Omar Jayyam y la ecuación cúbica

*Ismael Arcos Quezada**

RESUMEN

Se describe, para dos de los catorce casos abordados por Jayyam, la manera en que este matemático árabe resolvía la ecuación cúbica, viendo a los números como segmentos de recta y recurriendo al trazo de circunferencias, parábolas e hipérbolas equiláteras.

Palabras clave: Álgebra árabe, ecuación cúbica, Omar Jayyam.

ABSTRACT

It is described, for two of the fourteen cases considered by Omar Khayyam, the way he followed for solving the cubic equation by geometric means, involving the sketch of conic sections.

Key words: Arab Algebra, cubic equation, Omar Khayyam.

INTRODUCCIÓN

La geometría de la Grecia antigua brilló enormemente, pero los matemáticos griegos no abordaron la solución sistemática de ecuaciones algebraicas. Esto fue una aportación de los matemáticos árabes quienes desarrollaron sus ideas mientras en Europa transcurría la Edad Media. Así, en el siglo IX de nuestra era, Al Jwarizmi, basándose en ideas geométricas, estableció en *El libro del Álgebra* algoritmos para la solución de los distintos casos de la ecuación cuadrática.

Unos dos siglos después, pero también durante la época en la que la cultura árabe era protagonista en el ámbito científico, Omar Jayyam, el poeta matemático, escribió su *Álgebra*, en la que se dedicó principalmente a resolver geométricamente la ecuación cúbica mediante secciones cónicas, específicamente mediante circunferencias, parábolas e hipérbolas equiláteras,

* Facultad de Ingeniería, UAEM, ismael_arcos@msn.com

con lo que se violaba la norma introducida por los matemáticos griegos, en cuanto a utilizar sólo regla y compás, de manera que se admitían sólo rectas y circunferencias. En este documento se describe la solución de algunos casos de la ecuación cúbica, con base en el trabajo de Moreno Castillo sobre la obra matemática de Omar Jayyam.

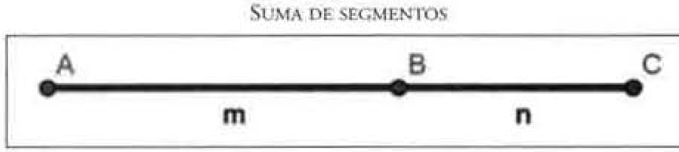
Operaciones básicas con segmentos

De acuerdo con Moreno Castillo, Omar Jayyam desaconsejaba la lectura de su Álgebra a quien no conociera *los Elementos* y *los Datos* de Euclides, así como los dos primeros libros de *las Cónicas* de Apolonio, de manera que, antes de describir la manera en la que Jayyam resolviera cada uno de los casos de la ecuación cúbica, hace un recuento de las partes de estas obras a las que Jayyam recurre en su obra. En primer término hace referencia a aquellas proposiciones de los *Elementos* a las que recurre Jayyam, que le permitieron "hacer operaciones aritméticas básicas con segmentos".

Para poner esto en términos actuales, digamos que se trata de obtener, a partir de dos segmentos de longitud m y n, los segmentos , (siempre que), y . Actualmente podemos decir que m y n son dos números reales positivos cualesquiera, lo mismo que , , y .

Los segmentos suma y diferencia son relativamente fáciles de obtener. Si m y n son los dos números dados, trazamos primeramente un segmento AB, de longitud m y enseguida, luego de prolongar el segmento, ubicamos el punto C sobre tal prolongación, de manera que BC tenga longitud n. El segmento AC será el segmento suma (de m y n), ya que (ver figura 1).

Figura 1
SUMA DE SEGMENTOS

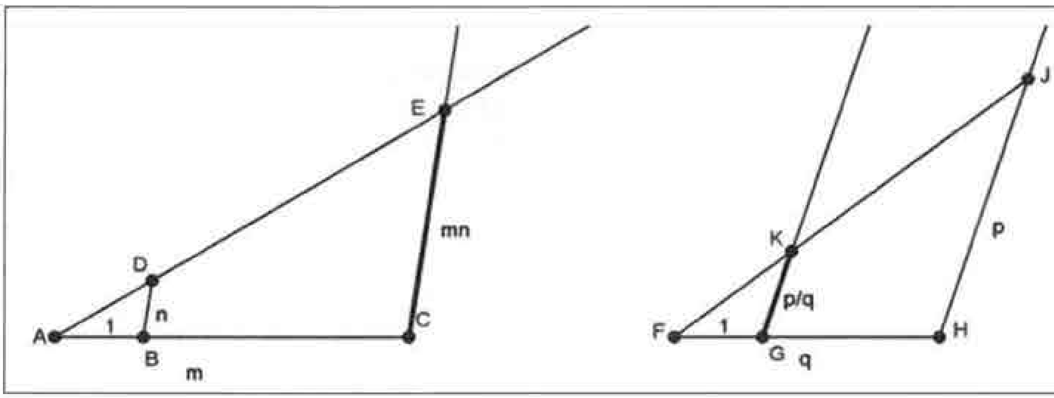


Análogamente, si queremos la diferencia de dos segmentos w y m, trazamos un segmento AC, de longitud w, y luego ubicamos sobre el segmento el punto B, de manera que AB tenga longitud m. El segmento BC será el segmento diferencia, ya que .

En cuanto al producto y el cociente se recurre a la semejanza de triángulos. Para el producto (ver figura 2, izquierda) tenemos que, dados los segmentos m y n, trazamos tres puntos A, B y C alineados, de manera que la longitud de AB sea 1 y la de AC sea m. Enseguida, por B se traza una semirrecta y sobre esta se ubica el punto D, de manera que la longitud de BD sea n. Ahora se trazan dos semirrectas, una desde A, que pase por D y otra que pase por C y que sea paralela a BD. Ambas se cortan en un punto E. El segmento CE es el producto buscado mn ya que los triángulos ABD y ACE son semejantes, así que $\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AB}$, es decir $\frac{CE}{m} = \frac{n}{1}$, de donde $CE = m \cdot n$.

En el caso del cociente, si p y q son dos segmentos dados, si deseamos construir el segmento trazamos un segmento FH, de longitud q, y sobre el mismo (o sobre su prolongación) ubicamos al punto G, de manera que la longitud de FG sea la unidad. Ahora trazamos desde H una semirrecta y sobre esta se ubica el punto J, de manera que la longitud de HJ sea p. Finalmente trazamos el segmento FJ y la semirrecta que parte de G y es paralela al segmento HJ. La semirrecta y el segmento (o su prolongación) se cortan en el punto K. El segmento GK es el cociente buscado, ya que los triángulos FGK y FHJ son semejantes, de manera que $\frac{GK}{FG} = \frac{HJ}{FH}$, es decir $\frac{GK}{1} = \frac{p}{q}$, y $GK = \frac{p}{q}$.

Figura 2
PRODUCTO Y COCIENTE DE SEGMENTOS



Construcción de la raíz cuadrada

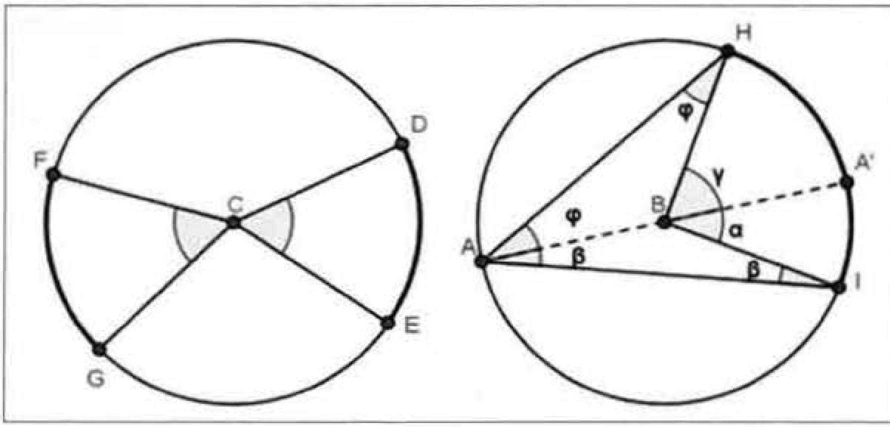
Si aplicamos la construcción del producto con dos segmentos de la misma medida, obtendremos el cuadrado del segmento, de manera que todas las construcciones anteriores nos permiten realizar las operaciones aritméticas básicas hasta la potencia. La construcción de la raíz cuadrada requiere algo más, que podemos encontrar en los *Elementos* de Euclides.

Jayyam nos dice que las proposiciones 27 y 33 del libro III de los *Elementos* nos indican, la primera de ellas, que "en los círculos iguales los ángulos que abarcan arcos iguales son iguales mutuamente, sea que salgan de los centros, sea que estén constituidos en la periferia"; y la segunda que equivale a que, cuando dicho arco es una semicircunferencia, los ángulos son rectos.

No es difícil aceptar la validez de la primera proposición (ver figura 3, izquierda). Si E, D, F y G son puntos de la misma circunferencia con centro en C, y si los arcos ED y FG son iguales, entonces podemos asumir que los sectores circulares correspondientes son congruentes, así que los ángulos ECD y FCG son iguales. En cuanto a la segunda (ver figura 3, derecha) tenemos que, si I y H son dos puntos de una circunferencia con centro en B y A es un punto sobre la circunferencia, entonces el ángulo inscrito en la circunferencia IAH (= $\beta + \alpha$) y el ángulo central IBH (= $\alpha + \gamma$) interceptan el mismo arco IH de la circunferencia.

Por otra parte, los triángulos ABH, BAH, ABI y BAI son isósceles, ya que dos de los lados de cada uno de ellos son radios de la circunferencia. Además, como es un ángulo externo al triángulo BAI, tenemos que $\alpha = \beta + \beta = 2\beta$, y como es un ángulo externo al triángulo ABH, entonces $\gamma = \varphi + \varphi = 2\varphi$. Por lo tanto $\alpha + \gamma = 2\beta + 2\varphi = 2(\beta + \varphi)$, es decir: "si un ángulo central y uno inscrito en la circunferencia interceptan el mismo arco, entonces el ángulo central es el doble del inscrito en la circunferencia". Y como la medida del ángulo central depende del arco que intercepta, tenemos que la medida del inscrito en la circunferencia también dependerá sólo de la medida del arco interceptado.

Figura 3
ÁNGULOS INSCRITOS EN LA CIRCUNFERENCIA

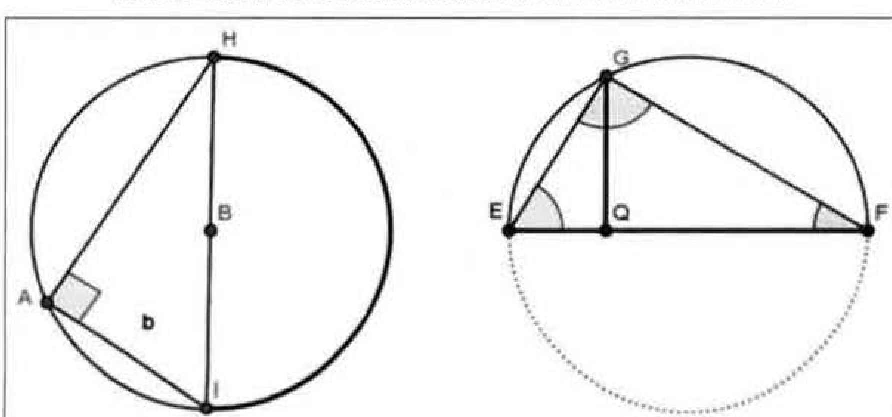


Finalmente observemos que, si el ángulo IBH es igual a dos ángulos rectos, es decir, si IH es un diámetro de la circunferencia, tendremos entonces que el ángulo IAH, siendo la mitad del IBH, tendrá que ser igual a un ángulo recto, tal como se ilustra en la figura 4 (izquierda).

Ahora bien (ver figura 4, derecha), si EF es un diámetro de una circunferencia, G un punto de la circunferencia y Q la proyección ortogonal de G sobre el diámetro EF, entonces los triángulos EQG y GQF son triángulos rectángulos semejantes, de manera que $\frac{EQ}{QG} = \frac{QG}{QF}$, y $EQ \cdot QF = QG^2$. Esta es una ecuación que caracteriza a los puntos de la circunferencia: "El cuadrado del segmento que une un punto de la circunferencia con su proyección sobre un diámetro de la misma, es igual al producto de los segmentos en los que el diámetro queda dividido por la proyección".

Con base en lo anterior podemos ahora construir la raíz cuadrada de un segmento dado. Si a es el segmento dado, dibujamos un segmento QF de magnitud a, a continuación de otro segmento EQ de longitud unitaria. Después trazamos una circunferencia con un diámetro en EF y desde Q, una perpendicular al diámetro que cortará a la circunferencia en el punto G. El segmento QG es la raíz cuadrada de a, ya que $EQ \cdot QF = QG^2$, es decir $1 \cdot a = QG^2$, de manera que $QG = \sqrt{a}$.

Figura 4
ÁNGULO INSCRITO EN UNA SEMICIRCUNFERENCIA Y MEDIA PROPORCIONAL

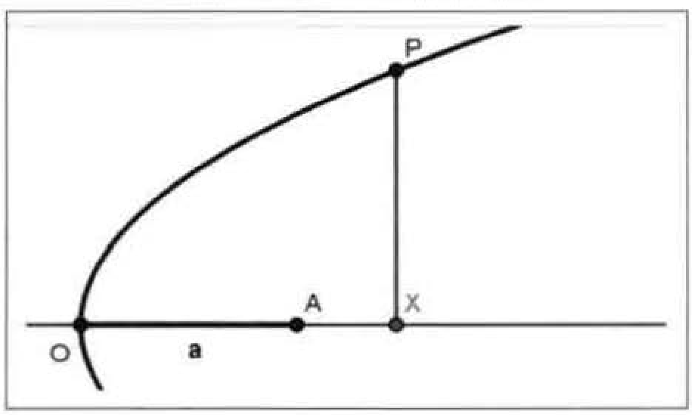


Con lo anterior estamos preparados para efectuar 5 operaciones básicas con segmentos, esto es adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación; además de la raíz cuadrada de un segmento. Veamos ahora algunas de las ideas geométricas relativas a las secciones cónicas que utilizó Jayyam en su obra.

Las cónicas de Apolonio

Una sección cónica, o simplemente *cónica*, es la curva de intersección entre un cono y un plano. Las distintas posiciones del plano respecto del cono dan lugar a cada uno de los distintos tipos de cónica. Aunque otros matemáticos griegos hablaron de estas curvas antes de Apolonio de Perga, fue éste quien, en el siglo III de nuestra era publicó un tratado donde recoge lo que hasta entonces se sabía, a la vez que da a conocer nuevos resultados.

Figura 5
LA PARÁBOLA EN *LAS CÓNICAS* DE APOLONIO



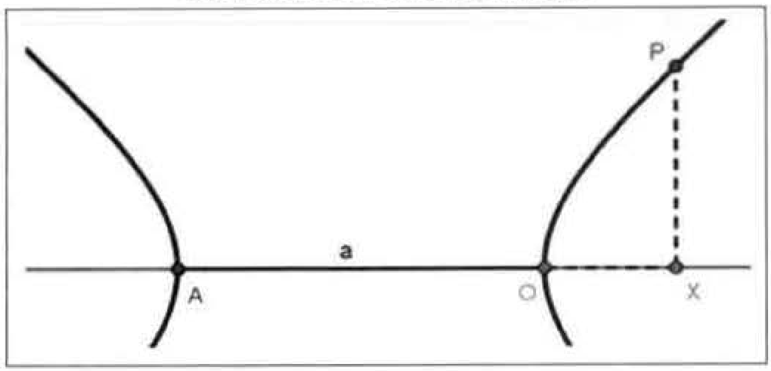
En el caso de la parábola, y auxiliándose de una representación plana del cono y un plano paralelo a la directriz del cono, y recurriendo a resultados ya conocidos como el relativo al ángulo inscrito en una semicircunferencia, Apolonio probó que, si O es el vértice de la parábola, X un punto sobre su eje, y P el punto de la parábola tal que su proyección perpendicular sobre el eje es el punto X (ver figura 5), entonces $PX^2 = OX \cdot OA$, donde A es un punto sobre el eje de la parábola cuya ubicación no depende del punto X elegido.

Esto quiere decir que la longitud a del segmento OA es un parámetro de la parábola, al que Apolonio denominó *lado recto*. En la notación utilizada escolarmente hoy en día, si O es el origen del sistema coordenado, *a* el lado recto de la parábola con vértice en O y eje focal en el eje *x*, entonces su ecuación es $y^2 = ax$.

Así pues, conocido el lado recto de la parábola, lo mismo que la ubicación de su vértice y eje focal, la ecuación $PX^2 = OX \cdot OA = a\,OX$ nos permitiría obtener tantos puntos de la parábola como se quisiera. Bastaría con marcar el punto X, y ubicar (en ambas direcciones) el punto P sobre la perpendicular al eje trazada por P, de manera que $XP = \sqrt{a\,OX}$, lo cual, como se indicó anteriormente, puede hacerse con regla y compás.

Apolonio procedió de manera similar con las otras cónicas. En el caso de la hipérbola equilátera obtuvo que, siendo A y O los vértices de la hipérbola, que distan entre sí una distancia a (que es para este caso el parámetro que caracteriza la curva), y siendo X un punto del eje (exterior al segmento AO) y P el punto de la hipérbola, tal que su proyección perpendicular sobre el eje es el punto X (ver figura 6), entonces $PX^2 = AX \cdot OX$, es decir $PX^2 = (AO + OX) \cdot OX$.

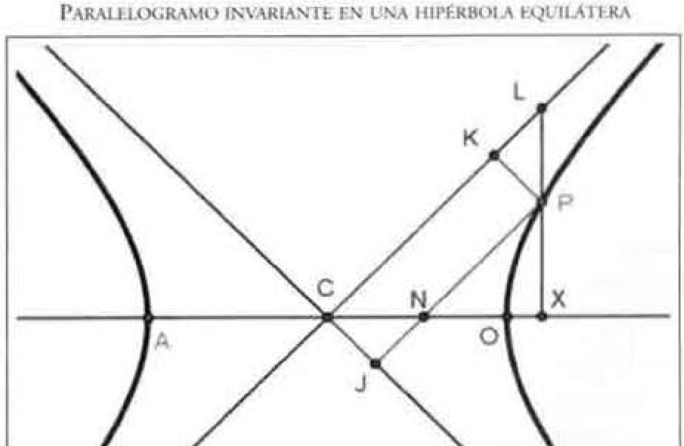
Figura 6
La hipérbola en *Las cónicas* de Apolonio



En la notación utilizada escolarmente hoy en día, si O es el origen del sistema coordenado, a el lado recto de la hipérbola con vértice en O y eje en el eje x, entonces su ecuación es $y^2 = x(a + x)$.

Por otra parte, con relación a la hipérbola como sección cónica, Apolonio denominó *asíntotas* a las dos rectas simétricas respecto de los dos ejes de la parábola que forman un ángulo igual al del cono, probando que, si de un punto cualquiera de la hipérbola se trazan rectas paralelas a las asíntotas, se genera un paralelogramo cuya área es un invariante de la curva.

Figura 7
Paralelogramo invariante en una hipérbola equilátera



En una hipérbola equilátera, las asíntotas son perpendiculares y el paralelogramo es un rectángulo (ver figura 7). Veamos cómo puede probarse que su área no depende del punto elegido.

Primeramente, si C es el punto medio de AO, y si tomamos en cuenta que la hipérbola es equilátera, tenemos entonces que el triángulo CXL es rectángulo isósceles y su área estará dada por:

$$\Delta\, CXL = \frac{1}{2}\, CX \cdot XL = \frac{1}{2}\, CX^2 = \frac{1}{2}\,(CO+OX)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, AO + OX\right)^2$$

Por otra parte, si consideramos que P es un punto de la hipérbola, tenemos que:

$$\Delta\, NXP = \frac{1}{2}\, NX \cdot XP = \frac{1}{2}\, XP^2 = \frac{1}{2}\,(AO + OX)\cdot OX$$

Además, los triángulos CJN y PKL son rectángulos isósceles y congruentes, de manera que el paralelogramo (rectángulo) CJPK es igual al trapecio CNPL y éste es igual a la diferencia entre los triángulos CXL y NXP, es decir:

$$CJPK = \Delta CXL - \Delta NXP = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, AO + OX\right)^2 - \frac{1}{2}\,(AO + OX)\cdot OX$$

$$CJPK = \frac{1}{8}\, AO^2 + \frac{1}{2}\, AO \cdot OX + \frac{1}{2}\, OX^2 - \frac{1}{2}\, AO \cdot OX - \frac{1}{2}\, OX^2$$

$$CJPK = \frac{1}{8}\, AO^2$$

Así pues, el área del rectángulo es un octavo del cuadrado del segmento OA que es el parámetro de la hipérbola, así que su valor no depende del punto elegido. Esto permitirá ubicar, a partir de las asíntotas, tantos puntos de la hipérbola como se desee, ya que el segmento raíz cuadrada es construible como se indicó anteriormente.

Rompiendo las reglas

Sabemos que en Europa hubo un largo periodo de muy poca productividad matemática, durante algo así como un milenio, desde el siglo III o IV, hasta el XIII o XIV. En buena medida ello ocurrió debido a que los matemáticos de la Grecia antigua impusieron estándares de rigor y metodología que mantuvieron prácticamente "amarrados" intelectualmente a los matemáticos.

Uno de tales estándares fue que el tratamiento geométrico de los problemas se restringía al uso de regla y compás, y por lo tanto, sólo podían utilizarse rectas y circunferencias. Incumplir esta norma en la solución de un problema implicaba que la solución no iba a ser aceptada como válida.

Por ejemplo, en el problema de la duplicación del cubo (de arista a), que requiere de la construcción de un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}\,a$, se sugirió como solución un proceso equivalente (en notación actual) al trazo de las parábolas $x^2 = ay$ y $y^2 = 2ax$, las cuales, como puede verificarse, se intersecan en el origen y en el punto $(\sqrt[3]{2}\,a, \sqrt[3]{2}\,a)$, de manera que la abscisa del segundo punto de intersección proporciona el segmento solución. Sin embargo tal solución era "inválida" puesto que suponía el trazo de algo más que rectas y circunferencias, en este caso de dos parábolas.

Jayyam, sin embargo, se atrevió a utilizar, aparte de rectas y circunferencias, parábolas e hipérbolas equiláteras. De hecho, antes de abordar la solución de cada uno de los catorce casos de la ecuación cúbica, expone dos lemas, uno de los cuales es el de construir, a partir de dos segmentos dados de longitudes a y b, dos segmentos de longitudes x y y tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, lo que implica el trazo de las parábolas $y = ax^2$ y $y^2 = bx$. Esto no es más que una generalización del problema de la duplicación del cubo, ya que en este caso las parábolas se cruzan en el origen y en el punto con abscisa $\sqrt[3]{ab^2}$.

Veamos entonces cómo es que Jayyam resuelve la ecuación cúbica, rompiendo los estándares griegos.

Cubo de la cosa más cosa igual a número

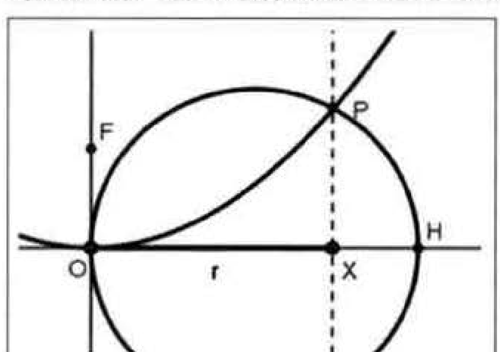
Como ocurría en la época, Jayyam considera sólo las raíces reales positivas, por lo que tiene que atender cada caso por separado. Aquí se transcribirán y comentarán dos de ellos, uno incompleto (sin término cuadrático) y otro completo.

El primero de estos es "Cubo de la cosa más cosa igual a número", que corresponde, en nuestra notación actual a $x^3 + bx = c$. Para obtener el segmento de longitud x, a partir de los segmentos de longitudes b y c dados, de manera que se satisfaga la ecuación, Jayyam nos dice:

> Construimos un cuadrado de lado $\sqrt{b}$ (esto se hace encontrando la media proporcional entre b y la unidad mediante la proposición 13 del libro VI de los *Elementos*) y sobre él, apoyándonos en el lema 2, un paralelepípedo de altura b y volumen c. Dibujamos ahora una parábola de vértice O y lado recto $OA = \sqrt{b}$, y una circunferencia de diámetro $OH = b$ tangente al eje de la parábola en el vértice de ésta (ver figura 8).
> Ambas curvas se cortan necesariamente en O y en otro punto P. Proyectamos P perpendicularmente sobre OH y obtenemos el punto X. El segmento es la solución.

Figura 8

SOLUCIÓN DE JAYYAM PARA "CUBO DE LA COSA MÁS LA COSA IGUAL A NÚMERO"



De acuerdo con esto, el algoritmo de construcción del segmento solución, utilizando geometría analítica y simbología moderna, es entonces como sigue (ver figura 8):

Dados b y c, en el origen de un sistema coordenado ubicamos al punto O, luego a los puntos $F = \left(0, \frac{\sqrt{b}}{4}\right)$ y $H\left(\frac{c}{b}, 0\right)$. Ahora trazamos la parábola con vértice en O y foco en F, así como la circunferencia con un diámetro en OH. La circunferencia y la parábola se cortan en O y en otro punto P. La abscisa de P es la solución de la ecuación dada.

Jayyam demuestra que OX es el segmento buscado mediante argumentos de la matemática griega, específicamente los que podemos encontrar en *Los Elementos* de Euclides y en *Las Cónicas* de Apolonio. Aquí usaremos un poco de geometría analítica escolar para hacer la prueba. Así pues, siendo $P = (OX, XP) = (r, p)$, entonces, por la construcción, P es un punto de la circunferencia y de la parábola. La circunferencia tiene un diámetro en OH, y como $\mathrm{H} = \left(\frac{c}{b}, 0\right)$, entonces la ecuación de la circunferencia es $\left(x - \frac{c}{2b}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2b}\right)^2$, es decir:

$$x^2 - \frac{c}{b}x + y^2 = 0 \tag{1}$$

Por otra parte, la parábola tiene su vértice en el origen, su eje en el eje y y su foco en el punto $F = \left(0, \frac{\sqrt{b}}{4}\right)$, así que su ecuación es $x^2 = 4\left(\frac{\sqrt{b}}{4}\right) x = \sqrt{b}\, y$, es decir:

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}} x^2 \tag{2}$$

Como $P = (r, \rho)$ es un punto común de la circunferencia y la parábola, sus coordenadas deben satisfacer ambas ecuaciones. Así, de (2) tenemos que $\rho = \frac{1}{\sqrt{b}} r^2$ y $\rho^2 = \frac{1}{b} r^4$ (3). Por otra parte, de (1) tenemos que $r^2 - \frac{c}{b} r + \rho^2 = 0$ (4), así que al sustituir (3) en (4), multiplicar por $\frac{b}{r}$ y ordenar, obtenemos:

$$r^2 - \frac{c}{b} r + \frac{1}{b} r^4 = 0,$$

$$r^3 + br = c$$

Por lo tanto $r = OX$ satisface la ecuación $x^3 + bx = c$, como se quería probar.

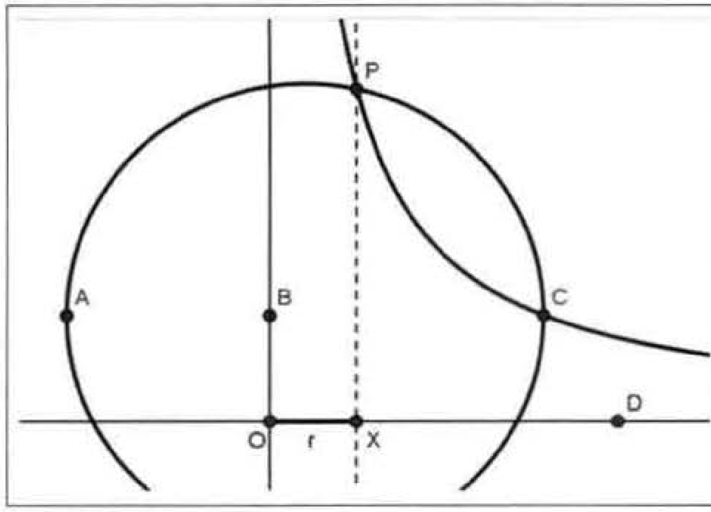
Cubo más cuadrado más la cosa igual a número

Consideremos ahora uno de los casos correspondientes a la ecuación cúbica completa, el de "Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número", que con simbología actual es . En este caso Jayyam indica:

> Sean los segmentos $AB = a$, $OB = \sqrt{b}$ y BC cuya longitud es la de la altura de un prisma de volumen c y base cuadrada de lado igual a OB. BC prolonga al segmento AB y OB es perpendicular a AC (figura 9). Dibujamos el círculo de diámetro AC, y también la hipérbola que pasa por C y tiene como asíntotas a la recta que contiene al segmento OB y a su perpendicular que pasa por O. Las dos se encuentran en un punto P.

Figura 9

SOLUCIÓN DE JAYYAM PARA "CUBO DE LA COSA MÁS CUADRADO DE LA COSA MÁS LA COSA IGUAL A NÚMERO"



Así pues, de acuerdo con lo indicado por Jayyam, habiendo marcado un punto O, se ubican enseguida el punto B, situado $\sqrt{b}$ unidades arriba de O, el punto A, a unidades a la izquierda de B, el punto C, situado c / b unidades a la derecha de B, y un punto D situado a la derecha de O, de manera que OD sea perpendicular a OB.

Enseguida se trazan la circunferencia con diámetro en AC, y la hipérbola equilátera con asíntotas en OB y OD. Las curvas se cortarán en C y en otro punto P. Al igual que en el caso anterior, si X es la proyección perpendicular de P sobre OD, entonces OX = r es el segmento solución buscado.

Ahora bien, como la circunferencia tiene a AC como uno de sus diámetros y la hipérbola tiene que pasar por C, entonces ambas curvas tienen que cortarse necesariamente en C. Esto quiere decir que la abscisa de este punto es una raíz "extraña" de la ecuación cúbica, lo que a su vez quiere decir que lo que resuelve geométricamente Jayyam es una ecuación de grado cuatro, que tendrá necesariamente dos raíces positivas, una de las cuales ocurre obligadamente por la construcción misma (la abscisa de C) y la otra es la buscada (la abscisa de P).

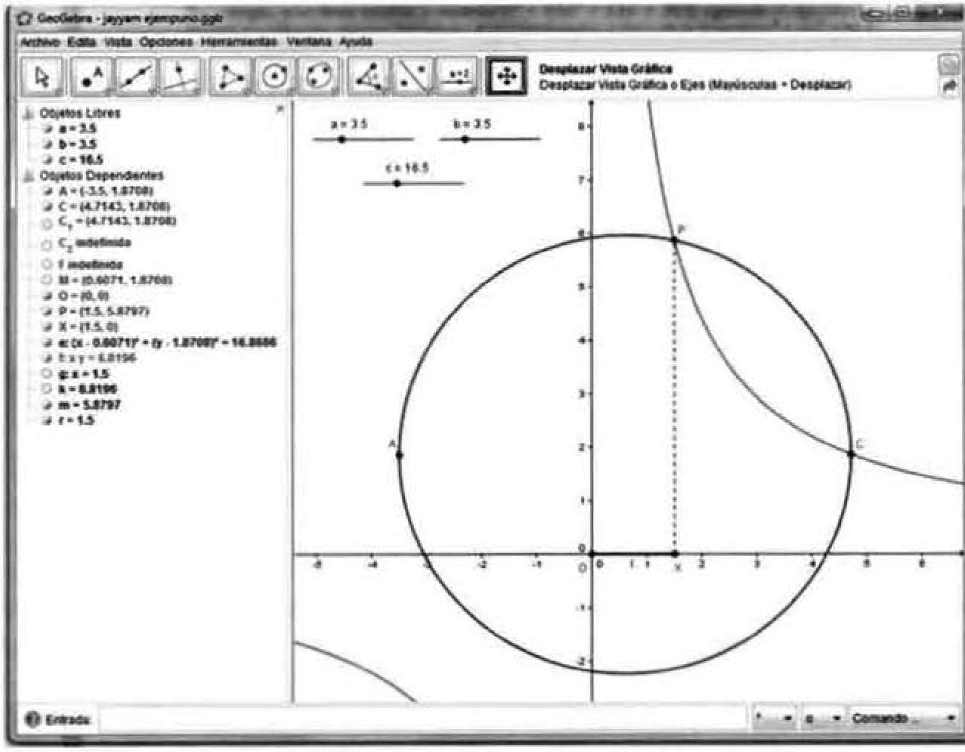
Para terminar veamos cómo puede estudiarse la solución dada por Jayyam en un contexto escolar actual.

La ecuación cúbica en la escuela actual

La ecuación cúbica fue tal vez un contenido de la matemática escolar en la primera mitad del siglo pasado, y el asunto debió haber sido considerado desde la perspectiva de la aplicación de la fórmula de Cardano, que da los valores exactos de las tres raíces de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + x = 0$. En la actualidad, sin embargo, la ecuación cúbica ya no es del interés de la matemática escolar, debido, por una parte, a la gran laboriosidad que implica la aplicación de la fórmula de Cardano y, por otra, a que la ecuación cúbica, como aquellas ecuaciones que no pueden resolverse en forma exacta, es ahora es un asunto atendido al estudiar los métodos numéricos más que el álgebra.

Figura 10

SOLUCIÓN CON GEOGEBRA DE $x^3 + 3.5x^2 + 3.5x = 16.5$ Y LA CONSTRUCCIÓN DE JAYYAM



Por otro lado, la tendencia actual en las aulas en gran parte del mundo, en la educación matemática, es la de disminuir la importancia de aquellos aspectos de carácter operativo, algorítmico o memorístico, y dársela a cuestiones de carácter conceptual o la resolución de problemas.

En este sentido la ecuación cúbica en general, y el método de Jayyam en particular, podría ser atendido a través de un software de geometría dinámica como geogebra, de manera que sólo se indicara, para un caso considerado, las curvas que habrán de trazarse y el segmento que dará la solución, utilizando el software para hacer los trazos bien y "al instante", permitiendo entonces poner la atención en la interpretación del resultado.

No es la intención, en este documento, exponer con detalle las cualidades de geogebra, en todo caso podría serlo en un próximo artículo de esta revista, en el que se abordaría no solo el asunto de la ecuación cúbica, sino el de las ecuaciones y los sistemas de (dos) ecuaciones en dos variables. Por el momento se mostrará, mediante una "impresión de pantalla", lo que veríamos si utilizáramos este software para resolver, con el algoritmo correspondiente de Jayyam, una ecuación cúbica.

Así pues, si se desea resolver la ecuación $x^3 + 3.5x^2 + 3.5x = 16.5$, siguiendo el algoritmo de Jayyam, se indican primero los valores de los coeficientes a, b y c, de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx = c$, es decir $a = 3.5$, $b = 3.5$ y $c = 16.5$, tal como se muestra en la figura 10. Después se ubican los puntos $A = (-a, b) \cong (-3.5, 1.87)$ y $C = \left(\frac{c}{b}, \sqrt{b}\right) \cong (4.71, 1.87)$.

Ahora se obtiene el punto medio de AC, $M \cong (0.61, 1.87)$ y se traza entonces la circunferencia con centro en M y radio MC. Ahora tiene que trazarse una hipérbola equilátera con asíntotas en los ejes coordenados, que pase por el punto C = $\left(\frac{c}{b}, \sqrt{b}\right)$, es decir la hipérbola de ecuación $xy = k$, que pase por C, de manera que $k = \frac{c}{b}\sqrt{b} = \frac{c}{\sqrt{b}} = \frac{16.5}{\sqrt{3.5}} \cong 8.82$, así que debe trazarse la hipérbola de ecuación $xy = 8.82$.

Hecho la anterior se ubican los puntos de intersección entre circunferencia e hipérbola, obteniéndose el punto C y el punto P cuya abscisa es la solución de la ecuación, en el caso ilustrado $r = OX = 1.5$, que, como puede verificarse, es la raíz real y exacta de la ecuación propuesta.

Ahora pudiera explotarse el potencial del software, por ejemplo, haciendo variables los coeficientes a, b y c, por medio de *deslizadores*, de manera que pueda leerse la solución para *cualesquiera* otros valores de los coeficientes de la ecuación.

Habiendo observado el funcionamiento de los algoritmos de Jayyam, para varias formas de la ecuación cúbica, podría entonces utilizarse el software para algo más, por ejemplo para obtener las raíces reales de la ecuación cúbica general $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, que es equivalente a la ecuación $x^2 + ax + b = -\frac{c}{x}$, al intersecar la parábola $y = x^2 + ax + b$ con la hipérbola equilátera $y = -\frac{c}{x}$.

Bibliografía

Arcos I. (2010). El libro del Álgebra y la resolución de problemas, *Ideas*, No. 34. Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma del Estado de México. México.

Moreno R. (2002). *Omar Jayyam. Poeta y matemático*. Nivola. España.