión, siendo ésta una de las pocas recomendaciones que pueden estar al alcance de productores de bajos ingresos y poca disponibilidad de capital de inversión.

El resultado cobra mayor importancia cuando se considera que además de ser útil para un gran número de productores, se puede aplicar para diversos insumos, que pueden emplearse en diferentes cantidades sobre una hectárea de tierra cultivada, como son los otros nutrientes Fósforo y Potasio así como semilla por hectárea o densidad de siembra, agua en caso de contar con riego, herbicidas y otros, en el mismo producto, lo que multiplicaría los incrementos en rendimiento del cultivo empleando los recursos disponibles en la proporción, que corresponde a cada uno de éstos, para generar su máxima eficiencia de la inversión.

El proceso anterior no es posible obtenerlo en una función de producción en la que se ajustan los diferentes rendimientos por hectárea a una expresión algebraica tipo Cobb-Douglas, por lo que se verá posteriormente. Siguiendo con el proceso de optimización para condiciones diferentes de los productores, por ejemplo para aquellos que no tienen limitaciones en el capital para invertir en fertilizantes, en este caso, en dosis necesarias para obtener mejores resultados en términos de ganancia total de la inversión. Después de identificado el nivel de uso de nitrógeno de máxima eficiencia puede realizarse un procedimiento que señale si es conveniente abandonar el punto de máxima conversión de nitrógeno en grano. Para este propósito y empleando sólo la parte de la función de producción que no contiene ni a la etapa I ni a la etapa III; es decir, solo la etapa II.



**Figura 4. Parte de la función de producción con rendimientos marginales decrecientes positivos**

Debe observarse también (Figura 4), que esta etapa, únicamente, contiene productos marginales decrecientes positivos (Incrementos de producto cada vez menores, atribuibles a incrementos unitarios del insumo nitrógeno). Si se rebasa el nivel de uso de 100 kg/ha de nitrógeno, se abandona el punto de máxima eficiencia técnica, del insumo nitrógeno o insumo variable y se observa lo que ocurre con la producción de un kilogramo más de nitrógeno aplicado al cultivo. Si como se ve en la figura, la producción aumenta a 1006, (un producto marginal de 6 para el kilogramo 101 de nitrógeno) tomando un incremento en costo equivalente al precio de 10 pesos por kilogramo de nitrógeno y un precio del grano de 2 pesos por kg, haciendo cuentas, se ve que los 10 pesos adicionales invertidos en nitrógeno generan 12 pesos por el incremento de 6 kg de grano. Sea la que sea la ganancia con 100 kilogramos de nitrógeno el kg 101 aumenta en 2 pesos esta ganancia.

Posteriormente, se puede hacer la observación de que si se aplica un kg más de nitrógeno, el kg 102, dado que se está en etapa de rendimientos decrecientes, la producción total no puede aumentar hasta 1012, sino que se quedaría en 1010 que corresponde a un producto marginal de 4 para el kilogramo 102 de nitrógeno. En este caso se invierten 10 pesos adicionales para pasar al kg 102 con costo de 10 pesos para obtener 8 pesos de incremento en el ingreso que generan los 4 kg de grano lo cual ocasiona una pérdida de la inversión de 2 pesos. La decisión razonada, por lo tanto, sería no realizar la inversión en el kg 102 de nitrógeno. Con la inversión de medio kilogramo de nitrógeno más, agregado a los 101, es de esperarse que este primer medio kg genere mayor incremento en la producción que el segundo medio kg para llegar a los 102. La producción total con 101.5 kg de nitrógeno por hectárea, puede conducir a una producción total de 1008.5. El incremento en costo será de 5 pesos y el incremento que genera en producto es de 2.5 Kg con valor de los 5 pesos que paga el costo del incremento en el insumo.

Este punto (el de 101.5 kg de N) será, por tanto, el que genera la máxima ganancia de la inversión realizada en nitrógeno, es decir, es el punto, en la curva de PT conocido como nivel óptimo económico (NOE).

La relación implícita en este proceso de optimización es que el incremento en producto que genera una unidad de nitrógeno debe tener el mismo valor que el precio de un kg de nitrógeno. Visto de otra forma, el producto marginal de una unidad de nitrógeno debe ser igual a la relación de precios (precio del nitrógeno/precio del grano), esto es, precio del insumo variable entre precio del producto. En el ejemplo anterior  $10/2 = 5$ , significa que se requiere de un producto marginal de 5 para pagar el precio de un kg de nitrógeno. Imprimiendo dinamismo al proceso, se puede considerar que si el precio del nitrógeno se subsidia y baja a 8 pesos el kg, se requerirían sólo 4 kg de producto marginal para pagar el costo de un kg de nitrógeno y en ese caso debería aumentar el uso de este insumo a la cantidad de 102 que fue desechada con la relación de precios 10/5. De seguir disminuyendo el precio del nitrógeno la cantidad que genera la máxima ganancia es cada vez con mayor uso del nitrógeno hasta el nivel donde se tenga la igualdad:

$$\text{Producto marginal} = \text{Precio del nitrógeno/precio del maíz}$$

De esta relación, precio del insumo/precio del producto, se puede deducir que para llegar al punto más alto de la función de producción (NOT) donde el producto marginal es "cero" en el punto en el cual la última unidad de nitrógeno no genera aumento alguno en la producción, dicha relación indica que el precio del producto debería ser cero (nitrógeno regalado), de no ser así, el óptimo se encontrará siempre en niveles menores de uso de nitrógeno, específicamente en el nivel donde el producto marginal permita recuperar el costo unitario del nitrógeno. Expresado de otra forma, si en la condición de máxima ganancia se le asigna el valor de cero al producto marginal (lado izquierdo de la igualdad) que corresponde al punto más alto de la función, para que se cumpla esta igualdad se requiere que el numerador de la parte derecha (precio del nitrógeno) sea cero o precio nulo.

El razonamiento anterior, lleva a la conclusión de que es un error emplear el insumo nitrógeno hasta el nivel de máximo rendimiento por hectárea, que sólo sería congruente con adquisición regalada de los mismos. Este punto tampoco es posible identificarlo en la función Cobb-Douglas porque esta función no presenta valor máximo, por lo tanto, tampoco tiene rendimientos marginales negativos que corresponden a la "quema del cultivo" por exceso de nitrógeno. Por lo cual se requiere saber el punto donde inician para no llegar hasta ese nivel de uso de nitrógeno (Bishop y Toussaint 1991).

## ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### Expresión algebraica de una función de producción cúbica

Si la variable dependiente se mide en kilogramos por hectárea (R) que se obtienen al emplear diferentes cantidades de nitrógeno por hectárea (N) la función de producción cúbica toma valores como los del siguiente ejemplo:

$$R = 1200 + 7N + 2N^2 - 0.01N^3$$

Los 1200 de la ordenada al origen representan la producción atribuible a los factores diferentes al nitrógeno aplicado, por lo que simplemente se elimina este dato y queda la función que genera los valores de producción atribuibles, exclusivamente, a diferentes niveles de aplicación del nitrógeno:

$$R = 7N + 2N^2 - 0.01N^3$$

La función de Producto Medio (PMe) que resulta de dividir ambos miembros de la función entre N, conduce a la expresión siguiente:

$$\text{PMe} = R/N = 7 + 2N - 0.01N^2$$

Derivando esta función promedio e igualando la derivada a cero, como condición de primer orden para obtener el máximo de la función, o máximo PMe, se tiene:

$$\frac{dPMs}{dN} = 2 - 0.02N = 0$$

$$\text{De donde: } N = \frac{2}{0.02} = 100$$

De acuerdo con este resultado, la dosis de nitrógeno por hectárea que genera el máximo producto medio, asociado a la máxima eficiencia del insumo nitrógeno es de 100 kg/ha de nitrógeno. Por tanto  $N = 100$  es la recomendación económica más apropiada para productores de bajos ingresos, que si no cuentan con los recursos para adquirir los 100 kg de nitrógeno, pueden aplicar la cantidad que pueden adquirir y aplicarlos en la proporción de superficie que mantenga la misma relación de 100 kg/ha de nitrógeno. Que pueden ser 50 kg de nitrógeno aplicados en media hectárea o bien 75 kg aplicados en tres cuartas partes de la hectárea dependiendo de la cantidad de nitrógeno que esté a su alcance, para mantener la producción proporcional que le genera la relación 100Kg de nitrógeno o hectárea, proporción siempre mayor a la de aplicar la cantidad limitada de nitrógeno en toda la hectárea.

Si las condiciones financieras del productor no son limitantes para invertir en nitrógeno aplicado al suelo, el nivel perseguido deberá ser el que genere la máxima ganancia atribuible a la inversión en Nitrógeno. Para el proceso de obtención del nivel de nitrógeno que genera la máxima ganancia o NOE se persigue la igualdad entre el producto marginal dado por la derivada de la función de producción y la relación de precios: precio del insumo/precio del producto, considerando como precios del insumo y del producto 60 y 3, se buscaría el valor de N donde su producto marginal sea de  $20 = 60/3$ . De tal forma, que obteniendo la derivada de la función e igualando a 20, se llega a la siguiente expresión:

$$R = 7N + 2N^2 - 0.01N^3$$

$$\frac{dR}{dN} = 7 + 4N - 0.03N^2 = 20$$

$$-13 + 4N - 0.03N^2 = 0$$

Aplicando la fórmula general de la función cuadrática, se obtienen los siguientes valores para N.

$$\frac{dR}{dN} = 7 + 4N - 0.03N^2 = \frac{60}{3}$$

$$\frac{dR}{dN} = 7 + 4N - 0.03N^2 = 20$$

$$-13 + 4N - 0.03N^2 = 0$$

$$N = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$N = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-0.03)(-13)}}{2(-0.03)}$$

De donde:

$$N_1 = 3.333 \quad N_2 = 133$$

$N_2 = 133$  Valor de utilidad, el anterior pertenece a la etapa I de la producción y se desecha

En cuanto al valor de N que genera el máximo producto por hectárea, éste se obtiene igualando la derivada de la función a cero. (Producto marginal = 0) y posteriormente, despejando el valor de N se tiene:

$$\frac{dR}{dN} = 7 + 4N - 0.03N^2 = 0$$

$$N = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$N = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-0.03)(7)}}{2(-0.03)}$$

De donde:

$$N_1 = -1.7276$$

$$N_2 = 135$$

El valor  $N_2 = 135$  es el que corresponde al de máxima producción por hectárea o NOT. Calculado sólo como referencia para que no se eleve hasta este nivel el uso del Nitrógeno si éste tiene un precio positivo que debe ser pagado con el producto que genera la última unidad empleada de nitrógeno. Una variante de la función cúbica que resulta conveniente para simplificar las operaciones y aplicable a la agricultura, es la que se elabora con datos de campo experimental cuando el diseño del experimento contempla cantidades de nitrógeno muy lejanos del origen y un valor del llamado tratamiento testigo (el rendimiento obtenido si no se aplica nitrógeno al suelo). Es común que al investigador no le interese qué rendimientos se obtienen con cantidades de 10, 20 o 30 kilogramos de nitrógeno por hectárea y su experimento contiene valores altos a probar, como 120, 150, 180 y 210.

Con una función de producción cúbica como la obtenida de los datos experimentales, se puede obtener el Nivel Máximo Eficiente (NME) de aplicación del insumo variable por la simple maximización del producto medio. Ese punto corresponde al inicio de la Etapa II. Como ya se demostró más arriba el  $NME = 100$ .

Es interesante examinar el resultado que se obtiene de maximizar la función de Producto Medio expresada en términos generales:

$$PMe = \frac{R}{N}$$

$$\frac{d(PMe)}{dN} = \frac{R \frac{dN}{dN} - N \frac{dR}{dN}}{N^2} = 0$$

$$0 = R - N \frac{dR}{dN}$$

$$N \frac{dR}{dN} = R$$

$$\frac{dR}{dN} = \frac{R}{N}$$

Por lo tanto y como lo señala la teoría económica,

$$PMg = PMe$$

Como puede verse, lo anterior significa que cuando el  $PMe$  es máximo, el Producto Medio y el Producto Marginal son iguales, siendo ambos, característicos del inicio de la Etapa II.

En nuestra función cúbica obtenida, el  $PMe$  máximo ocurre cuando el nivel aplicado del insumo variable toma un valor de  $N=100$  en cuyo caso tanto el  $PMe=107$ , como el  $PMg=107$ .

Sin embargo, debe ser claro que cuando las características de la función de producción estimada no permiten identificar el rango de la primera etapa, no aparecerán expresados los rendimientos marginales crecientes ni el punto de inflexión, por lo cual no es posible identificar el nivel de nitrógeno de máxima eficiencia. Dicho de otra forma, para una función estimada con la exploración de niveles de nitrógeno que fluctúan en el rango de 120 a 210 Kg/ha, la función de producción permite el cálculo de producción sólo para los niveles de producción que corresponden al uso de nitrógeno que esté en el rango de 120 a 210 kg/ha de nitrógeno o para valores fuera de este intervalo pero cercanos al mismo. Para la determinación de los óptimos, con tal modelo sólo es posible calcular los niveles de nitrógeno que corresponden a la máxima ganancia y a la máxima producción por hectárea, valor este último que se debe insistir en que no es de interés, al menos que el insumo (nitrógeno en este caso) se obtenga regalado.

La expresión gráfica (Figura 5) de los datos de campo (Representados por puntos y la línea de tendencia, es de la siguiente forma:

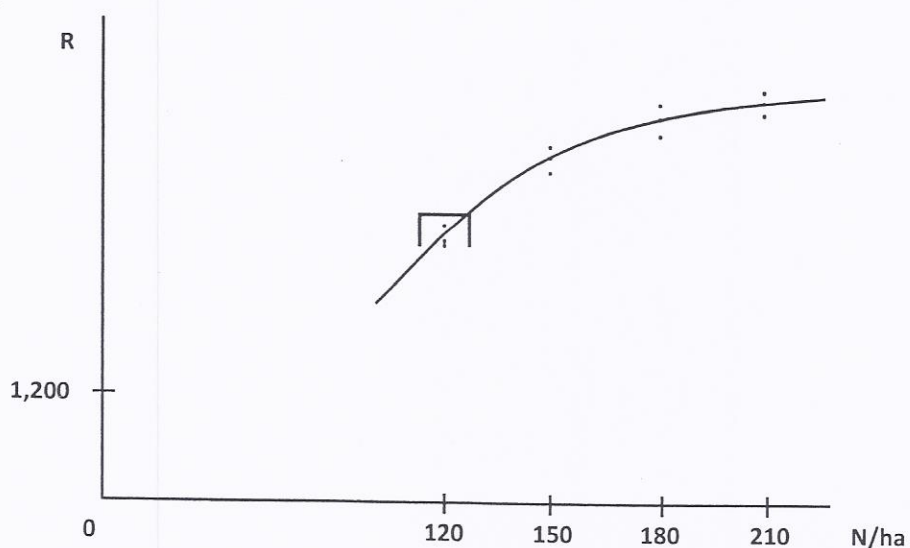


Figura 5. Representación de puntos y línea de tendencia

Nótese que no se experimentó para valores menores de 120 kg/ha de nitrógeno, y por lo tanto, no es posible captar el comportamiento del rendimiento para esos niveles de uso de nitrógeno. La expresión general de esta función es una función cuadrática de la forma:

$$R = a + bN + cN^2$$

Una función específica elaborada a partir de datos experimentales como los puntos de la gráfica anterior, toma la expresión siguiente:

$$R = 1200 + 8N - 0.02N^2$$

Si se consideran precios de venta del grano a 3 pesos el kilogramo y el precio de nitrógeno a 6 pesos por kg. La relación de precios indica que se requiere un producto marginal de  $6/3 = 2$  para que el incremento en rendimiento sea el necesario para pagar los 6 pesos que cuesta el kg de nitrógeno. Derivando la ecuación anterior (expresión algebraica del producto marginal) e igualando esa derivada a 2, se tiene:

$$\frac{dR}{dN} = 8 - 0.04N = 2$$

$$N = \frac{8-2}{0.04} \rightarrow N = 150$$

Nivel de nitrógeno por hectárea que corresponde a la máxima ganancia de la inversión en nitrógeno. Por su parte el nivel de uso de nitrógeno que genera la máxima producción por hectárea, se obtiene igualando la derivada anterior (función de producto marginal) a cero y se despeja N.

$$\frac{dR}{dN} = 8 - 0.04N = 0 \rightarrow N = 8/0.04 \rightarrow N = 200$$

Con la observación de que después del nivel de uso de 150 kg de nitrógeno, cada uno de los 50 kg adicionales incrementa la producción en cantidades menores de los 2 kg de grano necesarios para pagar su costo.

#### Utilidad práctica de la función

Se puede aplicar a cada uno de los otros nutrientes que normalmente acompañan al uso de nitrógeno como fósforo y potasio. Puede aplicarse a densidad de siembra medido en kg/ha de semilla. Es totalmente adaptable a uso y prueba de diferentes láminas de riego. Se aplica con algunas adaptaciones mínimas a optimización en fechas de corte de especies forestales. Se aplica con éxito y resultados ventajosos para los productores, en los procesos de engorda de ganado de diferentes especies ganaderas a pequeña y gran escala.

#### Otro tipo de función de producción

Para resaltar la importancia del presente tema, se puede comparar las ventajas que tiene esta función cúbica con respecto a funciones alternativas, la comparación resulta más importante si se hace con la función de producción Cobb-Douglas: la más favorecida y preferida en los textos de teoría económica. Esta función tiene la siguiente expresión algebraica: de forma general donde Y es producción en función de dos insumos variables  $X_1$  y  $X_2$ , una constante multiplicativa A y donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las elasticidades producto:

$$Y = AX_1^\alpha X_2^\beta$$

La expresión de la función propiamente Cobb-Douglas (multiplicativa) es donde la suma de los exponentes es igual a la unidad.

$$Y = AX_1^\alpha X_2^{1-\alpha}, \text{ donde } 0 < \alpha < 1$$

Su expresión gráfica del producto Y, para diferentes niveles de utilización de  $X_1$  manteniendo constante el nivel de uso de  $X_2$  es la siguiente (Figura 6):

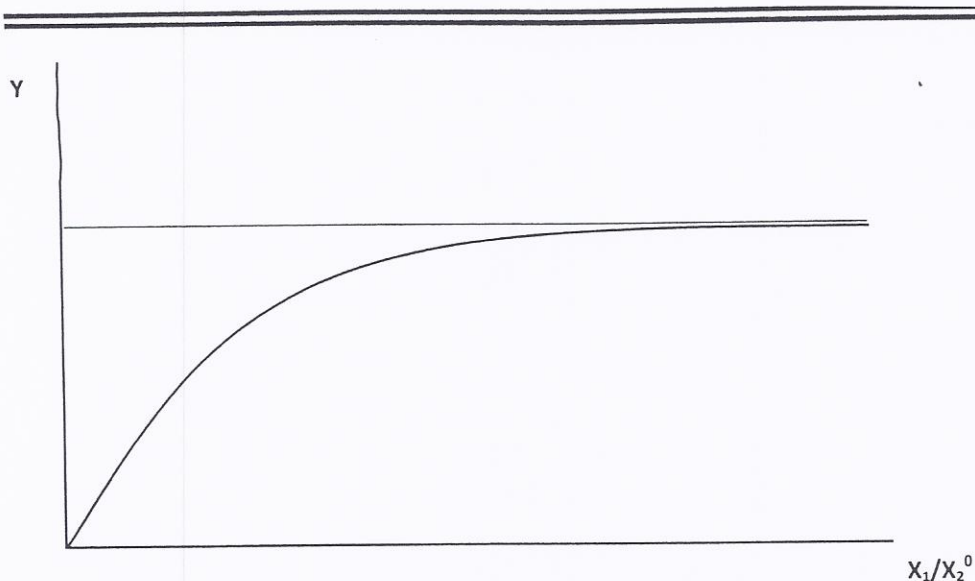


Figura 6 Representación de diferentes niveles de  $X_1$

Razones que justifican la afirmación de que una función cúbica es mucho más apropiada para su aplicación en actividades de pequeña escala como la agricultura minifundista, que la Cobb-Douglas, son las siguientes: Para la construcción de la segunda, se procesa con los logaritmos de las variables: insumo y producto. Esta característica la hace partir del origen (no tiene ordenada al origen). No permite identificar el punto de máxima eficiencia, la recta que parte del origen y es tangente a la función, se da en el origen de la función. Presenta una sola concavidad desde el origen y en toda su extensión, lo que significa que sólo capta productos marginales decrecientes positivos.

Por la característica anterior, no permite identificar el límite de la etapa I y la II en la función de producción, que representa el nivel de máxima eficiencia, de suma importancia para la recomendación a productores agrícolas con capital limitado. No tiene ningún valor predictivo de producción a obtener, con niveles pequeños de los recursos productivos, porque normalmente se construye con valores altos de producción y sus correspondientes niveles también altos, de uso de recursos. Cada recurso variable presenta un sólo valor de elasticidad de la producción (incremento porcentual en la cantidad producida cuando se aumenta en uno por ciento el uso del insumo variable, en su caso,  $PMg$  entre el  $PMe$ ). La optimización requiere de más complicados procesos de álgebra que la función cúbica, para realizar el análisis marginal.

O sea, sin una función transcendental o cúbica, no es posible determinar el punto donde el  $PMe$  es máximo o donde  $PMe=PMg$  a menos que se fuerce el resultado en cuyo caso el propósito de hacer más didáctica la explicación se pierde. Lo propio ocurre en el caso de las funciones trascendentales.

Por su parte las funciones de producción tipo Cobb-Douglas y las cuadráticas con ordenada cero o positiva sólo observarán  $PMgi$  y  $PMei$  decrecientes de donde el Nivel Máximo Eficiente del insumo variable tendrá un valor de cero y el  $PMg$  máximo así como el  $PMe$  máximo tomarán valores indeterminados. Tamaño de Font 11 en lugar de 10

No tiene valor máximo de la función para cualquier valor de uso del insumo variable, presenta un producto marginal positivo (no permite identificar el nivel donde se presentan las disminuciones de producto total por exceso de insumo (Nitrógeno aplicado al suelo) (Bishop y Toussaint, 1991).



## CONCLUSIONES

La función de producción cúbica permite identificar el comportamiento de los rendimientos por hectárea y aporta el criterio para definir si son escasos, pertinentes o en exceso los niveles de insumos variables empleados en la agricultura. La función cúbica permite generar recomendaciones a productores, de baja capacidad financiera de inversión, que conducen a mayores niveles de producción, sin que tengan que realizar inversiones adicionales para lograrlo. (Identificación de uso de insumos en su máxima eficiencia).

Permite identificar los niveles de uso de insumos variables para obtener la máxima ganancia de su inversión. Permite identificar los niveles de uso de insumo que resultan utilizados, en exceso, con respecto al máximo de rendimiento por hectárea que pueden generar para discriminarlos en el uso de insumos en la agricultura.

La función cúbica es un instrumento, de primera importancia para los cursos de economía agrícola, en la formación de agrónomos y otros profesionales que se desempeñan en el sector agrícola, ganadero o forestal. Se puede aplicar en engordas intensivas de ciertas especies pecuarias, con cierta tecnología y capital limitado es decir, en pequeñas explotaciones agropecuarias.

La optimización técnica eficiente es alcanzable puesto que los productos marginales crecientes son posibles de medir en pequeñas unidades de producción tales como las unidades campesinas en donde sólo se cuente con unas pocas cabezas de ganado, pero hay que ser muy cuidadosos con el diseño experimental y con la conducción del mismo (muchos experimentos ganaderos se llevan a cabo con 3 novillos o 5 ovejas, etc. y son correctos).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Barrios Puente Gerónimo, Marcos Portillo Vázquez, Francisco Pérez Soto, Omar Ortíz Barreto y Emiliano García Ávalos. 2007. Uso Óptimo Económico de Fertilizantes en Maíz Forrajero, de temporal, en Chapingo, México. Controversia 21. Universidad Autónoma Chapingo. Chapingo, México.
2. Binger Brian R. and Elizabeth Hoffman. 1988. Microeconomics with Calculus. Scott, Foresman and Company. USA
3. Bishop y Toussaint. 1991. Introducción al Análisis de Economía Agrícola. LIMUSA. México.
4. Henderson y Quandt. 1994. Teoría Macroeconómica. Una aproximación matemática. Editorial Aguilar. Barcelona, España.
5. Mas-Colell A. 1996. Teoría Macroeconómica. Universidad de Oxford. Nueva York. USA.
6. Parkin M., y Esquivel G. 2001. Microeconomía. Versión para Latinoamérica. Editorial Pearson Educación. USA.
7. Hey, D. John. 2004. Microeconomía Intermedia. Ed. McGraw-Hill. México, Distrito Federal.
8. Mochón Francisco. 1987. Economía. Teoría y política. McGraw-Hill. España.
9. Nicholson W. 2006. Microeconomía Intermedia y Aplicaciones. Ed. Paraninfo. 9ª Edición.
10. Portillo V. M. 2011. Microeconomía aplicada a la agricultura. Notas de clase. Universidad Autónoma Chapingo. Chapingo, México.
11. Volke V. y Sepúlveda Ibis. 1987. Agricultura de Subsistencia y Desarrollo Rural. Trillas. México.
12. Vargas Sánchez Gustavo. 2002. Introducción a la Teoría Económica. Aplicaciones a la economía mexicana. Prentice Hall. México.
13. Yunker, J. 2008. Isoquants of the cubic production function. Disponible en: <http://ssrn.com/abstract=1117619>.

\* Artículo recibido el día 26 de junio de 2013 y aceptado para su publicación el día 18 de septiembre de 2014.