



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
CENTRO UNIVERSITARIO VALLE DE CHALCO



ENTROPÍAS DE LA INFORMACIÓN
CUÁNTICA DE DOS SISTEMAS CUÁNTICOS
Y SU COMPARACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
COMPUTACIÓN

PRESENTA:

I. EN C. FABIÁN SOBERANES MARTÍN

TUTORA ACADÉMICA:
DRA. ANABELEM SOBERANES MARTÍN

TUTORA ACADÉMICA EXTERNA:
DRA. GUO-HUA SUN

VALLE DE CHALCO ESTADO DE MÉXICO, 2016





Valle de Chalco Solidaridad, Edo de Méx. a miércoles, 13 de enero de 2016

DR. EN C. JUVENAL RUEDA PAZ
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
DEL CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE CHALCO.

P R E S E N T E.

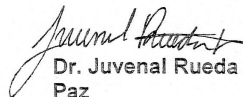
Por este medio le comunico a usted que la comisión revisora designada para realizar la tesis denominada: "Entropías de la información cuántica de dos sistemas cuánticos y su comparación", como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Maestría en Ciencias de la Computación presenta Fabián Soberanes Martín, con número de cuenta 8914788 para sustentar el acto de evaluación de grado, ha dictaminado que dicho trabajo reúne las características de contenido para proceder a la impresión del mismo


A T E N T A M E N T E

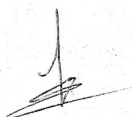
Tutor adjunto

Tutora Académica

Tutor Adjunto


Dr. Juvenal Rueda
Paz


Dra. Anabelem
Soberanes Martín


Dr. William de la Cruz
de los Santos





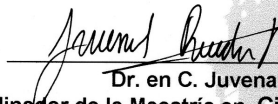
Valle de Chalco Solidaridad, Estado de México jueves, 14 de enero de 2016

ING. FABIÁN SOBERANES MARTÍN
Candidato a Grado de Maestría en Ciencias de la Computación
Centro Universitario UAEM Valle de Chalco

Presente

De acuerdo con el Reglamento de Estudios Avanzados de la Universidad Autónoma del Estado de México y habiendo cumplido con todas las indicaciones que la Comisión Revisora realizó con respecto a su trabajo Tesis titulado **“Entropías de la información cuántica de dos estados cuánticos y su comparación”** la Coordinación de la Maestría en **Ciencias de la Computación** del Centro Universitario UAEM Valle de Chalco concede la autorización para que proceda a la impresión de la misma.

Sin más por el momento, le reitero la seguridad de mi especial consideración y estima.



Dr. en C. Juvenal Rueda Paz
Coordinador de la Maestría en Ciencias de la Computación
Centro Universitario UAEM Valle de Chalco
Universidad Autónoma del Estado de México

C.c.p. Archivo



Av. Hermenegildo Galeana No.3, Col. Ma. Isabel, Valle de Chalco, C.P. 56615, Edo. De México, Tel: (55) 59714940, 59787577 y 30921763
Página: <http://cux.uaemex.mx> e-mail: mmartinezr@uaemex.mx

Maestría en Enfermería. Coordinación.



CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

El que suscribe **Ing. Fabián Soberanes Martín** Autor del trabajo escrito de evaluación profesional en la opción de Tesis con el título **“Entropías de la información cuántica de dos estados cuánticos y su comparación”**, por medio de la presente con fundamento en lo dispuesto en los artículos 5, 18, 24, 25, 27, 30, 32 y 148 de la Ley Federal de Derechos de Autor, así como los artículos 35 y 36 fracción II de la Ley de la Universidad Autónoma del Estado de México; manifiesto mi autoría y originalidad de la obra mencionada que se presentó en Centro Universitario UAEM Valle de Chalco para ser evaluada con el fin de obtener el Título Profesional de Maestro en Ciencias de la Computación.

Así mismo expreso mi conformidad de ceder los derechos de reproducción, difusión y circulación de esta obra, en forma **NO EXCLUSIVA**, a la Universidad Autónoma del Estado de México; se podrá realizar a nivel nacional e internacional, de manera parcial o total a través de cualquier medio de información que sea susceptible para ello, en una o varias ocasiones, así como en cualquier soporte documental, todo ello siempre y cuando sus fines sean académicos, humanísticos, tecnológicos, históricos, artísticos, sociales, científicos u otra manifestación de la cultura.

Entendiendo que dicha cesión no genera obligación alguna para la Universidad Autónoma del Estado de México y que podrá o no ejercer los derechos cedidos.

Por lo que el autor da su consentimiento para la publicación de su trabajo escrito de evaluación profesional.

Se firma la presente en la ciudad de México, a los 27 días del mes de enero de 2016.

Nombre y firma de conformidad



*A mis profesores por la enseñanza que me han dado.
A mis padres por su ejemplo.
A mi hermana por su apoyo.
A mi esposa por su comprensión.
A mi hijo por su cariño y ser mi principal motivación.
Es gracias a ustedes que es posible el presente trabajo.
En verdad, gracias.*

Reconocimientos

Al Centro Universitario UAEM Valle de Chalco por la formación que me ha dado, a CONACYT, por el apoyo económico otorgado.

También, quisiera reconocer a la Dra. Guo Hua Sun por su ayuda y el tiempo dedicado en el desarrollo de este trabajo.

Resumen

En este trabajo, desde el punto de vista computacional, se introdujo la historia del desarrollo de las ciencias de la información y de la computación, los límites físicos que se encuentran hasta el día de hoy en el desarrollo de componentes computacionales, y poner a vista un posible camino alternativo: la información cuántica y la computación cuántica en áreas surgidas recientemente.

Con base a lo visto en el área se estudiaron los pozos cuánticos de una y dos dimensiones, cabe mencionar que no es fácil para un ingeniero en computación tomar estas metodologías, y especialmente se obtienen las entropías de información cuánticas de dichos sistemas cuánticos y se analizan los resultados obtenidos.

Abstract

In this work, from a computational point of view, the history of the development of computer science and information science is introduced. Considering the problem faced in the development of the computer components, there is a possible alternative solution with knowledge of quantum information and quantum computation.

This thesis deals with the determination of the position and momentum information Shannon entropy of the lower states for the infinite potential well in one dimensional and two dimensional spaces. The obtained results are analyzed and compared.

Índice general

Índice de figuras	1
Índice de tablas	3
1. Introducción	5
1.1. Objetivos	9
1.1.1. General	9
1.1.2. Específicos	9
1.2. Planteamiento del problema	10
1.3. Contribuciones	11
2. Marco teórico	13
2.1. Ciencias de la información cuántica	13
2.1.1. Computación cuántica	15
2.1.1.1. Encriptación cuántica	24
2.1.1.2. Comunicación cuántica	26
2.2. Entropía de la información	27
2.2.1. Entropía	27
2.2.2. Entropía generalizada	30
2.2.3. Entropías conocidas	32
2.2.4. Entropía de información cuántica	36
2.3. Pozo infinito	44
2.3.1. Pozo infinito en una dimensión	45
2.3.2. Pozo infinito en dos dimensiones	53
3. Metodología	59

ÍNDICE GENERAL

4. Resultados	63
4.1. Resultados de los cálculos de las entropías de la información . . .	63
4.1.1. Pozo en una dimensión	63
4.1.2. Pozo en dos dimensiones	73
5. Conclusiones/Trabajos futuros	91
5.1. Conclusiones	91
5.2. Trabajos futuros	92
6. Glosario/Evidencias/Anexos	93
6.1. Glosario	93
6.2. Evidencias	98
6.2.1. Ponencias	98
6.2.2. Cursos	101
6.3. Anexos	104
6.3.1. Pozo infinito en una dimensión	104
6.3.2. Pozo infinito en dos dimensiones	114
Bibliografía	143

Índice de figuras

2.1. Ley de Moore, número de transistores en relación por año.	19
2.2. Esfera de Bloch	23
2.3. El qubit $ \psi\rangle$ no tiene spin definido.	24
2.4. Pozo de potencial infinito (o caja) unidimensional de anchura L con la primera pared en $x=0$	45
2.5. Isolíneas de parámetro k_{mn} con radio $R = 10$	55
2.6. Funciones de onda para los estados $m = 0, 1$ como una función de la posición r con respecto a los números cuánticos radiales $n = 1-3$	57
4.1. Funciones de onda de posición con $n=1,2$ y 3 y diferente anchura 1 y 5	66
4.2. Funciones de onda de momento.	67
4.3. Densidades de posición con $n=1,2,3$ y $a = 1$ y 5	68
4.4. Densidades de momento.	69
4.5. Densidades de entropía de posición con $n=1,2,3$	70
4.6. Densidades de entropía de momento con $n=1,2,3$ y $a = 1$ y 5	71
4.7. Entropías de momento respecto a los números cuánticos con $a= 1, 5, 10$	72
4.8. Funciones de onda en el espacio de momento para diferentes números cuánticos $n = 1-3$	79
4.9. Las densidades de entropía de posición como una función de posición r	80
4.10. Densidad de entropía de momento como una función de momento p	81
4.11. Distribución de probabilidad de carga como una función de la posición r	82
4.12. Densidad de momento como una función de momento p	83
4.13. Distribución de probabilidad radial $Q(r)$ como una función de la posición r	84

ÍNDICE DE FIGURAS

4.14. Distribución de probabilidad de momento $Q(p)$ como una función de momento p entre el P y $P + dp$	85
4.15. Entropías de posición de momento como una función de el radio R con número cuántico $m = 0$	87
4.16. Entropía de posición y de momento como una función de la radio R con número cuántico $m = 1$	88
4.17. Posición de entropía para R dada como una función del número cuántico m	89

Índice de tablas

4.1. Entropías de la información del estado $m = 0$ con respecto a diferentes números cuánticos n y $R = 6$	73
4.2. Entropías de la información del estado $m = 0$ con respecto a diferentes números cuánticos n y $R = 6$	90

Capítulo 1

Introducción

La computación es la ciencia encargada del estudio de los sistemas computacionales, más en concreto de las computadoras, las cuales manejan la información de manera automática. El concepto computación proviene del latín *computatio*, que se refiere al cómputo como cuenta. La teoría de la computación es una de las áreas que más se distingue dentro de la ciencia de la computación, en ella se clasifican los problemas según el origen de los algoritmos, los cuales pueden ser simples, complejos, ó muy complejos, lo que genera consumo de recursos computacionales. Otro sector de estudio importante es el de la estructura de los datos, en esta área el análisis matemático resulta elemental para poder obtener datos y manipularlos adecuadamente, ya que si no se hace de forma correcta la información obtenida no será relevante (30).

No se puede dejar de mencionar a los sistemas operativos, los cuales son la parte de la computadora que interactúa con el usuario. La arquitectura de computadoras es el área de la ciencia de la computación que se encarga de los componentes físicos, en los componentes que la atención es centrada suele ser las memorias, unidad central de procesamiento (CPU) y los periféricos, tanto de entrada como de salida, otra área elemental en el estudio de la computación son

1. INTRODUCCIÓN

los lenguajes de programación, el objetivo es crear nuevos lenguajes de programación, que sean más eficaces y veloces.

La ciencia de la computación ya tiene una larga historia, desde las antiguas civilizaciones, como los romanos y griegos utilizaban instrumentos mecánicos para contabilizar. En el siglo XIX se creó la primer computadora que recibió el nombre de máquina analítica, esa computadora fue creada para elaborar tablas matemáticas, años después en Inglaterra se utilizaron para realizar cálculos. En el siglo XX a fines de los años cuarenta en la universidad de Harvard se creó la computadora llamada Mark I (26).

Cuando la cantidad de diseños aumentaron, comenzaron a ser clasificadas por sus características en generaciones. Las máquinas que pertenecían a la primera generación (a lo largo de los años cincuenta) se caracterizaban porque su programación era mediante lenguaje máquina y eran diseñadas con tubos de vacío; ocupaban habitaciones enteras por su gran tamaño y resultaban demasiado caras. En la segunda generación (década de los sesenta) las computadoras podían procesar más datos y eran un poco más pequeñas. Fue durante estos años que comenzaron a surgir las comunicaciones entre máquinas; aparecen las primeras computadoras personales; aunque eran complejas de utilizar era necesario conocer de programación (50). Tanto en la primera como en la segunda generación la información que ingresaba a la maquina era mediante tarjetas perforadas. Fue durante la tercera generación cuando la producción comenzó a ser en serie; las computadoras podían ser manejadas por medio de los sistemas operativos; algunas de las tecnologías utilizadas en esos años se convirtieron en estándares que hasta el día de hoy todavía están utilizados. La cuarta generación es reconoci-

da por la aparición de los microchips; esto significa un hito en las ciencias de la Computación; los circuitos no sólo comenzaron a ser más pequeños y veloces, sino que a su vez resultaban más económicos. Es por ello que la fabricación aumentó de manera notable y más personas tuvieron acceso a las mismas. Esta generación es también conocida como la Revolución de la Computación (26).

Al hablar de las ciencias de la computación y de la información se debe remontar a etapas muy antiguas, sin embargo se puede identificar que su etapa más fuerte de progreso es durante la década de los años 60; pero en los años 90 desarrolló una espectacular aceleración (36), aún cuando surgieron como disciplinas independientes; lograron una alianza indisoluble para el progreso. Y es justo reconocer que, en realidad, hubiese sido muy difícil que la ciencia de la información alcanzará sus objetivos y metas, sin la ayuda de la ciencia de la computación, considerando el crecimiento acelerado de la cantidad de información disponible y necesaria, así como el nivel de procesamiento que se proponía sin la existencia de las computadoras.

Esta alianza puede considerarse la segunda revolución de las ciencias de la información, precedida de la que introdujo los conceptos y métodos de las ciencias sociales durante la década de los años 50 y seguida por la que posibilitó la adquisición de los enfoques de las ciencias económicas y gerenciales; no obstante, sin lugar a dudas, la más espectacular sigue siendo la segunda, que además sustenta a la tercera o última, Así, las ciencias de la información se han convertido, como otras tantas disciplinas, en una zona de confluencia de aplicaciones, métodos, enfoques y teorías procedentes de varias disciplinas, donde se mezcla arte, ciencia, tecnología, innovación y práctica diaria (54).

1. INTRODUCCIÓN

Si hay algo de cierto en esta revolución de las ciencias de la información es la caída de parte de los conceptos tradicionales, el surgimiento y la renovación de la teoría y la práctica de estas disciplinas; dicha revolución adquirió una significación especial con la masificación del uso de Internet durante la década de los años 90 (8).

En algunos casos, el grado de interrelación de los productos de informática y las ciencias de la información, utilizados por profesionales y la población en general, que es difícil discernir si el producto es el resultado de una o de otra, porque con frecuencia es el resultado de la fusión de los avances de una y otra disciplina. Así, la alfabetización por ejemplo, en computación, aunque no es igual a la alfabetización en información en las condiciones actuales, debido a la necesidad de ambas para explotar correctamente los recursos de información; el dominio de una de ellas por sí sola carecería de valor. Ambas ciencias conforman hoy un par dialéctico y contradictorio, unido e indisoluble en la etapa actual de desarrollo, aunque, en ocasiones no puede negarse y cuyas consecuencias negativas se han señalado algunas veces, que la informática ha avanzado con un acelerado ritmo de desarrollo y que es parte de su propia dinámica, sin considerar el conocimiento acumulado por las ciencias de la información. La informática, por su propio ritmo de avance, arrastra tras de sí a disciplinas y a la ciencia en general, salvo algunas áreas, tan impresionante como ella en el avance del conocimiento, como son los casos de la biotecnología, la genómica, la industria farmacéutica, etcétera (48).

Los avances tecnológicos han logrado reducir de manera significativa el tamaño de las partes de la computadora, en específico del procesador; éste está llegando

a su límite físico de reducción de tamaño. La ley de Moore predice que el número de transistores en un microprocesador será el doble cada 18 meses, del año 2020 al año 2030 los circuitos se encontrarán a una escala atómica. Debido a esto, el siguiente paso será crear computadoras las cuales puedan aprovechar la potencia de los átomos y moléculas para realizar las tareas de memorias y procesamientos, estos dispositivos son las computadoras cuánticas, lo que da lugar al desarrollo de la Computación Cuántica (40).

1.1. Objetivos

A partir del desarrollo de la física cuántica surge el interés de poder utilizarla en las tecnologías de la información y computación, por lo que se plantearon los siguientes objetivos.

1.1.1. General

El principal objetivo de este trabajo es dar a conocer las bases de la ciencia de la información cuántica y de la ciencia de los pozos infinitos en una y dos dimensiones. Determinar las entropías de la información cuántica de los pozos infinitos en una y dos dimensiones, comparar y analizar los resultados obtenidos, para contribuir al desarrollo del cómputo cuántico.

1.1.2. Específicos

- Comprender los conceptos básicos en la ciencia de la información cuántica.

- Identificar los límites de la computación e información clásica.
- Obtener las entropías cuánticas de los pozos infinitos en una y dos dimensiones.
- Demostrar el cumplimiento de la desigualdad de Bialynicky-Birula-Mycielski (BBM).
- Comparar y analizar las entropías cuánticas de los pozos infinitos en una y dos dimensiones.

1.2. Planteamiento del problema

Al día de hoy, conforme al desarrollo en el almacenamiento y procesamiento de los datos ó informaciones se está llegando al límite con base en el material y tamaño que se maneja, los científicos en diversas áreas están buscando otros caminos para poder seguir avanzando en las ciencias de la información y de la computación. es por eso que surgen ideas como la de la bio-computadora y computadoras cuánticas, en un sentido natural por el tamaño del chip que se está utilizando. El tamaño del chip ya casi se reduce al tamaño del átomo, es decir, ya está llegando al mundo cuántico, por lo que urge encontrar sistemas cuánticos manipulables para construir una computadora cuántica en verdad. Es por eso, que los investigadores se dedican a estudiar diferentes sistemas cuánticos, para conocer bien sus propiedades relacionados a la información cuántica para poder ocuparse en la construcción de la computadora cuántica. Los pozos infinitos son unos de los sistemas cuánticos confinados más conocidos, no son complicados pero siempre han sido de interés en la investigación, ya que una computadora cuántica es física,

se debe de poder manipular partículas en espacios confinados. Con base en esto interesa estudiar las propiedades de entropía cuántica que poseen estos sistemas para ofrecer resultados interesantes a los experimentales para su soporte teórico.

1.3. Contribuciones

La principal contribución de este trabajo es frente al problema del desarrollo de la computación clásica, la intención es buscar una alternativa para poder salir adelante en la ciencia de la computación. Se investigó una área alternativa: la ciencia de la información cuántica y computación cuántica, así que se estudiaron los pozos infinitos, unos sistemas cuánticos de los más conocidos para obtener sus propiedades importantes nuevas de las entropías de la información cuánticas y, analizar y comparar, los resultados para contribuir en la computación cuántica, con estudios para que los experimentales lo tomen en cuenta en el desarrollo de la computadora cuántica.

2.1. Ciencias de la información cuántica

En este capítulo se presenta la fundamentación teórica, se inicia con los tópicos de las ciencias de la información cuántica, como son la computación, encriptación y comunicación cuántica, para continuar con las entropías de la información, para finalmente, describir los pozos infinitos en una y en dos dimensiones.

Las nociones de información que emplean por una parte, la Ciencia de la Información y por la otra, la Informática y la Computación, no son iguales. En 1948 C. Shannon dió a conocer una de las primeras definiciones del término “información”, la cuál resultó útil para fundamentar el estudio y el desarrollo de la transmisión de información en canales los cuales producían algún tipo de ruido; sin embargo, su carácter cuantitativo impidió la generalización como definición en el área de las ciencias sociales por ser incapaz de caracterizar su valor desde perspectivas como calidad, utilidad y significación; los cuales son rasgos primordiales para su valoración en dimensión cualitativa del hombre y la sociedad. A excepción de aplicaciones puramente tecnológicas, el concepto cuantitativo de información

2. MARCO TEÓRICO

carece de un valor primario por no poder expresar el verdadero valor de la información: su correspondencia con los valores de los atributos de las necesidades (8).

Se puede decir que existen dos perspectivas básicas en el tratamiento de la información las cuales se pueden denominar “cuantitativa“ y “cualitativa“ respectivamente. La primera comprende la información como la define C. Shannon y sus sucesores; es una noción física que incluye estados, señales u otras denominaciones de la Física; que sirve para soportar la obtención, el almacenamiento, el procesamiento y uso de la información al nivel de las tecnologías de información y la comunicación; la segunda, que es un aporte de las llamadas ciencias de la información, es una noción subjetiva, que no es contradictoria con la noción física, pero que agrega los requerimientos cualitativos necesarios para tratar a la información en una escala humana y social. La interrelación que existe entre la dimensión cualitativa, que ocupa la ciencia de la información y la cuantitativa, que desarrolla la informática; es necesaria e imprescindible para adecuar a las necesidades de sus usuarios los productos informáticos y de la información.

Existen diferencias por una parte entre la informática y la computación, y por otra la informática con la ciencia de la información, esto con respecto a su unidad básica de tratamiento; las primeras trabajan fundamentalmente con información-conocimiento mientras que la segunda lo hace con datos; aunque ambos conceptos se encuentran profundamente interrelacionados, es más, simplemente son dos niveles contiguos de la pirámide de elaboración ”dato-información-conocimiento-acción”. Precisamente son los datos la parte principal para elaborar la información. Un dato es considerado la unidad o cantidad mínima de información no elaborada, sin sentido en sí misma, pero que al ser tratado de forma adecuada se

puede utilizar en la realización de cálculos o la toma de decisiones. El concepto de dato es importante, porque los sistemas computacionales e informáticos trabajan principalmente, con datos y no con información-conocimiento como las ciencias de la información. Para poder manejar esta información, los sistemas informáticos y computacionales deben descomponerla (decodificarla, traducirla), y convertirla en datos que ellos puedan almacenar y manipular.

Al percibir los datos mediante los sentidos, los cuales los integran y generan la información necesaria para producir el conocimiento que permite finalmente tomar decisiones para realizar las acciones cotidianas. Datos e información, en este caso, no es más que el producto de la codificación o recodificación de la información para su manejo en el nivel físico. Se puede decir que un sueño de la computación es crear una maquina capaz de emular las funciones del ser humano, por lo menos en materia cognitiva, esto en relación a que el cerebro humano es una gran fuente de información y aunque ya se han creado maquinas que hacen ciertas funciones propias de él con mayor efectividad y eficiencia, todavía no es equiparable.

Buscando precisamente una forma de poder hacer los procesos de manera eficientes y con gran cantidad de información en espacios más reducidos, surge la computación cuántica.

2.1.1. Computación cuántica

Conforme ha evolucionado la tecnología, la integración de sus componentes aumenta y caben más transistores en un menor espacio; así se fabrican microchips

2. MARCO TEÓRICO

cada vez más pequeños, y mientras más pequeño más velocidad de proceso alcanzan. El problema radica en función de que se está llegando al límite físico, ya no se va a poder seguir reduciendo de tamaño en forma infinita; ya que dejan de funcionar de manera correcta. Al llegar a la escala de nanómetros, los electrones se escapan de los canales por los que deben de circular, lo que se conoce como efecto túnel.

Una partícula, cuando se encuentra con un obstáculo, no lo puede atravesar y por ende rebota. Pero al hablar de los electrones, los cuales son partículas cuánticas y se comportan como ondas, en ellos existe la posibilidad de que una parte pueda atravesar las paredes si es que estas son demasiado finas, por lo que la señal pasaría por canales donde no debería circular, haciendo que el chip no funcione de manera correcta.

En consecuencia, la computación digital tradicional, no tardará en llegar a su límite, la Ley de Moore se refiere en específico a los transistores, que prenden y apagan las señales eléctricas en los dispositivos para que puedan procesar la información y ejecutar tareas. Funcionan como la base del cerebro dentro de teléfonos, tabletas y todo tipo de gadgets.

Mientras más transistores haya en un chip más rápido puede éste procesar la información.

Para lograr que la Ley de Moore continúe, los fabricantes deben seguir reduciendo el tamaño de los transistores para para lograr colocar mayor cantidad de ellos dentro de un espacio más pequeño. El tamaño original de un transistor era

de aproximadamente media pulgada (unos 1.3 cm). Hoy en día, los procesadores más nuevos contienen transistores que son más pequeños que un virus, un tamaño casi inimaginable.

A modo de contexto, un virus como la gripe tiene unas dimensiones de 75 nm (nanómetros). Los transistores que están integrados actualmente en la computadora o smartphone son más pequeños que ese virus. Por ese motivo los científicos coinciden en que el la Ley Moore llegará a su fin entorno al 2020. En ese momento ya estaríamos diseñando transistores de 7 nm, equivalente a 7 moléculas de glucosa.

Obviamente, el fin de la Ley Moore no acabará con la innovación (figura 2.1), pero lo que no está claro es si esta volverá a ser exponencial, aunque el departamento de Defensa de EEUU o empresas como Intel estén buscando ya soluciones para cuando llegue el anunciado fin. Entre las alternativas disponibles, destacan especialmente: las capas de transistores 3D, la computación neuromórfica y la computación cuántica (40).

- Las capas de transistores tridimensionales consisten en conseguir que la impresión de microprocesadores con láser (hasta ahora plana), sea capaz de superar esa barrera. Si estas obleas fuesen capaces de relacionarse entre sí se conseguiría una potencia de procesamiento nada desdeñable.
- La computación neuromórfica responde a la interconexión de millones de transistores entre sí, tal como sucede con las neuronas en el cerebro humano.

2. MARCO TEÓRICO

Esta posibilidad ya fue probada por IBM en 2011, cuando desarrollo un procesador con 256 transistores con 1024 conexiones entre sí. Pero aunque esperanzadora, esta tecnología abriría las puertas a la inteligencia artificial, y eso es algo que a día de hoy sigue generando controversia.

- La computación cuántica también es una posibilidad, ya que basa su arquitectura en los qubit, bits que pueden ser 0 o 1 al mismo tiempo. Aun así es un modelo que se encuentra todavía en sus primeros estadios de desarrollo, por lo que se desconoce si para 2020 estará listo para sustituir a la Ley de Moore.

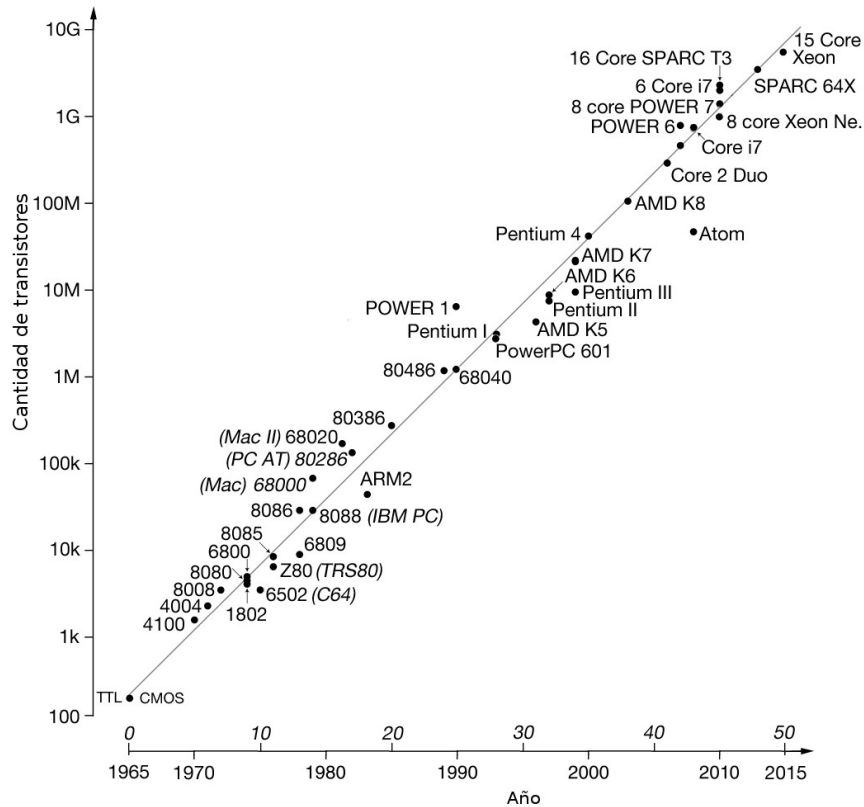


Figura 2.1: Ley de Moore, número de transistores en relación por año.

En general, se puede decir que la computación cuántica es una ciencia interdisciplinaria de la física cuántica y las ciencias de la computación que con las propiedades de las partículas cuánticas tales como fotones, electrones, etc. busca hacer cómputo. El Procesamiento Cuántico de la Información (PCI) obedece las leyes fundamentales y métodos acordes para lograr el procesamiento de la información utilizando las leyes de la mecánica cuántica. De manera formal el estudio de la computación cuántica y el PCI comienza con las preguntas sobre computabilidad hechas por Richard Feynman a finales de los años 60's; en particular para simular sistemas cuánticos en tiempos razonables (tiempo polinomial).

2. MARCO TEÓRICO

La idea de computación cuántica surge en 1981 cuando Paul Benioff expuso su teoría para aprovechar las leyes cuánticas en el entorno de la computación. En vez de trabajar a nivel de voltajes eléctricos, se trabaja a nivel de cuanto. En 1985 David Deutsch publicó un artículo en el que demostró que era posible la construcción de una máquina universal de Turing usando la teoría de la mecánica cuántica. En ese mismo documento, Deutsch demostró que la solución de ciertos problemas utilizando una computadora cuántica (esto es, un sistema físico capaz de realizar cálculos de acuerdo a las leyes de la mecánica cuántica) era más rápida que cualquier solución propuesta para su ejecución en una computadora clásica. A partir de ese trabajo, el desarrollo teórico y experimental de la computación cuántica y el PCI ha crecido exponencialmente.

En el modelo clásico de computación el bit es la unidad básica de información. Un bit puede tener dos valores distintos que se representan como 0 y 1 respectivamente. Desde un punto de vista un poco más formal, un bit es un elemento del conjunto $V = \{0, 1\}$. Una cadena de n bits se puede considerar como un elemento del producto cartesiano: $V^n = V \times \dots \times V$

Una cadena de bits puede representar cualquier información. Para ello basta establecer un mecanismo de codificación. Por otra parte, en el modelo clásico de computación, un algoritmo es un mecanismo para manipular cadenas de bits, y desde el punto de vista formal se puede considerar como un mecanismo para evaluar funciones booleanas. Así, dada una cadena de n bits, α , el algoritmo la modifica generando otra cadena de n bits, β la cuál es el resultado ó la información requerida.

En el modelo cuántico de computación la unidad de información básica es el qubit o bit cuántico. El qubit puede estar en una superposición de estados base que se denotan $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Físicamente se representa por un sistema cuántico de dos estados. El sistema cuántico de dos estados más conocidos o intuitivo es el de un electrón. En un sistema de este tipo se puede representar el spin $-(1/2)$ por el estado $|0\rangle$ y el spin $+(1/2)$ por el estado $|1\rangle$. El qubit es un elemento del espacio de Hilbert de funciones de onda más simple no trivial de dos dimensiones, generado por los kets $|0\rangle$, $|1\rangle$, elementos de la base, y que convencionalmente pueden elegirse en una representación particular como:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Estos dos vectores son ortonormales, lo cual significa que bajo el producto escalar $\langle x|y\rangle$ definido en el espacio, los vectores base se comportan de la siguiente forma: En las dos últimas ecuaciones los vectores bra $\langle 0|$, $\langle 1|$, duales de los ket $|0\rangle$, $|1\rangle$, se obtienen como los traspuestos hermíticos de los ket y se representan de la siguiente manera:

$$\langle 0| = (1 \ 0) \quad \langle 1| = (0 \ 1) \quad (2.2)$$

Un qubit, en general, se presenta como una superposición o combinación lineal de los estados básicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tal que:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.3)$$

donde las amplitudes de probabilidad α y β son números complejos, esto es, contienen información de fase. Como en cualquier medida en mecánica cuántica, los módulos cuadrados de estos coeficientes determinan respectivamente la probabilidad de obtener en una medida los resultados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Puesto que la probabilidad total tiene que ser la unidad, α y β se deben relacionar por la ecuación:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.4)$$

Esta ecuación simplemente asegura que en la medición se obtiene un estado o el otro. Debido a su naturaleza cuántica, cualquier medición del qubit altera inevitablemente su estado, se rompe la superposición y colapsa en aquel estado de base que ha resultado de la medida, y $\{\alpha, \beta\}$ se transforma irreversiblemente en $\{0, 1\}$.

Alternativamente, el qubit también puede describirse por medio de una matriz densidad. Para un qubit en el estado $|\psi\rangle$ el operador proyección correspondiente es:

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.5)$$

El espacio de los estados del qubit se puede representar mediante espacio vectorial complejo bidimensional de módulo 1. Se pueden representar puntos en la

superficie de una esfera; esta superficie se llama esfera de Bloch (figura 2.2). Cada estado del qubit corresponde a un punto de la superficie de una esfera unitaria. Esto esencialmente significa que un qubit tiene dos grados de libertad locales. Estos grados de libertad podrían ser la longitud y latitud, o como es más habitual, dos ángulos Θ y ϕ en coordenadas esféricas.

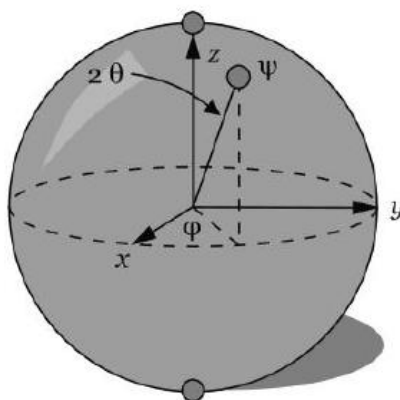


Figura 2.2: Esfera de Bloch

Naturaleza Probabilística de la Medida de Qubits: Siempre es posible medir el valor de un bit, pero por lo general no es posible medir el estado de un qubit. Se va a estudiar lo que ocurre al medir el qubit definido por la expresión:

$$\psi = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \quad (2.6)$$

Para ello se empleará el dispositivo esquematizado en la figura 2.3. El proceso de medida consiste en hacer pasar al electrón a través de la rendija del panel 1. Cuando pasa por la rendija el electrón atraviesa un campo magnético que desvía

su trayectoria según el valor de su spin, hasta que finalmente el electrón atraviesa una de las dos rendijas del panel.

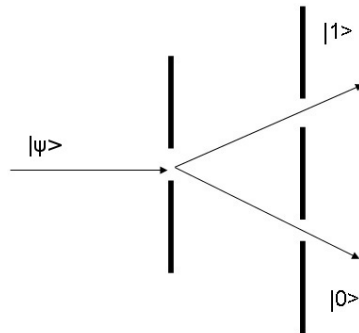


Figura 2.3: El qubit $|\psi\rangle$ no tiene spin definido.

Como el qubit no tiene spin definido, tiene cierta probabilidad de salir por la rendija superior o por la inferior.

Las características que presentan los qubit proporcionan herramientas que se pueden utilizar en distintas áreas de la computación, una de ellas importante es la seguridad (encriptación).

2.1.1.1. Encriptación cuántica

La humanidad, a lo largo de su historia por distintas razones, se ha visto en la necesidad de transmitir mensajes cuyo contenido permanezca oculto para aquellos a los que no va dirigido. Debido a esto es, por lo que nace la criptografía, que

inicialmente, era la habilidad para esconder información.

La criptografía clásica está basada en la complejidad, esto quiere decir, que para mayor seguridad, superior debe de ser lo complejo de su estructura. La criptografía cuántica está con base en "no clone heurem" de mecánica cuántica, teóricamente es una "seguridad incondicional".

Las actuales técnicas de la criptografía cuántica permiten a dos personas crear de forma segura una clave secreta que se puede compartir con la persona a enviar el mensaje. La seguridad de la criptografía cuántica descansa en las bases de la mecánica cuántica. La mecánica cuántica describe la dinámica de cada partícula en términos de estados cuánticos, asignando una probabilidad a cada posible estado de la partícula por medio de una función.

El protocolo más importante desde el punto de vista práctico es el QKD (Quantum Key Distribution, Distribución de claves Cuánticas). La seguridad de la QKD se basa en las leyes de la mecánica cuántica. El propósito de QKD es establecer una secuencia aleatoria de bits compartida por dos entidades, en donde cada uno puede estar altamente seguro de que el espía no sabe sobre la clave.

La promesa de la criptografía cuántica fue anunciada por primera vez a principios de los años setenta en trabajos de S. Wiesner. Entre las contribuciones a esta disciplina destaca la creación del primer esquema de la distribución de claves cuánticas (QKD) por Ch. Bennett y G. Brassard (1984), conocido como protocolo "BB84", así como la invención del protocolo basado en pares entrelazados, contribución de A. Ekert en 1991 (45).

Por el contrario, la Distribución de Claves Cuántica (DCC o QKD por sus siglas en inglés) permite a emisor y receptor intercambiar una serie de qubits (unidad mínima de información cuántica) codificados en fotones. En caso de que un tercero intentara interceptar la información secreta, el proceso se alteraría como consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg, que establece que un adversario no puede acceder al mensaje sin cambiarlo o destruirlo.

“En este caso, no importa la tecnología del adversario, pues nunca será capaz de romper las leyes de la física”, según el físico Richard Hughes, del Laboratorio Nacional de Los Álamos en Nuevo México, Estados Unidos, quien trabaja también en criptografía cuántica (45).

2.1.1.2. Comunicación cuántica

Las compuertas cuánticas son una parte importante para la computación y la comunicación cuántica. Por esta razón actualmente se han logrado avances experimentales significativos en cuanto a la implementación de éstas. En el siguiente apartado se muestra como ha sido posible experimentalmente la realización de una compuerta importante: la Hadamard.

Compuerta Hadamard: para pasar de la teoría a la aplicación se implementó la tecnología de circuito onda de luz plana, en inglés Planar Lightwave Circuit (PLC). Esta tecnología logra combinar características importantes de la fibra óptica y circuitos integrados, que asemeja canales de luz guiados en una plataforma de silicio, que son fabricados mediante la deposición secuencial de capas de

vidrio en obleas de silicio y cuenta con núcleo de índice de refracción elevado (mejor emisión del fotón) utilizando el patrón de fotolitografía y técnica de grabado en seco (dry-etching). El silicio se utiliza por que proporciona un soporte sólido a las guías de onda. De este modo PLC es un componente de interfaz para las redes de fibra óptica, haciendo que esta tecnología sea un soporte complejo y versátil que al ser implementada en las compuertas cuánticas optimizará su aplicación para la comunicación.

El modelo propuesto para la compuerta Hadamard puede realizarse bajo dos modos de guía de onda, en el cual el qubit puede tener el estado lógico $|0\rangle$ el estado lógico $|1\rangle$. Recordando siempre que un espacio de estado de qubits es aquel en el cual están contenidas todas las superposiciones de los modos básicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Es importante aclarar que la compuerta Hadamard cuenta con una entrada y una salida. Por lo tanto para la realización de esta compuerta se requiere utilizar un splitter, que es un elemento utilizado en algunos sistemas de comunicación de fibra óptica, el cual puede combinar señales de diferentes fuentes ó separarlas en dos ó más canales (13).

2.2. Entropía de la información

2.2.1. Entropía

La “Entropía” puede ser considerada como una medida de la incertidumbre y de la información necesaria para, en cualquier proceso, poder acotar, reducir o eliminar la incertidumbre. Ben-Naim conduce al lector a la conclusión de que

2. MARCO TEÓRICO

la entropía es “Missing information”; la información que falta, la carencia o la pérdida de información, término que prefiere al de incertidumbre (uncertainty). La información le parece a Ben-Naim una magnitud científica bien definida, que expresa de manera más clara y exacta que la idea de “desorden” que es la entropía. La entropía es una medida de la ignorancia, sin que esto pueda interpretarse en términos subjetivistas o relativos al conocimiento humano de los sucesos, sino a la indeterminación probabilística (61).

Resulta fundamental comprender que la información que proporciona un mensaje, en el proceso de transmisión, disminuirá, más no podrá aumentar, porque si se transfiere cierta información a un destinatario equivocado, no se puede pretender que sea la misma información. La entropía de información de Shannon (o, simplemente, entropía) asociada a una distribución de probabilidad discreta $P = p_1, p_2, \dots, p_n$ se define como

$$H(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (2.7)$$

De acuerdo con el teorema de Shannon la entropía de información constituye la única medida cuantitativa rigurosa de la incertidumbre asociada a un proceso aleatorio regido por una determinada distribución de probabilidad. La base del logaritmo es arbitraria, siendo las elecciones más habituales 2, e y 10. La primera se suele dar en contextos donde las distribuciones de probabilidad binarias juegan un papel especialmente relevante. Como este no es el caso y, además, la base 10 hace más sencillas las manipulaciones matemáticas, en lo que sigue se adopta esa

base y solo se representa cómo log. El término entropía se debe a la conexión de esta magnitud con la entropía de la termodinámica y la mecánica estadística. Como el propio Shannon señalaba H es, por ejemplo, la H del célebre teorema H de Boltzmann cuando P representa la probabilidad de que un sistema de partículas se encuentre en cualquiera de sus micro estados accesibles (60).

El término información responde a una de las posibles interpretaciones de la entropía. Además de como una medida de incertidumbre (o falta de información) acerca de un experimento aleatorio, H se puede entender como la cantidad de información que uno espera ganar en promedio al llevar a cabo el experimento. En este contexto es interesante señalar otra interpretación alternativa de la entropía como el número mínimo de preguntas binarias (i.e. cuya respuesta es sí o no) que es necesario hacer en promedio para determinar el resultado de un experimento aleatorio utilizando una estrategia óptima, lo que se relaciona con la cantidad mínima de recursos físicos que se necesitan para almacenar la información producida por una fuente y que da lugar al teorema de codificación sin ruido (“noiseless coding”) de Shannon. De hecho, Shannon introdujo la entropía en el estudio de cómo transmitir y almacenar información. Ésta se mostró como una herramienta tan sumamente útil en este contexto que ha dado lugar a una rama propia de la investigación conocida como Teoría de la Información, siendo uno de sus primeros grandes resultados el teorema antes referido. Así, la entropía, además de constituir una medida rigurosa de la incertidumbre, tiene multitud de aplicaciones en muy diversas ramas de la Ciencia (9).

La entropía es subaditiva. Esto significa que la entropía conjunta asociada a dos procesos aleatorios es menor o igual que la suma de sus entropías, $H(P, Q)$

$\leq H(P) + H(Q)$, con igualdad (aditividad) si y sólo si P y Q son sucesos independientes, $\{P, Q\} = \{p_i q_j\}$. Esta propiedad resulta de nuevo muy natural, pues nuestra incertidumbre conjunta acerca de procesos aleatorios que no tienen ninguna relación entre sí debe ser obviamente la suma de las incertidumbres individuales.

2.2.2. Entropía generalizada

La entropía puede ser la magnitud física termodinámica que permite medir la parte no utilizable de la energía contenida en un sistema. Esto quiere decir que dicha parte de la energía no puede usarse para producir un trabajo.

Se entiende por entropía también a la medida del desorden de un sistema. En este sentido, está asociada a un grado de homogeneidad. La entropía de formación de un compuesto químico se establece midiendo la que conforma a cada uno de sus elementos constituyentes. A mayor entropía de formación, más favorable será su formación.

En la teoría de la información, la entropía es la medida de la incertidumbre que existe ante un conjunto de mensajes (de los cuales sólo se recibirá uno solo). Se trata de una medida de la información que es necesaria para reducir o eliminar la incertidumbre.

Otra forma de definir a la entropía es como la cantidad media de información que contienen los símbolos transmitidos. Palabras como “el” o “que” son los símbolos más frecuentes en un texto pero, sin embargo, son los que aportan

menos información. El mensaje tendrá información relevante y máxima entropía cuando todos los símbolos son igualmente probables.

La entropía en el campo de la lingüística:

La forma en la que se organiza y difunde la información en un discurso es uno de los temas relevantes y susceptibles de investigación para la lingüística. Y gracias a la entropía puede realizarse un análisis más profundo de la comunicación.

En el caso de la comunicación escrita el problema es sencillo de analizar (las unidades básicas, las letras, se encuentran bien definidas); si se desea comprender a fondo el mensaje es posible decodificarlo con exactitud y comprender tanto lo dicho literal como figurado. Pero en el lenguaje oral, la cosa cambia un poco, presentando algunas complicaciones.

No es sencillo determinar en el discurso oral los elementos fundamentales del código; las palabras suenan diferentes según por quién las pronuncie y, de igual modo, pueden tener significados diversos. No es suficiente por tanto clasificarlas en fonemas vocálicos y consonánticos porque esto no permitiría entender cómo se organiza la información porque, por ejemplo, si se suprimen fonemas vocálicos, no es posible comprender el mensaje.

Según un estudio realizado en la Universidad de Wisconsin-Madison, una buena forma de aislar y comprender el código oral es a través de la descomposición espectral de las señales sonoras. Gracias a esta técnica se intenta comprender cómo la cóclea filtra y analiza lo que llega. La cóclea es la parte del oído que tiene

la función de transformar los sonidos en señales eléctricas y enviarlas directamente al cerebro.

Para llevar a cabo este experimento se utilizó una unidad de medida que se conoce como entropía espectral en escala coclear (CSE), la misma permite establecer conexiones entre una señal y la que la precede; decidiendo qué posibilidades hay de predecir una señal partiendo de la anterior.

Los resultados devolvieron que cuanto más parecidas son dos señales, más fácil es predecir la segunda; esto significa que la información que se toma de la segunda es casi nula. Así mismo, cuanto más difieran entre sí, mayor será la información que aporte la segunda señal, por lo que si es eliminada provocará consecuencias considerables en la comprensión del discurso.

2.2.3. Entropías conocidas

En 1927 Von Neumann definió la entropía como

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho), \quad (2.8)$$

para estados ρ de un sistema cuántico (28), donde $\text{tr}(\cdot)$ denota la traza, y continuó la discusión de las propiedades e interpretación física de esta cantidad en su libro (63). Si $(e_j)_j$ es la base ortonormal de vectores propios de ρ con valores propios asociados $(\rho_j)_j$, entonces se tiene que

$$S(\rho) = - \sum_j \rho_j \log \rho_j, \quad (2.9)$$

considerando que $0 \log 0 = 0$, que se justifica con la condición $f(x) = -x \log x$ si $x > 0$ y $f(0) = 0$ es continua en $x = 0$.

Von Neumann nunca relacionó su entropía con la teoría de la información. Aunque la definición de $s(\rho)$ data de 1927, no se usó mucho durante varias décadas.

Entropía relativa de Von Neumann

Para dos distribuciones de probabilidad $f(x)$ y $g(x)$, la entropía relativa clásica se define como

$$D(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx. \quad (2.10)$$

esta entropía fue definida en el contexto de álgebra de Von Neumann por Umegaki en 1962, (58). Limblad la aplicó en física matemática en 1967, (38), pero su relevancia en información cuántica se descubrió hasta después de 1980.

Si ρ y σ son dos estados, la entropía relativa de Von Neumann se define como

$$S(\rho, \sigma) = \text{tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma), \quad (2.11)$$

2. MARCO TEÓRICO

si $\ker(\sigma) \subset \ker(\rho)$ y $S(\rho, \sigma) = \infty$ en otro caso, donde el Ker, es el conjunto de todos los operando cuya imagen sea el vector nulo.

La entropía relativa es una medida de la distinguibilidad estadística de dos estados y por esta razón decrece bajo transformaciones estocásticas, ver el Teorema de Uhlmann-Petz abajo.

El concepto de entropía relativa (clásica o cuántica) tiene aplicaciones muy importantes en la teoría de la información, en mecánica estadística y, en general, en el estudio de estructuras disipadoras y sistemas complejos en física, biología y otras áreas.

Su relación estrecha con nociones de la física estadística como el balance detallado introducido por Boltzmann, permite realizar un estudio matemáticamente riguroso de nociones como irreversibilidad y estados estacionarios fuera de equilibrio, conceptos que son central en el estudio de estructuras disipadoras en el sentido de Prigogine (44).

Si se compara con la entropía de Shannon

$$S(x) = \sum_x p(x) \log p(x) \quad (2.12)$$

Las definiciones son parecidas. Los elementos de la diagonal de la matriz de densidad desempeñan el papel de las probabilidades de que X tome cada valor. Un sistema cuántico en el estado $|x\rangle$, descrito por el valor del observable X . La matriz

densidad se escribe:

$$\rho = \sum_x p(x) |x\rangle\langle x| \quad (2.13)$$

Los estados $|x\rangle$ no tienen por qué ser ortogonales. $S(\rho)$ se demuestra que es un límite superior para la información mutua $I(X; Y)$ clásica entre X y el resultado Y de la medida del sistema.

Ahora considerando los recursos necesarios para almacenar y transmitir la información de un sistema cuántico q cuya matriz de densidad es ρ . Al igual que hicimos con la información clásica, nos gustaría reunir un número elevado de sistemas de este tipo (lo que en el otro caso llamamos secuencia típica) y utilizar un nombre que caracterice al conjunto, compactando así la información.

Para simplificar el estudio, se limita al uso de unidades binarias de información: sistemas de dos estados. Para un conjunto de n sistemas de 2 estados existe un vector en un espacio de Hilbert de 2^n dimensiones que especifica por completo su estado. Esperando que el vector de estado caiga dentro de un subespacio típico del espacio de Hilbert, análogamente como los arreglos de bits tomaban valores de secuencias típicas en el caso clásico. Schumacher y Jozsa demostraron que la dimensión de ese subespacio es $2^{nS(\rho)}$, lo que por analogía con el caso anterior conduce a que sólo son necesarios $nS(\rho)$ qubits para transmitir la información de los n sistemas. La dimensión del espacio sobre el que se representan los estados crece exponencialmente con el número de qubits (el qubit es una medida de información).

Importante es tener en cuenta que las operaciones de codificación y decodificación no dependen del conocimiento que tengamos sobre el estado del sistema. Esto nos salva del problema de la no clonación, y nos libera del hecho de tener que medir para transmitir información. En el caso de que los estados a transmitir fueran ortogonales entre sí el problema se reduciría al caso clásico. Hay contrapartidas cuánticas a las otras cantidades que vimos antes: la información coherente desempeña el mismo papel que la información mutua (42), y podemos desarrollar códigos análogos al de Huffman (31) para comunicación de información cuántica.

2.2.4. Entropía de información cuántica

Existen autores que han relajado la axiomática de Shannon para una medida de la incertidumbre, lo que ha dado lugar a un abanico más amplio de medidas que se conocen como entropías generalizadas. Básicamente, estas explotan la libertad a la que da lugar la Schur-concavidad como única restricción para una medida de incertidumbre. Si bien las entropías generalizadas, como se revisarán a continuación, no posee en todas las propiedades matemáticas que caracterizan a la entropía de Shannon y que le otorgan un lugar central en Teoría de la Información, su interés y utilidad resultan incuestionables. Las entropías de Rényi de una distribución de probabilidad discreta $P = p_1, p_2, \dots, p_n$ se definen como (8)

$$H_q(P) = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{i=1}^n (P_i)^q \right) \quad (q \geq 0). \quad (2.14)$$

Básicamente, se puede entender como el resultado de sustituir el axioma de Shannon por la condición más débil de aditividad. Estas entropías también se pueden

derivar exigiendo la Schur-concavidad junto con alguna condición más de índole técnica (65). Puesto que proviene de una relajación de los axiomas originales de Shannon y no de una axiomática diferente, la entropía de Rényi contiene como caso particular a la de Shannon; concretamente cuando $q = 1$, lo cual puede comprobarse tomando el correspondiente límite en 2.14. Otro caso particular destacable es:

$$H_\infty(P) = -\log \max P_i \quad (2.15)$$

que también se demuestra con el correspondiente límite. Como función del parámetro q , $H_q(P)$ es no creciente, lo cual es útil para acotar la entropía de Shannon. Como se ha mencionado, las entropías de Rényi son siempre aditivas. Sin embargo, la subaditividad se da si y sólo si $q = 1$ (i.e. en el caso Shannon). Además, $H_q(P)$ es cóncava si $0 < q \leq 1$ (si $n = 2$ la concavidad también se cumple para $0 < q \leq 2$), mientras que para $q > 2$ $H_q(P)$ no es ni cóncava ni convexa (22). Como rasgo positivo de estas entropías, cabe señalar que para $q > 1$ están libres de problemas de continuidad que sufre la entropía de Shannon cuando se permite un conjunto infinito de posibles sucesos (49).

La entropía de Tsallis (57) de una distribución de probabilidad discreta $P = p_1, p_2, \dots, p_n$ se puede definir como

$$\tilde{H}_q(P) = \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^n (P_i)^q - 1 \right) \quad (q \geq 0). \quad (2.16)$$

Nótese que estas entropías también se reducen a la de Shannon en el caso $q = 1$.

Si bien las entropías de Tsallis son cóncavas para todo q , no son ni subaditivas ni aditivas dejando aparte el caso especial $q = 1$. A pesar de que la falta de aditividad puede resultar sorprendente e inapropiada para una medida de la incertidumbre, este es el ingrediente básico de su axiomática (67) y la razón principal de su interés en termodinámica y estadística de sistemas complejos. Análogamente al caso de Shannon, para distribuciones de probabilidad continuas, las correspondientes entropías de Rényi y Tsallis se definen como

$$H_q(X) = \frac{1}{1-q} \log \left(\int_{\Delta} (p(x))^q dx \right). \quad (2.17)$$

$$\tilde{H}_q(X) = \frac{1}{1-q} \left(\int_{\Delta} (p(x))^q dx - 1 \right). \quad (2.18)$$

el poder identificar cual es la herramienta que mejor se adapta a las necesidades que se tienen y poder ocuparla en forma adecuada, permitirá poder hacer cálculos más eficientes y rápidos.

Las desviaciones estándar de dos observables no conmutables A y B se utilizaron en la relación de incertidumbre de Heisenberg generalmente escrita en la formula (64)

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \Psi \rangle | \quad (2.19)$$

donde ΔA y ΔB representan la raíz cuadrada del segundo momento central (desviación estándar o varianza) de A y B , respectivamente, y $[\hat{A}, \hat{B}]$ es su colector. Se destaca que principalmente se puede utilizar en lugar de los segundos momentos centrales de estadística más altos momentos estadísticos de observables no conmutan al formular una relación de incertidumbre de Heisenberg (3).

La vasta literatura sobre la relación de incertidumbre de Heisenberg sigue creciendo y contiene críticas, notables en los siguientes puntos (20).

Si uno de los dos observables no conmutables A o B se encuentra en su estado propio entonces $A = 0$ o $B = 0$ y por lo tanto el lado izquierdo de 2.19 es también igual a cero aunque el lado derecho para estos observables es por definición, diferente de cero.

Si X y P son dos observables no conmutables con densidades de probabilidad continuas, en seguida, sus desviaciones estándar no pueden representar a la medida apropiada para la incertidumbre de estos observables, especialmente si sus densidades de probabilidad exhiben varios picos distantes agudos (59).

Para algunos sistemas cuánticos las desviaciones estándar de los observables no conmutables conducen a una relación de incertidumbre en el que la desviación estándar de una de las observables es independiente de la desviación estándar de la observable complementaria (60). Tal relación de incertidumbre no cumple con la demanda poner en cualquier forma de relación de incertidumbre.

Las desviaciones estándar de la posición y el momento fueron utilizados por

2. MARCO TEÓRICO

Heisenberg en 1927 en su famosa relación de incertidumbre (UNSCHE) (65). En ese momento la desviación estándar representa la medida generalmente aceptada de la imprecisión de la medición.

Desde su aparición, la relación de incertidumbre de Heisenberg ha sido objeto de cientos de artículos en los que se determinaron las desviaciones estándar y las relaciones de incertidumbre correspondientes de varios observables no conmutables. Mientras tanto, sin embargo, nuevas disciplinas científicas han surgido que dan nuevas posibilidades para expresar la medida de la incertidumbre de una cantidad mecánica clásica y cuántica.

Inspirado por el trabajo de Boltzmann-Gibbs Shannon publicó el trabajo fundamental en la teoría de la comunicación (8) en la que se introdujo la medida entrópica más importante de la incertidumbre de una variable aleatoria, es decir, la entropía de la información. En las últimas décadas, algunos autores han demostrado que las relaciones de incertidumbre, en los que se utilizan en lugar del momento en que las medidas entrópicas de incertidumbre, no sufren de las deficiencias mencionadas anteriormente. Las relaciones de incertidumbre donde se emplean las entropías de información para la incertidumbre de observables no conmutan se llaman relaciones de incertidumbre entrópicas. Principalmente, otras medidas entrópicas se pueden usar en la formulación de 'entrópicas', relaciones de incertidumbre de los observables no conmutables. El más simple parece ser la denominada información «energía» se define como (25)

$$H_{(e)}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n P_i^2. \quad (2.20)$$

Esta medida entrópica de incertidumbre, similar a la entropía de información, también da el grado de la difusión de la distribución de probabilidad de observables. Sin embargo, la entropía de información tiene una posición privilegiada entre las medidas entrópicas de incertidumbre. Aparte de su significado como una medida de incertidumbre de un observable, la entropía de información permite a uno determinar la cantidad de información obtenida a partir de una cierta medida. Uno sólo tiene que saber la entropía de información de un observable antes y después de su medición. La diferencia de estos dos entropías de información se obtiene la cantidad de información obtenida en la medición (36).

En la formulación matemática de la relación de incertidumbre entrópica, se considera que el vector de estado $|\psi\rangle$ en el espacio de Hilbert N -dimensional y dos observables no conmutables A y B que tiene un espectro no degenerado de sus vectores propios $|a_i\rangle$ y $|b_j\rangle$. La relación de incertidumbre entrópica es una desigualdad de la forma (24)

$$S_A + S_B \geq S_{AB}$$

donde

$$S_A = - \sum_i |\langle \psi | a_i \rangle|^2 \ln |\langle \psi | a_i \rangle|^2$$

2. MARCO TEÓRICO

y

$$S_B = - \sum_i | \langle \psi | b_i \rangle |^2 \ln | \langle \psi | b_i \rangle |^2$$

son las entropías de la información de los observables A y B , respectivamente. S_{AB} es una constante positiva que representa el límite inferior de la suma de la información entropías S_A y S_B (27). Para los observables X_c y P_c continuo, descritos por las funciones de onda $\psi(x)$ y $\varphi(p)$, la relación de incertidumbre entrópica se lee (60)

$$S_{(X_c)} + S_{(P_c)} \geq S_{XP}$$

donde

$$S_{(X_c)} = - \int_{-\infty}^{\infty} | \psi(q) |^2 \ln | \psi(q) |^2 dq$$

y

$$S_{(P_c)} = - \int_{-\infty}^{\infty} | \varphi(p) |^2 \ln | \varphi(p) |^2 dp$$

representan las entropías diferenciales de X_c y P_c , respectivamente. S_{XP} es el límite inferior de la suma de estas entropías de información (Białynicki-Birula y Mycielski) (24).

Maassen y Uffink (21), Sánchez-Ruiz (27) han demostrado que existen límites inferiores no triviales para S_{AB} y S_{XP} para dos observables sin estados propios

comunes. En consecuencia, la relación de incertidumbre entrópica para la posición y el momento de un sistema cuántico descrito por su función normalizada $\psi(x)$ tiene la forma (24)

$$S_{(x)} + S_{(p)} \geq S_{xp}$$

donde

$$S_x = - \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \log |\psi(x)|^2 dx$$

y (2.21)

$$S_p = - \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(p)|^2 \log |\hat{\varphi}(p)|^2 dp$$

respectivamente, donde $\hat{\varphi}(p)$ es la transformada de Fourier de la función de onda $\psi(x)$. S_{xp} representa el límite inferior de la suma de las entropías de información de posición y del momento. Białynicki-Birula y Mycielski y Maassen y Uffink (21) encontraron que el menor no trivial con destino a la suma de posición y el momento entropías existe y se da como ($\hbar = 1$)

$$S_x + S_p \geq D(1 + \ln\pi) \text{ donde } D \text{ es la dimensión.}$$

Recientemente, ha habido un considerable interés en encontrar las dependencias de $S_x(n)$, $S_p(n)$ y $S_{xp}(n)$ en los estados cuánticos de un sistema cuántico (61).

Dado que los límites de la capacidad de medición colocados en la posición y el momento de una partícula depende del sistema cuántico concreto es necesario investigar más a fondo estos límites para cada sistema y sus estados cuánticos. Di-

rigiéndose a la pregunta: ¿cuáles son los valores de $S_x(n)$ y $S_p(n)$ para el conjunto de estados estacionarios de un potencial infinito así? Hay una motivación específica para el estudio de este sistema, de una caja unidimensional de longitud L y unas infinitamente altas paredes potenciales a menudo se sirve como un sistema modelo para el análisis de los diferentes tipos de relación de incertidumbre (54). Considerando que los límites a las posiciones y capacidad de medición impulso del oscilador armónico, en forma de sus entropías y desviaciones estándar, ya se han determinado en función de sus estados cuánticos los límites correspondientes para el pozo de potencial infinito (60) se conocen sólo parcialmente.

2.3. Pozo infinito

El pozo de potencial infinito es un tópico en la mecánica cuántica, uno de los primeros problemas que se enseñan a los estudiantes de Física Cuántica. Enunciado de forma más intuitiva, este problema no es otra cosa que una partícula dentro de una caja para la que no actúa ninguna otra fuerza (como la gravedad) más allá de las que ejercerán las paredes de la caja cuando la partícula se acerque a ellas, haciendo imposible que se salga de la caja. El hecho de no haber considerado la gravedad o un modelo más realista de la fuerza (o, equivalentemente, del potencial del que deriva la fuerza) ejercida por las paredes tiene la única función de hacer el problema más sencillo de resolver; sin embargo, otro más realista llegará a conclusiones similares a las estudiadas en este.

La solución de la ecuación de Schrödinger (del cual "habla" la teoría de la mecánica cuántica) a este problema mostrará, además de otras cosas más útiles,

que la partícula dentro de una caja no puede tener cualquier energía, sino que dichos valores posibles se encuentran "cuantizados". Es decir, que el valor de la energía total que tiene la partícula no puede ser cualquiera, sino que siempre (que un observador lo mida) podrá únicamente tener determinados valores singulares que dependerán de las dimensiones de la caja, sin importar nada más.

2.3.1. Pozo infinito en una dimensión

Por lo general, un pozo de potencial infinito de una dimensión, tiene una pared izquierda $x = a$ y la derecha en $x = b$, siendo ($a < b$). Lo que equivale a decir que la pared izquierda se encuentra en el punto a y que el pozo tiene anchura L . Siendo por lo tanto $L = b - a$. Normalmente, se plantea este problema dejando como variable únicamente la anchura del potencial, pero no su posición en el eje de coordenadas, el cuál por lo general lo impone el problema figura 2.4.

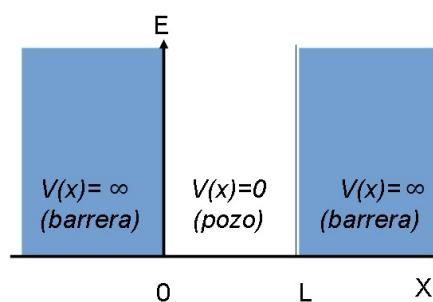


Figura 2.4: Pozo de potencial infinito (o caja) unidimensional de anchura L con la primera pared en $x=0$.

Resolvamos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

2. MARCO TEÓRICO

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r) + U(r)\Psi(r) = E\Psi(r), \quad (2.22)$$

con el potencial de pozo infinito

$$U(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \leq b \\ +\infty & x < a \text{ y } x > b \end{cases} \quad (2.23)$$

se obtiene simplemente

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (2.24)$$

o lo que es lo mismo

$$\Psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))\Psi(x) = 0. \quad (2.25)$$

Fuera del pozo, la función de onda debe ser igual a cero ya que, por hipótesis, al decir que la altura del pozo es infinita, queremos indicar que es completamente seguro que las partículas no pueden atravesar dichas barreras de potencial. Dado que la función de onda es una función continua, por muy poco que nos alejemos de a por la izquierda o de b por la derecha el valor de la función será igual a cero, por lo que también debe serlo en los extremos a y b para que se trate de

una función continua. Sin embargo, a muy poco que nos introduzcamos dentro del pozo, la función de onda tomará otros valores distintos de cero.

La ecuación de Schrödinger dentro del pozo, donde $U(x) = 0$:

$$\Psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x) = 0. \quad (2.26)$$

Si se toman a a y b genéricos, lo más sencillo es usar una solución general de esta ecuación diferencial en términos de exponenciales complejas.

$$\Psi(x) = Ae^{iwx} + Be^{-iwx}, \quad (2.27)$$

donde se define

$$w^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (2.28)$$

Si $\Psi(a) = 0$

$$0 = \Psi(a) = Ae^{iwa} + Be^{-iwa} \Rightarrow B = -Ae^{2iwa}, \quad (2.29)$$

sustituyendo en la solución general

2. MARCO TEÓRICO

$$\begin{aligned}
 \Psi(x) &= Ae^{iwx} - Ae^{2iwa}e^{-iwx} \\
 &= Ae^{iwx}[1 - e^{2iwa}e^{-2iwx}] \\
 &= Ae^{iwx}[1 - e^{2iw(a-x)}]
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

ahora tomar la segunda condición, $\Psi(b) = 0$

$$0 = \Psi(b) = Ae^{iwb} [1 - e^{2iw(a-x)}] \Rightarrow \begin{cases} A = 0 & \Rightarrow \Psi(x) = 0, \forall x \\ 0 \\ e^{2iw(a-b)} = 1 \Rightarrow 2iw(a-b) = 0 + 2\pi ik, \quad k \in Z. \end{cases} \tag{2.31}$$

En este último caso que es el único no trivial, se deja ω de la ecuación anterior

$$w = \frac{\pi k}{b-a} = \frac{\pi k}{L}, \quad k \in Z. \tag{2.32}$$

Se puede coincidir que, para tener una solución a la ecuación de Schödinger con las condiciones de contorno impuestas por el potencial, los valores de ω necesariamente deben estar cuantizados. Es decir, que solo puede tomar valores discretos y equi-espaciados $\pi/(b-a)$ unidades, en vez de poder tomar cualquier valor en un intervalo determinado, como es el caso de la coordenada x , que puede tomar cualquier número entre a y b . Como consecuencia de esto, las energías del operador Hamiltoniano, también están cuantizadas de la siguiente forma

$$E = \frac{\hbar^2 w^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(b-a)^2} k^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2, \quad n \in N^+. \tag{2.33}$$

Nótese que para las energías solo considera el sentido de los números naturales en lugar de los enteros, puesto que $-k$ y k definen la misma energía. Además se descarta el valor 0 ya que su autofunción es nula.

La forma que toma la función de onda

$$\Psi(x) = Ae^{i\frac{\pi k}{L}x} \left[1 - e^{i\frac{2\pi k}{L}(a-x)} \right]. \quad (2.34)$$

Ahora se calcula el factor de normalización A por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1. \quad (2.35)$$

Como

$$\begin{aligned} |\Psi(x)|^2 &= \left| Ae^{i\frac{\pi k}{L}x} \left[1 - e^{i\frac{2\pi k}{L}(a-x)} \right] \right|^2 \\ &= |A|^2 \cdot 1 \cdot \left[1 + 1 - 2 \cos \left(\frac{2\pi k}{L}(a-x) \right) \right] \\ &= 2|A|^2 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{L}(a-x) \right) \right], \end{aligned}$$

donde se ha usado el coseno es una función par.

$$|\Psi(x)|^2 = 2|A|^2 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{L}(a-x) \right) \right]. \quad (2.36)$$

2. MARCO TEÓRICO

El módulo cuadrado de la función de onda depende solo de la posición del pozo mediante una traslación espacial de la función una cantidad a . Esto era completamente esperable ya que la probabilidad de encontrar la partícula en un intervalo relativo al pozo.

Integraremos solo de a a b ya que $|\Psi(x)|^2$, al igual que la función $\Psi(x)$, son siempre nulas fuera del pozo de potencial.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_a^b |\Psi(x)|^2 dx \\ &= 2|A|^2 \left(\int_a^b dx - \int_a^b \cos \frac{2\pi k}{b-a}(x-a) dx \right) \\ &= 2|A|^2 \left([x]_a^b - \frac{b-a}{2\pi k} \left[\operatorname{sen} \frac{2\pi k}{b-a}(x-a) \right]_a^b \right) \\ &= 2|A|^2 \left(b-a - \frac{b-a}{2\pi k} \left[\operatorname{sen} \frac{2\pi k}{b-a}(b-a) - \operatorname{sen} 0 \right] \right) \\ &= 2|A|^2 \left(L - \frac{b-a}{2\pi k} [0 - 0] \right) \\ &= 2|A|^2 L \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2L}} \end{aligned}$$

La función de onda resulta

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{\pi k}{L}x} \left[1 - e^{-i\frac{2\pi k}{L}(x-a)} \right], \quad k \in \mathbf{Z} - \{0\}. \quad (2.37)$$

La función de onda depende directamente de en qué posición concreta se en-

cuentra el origen del pozo (y también de la anchura de este). Para dos pozos de las mismas características pero localizados en posiciones diferentes, será necesario utilizar funciones distintas para representar sus funciones de onda. Sin embargo, esto no quiere decir que la física del pozo de potencial sea distinta, sino que la expresión matemática de la función de onda debe ser escrita de acuerdo a la posición del pozo.

Si $a = 0$ y $b = L$:

$$\begin{aligned}
 \Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{\pi k}{L}x} \left[1 - e^{-i\frac{2\pi k}{L}x} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \left[e^{i\frac{\pi k}{L}x} - e^{-i\frac{\pi k}{L}x} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \left[2i \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x \right] \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2L}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k}{L} x \right) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k}{L} x \right), \quad k \in \mathbf{Z} - \{0\}
 \end{aligned}$$

$$\text{si } a = 0 \text{ y } b = L : \quad \Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{L} x \right), \quad n \in \mathbf{N}^+ & \text{si } 0 < x < L \\ 0 & \text{si } x \geq L \end{cases} \quad (2.38)$$

Si $a = -L/2$ y $b = L/2$

2. MARCO TEÓRICO

$$\begin{aligned}
 \Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{\pi k}{L}x} \left[1 - e^{i\frac{2\pi k}{L}(-\frac{L}{2}-x)} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{\pi k}{L}x} \left[1 - e^{-i\pi k} e^{-i\frac{2\pi k}{L}x} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \left[e^{i\frac{\pi k}{L}x} - e^{-i\pi k} e^{-i\frac{\pi k}{L}x} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \left[e^{i\frac{\pi k}{L}x} - (-1)^k \cdot e^{-i\frac{\pi k}{L}x} \right], \quad k \in \mathbf{Z} - \{0\}
 \end{aligned}$$

Para obtener una forma más clara, es necesario separar los valores pares e impares de k para analizar las autofunciones en términos de senos y cosenos

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{L}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right), & \text{si } n \text{ par} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right), & \text{si } n \text{ impar} \\ 0 & \text{si } x > \frac{L}{2} \end{cases}, \quad n \in \mathbf{N}^+, \text{ si } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$$

O, de otra forma,

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{L}{2} \\ \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right) \right\}, & n \in \mathbf{N}^+ \text{ si } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (2.39)$$

Se observa que las energías permitidas, como cabe esperar, solo dependerán de cuál es la anchura del pozo, un eje de coordenadas paralelo al pozo de potencial y de que a alguno de sus puntos se llamará $x=0$.

2.3.2. Pozo infinito en dos dimensiones

La ecuación de Schrödinger para una partícula que se mueve en una caja de dos dimensiones de tamaño axb , tal que en el interior $V = 0$ y en el exterior $V = \infty$, tiene la forma:

$$H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = E\Psi(x, y) \quad (2.40)$$

Esta ecuación diferencial tiene solución de la forma $\Psi(x, y) = \Psi(x)\Psi(y)$, siendo la energía total del sistema $E = E_x + E_y$. La ecuación diferencial sobre cada coordenada puede ser resuelta de forma independiente, obteniéndose soluciones idénticas a las del apartado anterior, por lo tanto:

$$\Psi_{n_x, n_y} = \frac{2}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \text{sen} \left(\frac{n_x \pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n_y \pi y}{b} \right) \quad (2.41)$$

siendo la energía,

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right) \quad (2.42)$$

y donde n_x , y n_y , son dos números cuánticos independientes, los cuales pueden tomar valores enteros 1, 2, 3, etc. Es de destacar como cada número cuántico aparece asociado a una coordenada del sistema. Este hecho es una propiedad general de cualquier sistema cuántico. Existirán tantos números cuánticos como coordenadas posea el sistema, si bien en ocasiones pueden aparecer más números

2. MARCO TEÓRICO

cuánticos originados por alguna coordenada interna del sistema, como el spin.

En este trabajo interesa más el pozo circular. Un pozo infinito en dos dimensiones se puede estudiar también cómo una superficie circular (pozo circular), ya que se reducen el número de variables en la función, y el cual queda definido por $V(r) = 0 (r \leq R)$ y $V(r) = \infty (r > R)$. La ecuación de Schrödinger en coordenadas polares puede escribirse como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi(r, \varphi) = E\psi(r, \varphi). \quad (2.43)$$

Al tomar $\psi(r, \varphi) = R(r)e^{\pm im\varphi} / \sqrt{2\pi} (m = 0, 1, 2, \dots)$ y sustituyendo en ec (4.8), se tiene

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R(r) = -k^2 R(r) = -k^2 R(r), \quad k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}. \quad (2.44)$$

Al definir $z = kr$, se convierte en la ecuación diferencial de Bessel

$$\frac{d^2 R(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR(z)}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2} \right) R(z) = 0. \quad (2.45)$$

Tiene dos soluciones linealmente independientes para cada valor de m , es decir,

la regular $J_m(z)$ y la singular $Y_m(z)$. Sólo el J_m de buen comportamiento (z) es físicamente aceptable, con los valores propios determinados por $J_m(kR) = 0$. Es decir, kR es la n -ésima raíz α_{mn} de la función de Bessel $J_m(x)$. A partir de esta condición, los valores propios son entonces dados por

$$E_{mn} = \frac{\hbar^2 k_{mn}^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \alpha_{mn}^2. \quad (2.46)$$

Aquí, se grafica la isolínea del k_{mn} en la figura 2.5 para mostrar la relación entre el nivel de energía E_{mn} y los números cuánticos m y n . Los diferentes valores de los números cuánticos m y n corresponden a los valores iguales de la k_{mn} en la misma línea.

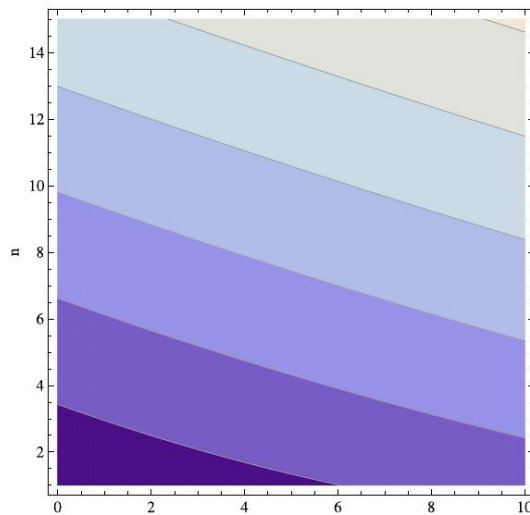


Figura 2.5: Isolíneas de parámetro k_{mn} con radio $R = 10$.

Las eigenfunciones correspondientes a la n -ésima raíz están dadas por

2. MARCO TEÓRICO

$$\Psi_m(r, \varphi) = \mathcal{N}_m J_m(k_{mn}r) e^{\pm im\varphi}, \quad k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}, \quad (2.47)$$

donde el factor de normalización

$$\mathcal{N}_m = \frac{1}{R\pi^{1/2} |J_{m+1}(\alpha_{mn})|}. \quad (2.48)$$

Es obvio ver que el espectro completo corresponde a un conjunto de $m = 0$ soluciones, pero es doblemente degenerado para cada valor de $m > 0$, por que $\pm m$ dan las mismas contribuciones. Esto corresponde físicamente a la equivalencia en sentido contrario de las manecillas del reloj. Como la parte angular se conserva la simetría, sólo se tomará la parte radial. Las funciones de onda radiales están dadas por

$$R_m(r) = \mathcal{N}_m J_m(k_{mn}r), \quad \mathcal{N}_m = \frac{\sqrt{2}}{R |J_{m+1}(\alpha_{mn})|}. \quad (2.49)$$

Las funciones de onda radiales para $m = 0, 1$ se muestran en la figura 2.6. Dado que este sistema cuántico se limita, todas las funciones de onda son iguales a cero para $r = R$.

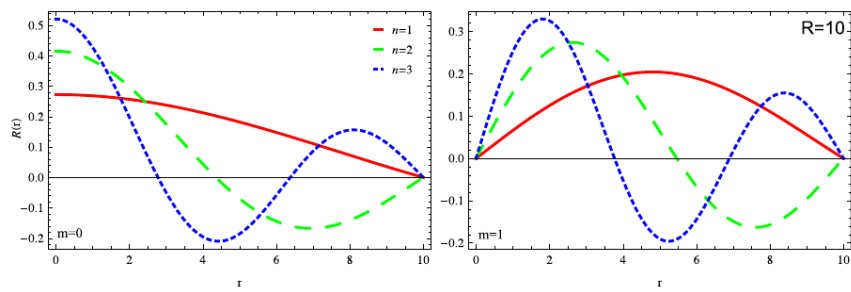


Figura 2.6: Funciones de onda para los estados $m = 0, 1$ como una función de la posición r con respecto a los números cuánticos radiales $n = 1-3$.

Metodología

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos de la investigación. Se exponen la perspectiva metodológica que se ha adoptado, la estrategia de indagación y el diseño metodológico de las diferentes fases de la investigación desarrolladas.

Se tiene un objetivo principal, y para llegar a él se implementará la investigación documental, descriptiva, analítica y experimental.

- Documental

En una primera etapa se empleó la investigación documental y explicativa, debido a que en un inicio el trabajo se enfocó en una exhaustiva recopilación bibliográfica, misma que comprendió tanto la recolección como la asimilación de conceptos teóricos con los que es posible distinguir y analizar los elementos esenciales de la entropía de la información y el pozo infinito.

- Descriptiva

3. METODOLOGÍA

En la segunda etapa se seleccionaron los elementos de estudio adecuados, en función de las características encontradas en la investigación documental.

- Analítica

Se hicieron los cálculos pertinentes para obtener las entropías y así poder compararlas entre ellas y para poder hacer uso de ellas cuando se tenga la tecnología necesaria.

- Experimental

Se utilizó un el software WolframMathematica para el desarrollo de las graficas de las entropías de los pozos en una y dos dimensiones, mathematica es un programa utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemáticas y áreas computacionales. Originalmente fue concebido por Stephen Wolfram, quien continúa siendo el líder del grupo de matemáticos y programadores que desarrollan el producto en Wolfram Research, compañía ubicada en Champaign, Illinois. Comúnmente considerado como un sistema de álgebra computacional, Mathematica es también un poderoso lenguaje de programación de propósito general.

En el programa Mathematica se pueden distinguir dos grandes partes, una de ellas, llamada núcleo (Kernel), es la encargada de ejecutar todos los comandos y realizar los cálculos necesarios. La otra parte es la interfaz del usuario (Front-End). Existe un tipo especial de Front-End que permite generar documentos interactivos en los que se mezclan gráficos y textos y

en el que se incluirán todos los comandos a evaluar por el núcleo; a ese tipo de documentos se los denomina Notebooks. La forma de interactuar entre estas dos partes la dirige el usuario, es decir, que el núcleo no realiza ninguna acción hasta que el usuario no se lo indique y para ello se puede pulsar las teclas Shift y Enter simultáneamente. En caso de pulsar la tecla Enter únicamente, la entrada no se evaluará, simplemente se cambia de línea para poder introducir otro input. Una vez pulsado Shift y Enter, se evaluarán todos los inputs introducidos.

4.1. Resultados de los cálculos de las entropías de la información

4.1.1. Pozo en una dimensión

Recordando que el pozo de potencial infinito es un sistema cuántico con el potencial $U(x)$ que se define como ($\hbar = 1$) (9):

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } |x| \leq a \\ +\infty & \text{para } |x| > a \end{cases} \quad (4.1)$$

Sus funciones de onda, los valores propios de la energía y las funciones de onda de movimiento son

4. RESULTADOS

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \text{sen} \left[\frac{\pi n}{2a} (x - a) \right] & \text{para } |x| \leq a \\ 0 & \text{para } |x| > a \end{cases} \quad (4.2)$$

$$En = \frac{n^2 \pi^2}{8ma^2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

$$U_n(p) = \sqrt{\frac{\pi n^2}{2a^3} \frac{\text{sen}(ap - \frac{\pi}{2}n)}{(p^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4a^2})}} \exp(i\alpha_n) \quad (4.4)$$

respectivamente.

Con el fin de determinar la posición-momento relaciones de incertidumbre entrópicas para el pozo de potencial infinito se tienen que evaluar las integrales correspondientes 2.21. Inserción de las funciones de onda de posición ψ_n en la ecuación 2.21 se obtiene la dependencia de la entropía información de posición del infinito pozo de potencial en su anchura y un número cuántico n . Estas integrales se calculan analíticamente para toda la gama de a y n por Sánchez-Ruiz (27) que obtuvo el siguiente resultado simple:

$$S_x(n, a) = \ln(4a) - 1 \quad (4.5)$$

se nota que $S_x(a, n)$ no depende del número cuántico n . Inserción de las funciones de onda de momento $U_n(p)$ en 2.21 se obtiene la correspondiente información de

entropía de momento

$$S_P(a, n) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi n^2 \text{sen}^2(ap - \frac{\pi}{2}n)}{2a^3(p^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4a^2})^2} \ln \left[\frac{\pi n^2 \text{sen}^2(ap - \frac{\pi}{2}n)}{2a^3(p^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4a^2})^2} \right] dp. \quad (4.6)$$

El cálculo analítico de la entropía de información de momento representa un problema mucho más difícil que la de la entropía información de posición. Por lo tanto, se calcula numéricamente.

Las funciones de onda de posición con respecto a los números cuánticos $n=1-3$ se presentan en la figura 4.1 (a) y (b).

4. RESULTADOS

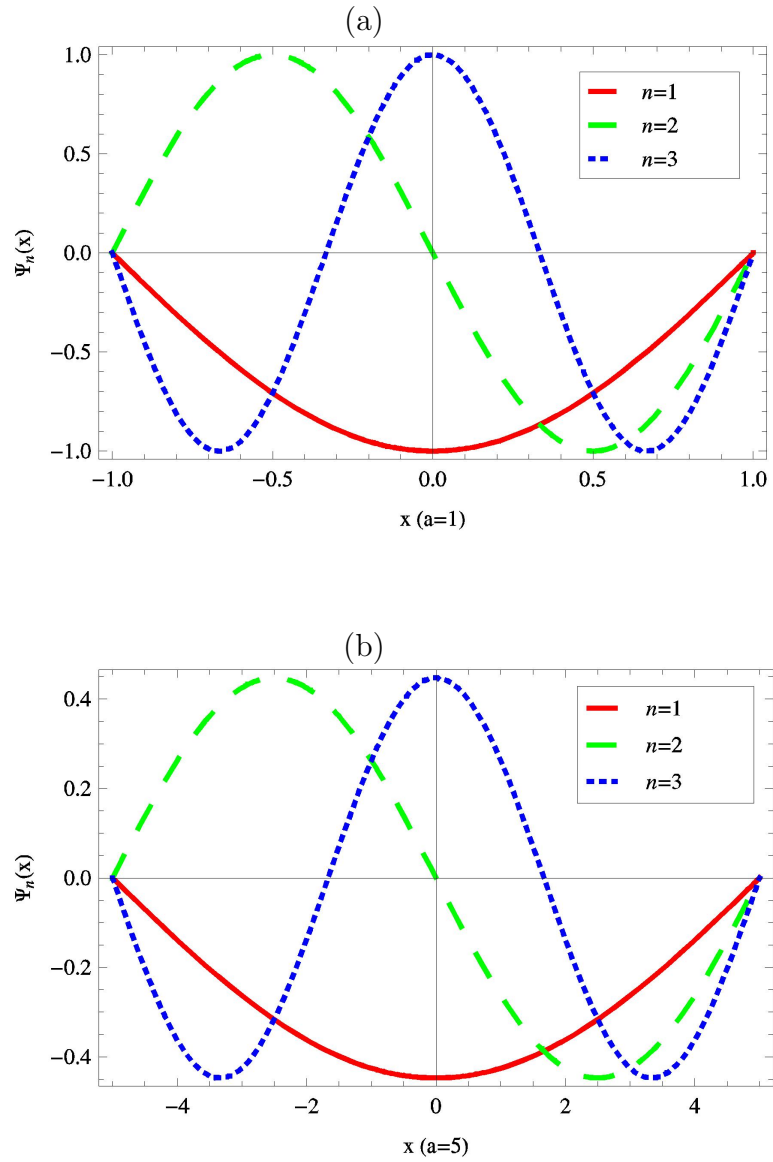


Figura 4.1: Funciones de onda de posición con $n=1,2$ y 3 y diferente anchura 1 y 5 .

Las funciones de onda de momento respecto a los números cuánticos $n=1-3$

se representan en la figura 4.2 (a) y (b).

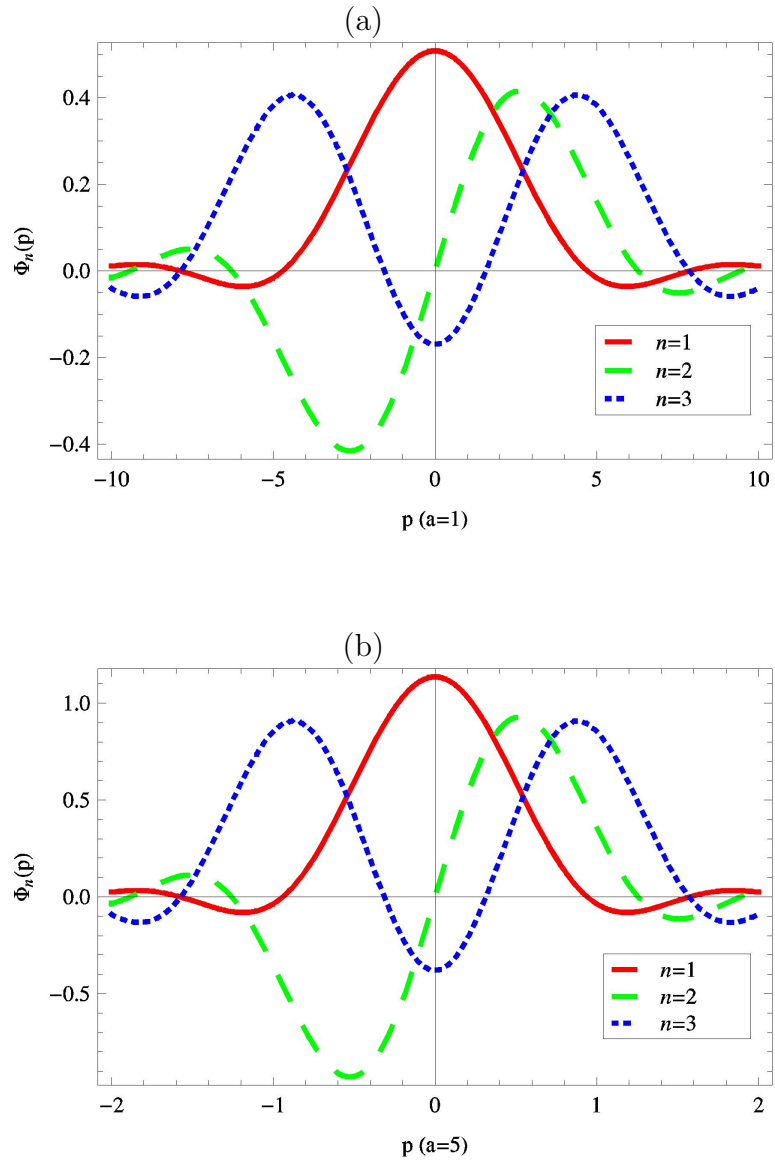


Figura 4.2: Funciones de onda de momento.

Las densidades de posición como una función de posición están representadas

4. RESULTADOS

en la figura 4.3 (a) y (b).

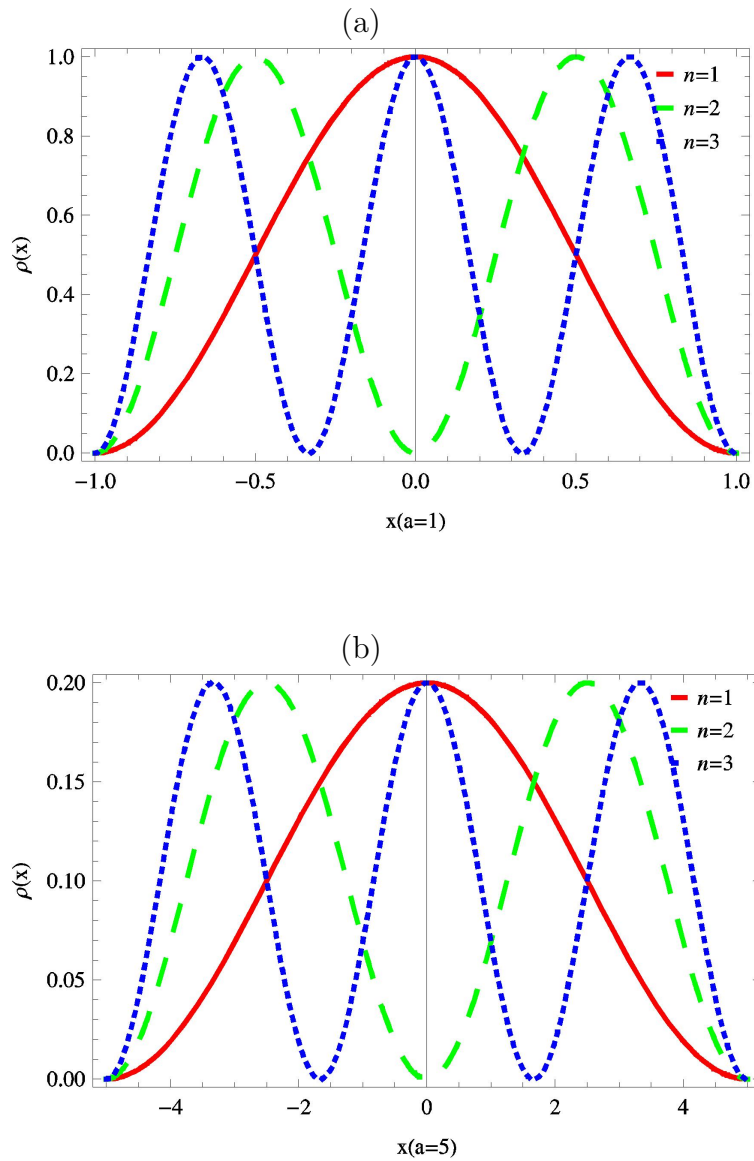


Figura 4.3: Densidades de posición con $n=1,2,3$ y $a = 1$ y 5.

Las densidades de momento como una función de momento se representan en

la figura 4.4.

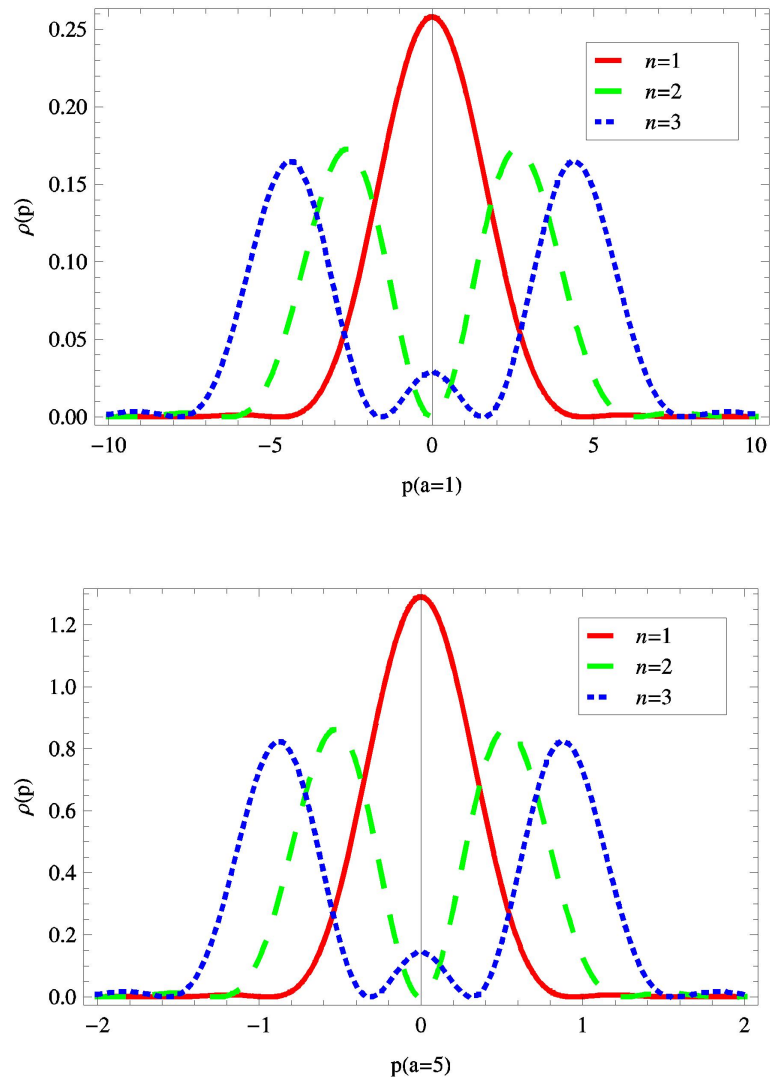


Figura 4.4: Densidades de momento.

Las densidades de entropía de posición como una función de posición se muestran en la figura 4.5.

4. RESULTADOS

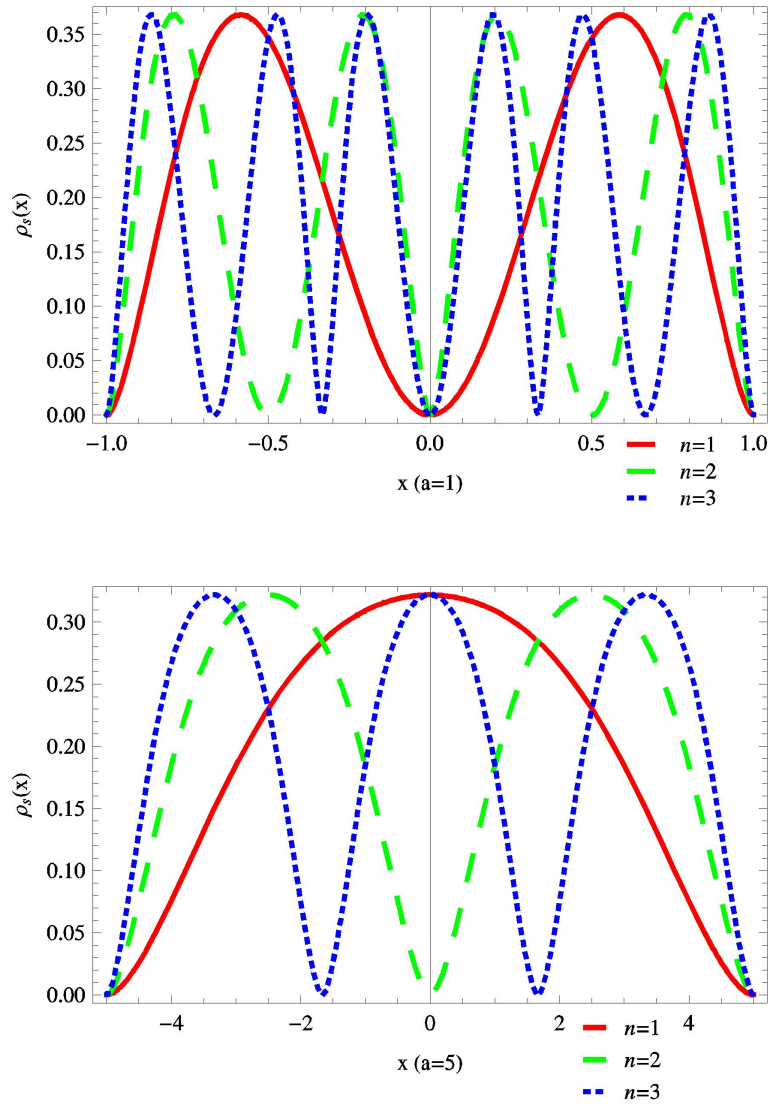


Figura 4.5: Densidades de entropía de posición con $n=1,2,3$.

Las densidades de entropía de momento como una función de momento se muestra en la figura 4.6 (a) y (b).

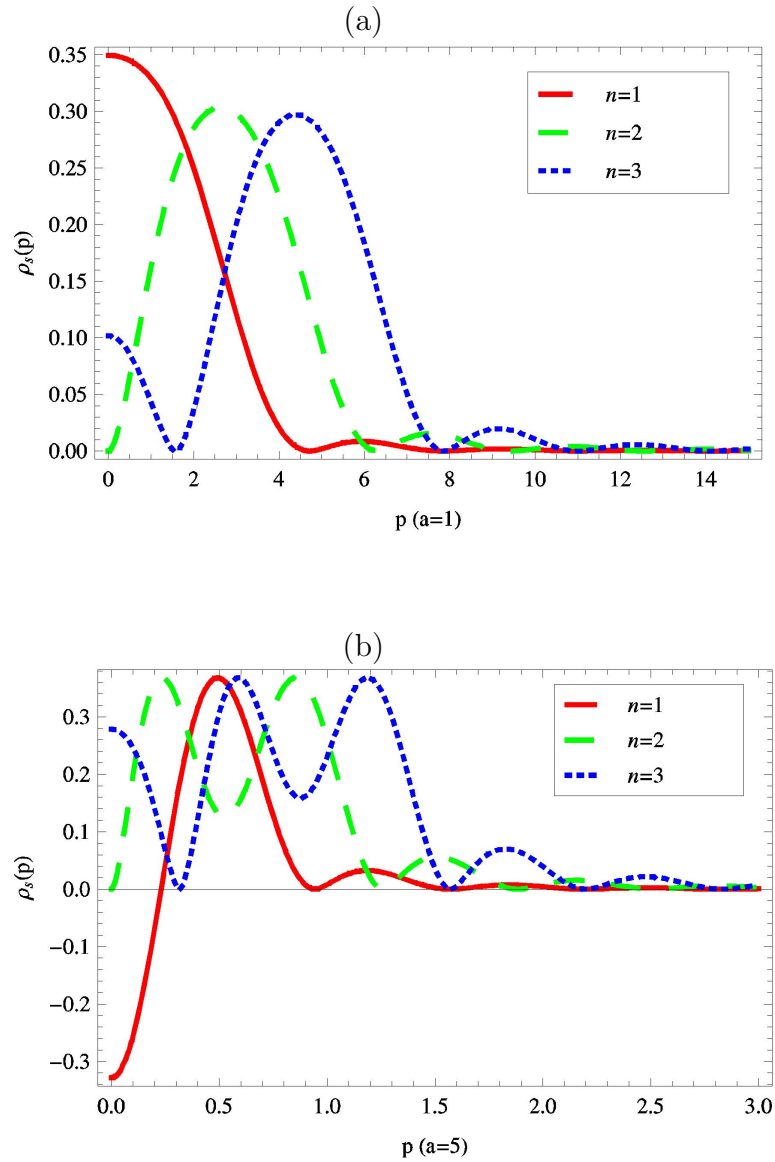
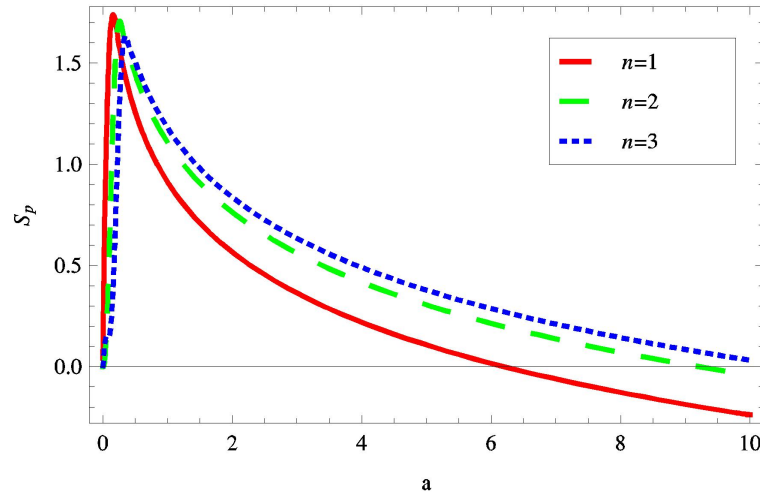


Figura 4.6: Densidades de entropía de momento con $n=1,2,3$ y $a = 1$ y 5 .

Las entropías de posición como función de a y de n se muestran en la figura [4.7](#).

4. RESULTADOS



entropía de momento respecto a la longitud a con números cuánticos $n=1,2,3$.

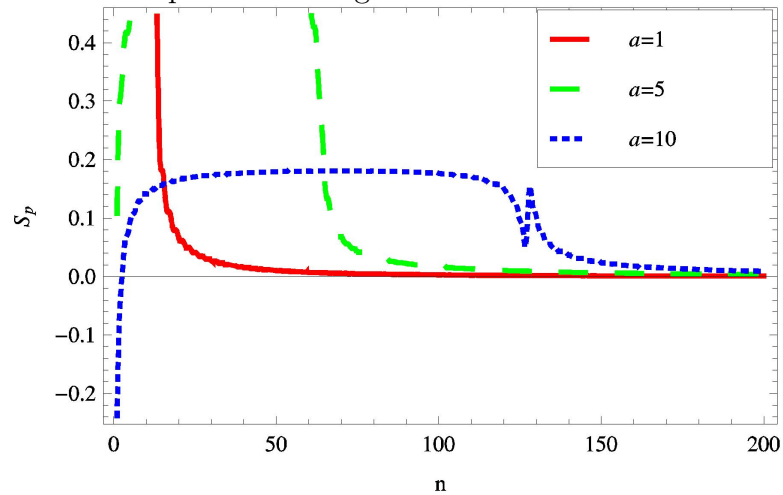


Figura 4.7: Entropías de momento respecto a los números cuánticos con $a= 1, 5, 10$.

Los procesos se presentan en el anexo 6.3.1.

En la tabla 4.1 se presentan los resultados numéricos de las entropías de in-

formación S_x y S_p y su suma para diferentes valores del número cuántico n , Se encuentra que S_x es independiente de los números cuánticos n y S_p aumenta con el número cuántico n . Este tipo de fenómeno no se han aparecido en los trabajos anteriores con otros potenciales. Además su suma cumple las desigualdades de BBM son mayores del valor $1(1 + \ln\pi)$.

n	S_r	S_p	$S_r + S_p$	$1(1 + \ln\pi)$
1	1.99573	0.108153	2.103883	2.14473
2	1.99573	0.305636	2.301366	2.14473
3	1.99573	0.378705	2.374435	2.14473
4	1.99573	0.416729	2.412459	2.14473
5	1.99573	0.440033	2.435763	2.14473
6	1.99573	0.455774	2.451504	2.14473

Tabla 4.1: Entropías de la información del estado $m = 0$ con respecto a diferentes números cuánticos n y $R = 6$.

4.1.2. Pozo en dos dimensiones

Como se mencionó anteriormente en el pozo infinito circular se reduce el número de variables en la función, por lo que conviene estudiar este tipo de pozo infinito en dos dimensiones.

El potencial se define como

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } r \leq R \\ +\infty & \text{para } r > R \end{cases} \quad (4.7)$$

la ecuación de Schrödinger

4. RESULTADOS

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi(r, \varphi) = E\psi(r, \varphi). \quad (4.8)$$

las soluciones correspondientes son

$$R_m(r) = \mathcal{N}_m J_m(k_{mn}r), \quad \mathcal{N}_m = \frac{\sqrt{2}}{R |J_{m+1}(\alpha_{mn})|}. \quad (4.9)$$

donde J_m y J_{m+1} es la función de Bessel.

Las entropías de información de los espacios de posición y de momento para el potencial unidimensional se pueden calcular, sin duda, en términos de las fórmulas dadas en la ecuación ec (2.21). Sin embargo, en el caso arbitrario dimensional, se deben utilizar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} S_r &= - \int |\psi(r)|^2 \ln |\psi(r)|^2 d^D r, \\ S_p &= - \int |\phi(p)|^2 \ln |\phi(p)|^2 d^D p. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para el presente caso, también hay que considerar la condición confinada $J_m(kR) = 0$. En general, derivaciones explícitas de la entropía de información son bastante difícil, en particular, es casi imposible la derivación de la expresión analítica para la S_p . Debido a la complicación de la función especial J_m involucrada en las integrales ecuaciones (4.10), no se puede obtener sus fórmulas analíticas. Por otra parte, hay otras dos razones principales. Una de ellas es desde el espacio confinado, a diferencia del caso normal en el que el espacio integral r es de cero a infinito. Otra razón es por la diferente k y p involucrado en funciones de Bessel

de primer . Los libros de texto generales sobre las tablas de integrales no pueden encontrar las integrales correspondientes en este estudio.

Con el fin de calcular la entropía de la información del momento S_p , uno debe transformar las funciones de onda obtenidos en el espacio de posición al espacio de momento usando la transformada de Fourier. Por otro lado, también se estudian las densidades de información de entropía y de momento $\rho(r) = |\psi(r)|^2 \ln |\psi(r)|^2$ y $\rho(p) = |\phi(p)|^2 \ln |\phi(p)|^2$, ya que desempeñan funciones similares a las de densidad de probabilidad de carga $\rho(r) = |\psi(r)|^2$ (también nombrado como "nube" de electrones) y las densidades de probabilidad del momento $\rho(p) = |\phi(p)|^2$. Cabe señalar que la $\rho(r)$ describe la probabilidad de la masa reducida que se encuentra en la posición (r, φ) , mientras que la distribución de probabilidad radial describe la probabilidad de que la masa reducida se puede encontrar entre r y $r + dr$, definida como $Q(r) = 2\pi r |\psi(r)|^2$. Lo mismo ocurre con la $Q(p) = 2\pi p |\phi(p)|^2$ para describir la probabilidad entre P y $P + dp$. Debido a la dificultad en el cálculo de las funciones de onda en el espacio impulso obtenido por la transformada de Fourier, sólo se toman en cuenta dos casos de altitud baja $m = 0, 1$.

Usando la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \phi_0(p) &= \frac{1}{2\pi} \int R_0(r) e^{-ipr} d^2r \\ &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_0(k_{0n}r) e^{-ipr \cos(\varphi)} r dr d\varphi \end{aligned}$$

4. RESULTADOS

$$= N_0 R \left[\frac{k_{0n} J_1(\alpha_{0n}) J_0(pR) - p J_0(\alpha_{0n}) J_1(pR)}{k_{0n}^2 - p^2} \right], \quad (4.11)$$

donde k_{0n} está definida en la ecuación (2.47). En el cálculo también se utiliza la ecuación $kR = \alpha_{0,n}$ y la siguiente fórmula

$$\int_0^\pi e^{i\beta \cos(x)} \cos(nx) dx = i^n \pi J_n(\beta). \quad (4.12)$$

Por lo que el caso $m = 1$, desafortunadamente no se puede obtener su transformada de Fourier a través de la integración directa como lo anterior. En este caso, sin embargo, se usa la expansión de serie de la función de Bessel, para calcular la transformada de Fourier. Su expresión de serie está dada por

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+n}}{2^{2s+n} s!(n+s)!}, \quad n \in Z. \quad (4.13)$$

De este modo, podemos obtener la función de onda de $m = 1$ en el espacio de momento como

$$\begin{aligned} \phi_1(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^R R_1(r) e^{-ipr} d^2r \\ &= \frac{N_1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_1(k_{1n}r) e^{-ipr \cos(\varphi)} r dr d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= N_1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s R^2 (\alpha_{1n})^{2s+1}}{2^{2s+1} (2s+3) s! (s+1)!} \\
 &\quad \times {}_1F_2 \left(s + \frac{3}{2}; s + \frac{5}{2}; -\frac{1}{4} p^2 R^2 \right), \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

donde también se ha utilizado la ecuación (4.12) y la siguiente fórmula integral

$$\int_0^R J_0(pr) (kr)^t r dr = \frac{R^2 (kR)^t}{t+2} \cdot {}_1F_2 \left(\frac{t}{2} + 1; 1, \frac{t}{2} + 2; -\frac{1}{4} p^2 R^2 \right). \tag{4.15}$$

Para $m = 1$, se observa que esta serie se converge rápidamente cuando el recorrido del número s se forma hasta 15 (4.16). Para cualquier entero m , también se puede obtener su transformada de Fourier a partir de la forma anterior. Esto es,

$$\phi_m(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^R R_m(r) e^{-i \cdot p \cdot r} d^2$$

4. RESULTADOS

$$\begin{aligned} &= \frac{N_m}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_m(k_{mn}r) e^{-ipr\cos(\varphi)} r dr d\varphi \\ &= N_m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s R^2 (\alpha_{mn})^{2s+m}}{2^{2s+m} (2s+m+2) s! (s+m)!} \\ &\quad \times {}_1F_2 \left(s + \frac{m}{2} + 1; 1, s + \frac{m}{2} + 2; -\frac{1}{4} p^2 R^2 \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sin embargo, se tiene que reconocer que los cálculos para valores grandes de s se vuelven más largo y muy pesado. Las funciones de onda correspondientes en el espacio de momento se ilustran en la figura 4.8. Parece que disminuyen a cero rápidamente con respecto al momento p . Esto significa que el comportamiento del momento p es local.

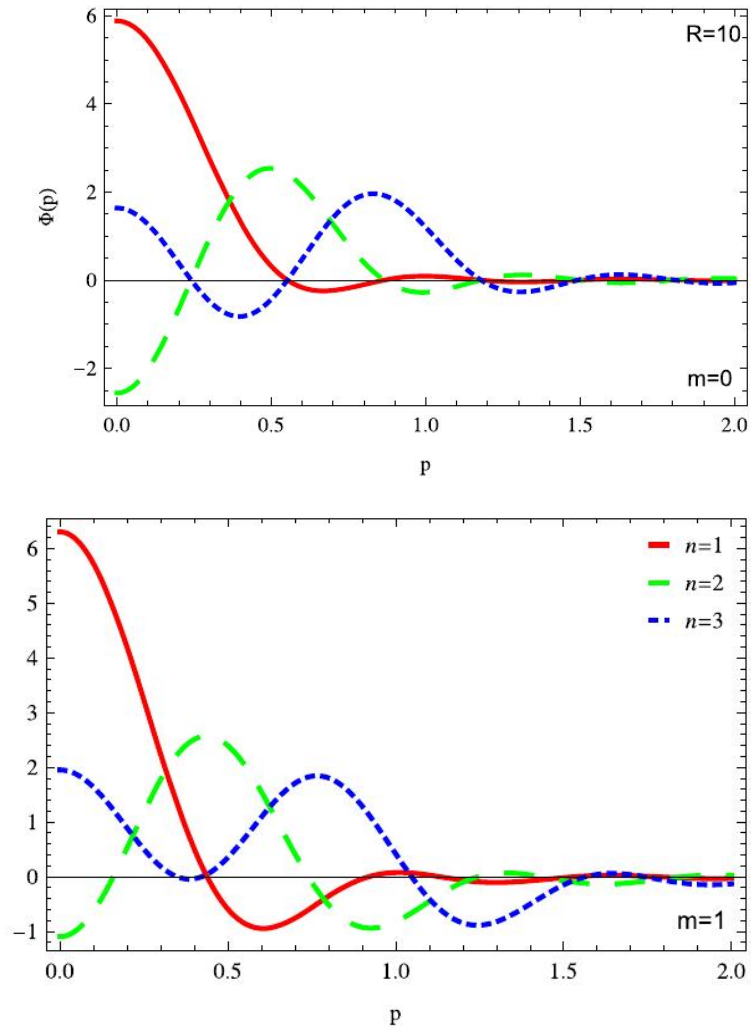


Figura 4.8: Funciones de onda en el espacio de momento para diferentes números cuánticos $n = 1-3$.

4. RESULTADOS

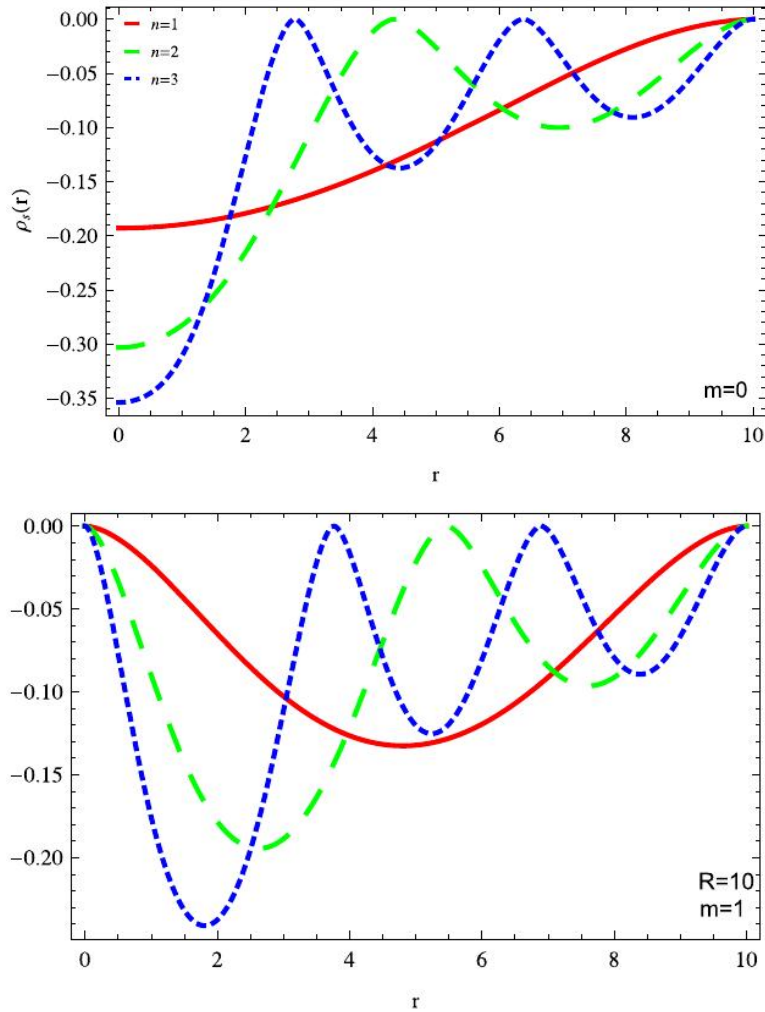


Figura 4.9: Las densidades de entropía de posición como una función de posición r .

Los rasgos característicos de la información de las densidades de entropía de información de posición y de momento $\rho_s(r)$ y $\rho_s(p)$ se muestran en las figuras 4.9 y 4.10 para $m = 0, 1$. El radio $R = 10$ se da por conveniencia. Las densidades correspondientes de posición y de momento (la nube de electrones) $\rho(r)$ y $\rho(p)$ de la partícula en movimiento se ilustran en las figuras 4.11 y 4.12. Se encuentra que

la amplitud de las densidades de $n = 1$ son mayores que los de $n = 2, 3$. En las figuras 4.13 y 4.14 se ilustran las distribuciones radiales y probabilidad impulso $Q(r)$ y $Q(p)$ para describir el hallazgo de sus probabilidades entre r y $r + dr$, así como entre la P y $P + dp$, respectivamente.

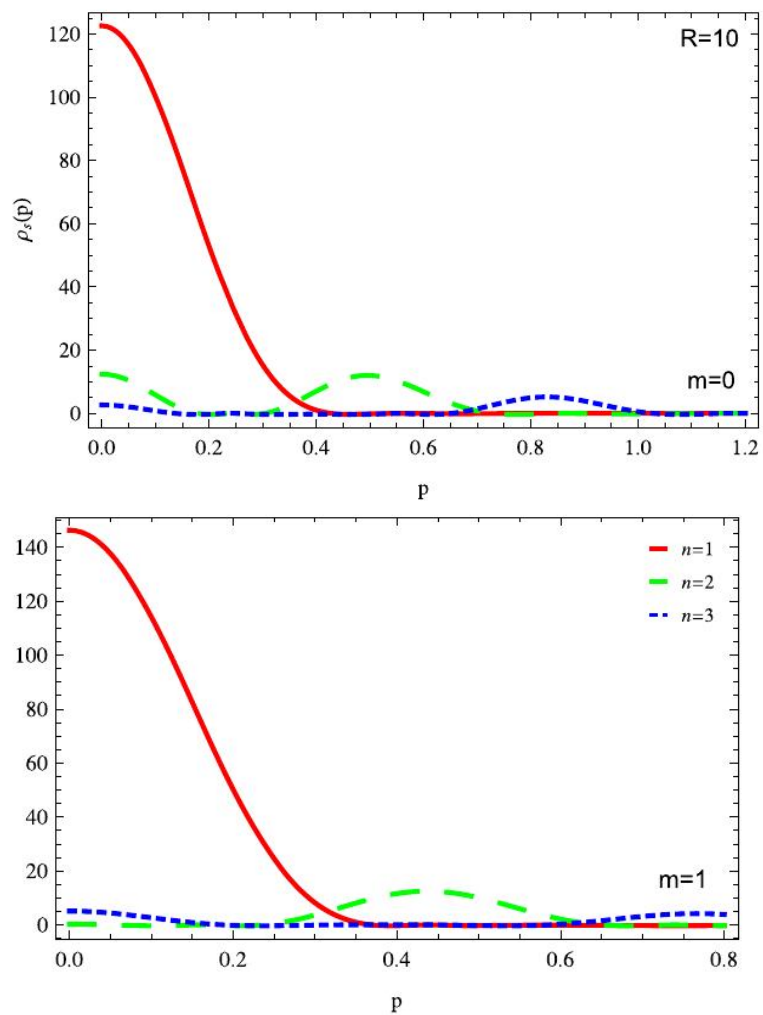


Figura 4.10: Densidad de entropía de momento como una función de momento p .

4. RESULTADOS

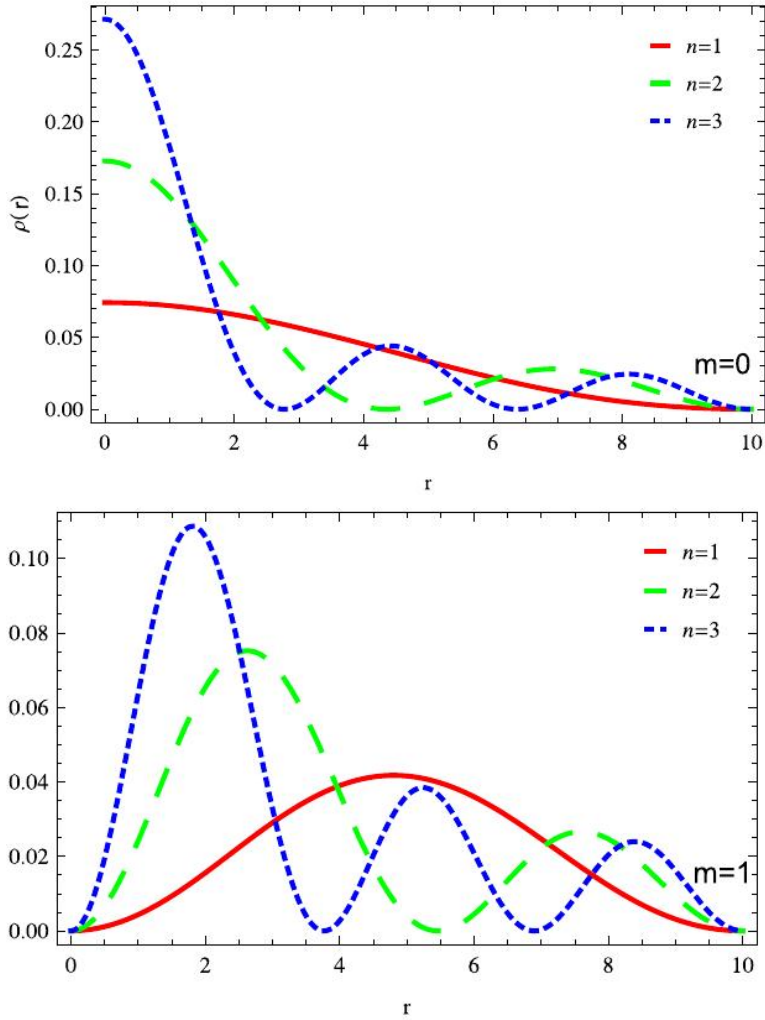


Figura 4.11: Distribución de probabilidad de carga como una función de la posición r .

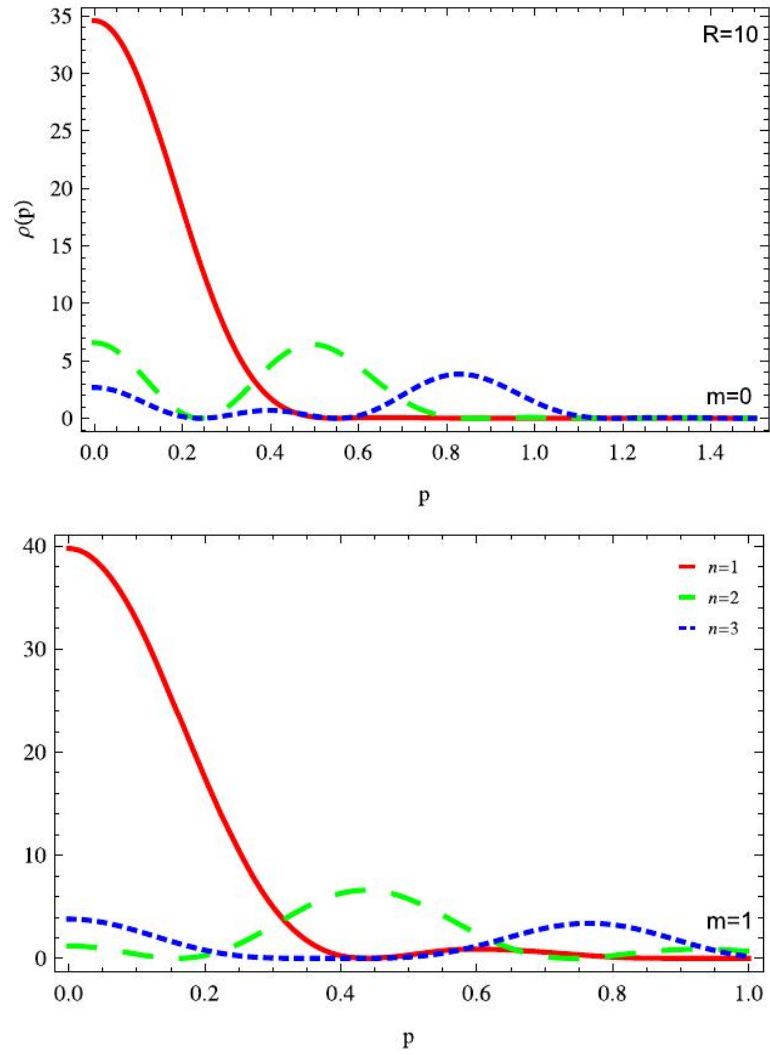


Figura 4.12: Densidad de momento como una función de momento p .

4. RESULTADOS

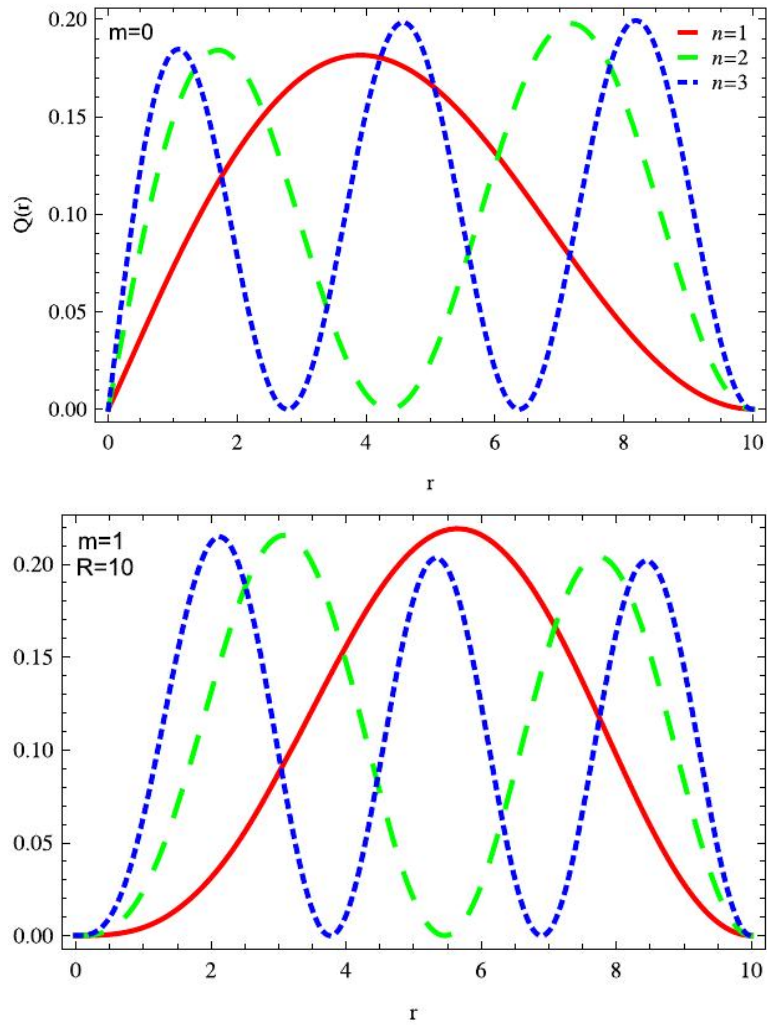


Figura 4.13: Distribución de probabilidad radial $Q(r)$ como una función de la posición r .

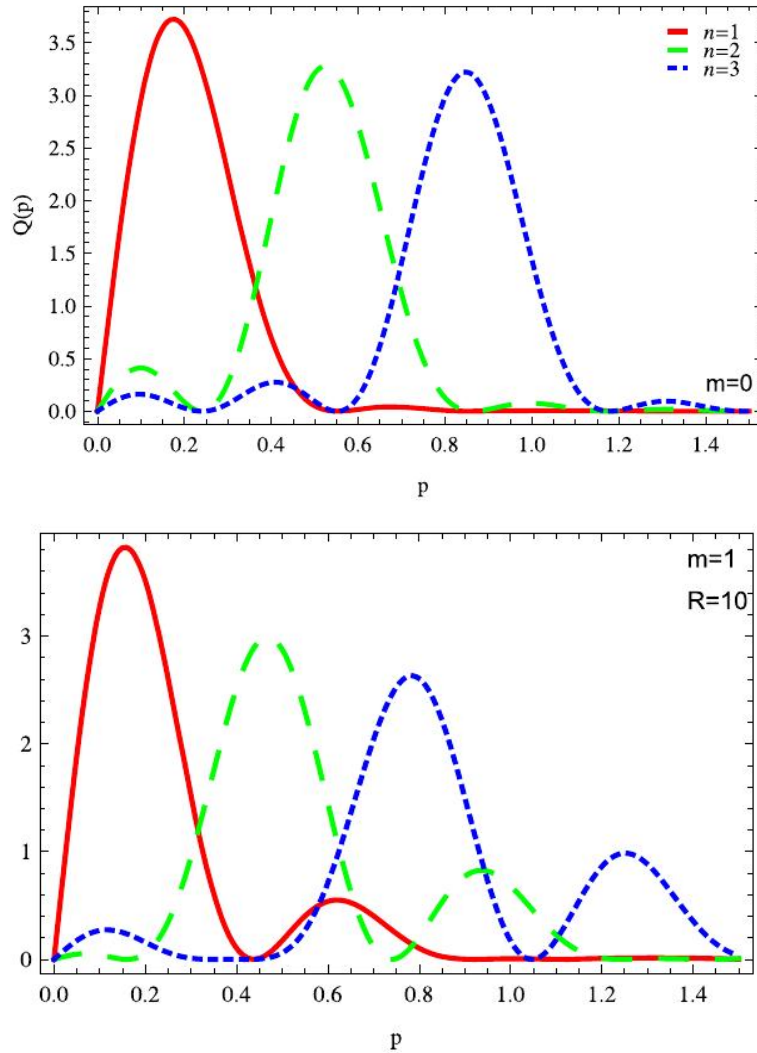


Figura 4.14: Distribución de probabilidad de momento $Q(p)$ como una función de momento p entre el P y $P + dp$.

En las figuras 4.11 y 4.12 se muestran las variaciones de las entropías de información de posición S_r y de momento S_p para los números cuánticos magnéticos $m = 0, 1$. Sus variaciones con respecto al número cuántico m se ilustra en la figura 4.17. Tenga en cuenta que la entropía de posición S_r aumenta con el radio

4. RESULTADOS

R , pero primero aumenta y luego disminuye con el número cuántico m . Es interesante encontrar que el S_p también disminuye con el número cuántico magnético m . También se observa que la tendencia general de la entropía de momento S_p en el radio R primero incrementa al final disminuye, pero la tendencia general de la S_p en el número cuántico m es primero disminuye y al final incrementa. Además, la densidad de probabilidad $\rho(p)$ es mayor que 1 y llega a 35 ($m = 0$) y 40 ($m = 1$) como se muestra en la figura 4.12. Esto es porque la mayoría de las densidades son casi cero para $p \geq 0.4$, las curvas tienen que subir más alto que 1 con el fin de tener un área total de 1 como se requiere para todas las distribuciones de probabilidad.

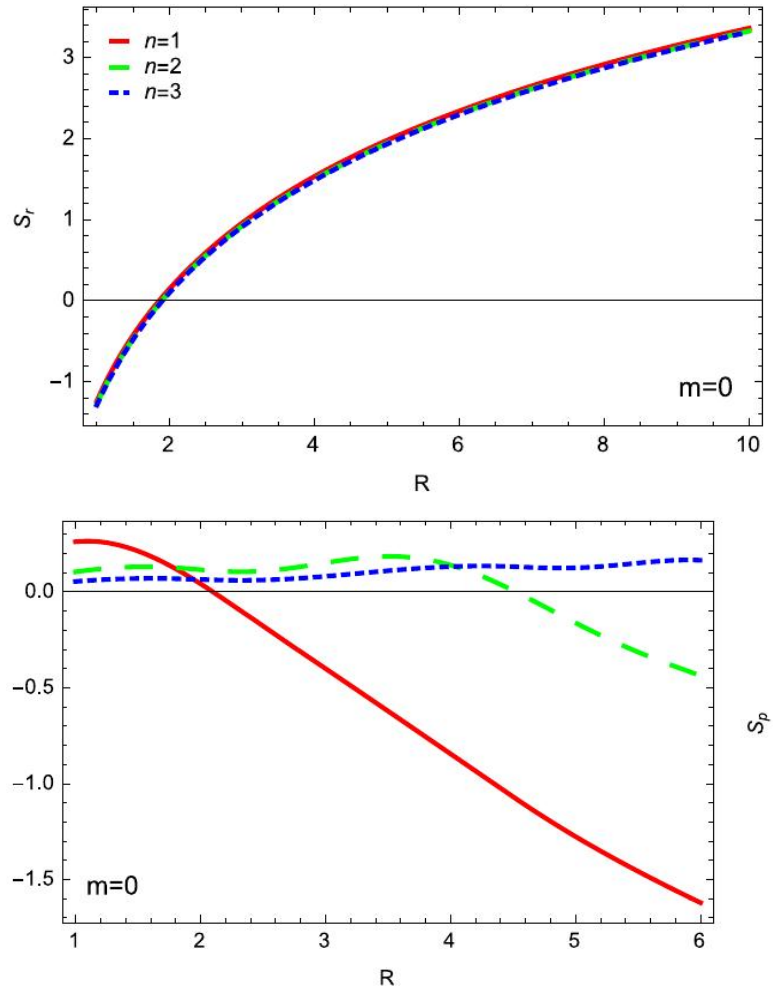


Figura 4.15: Entropías de posición de momento como una función de el radio R con número cuántico $m = 0$.

4. RESULTADOS

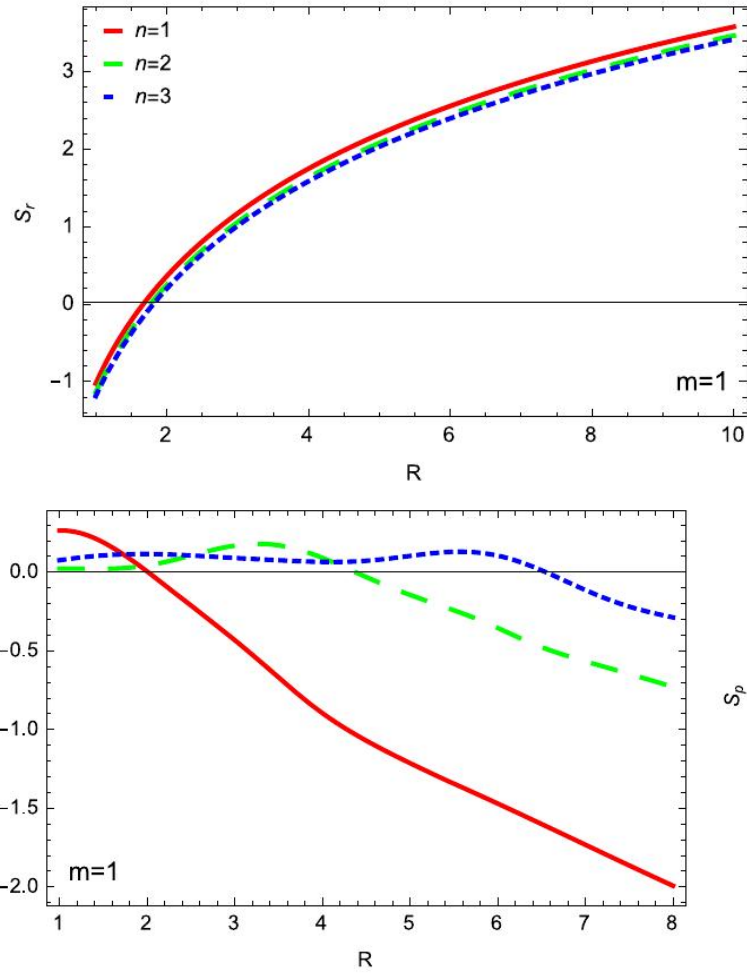


Figura 4.16: Entropía de posición y de momento como una función de la radio R con número cuántico $m = 1$.

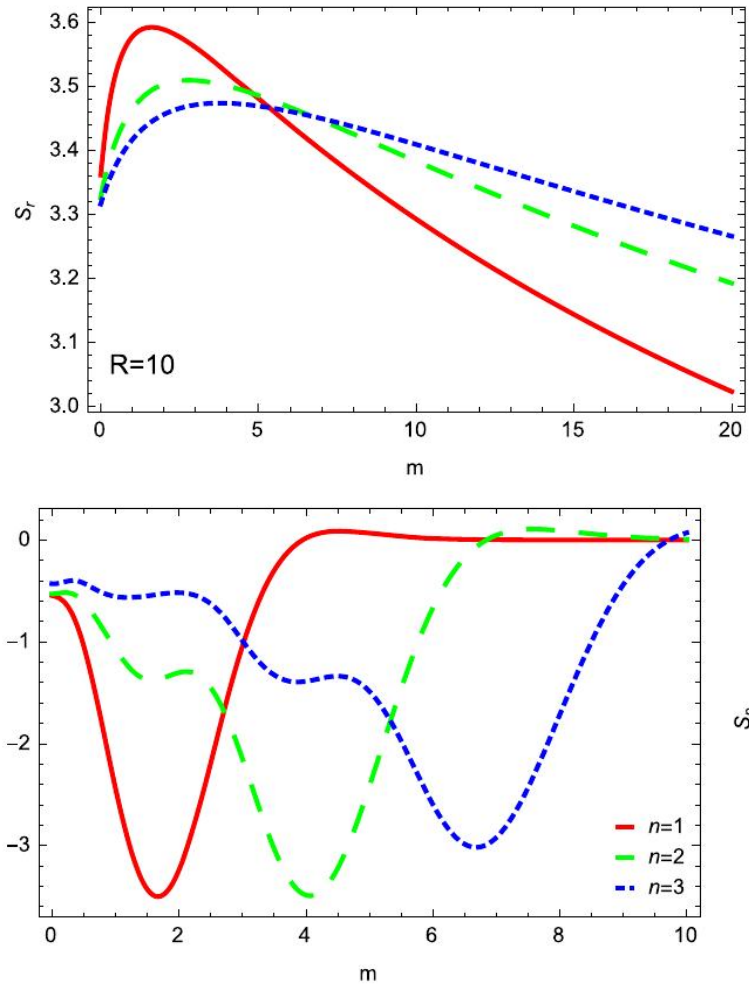


Figura 4.17: Posición de entropía para R dada como una función del número cuántico m .

Los procesos se presentan en el anexo 6.3.2.

En la Tabla 4.2, se presentan los resultados numéricos de las entropías de información S_r , S_p y su suma para diferentes valores del número cuántico n en el caso del número cuántico $m = 0$. Una vez más se encuentra que el S_r es casi independiente de los números cuánticos m y S_p aumenta con el número cuántico n . Este nuevo tipo de fenómeno no se ha aparecido en estudios anterior. Ciertamente,

4. RESULTADOS

su suma se mantiene por encima del estipulado límite inferior del valor $2(1 + \ln\pi)$.

n	S_r	S_p	$S_r + S_p$	$2(1 + \ln\pi)$
1	16.0594	-10.1317	5.927700	4.28946
2	15.3482	-2.36618	12.98202	4.28946
3	15.0484	0.295818	15.34422	4.28946
4	14.8826	0.999659	15.88225	4.28946
5	14.7773	0.619260	15.39656	4.28946
6	14.7044	0.437933	15.14233	4.28946

Tabla 4.2: Entropías de la información del estado $m = 0$ con respecto a diferentes números cuánticos n y $R = 6$.

Los avances de la tesis se presentaron en el cuarto y quinto coloquio internacional de computo e informática en la UAEM y en el primer encuentro de ingeniería en informática del Tecnológico de Estudios Superiores de Chalco (Evidencias 6.2.1).

Como parte de la formación en ciencias de la computación se acudió a los cursos de aplicaciones modernas en la mecánica cuántica realizado en el Doctorado en Ciencias en Física, en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad de Guadalajara, al taller de óptica Cuántica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica y al curso taller de Aplicaciones de robótica industrial en la Universidad Autónoma de Hidalgo (Evidencias 6.2.2).

Conclusiones/Trabajos futuros

5.1. Conclusiones

La enorme potencia generada por los fabricantes de computadoras ya no alcanza la necesidad del cálculo en velocidad y en capacidad. La ley de Moore predice que el número de transistores en un microprocesador continúe a ser el doble cada 18 meses, al año 2020 o 2030 encontrará los circuitos en una escala atómica. El siguiente paso lógicamente será crear computadoras cuánticas, las cuales aprovecharán la potencia de átomos y moléculas para realizar las tareas de memorias y procesamientos. ¿Cómo se almacenan y cuántos se almacenan las informaciones cuánticas en diferentes sistemas cuánticos y específicamente sistemas cuánticos confinados? son tareas que urge estudiar para contribuir a la preparación de la era de la computadora cuántica.

Con base en esta hipótesis, entre muchos potenciales, se realizó este trabajo, ya que el problema de pozos infinitos es un tópico muy estudiado en mecánica cuántica por su sencillez y amplia aplicación un ejemplar del punto cuántico, una nanoestructura semiconductor que confina el movimiento de los electrones, es-

pecíficamente en la prueba de construir computadoras cuánticas.

En este trabajo, se estudian los pozos infinitos de una y dos dimensiones, aunque sus soluciones exactas ya habían sido resueltas, pero se contribuye en obtener sus entropías de informaciones de posición y momento, una propiedad recientemente descubierta de los sistemas cuánticos para conocerlos mejor, ya que se requiere conocer aún más a los sistemas cuánticos para llevar a cabo su manipulación con la esperanza de encontrar sistemas cuánticos que serán viables para la construcción de una computadora en sentido real.

A parte se analizan los resultados obtenidos, no se sorprende que en ambos sistemas la desigualdad de incertidumbre BBM fue comprobada, aunque en el sistema unidimensional no se aumenta tan rápido las sumas de las entropías de posición y de momento como las del sistema en dos dimensiones. En ambos casos, cuando la longitud L está fija, la entropía de posición casi no tiene nada de cambio respecto al aumento del número cuántico n , lo que aumenta bastante son las entropías de momento respecto al aumento de n .

5.2. Trabajos futuros

No basta con estos resultados, como trabajo futuro se estudiará el pozo infinito en tres dimensiones obviamente será mucho más difícil, pero con la metodología que se aprendió en este trabajo. lo hará posible.

Glosario/Evidencias/Anexos

6.1. Glosario

Átomo	Partícula más pequeña de un elemento. Está formado por protones y neutrones en un núcleo rodeado de electrones.
Criptografía cuántica	Se considera una disciplina que ayuda a transmitir información en forma segura.
Cuanto	Cantidad más pequeña de algo. Un cuanto de energía luminosa es el fotón.
Difracción	Desviación de una onda debido a la presencia de una barrera.

6. GLOSARIO/EVIDENCIAS/ANEXOS

Dualidad onda-partícula	Teoría que explica que la luz puede ser vista como onda ó como partícula según convenga.
Ecuación de Schrödinger	Determina la energía total de la onda, los elementos que componen la ecuación indican la energía en movimiento.
Efecto foto-eléctrico	Extracción de electrones de cierto metal cuando sobre ellos incide luz.
Electrón	Partículas sub atómicas de carga negativa.
Energía	Propiedad de un objeto ó sistema en virtud de la cual puede realizar trabajo; se mide en Joules.
Energía Cinética	Energía del movimiento. Es igual a la mitad del producto de la masa por el cuadrado de la velocidad.
Esfera de Bloch	Constituye una manera de visualizar y representar geoméricamente el estado de un qubit simple.
Estados de Bell	Representan los posibles estados de un entrelazamiento, es decir representan el estado cuántico de dos qubits.

Fotón	Modelo corpuscular de la radiación electromagnética, partícula que viaja con la rapidez de la luz y cuya energía está relacionada con la frecuencia en el modelo ondulatorio.
Frecuencia	Numero de vibraciones por unidad de tiempo; se mide en Hertz.
Función de onda	Tiene un valor complejo y contiene toda la información que puede conocerse acerca de una partícula.
Impulso	Producto de la fuerza por el intervalo de tiempo durante el cual se ejerce.
Longitud de onda	Distancia entre la cima de una cresta a la cima de la siguiente cresta.
Luz coherente	Luz que tiene misma fase y frecuencia.
Momento	Producto de la masa de un objeto por su velocidad. Es una cantidad con dirección además de magnitud.

6. GLOSARIO/EVIDENCIAS/ANEXOS

Nanociencia	Es el estudio del fenómeno y manipulación de materiales a escala atómica, molecular y macromolecular.
Qubit	Elemento básico para el tratamiento de la información.
Spin	Propiedad física de las partículas que proporciona una medida del momento angular y de la acción de la partícula.
Teleportación cuántica	Proceso separadas mediante el cual dos personas geográficamente se quieren comunicar y emplean el uso de superposición de qubits para lograrlo.

6.2. Evidencias

6.2.1. Ponencias





GOBIERNO DEL
ESTADO DE MÉXICO



GOBIERNO QUE TRABAJA Y LOGRA
enGRANDE
TECNOLOGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES
DE CHALCO

El Tecnológico de Estudios Superiores de Chalco

Otorga el presente

Reconocimiento

a

ING. FABIAN SOBERANES MARTIN

Representante del TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE CHALCO, por su destacada participación, en la impartición de la CONFERENCIA denominada “COMPUTACIÓN CUÁNTICA”, en el evento 1er Encuentro de Ingeniería Informática, llevado a cabo el día 10 de junio del presente año, en las instalaciones de nuestra casa de estudios.



LIC. EDGAR DANIEL SÁNCHEZ BALDERAS
DIRECTOR

Secretaría de Educación
Subsecretaría de Educación
Media Superior y Superior
Tecnológico de Estudios
Superiores de Chalco



CHALCO, ESTADO DE MÉXICO, 10 DE JUNIO DEL 2015.

6. GLOSARIO/EVIDENCIAS/ANEXOS

6.2.2. Cursos



La Universidad de Guadalajara

Otorga la presente

Constancia

A:

Fabián Soberanes Martín

Por su participación en la Escuela: Aplicaciones Modernas de la Mecánica Cuántica, realizada en el Doctorado en Ciencias en Física, en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías de la Universidad de Guadalajara, los días 19-23 de Mayo de 2014.

ATENTAMENTE
"PIENSA Y TRABAJA"
Guadalajara, Jal., a 23 de mayo de 2014



Dr. Andrei Klimov
Coordinador del Doctorado en Cs. En Física



El Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica

otorga la presente

CONSTANCIA

a:

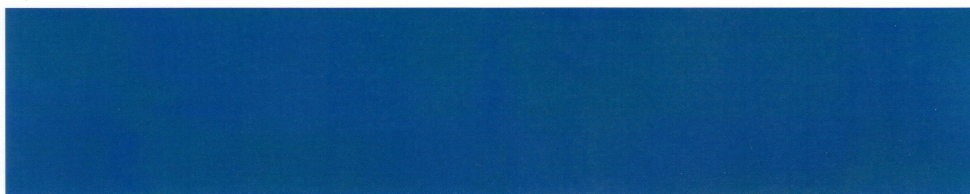
Fabián Soberanes Martín

por su participación en el
Taller de Óptica Cuántica,
llevada a cabo del 10 al 14 de octubre del año 2014,
en Tonantzintla, Puebla.

Dr. David Sánchez de la Llave
Coordinador de Óptica



Dr. Blas M. Rodríguez Lara
Organizador





SKILL TECHNOLOGY S.A. DE C.V.

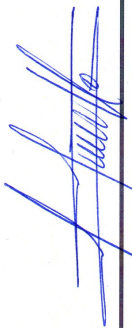
Otorga la Presente:

CONSTANCIA


a: **Ing. Fabián Soberanes Martín**

Por haber participado en el Curso-taller
"Aplicaciones de robótica industrial "

Del día 29 de Julio al día 30 de Julio en las instalaciones del pabellón universitario de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo con una duración de 20 horas.



Ing. Cuauhtémoc Jaramillo Catete
Director General



Ing. Fernando Arce López
Instructor

6.3. Anexos

6.3.1. Pozo infinito en una dimensión

```
Needs["PlotLegends`"]
```

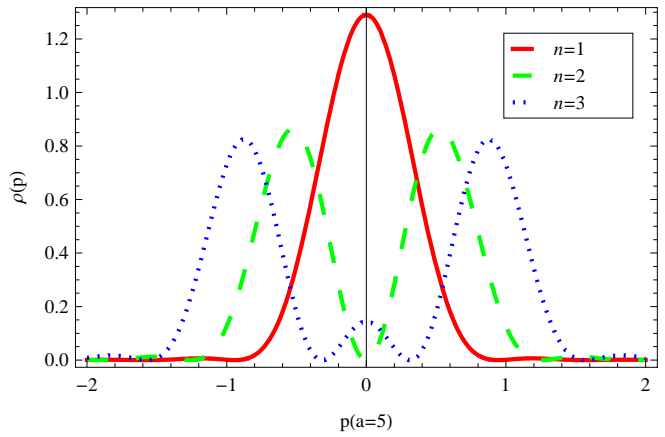
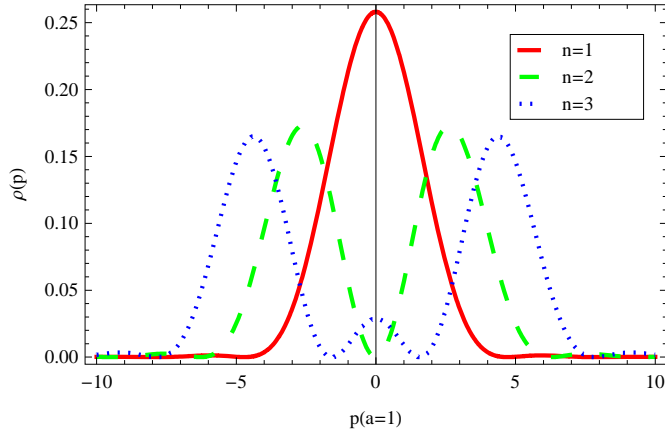
$$\Phi1[a_, n_, p_] = \sqrt{\frac{\pi n^2}{2 a^3}} \frac{\text{Sin}\left[a p - \frac{\pi}{2} n\right]}{\left(p^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4 a^2}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{n^2}{a^3}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}\left[a p - \frac{n\pi}{2}\right]}{p^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4 a^2}}$$

$$\Phi12[a_, n_, p_] = \frac{\pi n^2 \text{Sin}\left[a p - \frac{\pi n}{2}\right]^2}{2 a^3 \left(p^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4 a^2}\right)^2}$$

$$\frac{n^2 \pi \text{Sin}\left[a p - \frac{n\pi}{2}\right]^2}{2 a^3 \left(p^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4 a^2}\right)^2}$$

```
Plot[{Phi1[1, 1, p], Phi1[1, 2, p], Phi1[1, 3, p]}, {p, -10, 10},  
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},  
Frame -> True, FrameLabel -> {"p(a=1)", "rho(p)"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["rho2-1.eps", %]
```

```
rho2-1.eps
```

```
spden[a_, n_, p_] =  $\frac{1}{2} \text{Log}\left[\frac{2 a^3 \left(p^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4 a^2}\right)^2}{n^2 \pi \text{Log}\left[\frac{n^2 \pi \text{Sin}\left[a p - \frac{n \pi}{2}\right]^2}{2 a^3 \left(p^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4 a^2}\right)^2}\right] \text{Sin}\left[a p - \frac{n \pi}{2}\right]^2}\right]$ 
```

$$\frac{n^2 \pi \text{Log}\left[\frac{n^2 \pi \text{Sin}\left[a p - \frac{n \pi}{2}\right]^2}{2 a^3 \left(p^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4 a^2}\right)^2}\right] \text{Sin}\left[a p - \frac{n \pi}{2}\right]^2}{2 a^3 \left(p^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4 a^2}\right)^2}$$

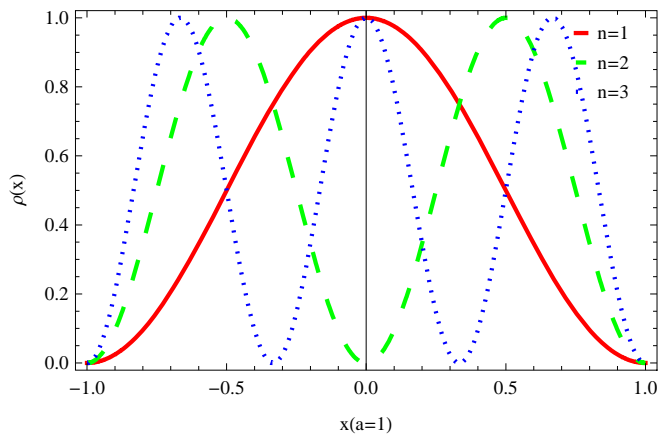
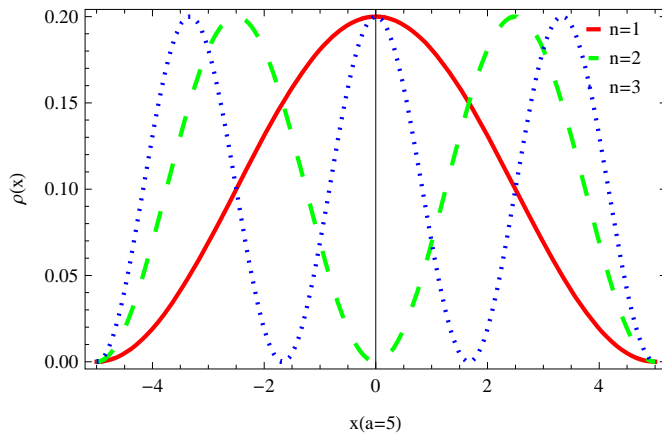
$$\Psi_{n,x}[a_, n_, x_] = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Sin}\left[\frac{\pi n}{2 a} (x - a)\right]$$

$$\frac{\text{Sin}\left[\frac{n \pi (-a+x)}{2 a}\right]}{\sqrt{a}}$$

$$\Psi_{nx2}[a_, n_, x_] = \frac{1}{a} \left(\sin \left[\frac{\pi n}{2 a} (x - a) \right] \right)^2$$

$$\frac{\sin \left[\frac{n \pi (-a+x)}{2 a} \right]^2}{a}$$

```
Plot[{\Psi_{nx2}[5, 1, x], \Psi_{nx2}[5, 2, x], \Psi_{nx2}[5, 3, x]}, {x, -5, 5},
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"x(a=5)", "\rho(x)"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



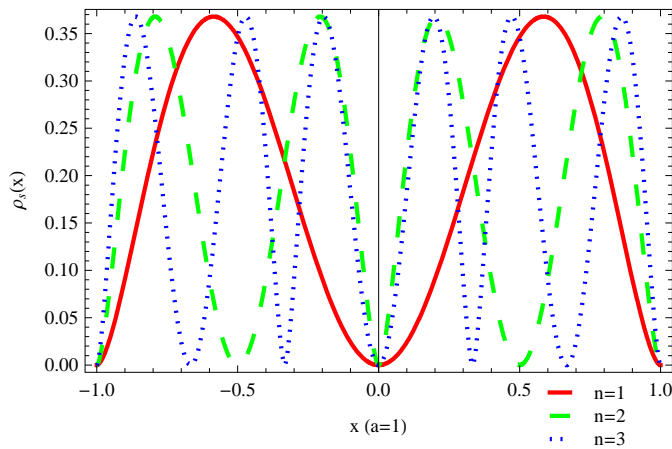
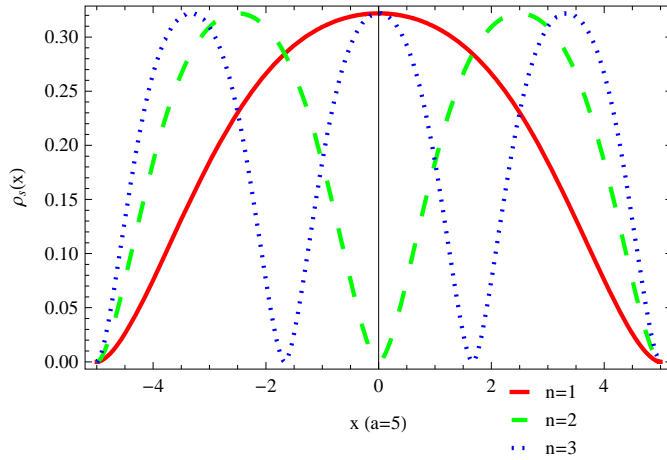
```
Export["\Psi_{nx2}-5.eps", %]
```

```
\Psi_{nx2}-5.eps
```

```
sxden[a_, n_, x_] = \Psi_{nx2}[a, n, x] Log[\Psi_{nx2}[a, n, x]]
```

$$\frac{\text{Log} \left[\frac{\sin \left[\frac{n \pi (-a+x)}{2 a} \right]^2}{a} \right] \sin \left[\frac{n \pi (-a+x)}{2 a} \right]^2}{a}$$

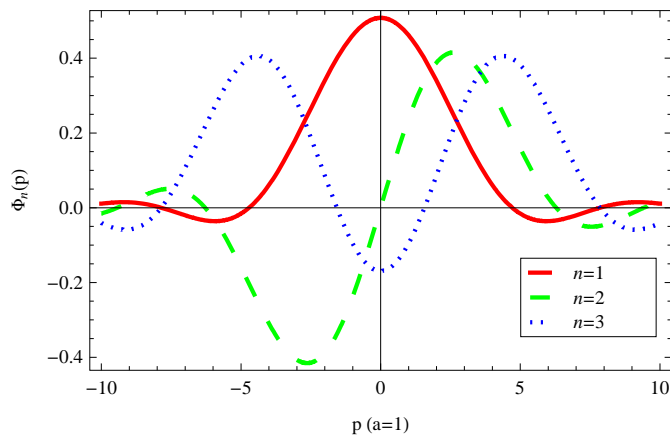
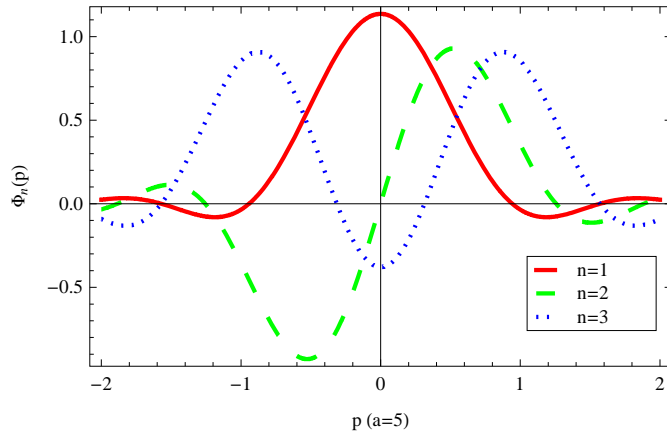
```
Plot[{-sxdn[5, 1, x], -sxdn[5, 2, x], -sxdn[5, 3, x]}, {x, -5, 5},
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"x (a=5)", " $\rho_s(x)$ "}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export[" $\rho_{sx}$ -5.eps", %]
```

ρ_{sx} -5.eps

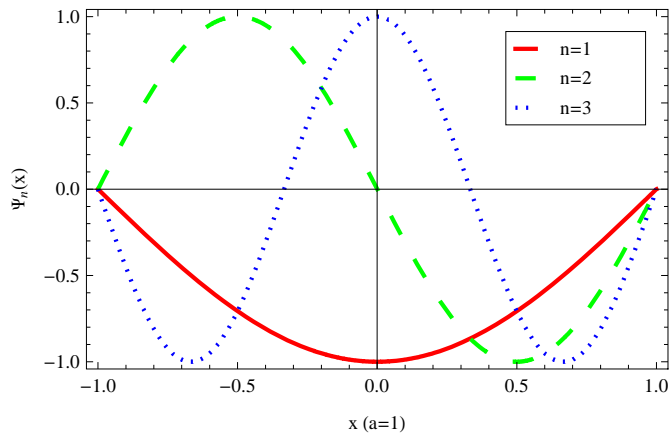
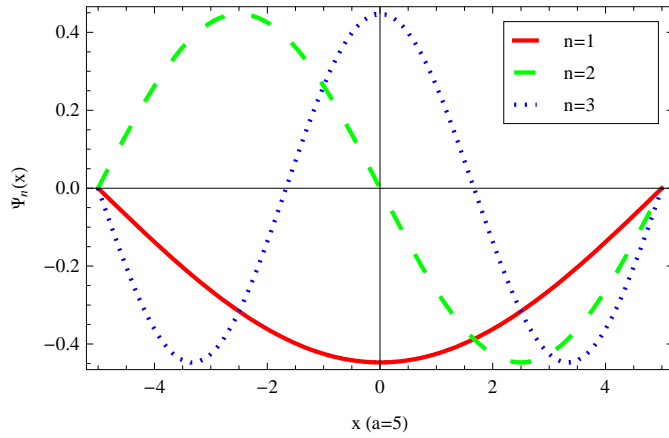
```
Plot[{{ $\Phi$ 1[5, 1, P],  $\Phi$ 1[5, 2, P],  $\Phi$ 1[5, 3, P]}, {P, -2, 2},
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"P (a=5)", " $\Phi_n(P)$ "}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



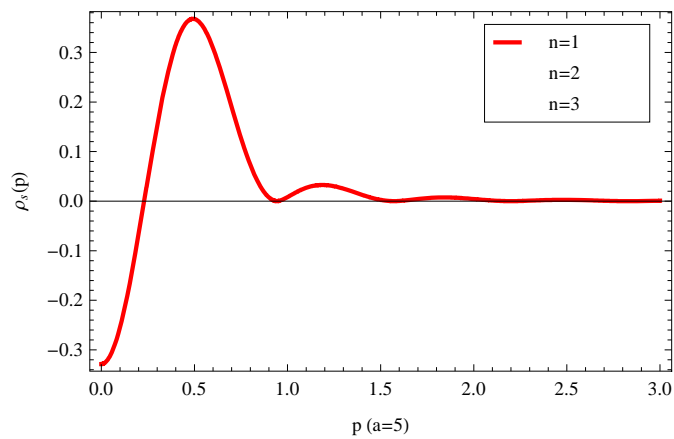
```
Export["Ψnx-1.eps", %]
```

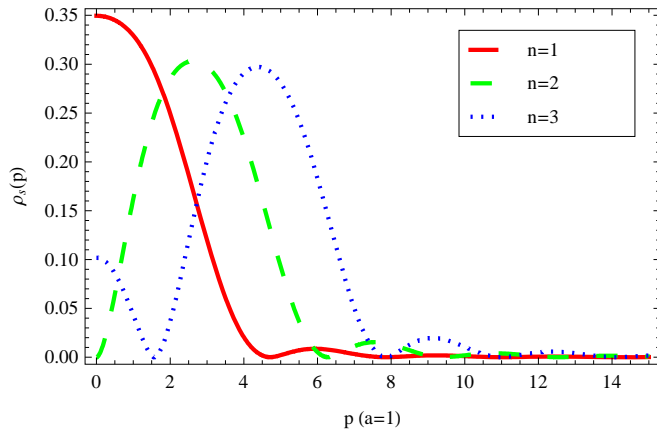
```
Ψnx-1.eps
```

```
Plot[{Ψnx[5, 1, x], Ψnx[5, 2, x], Ψnx[5, 3, x]}, {x, -5, 5},
PlotStyle → {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame → True, FrameLabel → {"x (a=5)", "Ψn(x)"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



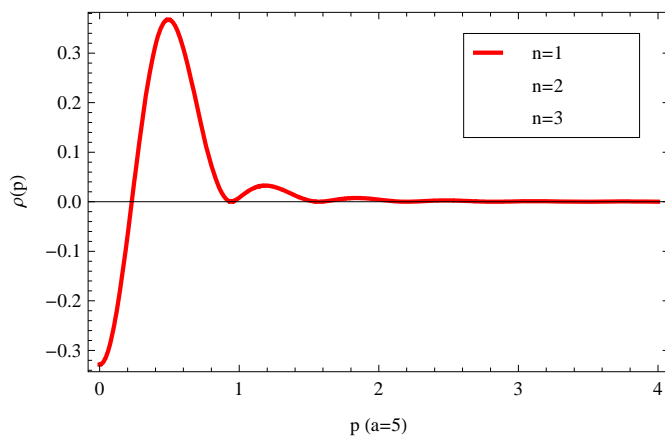
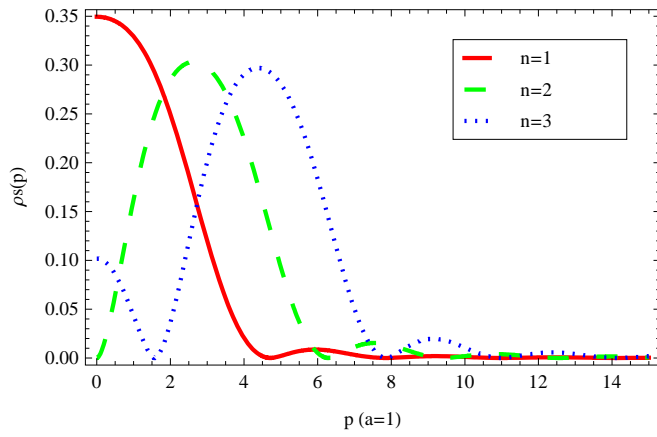
```
Plot[{-spden[5, 1, p], -spden[5, 2, p], -spden[5, 3, p]}, {p, 0, 3},
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"p (a=5)", " $\rho_s(p)$ "}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



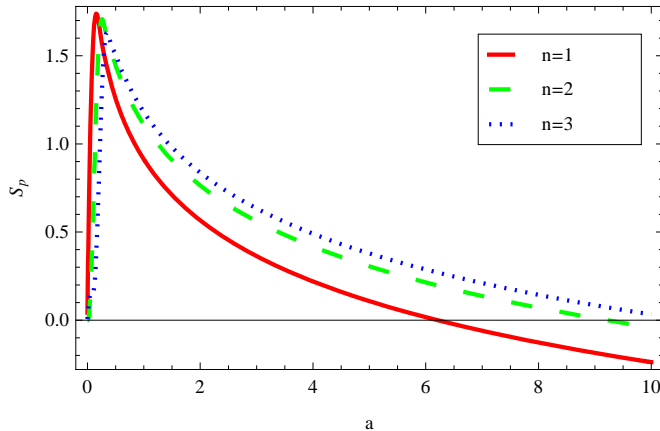


Export [" $\rho_{sp5}.eps$ ", %]

$\rho_{sp5}.eps$




```
Plot[{NIntegrate[-spden[a, 1, p], {p, 0, 20}],
      NIntegrate[-spden[a, 2, p], {p, 0, 20}],
      NIntegrate[-spden[a, 3, p], {p, 0, 20}]}, {a, 0.001, 10},
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"a", "Sp"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



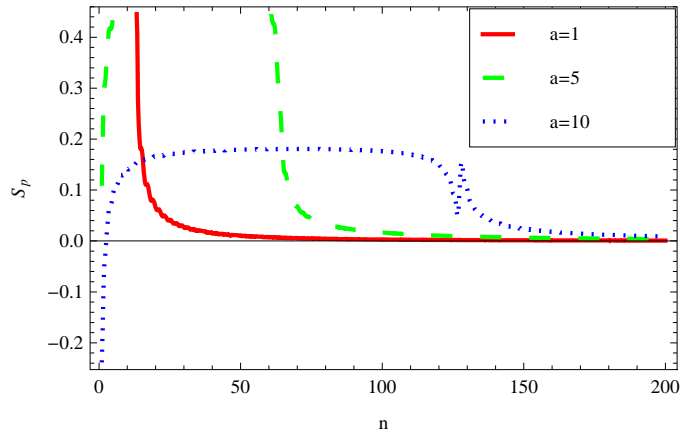
```
Plot[{NIntegrate[-spden[a, 1, p], {p, 0, 20}],
      NIntegrate[-spden[a, 2, p], {p, 0, 20}],
      NIntegrate[-spden[a, 3, p], {p, 0, 20}]}, {a, 0.1, 10},
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"a", "Sp"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```

```
Export["Sp1.eps", %]
```

```
Sp1.eps
```

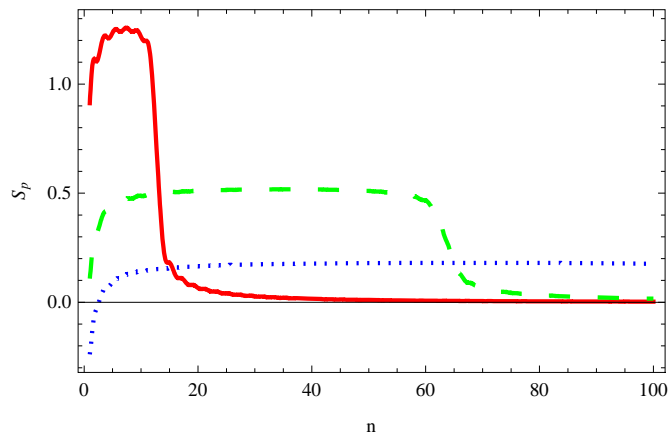
```
Plot[{NIntegrate[-spden[1, n, p], {p, 0, 20}],
      NIntegrate[-spden[5, n, p], {p, 0, 20}],
      NIntegrate[-spden[10, n, p], {p, 0, 20}]}, {n, 1, 180},
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"n", "Sp"}, PlotLegend -> {"a=1", "a=5", "a=10"}]
```

```
$Aborted
```



```
Export["Sp2.eps", %]
```

```
Sp2.eps
```



6.3.2. Pozo infinito en dos dimensiones

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{2^{(3/2)} 1}{\pi (p^2 + 1)^2} \right)^2 p^2 dp$$

$$\int_0^{2\pi} \text{Exp}[-i k r \text{Cos}[\varphi]] d\varphi$$

$$\frac{1}{4\pi}$$

$$\int_0^{\pi} (\text{Exp}[-i k r \text{Cos}[\theta]]) \text{Sin}[\theta] d\theta$$

$$\frac{2 \text{Sin}[k r]}{k r}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2 k^2}{a^2 + k^2} \left(\frac{2 \text{Sin}[k r]}{k r} \right) dk$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{a^2 e^{\frac{-\text{Im}[r]}{\sqrt{a^2}}}}{\text{Abs}[r]} \pi, r \in \text{Reals} \&\& (\text{Re}[a^2] \geq 0 \mid a^2 \in \text{Reals})\right]$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{a^2 e^{\frac{-\text{Im}[r]}{\sqrt{a^2}}}}{\text{Abs}[r]} \pi\right]$$

$$\frac{a^2 e^{\frac{-\text{Im}[r]}{\sqrt{a^2}}}}{\text{Abs}[r]} \pi$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\text{Exp}[-r]}{\pi^{(1/2)}} \right)^2 (2) r^2 dr$$

$$\frac{1}{4\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \text{BesselJ}[0, k r] (2\pi \text{BesselJ}[0, p r]) r dr // \text{FullSimplify}$$

$$\frac{2\pi R (k \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, k R] - p \text{BesselJ}[0, k R] \text{BesselJ}[1, p R])}{k^2 - p^2}$$

$$\frac{2\pi R (k \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, k R] - p \text{BesselJ}[0, k R] \text{BesselJ}[1, p R])}{k^2 - p^2} //$$

$$\text{FullSimplify}$$

$$\frac{2\pi R (k \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, k R] - p \text{BesselJ}[0, k R] \text{BesselJ}[1, p R])}{k^2 - p^2}$$

$$\text{Needs}["\text{PlotLegends}"]$$

$$NNN[R_, m_, n_] = \frac{\sqrt{2}}{R \text{Abs}[BesselJ[m + 1, N[BesselJZero[m, n]]]]}$$

$$R \text{Abs}[BesselJ[1 + m, BesselJZero[m, n]]]$$

$$BesselJ[0 + 1, N[BesselJZero[0, 1]]]$$

0.519147

$$N[NNN[2, 0, 2]]$$

2.07811

R = .

$$N[NNN[2, 1, 1]]$$

0.137687

(* $k = \frac{\alpha_{mn}}{R}$, α_{mn} is the zeros of Bessel for the nth root of order m*)

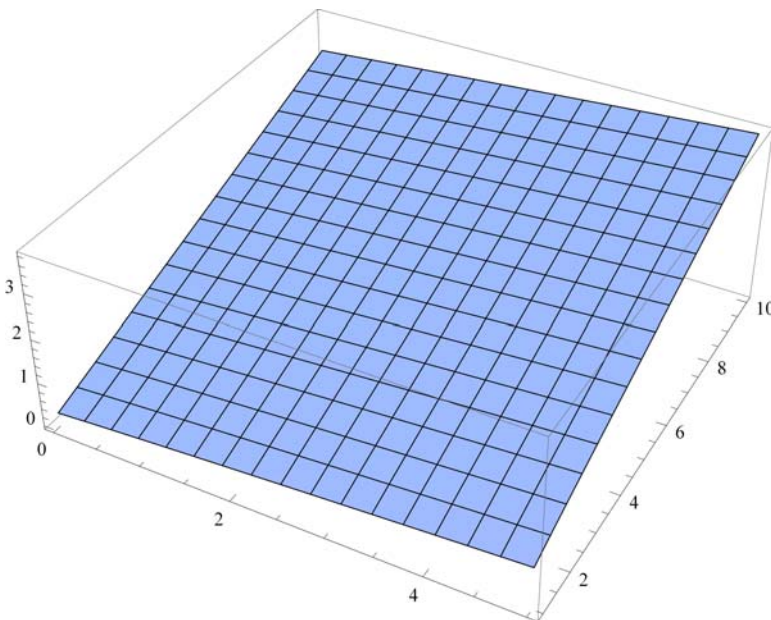
$$R[R_, m_, n_, r_] = N[NNN[R, m, n]] BesselJ\left[m, \frac{N[BesselJZero[m, n]]}{R} r\right]$$

$$\frac{1.41421 BesselJ\left[m, \frac{r BesselJZero[m, n]}{R}\right]}{R \text{Abs}[BesselJ[1. + m, BesselJZero[m, n]]]}$$

$$k[R_, m_, n_] = \frac{N[BesselJZero[m, n]]}{R}$$

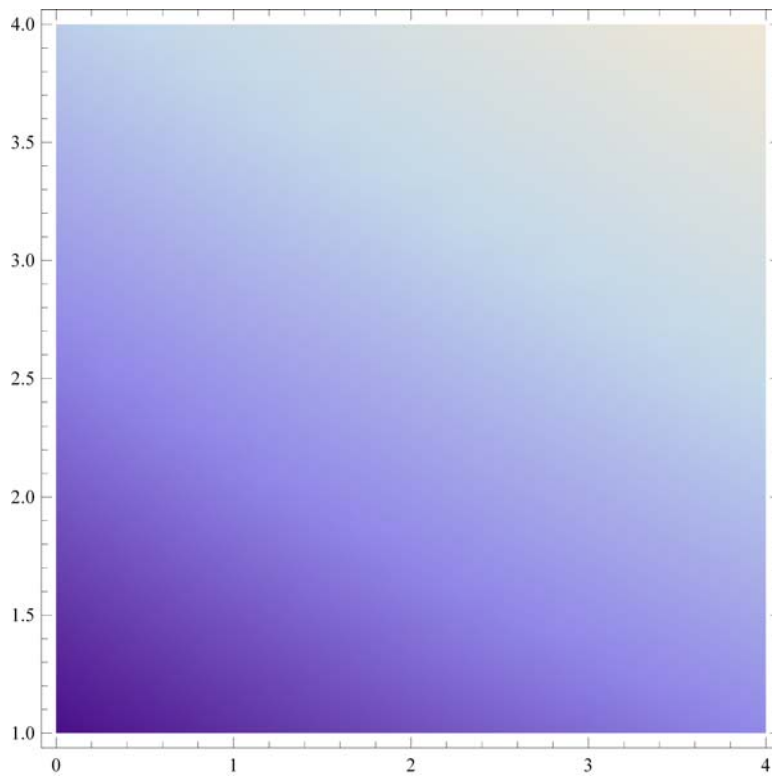
$$\frac{BesselJZero[m, n]}{R}$$

Plot3D[k[10, m, n], {m, 0, 5}, {n, 1, 10}]

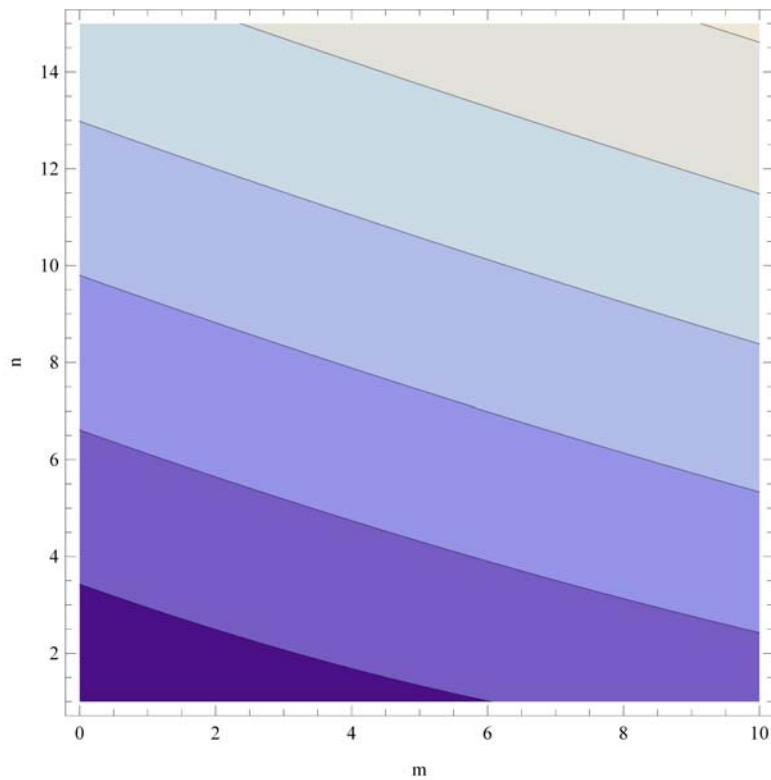


DensityPlot[Sin[x] Sin[y], {x, -4, 4}, {y, -3, 3}]

```
DensityPlot[k[10, m, n], {m, 0, 4}, {n, 1, 4}]
```



```
ContourPlot[k[10, m, n], {m, 0, 10}, {n, 1, 15}, FrameLabel -> {"m", "n"}]
```



```
Export["isoline-kmn.eps", %]
```

isoline-kmn.eps

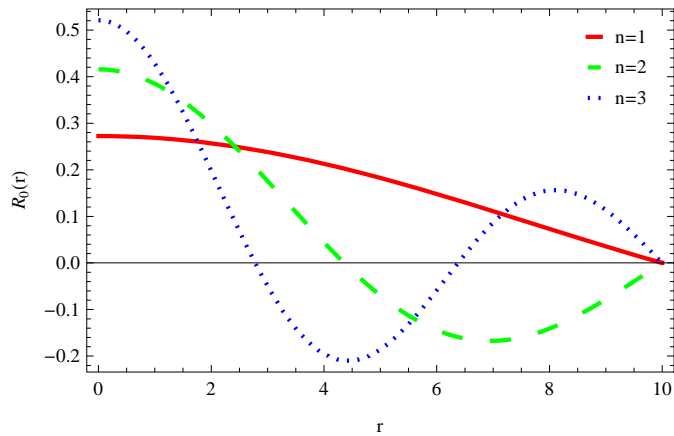
```
NIntegrate[R[13, 0, 1, r]^2 r, {r, 0, 13}]
```

1.

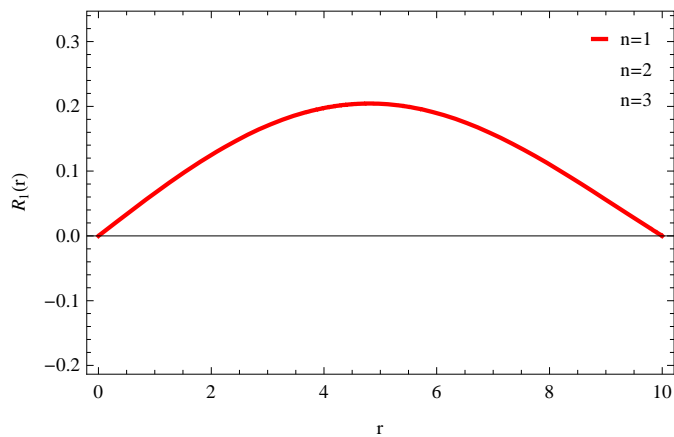
```
NIntegrate[R[13, 0, 1, r]^2 r, {r, 0, 13}]
```

1.

```
Plot[{R[10, 0, 1, r], R[10, 0, 2, r], R[10, 0, 3, r]},
      {r, 0, 10}, PlotRange → All, PlotStyle →
      {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
      Frame → True, FrameLabel → {"r", "R0(r)"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



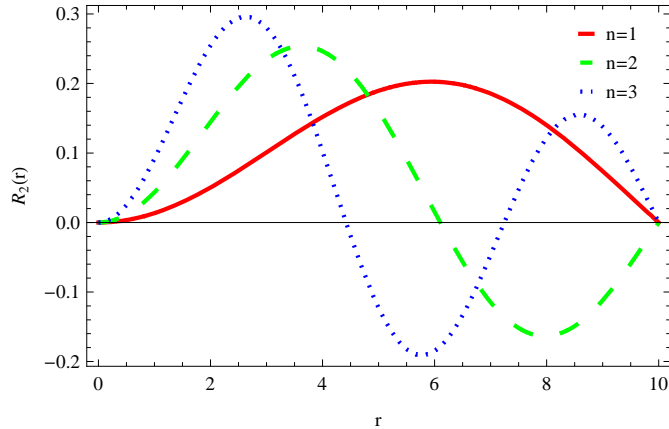
```
Plot[{R[10, 1, 1, r], R[10, 1, 2, r], R[10, 1, 3, r]},
      {r, 0, 10}, PlotRange → All, PlotStyle →
      {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
      Frame → True, FrameLabel → {"r", "R1(r)"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["wave-m=1.eps", %]
```

wave-m=1.eps

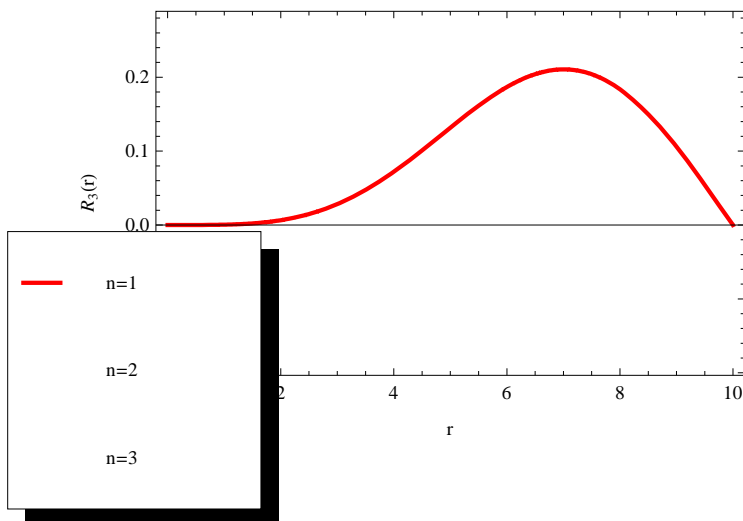
```
Plot[{R[10, 2, 1, r], R[10, 2, 2, r], R[10, 2, 3, r]},
  {r, 0, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame -> True, FrameLabel -> {"r", "R2(r)"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["wave-m=2.eps", %]
```

wave-m=2.eps

```
Plot[{R[10, 4, 1, r], R[10, 4, 2, r], R[10, 4, 3, r]},
  {r, 0, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame -> True, FrameLabel -> {"r", "R4(r)"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



(* R is normalized wave function, r is from 0 to R*)

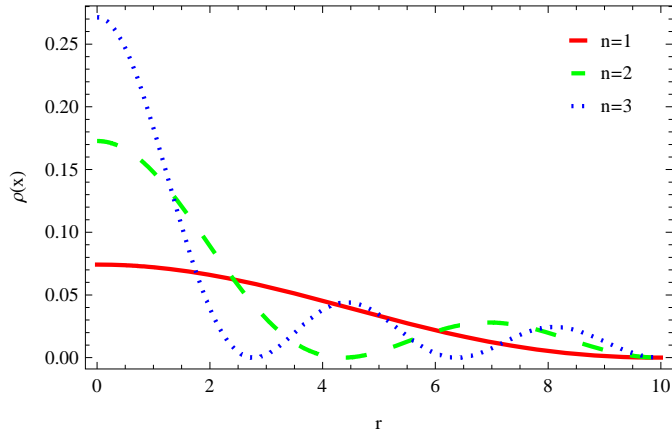
```
ρx[R_, m_, n_, r_] = R[R, m, n, r]^2
```

$$\frac{2 \cdot \text{BesselJ}\left[m, \frac{r \text{BesselJZero}[m, n]}{R}\right]^2}{R^2 \text{Abs}\left[\text{BesselJ}\left[1. + m, \text{BesselJZero}[m, n]\right]\right]^2}$$

$$\rho x Q[R_, m_, n_, r_] = 2 \pi r R [R, m, n, r]^2$$

$$\frac{12.5664 r \text{BesselJ}\left[m, \frac{r \text{BesselJZero}[m, n]}{R}\right]^2}{R^2 \text{Abs}[\text{BesselJ}[1. + m, \text{BesselJZero}[m, n]]]^2}$$

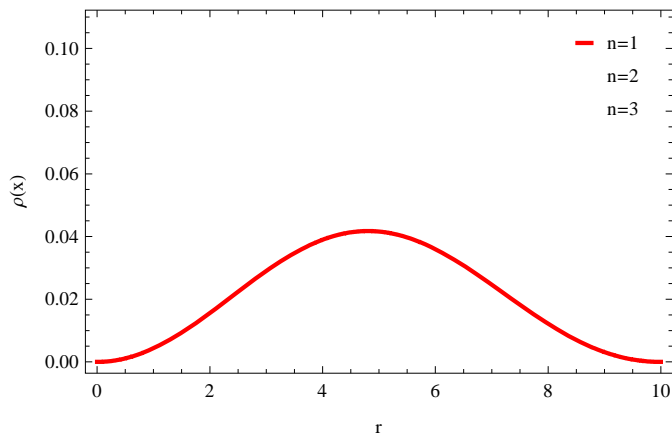
```
Plot[{ρx[10, 0, 1, r], ρx[10, 0, 2, r], ρx[10, 0, 3, r]},
  {r, 0, 10}, PlotRange → All, PlotStyle →
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame → True, FrameLabel → {"r", "ρ(x)"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["denx-m=0.eps", %]
```

```
denx-m=0.eps
```

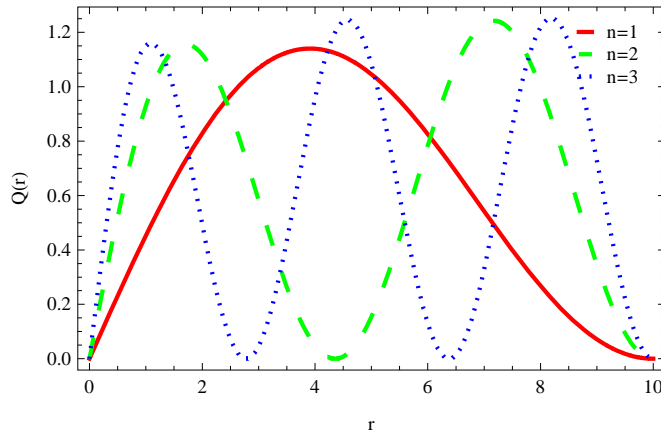
```
Plot[{ρx[10, 1, 1, r], ρx[10, 1, 2, r], ρx[10, 1, 3, r]},
  {r, 0, 10}, PlotRange → All, PlotStyle →
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame → True, FrameLabel → {"r", "ρ(x)"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["denx-m=1.eps", %]
```

```
denx-m=1.eps
```

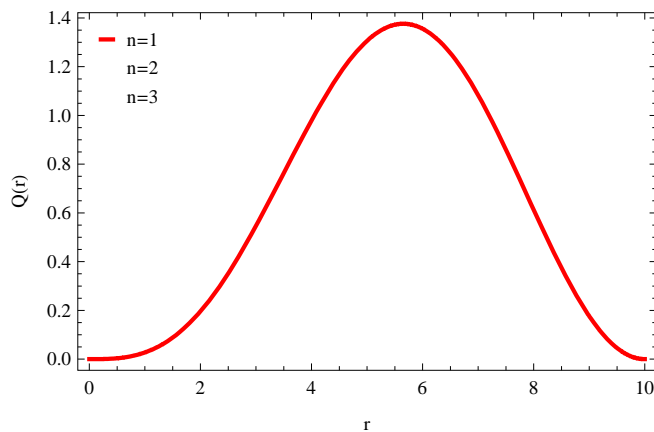
```
Plot[{ $\rho_x Q[10, 0, 1, r]$ ,  $\rho_x Q[10, 0, 2, r]$ ,  $\rho_x Q[10, 0, 3, r]$ },
 {r, 0, 10}, PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotStyle  $\rightarrow$ 
 {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
 Frame  $\rightarrow$  True, FrameLabel  $\rightarrow$  {"r", "Q(r)"}, PlotLegend  $\rightarrow$  {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["den-radial-m=0.eps", %]
```

```
den-radial-m=0.eps
```

```
Plot[{ $\rho_x Q[10, 1, 1, r]$ ,  $\rho_x Q[10, 1, 2, r]$ ,  $\rho_x Q[10, 1, 3, r]$ },
 {r, 0, 10}, PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotStyle  $\rightarrow$ 
 {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
 Frame  $\rightarrow$  True, FrameLabel  $\rightarrow$  {"r", "Q(r)"}, PlotLegend  $\rightarrow$  {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



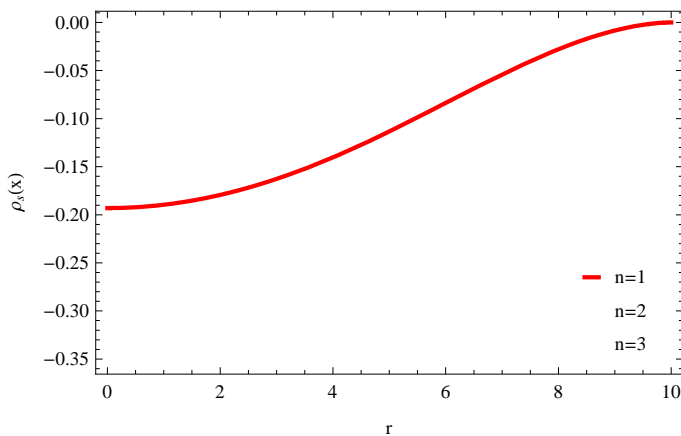
```
Export["den-radial-m=1.eps", %]
```

```
den-radial-m=1.eps
```

```

spx[R_, m_, n_, r_] =  $\left( 2.0000000000000004 \cdot \text{BesselJ}\left[m, \frac{r \text{BesselJZero}[m, n]}{R}\right] \right)^2$ 
  Log  $\left[ \left( 2.0000000000000004 \cdot \text{BesselJ}\left[m, \frac{r \text{BesselJZero}[m, n]}{R}\right] \right)^2 \right] /$ 
   $\left( R^2 \text{Abs}[\text{BesselJ}[1. + m, \text{BesselJZero}[m, n]]]^2 \right) \Big/$ 
   $\left( R^2 \text{Abs}[\text{BesselJ}[1. + m, \text{BesselJZero}[m, n]]]^2 \right)$ 
   $\left( 2. \text{BesselJ}\left[m, \frac{r \text{BesselJZero}[m, n]}{R}\right] \right)^2$ 
  Log  $\left[ \frac{2. \text{BesselJ}\left[m, \frac{r \text{BesselJZero}[m, n]}{R}\right]^2}{R^2 \text{Abs}[\text{BesselJ}[1. + m, \text{BesselJZero}[m, n]]]^2} \right] /$ 
   $\left( R^2 \text{Abs}[\text{BesselJ}[1. + m, \text{BesselJZero}[m, n]]]^2 \right)$ 
(*spx[R_,m_,n_,r_]=rhox[R,m,n,r]Log[rhox[R,m,n,r] ]*)
   $\left( 2. \text{BesselJ}\left[m, \frac{r \text{BesselJZero}[m, n]}{R}\right] \right)^2$ 
  Log  $\left[ \frac{2. \text{BesselJ}\left[m, \frac{r \text{BesselJZero}[m, n]}{R}\right]^2}{R^2 \text{Abs}[\text{BesselJ}[1. + m, \text{BesselJZero}[m, n]]]^2} \right] /$ 
   $\left( R^2 \text{Abs}[\text{BesselJ}[1. + m, \text{BesselJZero}[m, n]]]^2 \right)$ 
Plot[{spx[10, 0, 1, r], spx[10, 0, 2, r], spx[10, 0, 3, r]},
  {r, 0, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame -> True, FrameLabel -> {"r", "rho_s(x)"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]

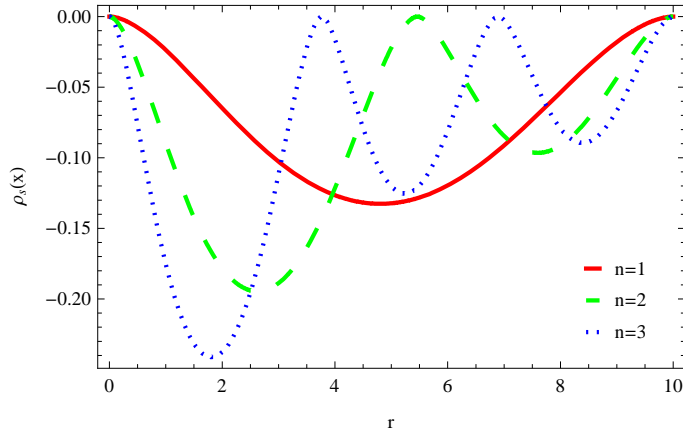
```



```
Export["sdenx-m=0.eps", %]
```

```
sdenx-m=0.eps
```

```
Plot[{spx[10, 1, 1, r], spx[10, 1, 2, r], spx[10, 1, 3, r]},
  {r, 0, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame -> True, FrameLabel -> {"r", "ρs(x)"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["sdenx-m=1.eps", %]
```

```
sdenx-m=1.eps
```

(* the following momentum function is obtained by traditional Fourier transform, the result is not good.*)

```
Φ[R_, m_, n_, p_] = NNN[R, m, n]
  ( 2 π R ( ( N[BesselJZero[m, n]] / R ) BesselJ[0, p R] BesselJ[1, BesselJZero[0, n]] -
    p BesselJ[0, BesselJZero[0, n]] BesselJ[1, p R] ) ) /
  ( ( ( N[BesselJZero[m, n]] / R ) ^ 2 - p^2 )
  ( 2 √2 π ( -p BesselJ[0, BesselJZero[0, n]] BesselJ[1, p R] + 1/R
    BesselJ[0, p R] BesselJ[1, BesselJZero[0, n]] BesselJZero[m, n] ) ) ) /
  ( Abs[BesselJ[1+m, BesselJZero[m, n]]] ( -p^2 + BesselJZero[m, n]^2 / R^2 ) )
```

$$\Phi[R, m, n, p] = \frac{\left(2\sqrt{2} \pi \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, pR] + \frac{1}{R} \text{BesselJ}[0, pR] \right. \right.}{\left. \left. \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[m, n] \right) \right) / \left(\text{Abs}[\text{BesselJ}[1+m, \text{BesselJZero}[m, n]]] \left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[m, n]^2}{R^2} \right) \right)}{\left(2\sqrt{2} \pi \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, pR] + \frac{1}{R} \text{BesselJ}[0, pR] \right. \right. \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[m, n] \left. \left. \right) \right) / \left(\text{Abs}[\text{BesselJ}[1+m, \text{BesselJZero}[m, n]]] \left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[m, n]^2}{R^2} \right) \right)}$$

$\Phi[3, 0, 1, p]$

$$\frac{2\sqrt{2} \pi \text{BesselJ}[0, 3p] \text{BesselJZero}[0, 1]}{3 \left(-p^2 + \frac{1}{9} \text{BesselJZero}[0, 1]^2 \right)}$$

`NIntegrate[$\Phi[3, 0, 1, p]^2 p$, {p, 0, 10}]`

39.47669748621508`

(* we have to do normalization for m=0 after get the phi(p), cannot use the original normalization constant*)

$$\int_0^R \text{BesselJ}[0, kr] \text{BesselJ}[0, pr] r dr // \text{FullSimplify}$$

$$\frac{1}{k^2 - p^2} R (k \text{BesselJ}[0, pR] \text{BesselJ}[1, kR] - p \text{BesselJ}[0, kR] \text{BesselJ}[1, pR])$$

$$\text{TeXForm}\left[\frac{1}{k^2 - p^2}\right]$$

$$R (k \text{BesselJ}[0, pR] \text{BesselJ}[1, kR] - p \text{BesselJ}[0, kR] \text{BesselJ}[1, pR])$$

$$\frac{R (k J_1(kR) J_0(pR) - p J_0(kR) J_1(pR))}{k^2 - p^2}$$

$$\int_0^{\infty} \left((R ((\text{BesselJZero}[0, n] / R) \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] - p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R])) \right) / \left((\text{BesselJZero}[0, n] / R)^2 - p^2 \right)^2 (2 \pi) p \, dp$$

ConditionalExpression[

$$\frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^4} \sqrt{\pi} R^2 \left(\text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{BesselJZero}[0, n]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right] - 2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right] + \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{5}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right] \right), \left. \text{Re}[R] \geq 0 \ \&\& \ \text{Im}[R] = 0 \ \&\& \ \left(\text{Re}\left[\frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2}\right] \leq 0 \ \|\ \frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2} \notin \text{Reals} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& \text{Solve} \left[\left(\frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^4} \sqrt{\pi} R^2 \left(\text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{BesselJZero}[0, n]^2 \right. \right. \right. \\
& \quad \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] - \\
& \quad 2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \\
& \quad \text{BesselJZero}[0, n] \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, \right. \\
& \quad \left. -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \\
& \quad \left. \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) \right) \right) x^2 == 1, x] \\
& \left\{ \{x \rightarrow -1 / \right. \\
& \quad \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \right) \}, \\
& \left\{ x \rightarrow 1 / \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \right) \}
\end{aligned}$$

NN =

$$\begin{aligned}
& 1 / \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \text{BesselJZero}[0, n]^2 \right)\right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \right. \\
& \quad \left(2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^3 + \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left\{\left\{\frac{5}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \\
& 1 / \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \right. \\
& \quad \left(2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^3 + \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left\{\left\{\frac{5}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right)
\end{aligned}$$

TeXForm[1/

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^2} \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) - \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} \right. \\
& \quad \left. 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \\
& \quad \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right] + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^4} \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{5}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right)\right] \right)
\end{aligned}$$

m = 0

0

(* the original result's normalization constant is not good*)

$$\begin{aligned}
\Phi[R_, n_, p_] = & \\
& \text{NN} \left(R \left(\frac{\text{BesselJZero}[0, n]}{R} \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] \right) \right) / \\
& \left((\text{BesselJZero}[0, n] / R)^2 - p^2 \right) \\
& \left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{R} \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) / \\
& \left(\left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2} \right) \sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right\} \right) \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \right. \\
& \quad \left(2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right\} \right) \right) / \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^3 + \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right\} \right) \right) \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \\
& \left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{R} \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) / \\
& \left(\left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2} \right) \sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right\} \right) \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \right. \\
& \quad \left(2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right\} \right) \right) / \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^3 + \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right\} \right) \right) \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right)
\end{aligned}$$

N[Φ[10, 2, p]]

$$\frac{(0.311437 + 2.63175 \times 10^{-14} i) \text{BesselJ}[0., 10. p]}{0.304713 - 1. p^2}$$

N[Φ[10, 3, p]]

$$\frac{(0.488234 + 8.49684 \times 10^{-11} i) \text{BesselJ}[0., 10. p]}{0.74887 - 1. p^2}$$

(* the normalization is based on the area d^2 r= p dp (2pi) *)

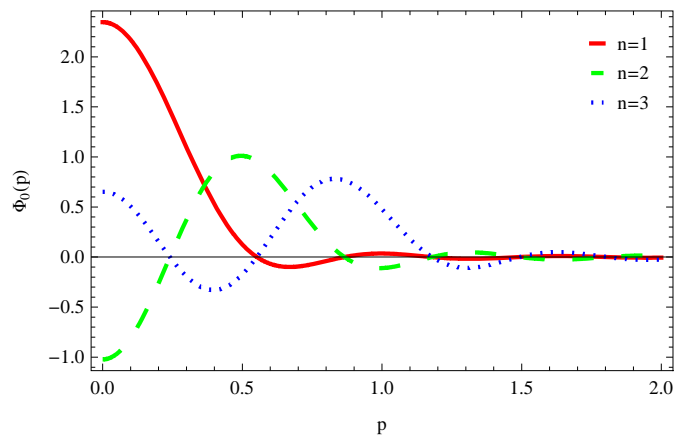
```
NIntegrate[ $\Phi[3, 1, p]$  Conjugate[ $\Phi[3, 1, p]$ ] p (2  $\pi$ ), {p, 0, 2}]
```

```
0.991963
```

```
NIntegrate[ $\Phi[2, 0, 1, p]^2$  p, {p, 0, 10}]
```

```
39.4725
```

```
Plot[{Re[ $\Phi[10, 1, p]$ ], Re[ $\Phi[10, 2, p]$ ], Re[ $\Phi[10, 3, p]$ ]},
  {p, 0, 2}, PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotStyle  $\rightarrow$ 
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame  $\rightarrow$  True, FrameLabel  $\rightarrow$  {"p", " $\Phi_0(p)$ "}, PlotLegend  $\rightarrow$  {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



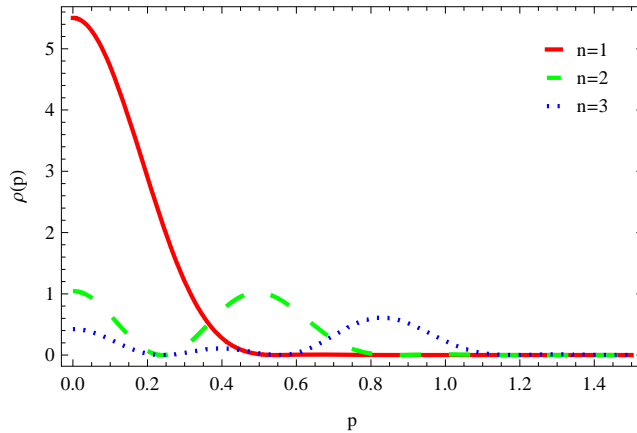
```
Export["wave-p-m=0.eps", %]
```

```
wave-p-m=0.eps
```

$$\rho_p[R_, n_, p_] = \Phi[R, n, p] \text{Conjugate}[\Phi[R, n, p]]$$

$$\left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \frac{1}{R} \right. \right. \\ \left. \left. \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right. \\ \left. \text{Conjugate} \left[\left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \frac{1}{R} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) \right) \right) / \\ \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\} \right\}, \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \text{BesselJZero}[0, n]^2 \right) \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} \right. \right. \\ \left. \left. 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \right. \\ \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right) \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \right) / \\ \left(\left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2} \right) \left(-\text{Conjugate}[p]^2 + \frac{\text{Conjugate}[\text{BesselJZero}[0, n]]^2}{\text{Conjugate}[R]^2} \right) \right) \\ \sqrt{\left(\frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^2} \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \right. \right. \\ \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] - \right. \right. \\ \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \\ \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \\ \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^4} \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \right. \\ \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) \right)$$

```
Plot[{ρp[10, 1, p], ρp[10, 2, p], ρp[10, 3, p]},
{p, 0, 1.5}, PlotRange → All, PlotStyle →
{{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame → True, FrameLabel → {"p", "ρ(p)"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["den-p-m=0.eps", %]
```

```
den-p-m=0.eps
```

$$\begin{aligned}
 \text{sop}[R_-, n_-, p_-] = & \left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{R} \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) \\
 & \text{Conjugate} \left[\left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{R} \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) \Big/ \\
 & \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left\{ \{1, 2\}, \{1\} \right\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) \right) \Big/ \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \right. \\
 & \left(2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \\
 & \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \left\{ \{2, 2\}, \{1\} \right\}, \right. \right. \\
 & \left. \left. -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) \Big/ \text{BesselJZero}[0, n]^3 + \\
 & \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left\{ \{2, 3\}, \{2\} \right\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) \right) \Big/ \text{BesselJZero}[0, n]^4 \Big) \Big) \\
 \text{Log} \left[\left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \frac{1}{R} \text{BesselJ}[0, p R] \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) \text{Conjugate} \left[\right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \frac{1}{R} \text{BesselJ}[0, p R] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) / \\
& \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \left(2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^3 + \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{5}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \right) / \left(\left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2} \right) \right. \\
& \left. \left(-\text{Conjugate}[p]^2 + \text{Conjugate}[\text{BesselJZero}[0, n]]^2 / \text{Conjugate}[R]^2 \right) \right. \\
& \left. \sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \left(2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{5}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{ \{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \right) \right) / \\
& \left(\left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2} \right) \left(-\text{Conjugate}[p]^2 + \frac{\text{Conjugate}[\text{BesselJZero}[0, n]]^2}{\text{Conjugate}[R]^2} \right) \right. \\
& \left. \sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{ \{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2\right]\right) / \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

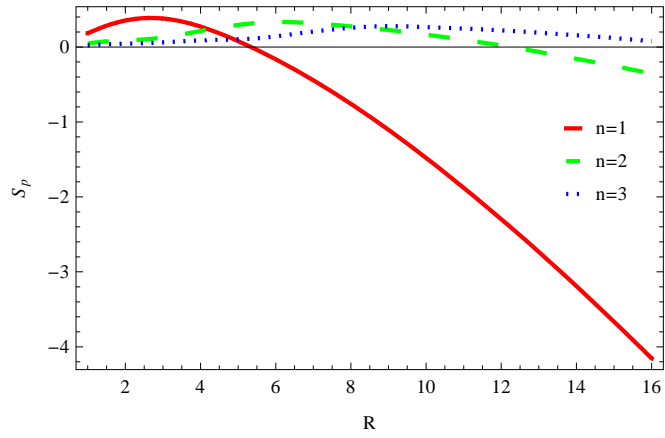
$$\begin{aligned}
& \text{BesselJZero}[0, n]^3 + \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \left. \right) \\
& \left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \frac{1}{R} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) \\
& \text{Conjugate} \left[\left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \frac{1}{R} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) / \\
& \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \left. \right) \\
& \text{Log} \left[\left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \frac{1}{R} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) \\
& \text{Conjugate} \left[\left(R \left(-p \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, p R] + \frac{1}{R} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{BesselJ}[0, p R] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJZero}[0, n] \right) \right) / \\
& \left(\sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \{\{1, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \right. \\
& \quad \left. \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{MeijerG} \left[\right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left\{ \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \{\} \right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG} \left[\left\{ \left\{ \frac{5}{2} \right\}, \{\} \right\}, \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \right) \right) \left. \right) / \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2} \right) \left(-\text{Conjugate}[p]^2 + \frac{\text{Conjugate}[\text{BesselJZero}[0, n]]^2}{\text{Conjugate}[R]^2} \right) \right. \\
& \sqrt{\left(\left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}\right], \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \text{BesselJZero}[0, n]^2 \right) \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^2 - \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} \\
& \quad 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \\
& \quad \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}\right], -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \\
& \quad \left(\sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{5}{2}\right\}, \{\}\right\}, \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \{\{2, 3\}, \{2\}\}, -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) / \text{BesselJZero}[0, n]^4 \left. \right) \left. \right) / \\
& \left(\left(-p^2 + \frac{\text{BesselJZero}[0, n]^2}{R^2} \right) \left(-\text{Conjugate}[p]^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{\text{Conjugate}[\text{BesselJZero}[0, n]]^2}{\text{Conjugate}[R]^2} \right) \right) \\
& \sqrt{\left(\frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^2} \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \right. \\
& \quad \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}\right], -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] - \\
& \quad \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^3} 2 \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]] \\
& \quad \text{BesselJ}[1, \text{BesselJZero}[0, n]] \\
& \quad \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 2\}, \{1\}\}\right], -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] + \\
& \quad \frac{1}{\text{BesselJZero}[0, n]^4} \sqrt{\pi} R^2 \text{BesselJ}[0, \text{BesselJZero}[0, n]]^2 \\
& \quad \left. \left. \text{MeijerG}\left[\left\{\left\{\frac{5}{2}\right\}, \{\}\right\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}\right], -\text{BesselJZero}[0, n]^2 \right] \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

```

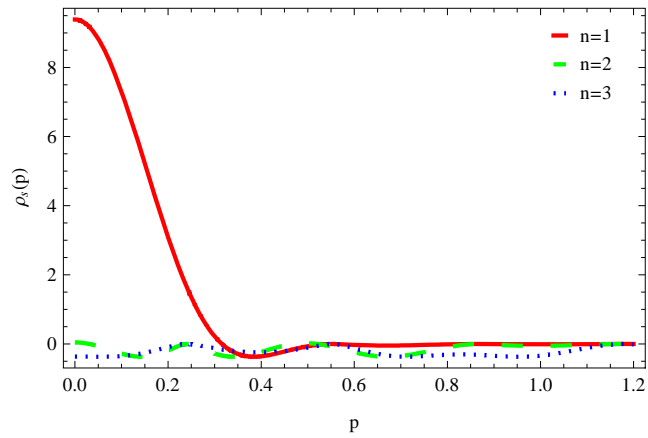
Plot[NIntegrate[-spp[R, 1, p], {p, 0, 1.2}],
  NIntegrate[-spp[R, 2, p], {p, 0, 1.2}], NIntegrate[-spp[R, 3, p], {p, 0, 1.2}]],
{R, 1, 16}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"R", "Sp"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]

```



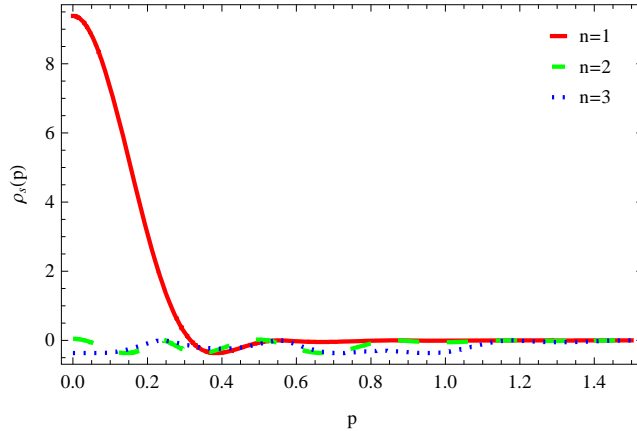
```
Export["sp-R-m=0.eps", %]
```

```
sp-R-m=0.eps
```



```
Export["sden-p-m=0-re.eps", %]
```

```
sden-p-m=0-re.eps
```

```
Export["sden-p-m=0.eps", %]
```

```
sden-p-m=0.eps
```

```
Plot[{spp[10, 1, p], spp[10, 2, p], spp[10, 3, p]},
  {p, 0, 1.2}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame -> True, FrameLabel -> {"p", "rho_s(p)"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```

(* let us study the m=1 case*)

$$\int_0^R \text{BesselJ}[1, k r] \text{BesselJ}[0, p r] r dr$$

$$\int_0^R r \text{BesselJ}[0, p r] (k r)^{(2 L + 1)} dr$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{1}{3 + 2 L}$$

$$k R^3 (k R)^{2 L} \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{3}{2} + L\right\}, \left\{1, \frac{5}{2} + L\right\}, -\frac{1}{4} p^2 R^2\right],$$

$$\text{Re}[p R] \geq 0 \ \&\& \ (\text{Im}[p R] > 0 \ || \ \text{Re}[p R] > 0) \ \&\& \ \text{Re}[L] > -\frac{3}{2}]$$

$$\Phi 1[R_, n_, p_] = \sum_{L=0}^{15} \frac{(-1)^L}{2^{2 L + 1} L! (L + 1)!} \frac{1}{3 + 2 L} \text{BesselJZero}[1, n] R^2$$

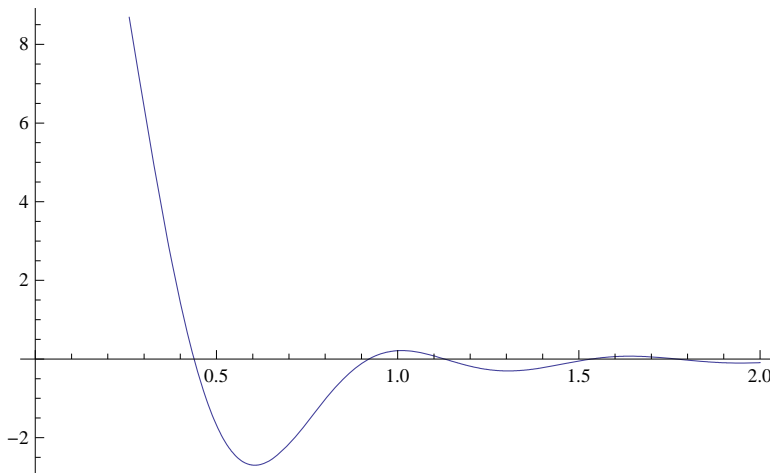
$$(\text{BesselJZero}[1, n])^{2 L} \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{3}{2} + L\right\}, \left\{1, \frac{5}{2} + L\right\}, -\frac{1}{4} p^2 R^2\right];$$

TeXForm $\left[\frac{(-1)^L}{2^{2L+1} L! (L+1)!} \frac{1}{3+2L} \text{BesselJZero}[1, n] R^2\right.$

$\left. (\text{BesselJZero}[1, n])^{2L} \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{3}{2}+L\right\}, \left\{1, \frac{5}{2}+L\right\}, -\frac{1}{4} p^2 R^2\right]\right]$

$\frac{(-1)^L 2^{-2L-1} R^2 \text{left}(j_{1,n}\text{right})^{\{2L+1\}}}{(L+1)!} \backslash, _1F_2\text{left}(L+\frac{3}{2}; 1,$

Plot[$\mathfrak{E}1[10, 1, p], \{p, 0, 2\}$]



NIntegrate[$\mathfrak{E}1[10, 1, p] \text{Conjugate}[\mathfrak{E}1[10, 1, p]] p (2\pi), \{p, 0, 3\}$]

50.9545

(*N1=7.13824 for m=1,n=1, R=10*)

Sqrt[%]

7.13824

NIntegrate[$\mathfrak{E}1[10, 2, p] \text{Conjugate}[\mathfrak{E}1[10, 2, p]] p (2\pi), \{p, 0, 3\}$]

28.2838

Sqrt[%]

(*N1=5.318248033286422 for m=1,n=2, R=10*)

5.318248033286422`

NIntegrate[$\mathfrak{E}1[10, 3, p] \text{Conjugate}[\mathfrak{E}1[10, 3, p]] p (2\pi), \{p, 0, 3\}$]

19.5625

Sqrt[%]

4.42295

$\mathfrak{E}n1[R_, n_, p_] =$

$$(7.1382406618221745^{\wedge}) \sum_{L=0}^{15} \frac{(-1)^L}{2^{2L+1} L! (L+1)!} \frac{1}{3+2L} \text{BesselJZero}[1, n] R^2$$

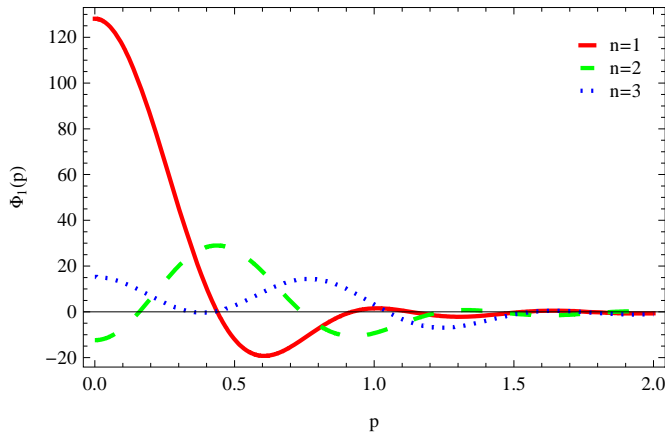
$$(\text{BesselJZero}[1, n])^{2L} \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{3}{2}+L\right\}, \left\{1, \frac{5}{2}+L\right\}, -\frac{1}{4} p^2 R^2\right];$$

$$\begin{aligned} \Phi n2[R_, n_, p_] = \\ (5.318248033286422) \sum_{L=0}^{15} \frac{(-1)^L}{2^{2L+1} L! (L+1)!} \frac{1}{3+2L} \text{BesselJZero}[1, n] R^2 \\ (\text{BesselJZero}[1, n])^{2L} \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{3}{2}+L\right\}, \left\{1, \frac{5}{2}+L\right\}, -\frac{1}{4} p^2 R^2\right]; \end{aligned}$$

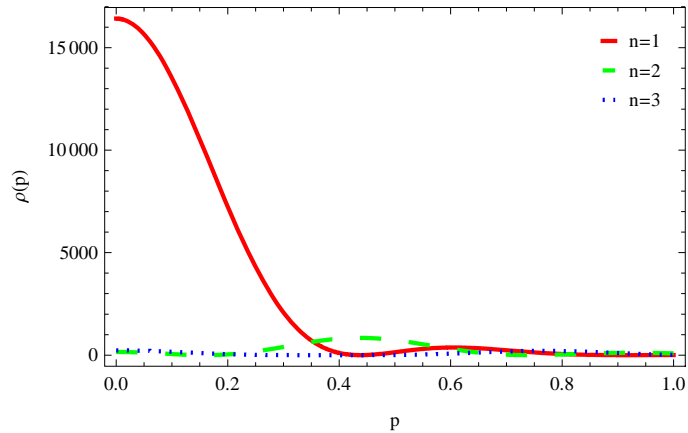
$$\begin{aligned} \Phi n3[R_, n_, p_] = \\ (4.422953914985474) \sum_{L=0}^{15} \frac{(-1)^L}{2^{2L+1} L! (L+1)!} \frac{1}{3+2L} \text{BesselJZero}[1, n] R^2 \\ (\text{BesselJZero}[1, n])^{2L} \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{3}{2}+L\right\}, \left\{1, \frac{5}{2}+L\right\}, -\frac{1}{4} p^2 R^2\right]; \end{aligned}$$

(*N1=4.422953914985474` for m=1,n=3, R=10*)

```
Plot[{Re[Φn1[10, 1, p]], Re[Φn2[10, 2, p]], Re[Φn3[10, 3, p]]},
{p, 0, 2}, PlotRange → All, PlotStyle →
{{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame → True, FrameLabel → {"p", "Φ1(p)"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
ρp1[R_, n_, p_] = Φn1[R, n, p] Conjugate[Φn1[R, n, p]];
ρp2[R_, n_, p_] = Φn2[R, n, p] Conjugate[Φn2[R, n, p]];
ρp3[R_, n_, p_] = Φn3[R, n, p] Conjugate[Φn3[R, n, p]];
Plot[{ρp1[10, 1, p], ρp2[10, 2, p], ρp3[10, 3, p]},
{p, 0, 1}, PlotRange → All, PlotStyle →
{{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
Frame → True, FrameLabel → {"p", "ρ(p)"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```

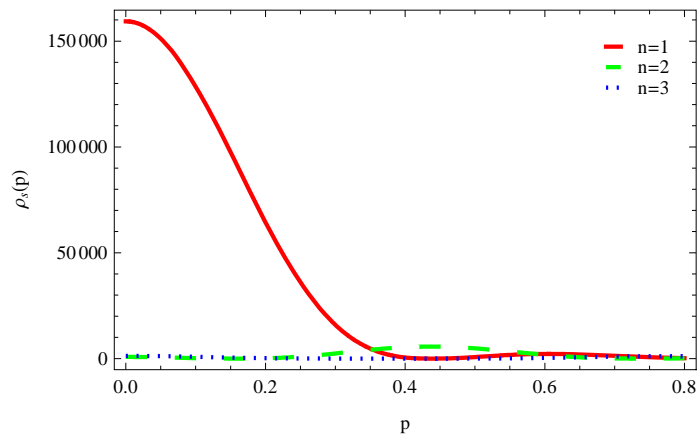


```

spp1[R_, n_, p_] = rho1[R, n, p] Log[rho1[R, n, p]];
spp2[R_, n_, p_] = rho2[R, n, p] Log[rho2[R, n, p]];
spp3[R_, n_, p_] = rho3[R, n, p] Log[rho3[R, n, p]];

Plot[{spp1[10, 1, p], spp2[10, 2, p], spp3[10, 3, p]},
  {p, 0, 0.8}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame -> True, FrameLabel -> {"p", "rho_s(p)"}, PlotLegend -> {"n=1", "n=2", "n=3"}]

```



```
Export["sden-p-m=1.eps", %]
```

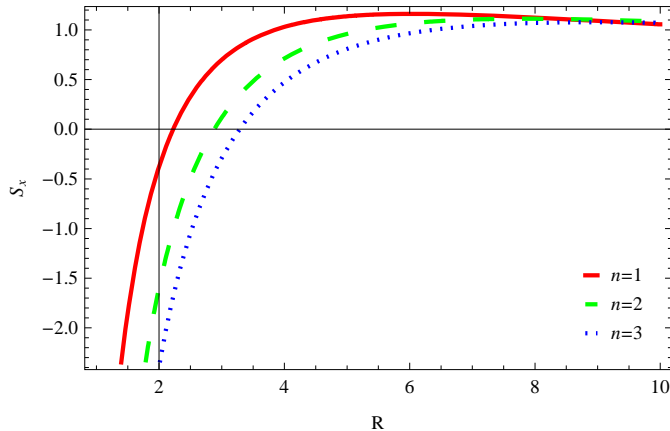
```
sden-p-m=1.eps
```

```
Export["sx-m.eps", %]
```

```
sx-m.eps
```

```
sx-m.eps
```

```
Plot[{NIntegrate[-spx[R, 0, 1, r], {r, 0, R}],
  NIntegrate[-spx[R, 0, 2, r], {r, 0, R}],
  NIntegrate[-spx[R, 0, 3, r], {r, 0, R}]}, {R, 1, 6}, PlotStyle →
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame → True, FrameLabel → {"R", "Sx"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```



```
Export["sx-R.eps", %]
```

sx-R.eps

```
Plot[{NIntegrate[-spx[10, 0, 1, r], {r, 0, 10}],
  NIntegrate[-spx[10, 0, 2, r], {r, 0, 10}],
  NIntegrate[-spx[10, 0, 3, r], {r, 0, 10}]}, {m, 0, 10}, PlotStyle →
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame → True, FrameLabel → {"m", "Sx"}, PlotLegend → {"n=1", "n=2", "n=3"}]
```

```
Plot[{NIntegrate[-spx[10, 0, n, r], {r, 0, 10}],
  NIntegrate[-spx[10, 1, n, r], {r, 0, 10}],
  NIntegrate[-spx[10, 2, n, r], {r, 0, 10}]}, {n, 1, 2}, PlotStyle →
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame → True, FrameLabel → {"n", "Sx"}, PlotLegend → {"m=0", "m=1", "m=2"}]
```

```
Plot[{ρsp[0.05, 0.1, 2, p], ρsp[0.05, 0.1, 8, p], ρp[0.05, 0.1, 16, p]},
  {p, -6, 6}, PlotRange → All, PlotStyle →
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame → True, FrameLabel → {"p", "ρs(p)"}, PlotLabel → "α=0.05, σ=0.1",
  PlotLegend → {"D=2", "D=8", "D=16"}]
```

```
Export["densp.1-D.eps", %]
```

densp.1-D.eps

```
NIntegrate[-ρsp[0.08, 0.2, 8, p], {p, -∞, ∞}]
```

1.51022 - 1.54074 × 10⁻³³ i

```
Plot[{Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[ $\alpha$ , 0.2, 2, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ ]}],
      Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[ $\alpha$ , 0.2, 8, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ ]}],
      Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[ $\alpha$ , 0.2, 16, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ ]}]}, { $\alpha$ , 0.01, 0.8}, PlotStyle →
  {{Red, Thick}, {Green, Dashing[Large], Thick}, {Blue, Dotted, Thick}},
  Frame → True, FrameLabel → {" $\alpha$ ", " $S_p$ "}, PlotLabel → " $\sigma=0.2$ ",
  PlotLegend → {"D=2", "D=8", "D=16"}]
```

```
(*  $\alpha=0.8$   $\sigma=0.1$   $\delta=0.2,3,10$  *)
```

```
Sx[0.8, 0.1, 0.2] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[0.8, 0.1, 0.2, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.4219
```

```
Sx[0.8, 0.1, 3] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[0.8, 0.1, 3, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.22173
```

```
Sx[0.8, 0.1, 9] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[0.8, 0.1, 9, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.1772
```

```
(*  $\alpha=0.8$   $\sigma=0.1,0.4,0.9$   $\delta=3$ *)
```

```
Sx[0.8, 0.1, 3] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[0.8, 0.1, 3, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.22173
```

```
Sx[0.8, 0.4, 3] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[0.8, 0.4, 3, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.2445
```

```
Sx[0.8, 0.6, 3] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[0.8, 0.6, 3, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.31454
```

```
(*  $\alpha=0.8,10,40$   $\sigma=0.1$   $\delta=0.8$ )
```

```
Sx[0.8, 0.1, 0.8] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[0.8, 0.1, 0.8, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.30152
```

```
Sx[10, 0.1, 0.8] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[10, 0.1, 0.8, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.30152
```

```
Sx[40, 0.1, 0.8] + Re[NIntegrate[- $\rho$ sp[40, 0.1, 0.8, p], {p, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
2.30152
```

```
(* the maximum of n*)
```

```
Do[Print[n, " ", NIntegrate[-spx[10, 0, n, r] r, {r, 0, 10}]] +
  NIntegrate[-spp[10, n, p] p, {p, 0, 2}], {n, 1, 8}]
```

```

1  3.36146
2  3.32623
3  3.31616
4  3.31142
5  3.30867
6  3.30687
7  3.30561
8  3.30467

```

```
Do[Print[n, " ", NIntegrate[-s $\rho$ x[10, 1, n, r], {r, 0, 10}]], {n, 1, 8}]
```

```

1  0.732902
2  0.844874
3  0.898666
4  0.929793
5  0.94941
6  0.962314
7  0.970945
8  0.97669

```

```
Do[Print[n, " ", NIntegrate[-s $\rho$ p[10, n, p] p, {p, 0, 2}]], {n, 1, 8}]
```

```

1  -0.124748
2  0.0813893
3  0.173774
4  0.23002
5  0.265466
6  0.272829
7  0.0120177
8  8.97598  $\times 10^{-6}$ 

```

```
Do[Print[n, " ", NIntegrate[-s $\rho$ x[10, 0, n, r] r, {r, 0, 10}]] +
  NIntegrate[-s $\rho$ p[10, n, p] p, {p, 0, 2}], {n, 1, 8}]
```

```

1  3.36146
2  3.32623
3  3.31616
4  3.31142
5  3.30867
6  3.30687
7  3.30561
8  3.30467

```

(* analytical result for Sx, n=1*)

Bibliografía

- [1] P. Pascual A. Galindo. *Quantum Mechanics*. Springer, Berlin, 1978.
- [2] Indian J. Pure Appl A. Kumar. Phys. 2005.
- [3] Mamojka B. Int. j. theor. phys. 1974. [39](#)
- [4] Benett C.H. Cleve R. DiVincenzo D.P. Margolus N. Shor P. Sleator T. Smolin J. Weinfurter H. Barenco, A. *Elementary Gates for Quantum Computation*. Phys. Rev. A, vol. 52, 1995.
- [5] P. Benioff. *Quantum Mechanical Hamiltonian Models of Turing Machines*. J. Stat. Phys., vol. 29, 1982.
- [6] C.H. Bennett. *Logical Reversibility of Computation*. IBM Journal of Research and Development, 1973.
- [7] C.H. Bennett. *Fundamental Physical Limits of Computation*. Scientific American, vol. 253, 1985.
- [8] Shannon C.E. *Bell Syst. Tech Reprinted in: C.E. Shannon, Claude Elwood Shannon: Collected Papers*. IEEE Press, New York, 1993. [8](#), [14](#), [36](#), [40](#)
- [9] Merzbacher E. *Quantum Mechanics*. 7th ed, New York: Wiley, 1967. [29](#), [63](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [10] R. Sever Int. J. Mod E. Aydiner, C. Orta. Phys. 2008.
- [11] F. de los Santos E. Romera. Phys. 2007.
- [12] H. Everett. *The Many World Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, N Princeton NJ, 1973.
- [13] Douglas R. G. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. Academic Press, New York, 1972. [27](#)
- [14] T. Dytrich K.D. Launey S.H. Dong J.P. Jerry Ann. G. Yáñez-Navarro, G.H. Sun. Phys. 2014.
- [15] S. Naad G.H. Sun, S.H. Dong. Phys. (berlin). 2013.
- [16] S.H. Dong G.H. Sun. Phys. 2010.
- [17] S.H. Dong G.H. Sun. Phys. scr. 2013.
- [18] S.H. Dong G.H. Sun, M. Avila Aoki. Phys. 2013.
- [19] I.M. Ryzhik I.S. Gradshteyn. *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York, 2000.
- [20] Buzek V Keitel C H and Knight P. Phys. rev. 1995. [39](#)
- [21] Maassen H and Uffink J. Phys. 1988. [42](#), [43](#)
- [22] Kodai Hatori H. Math. semi. 1958. [37](#)
- [23] Anthony J. Hey. *Exploring the limits of Computers editor Feynman and Computation*. Westview, 2002.
- [24] Bialynicki-Birula I and Mycielski J. Commun. math. phys. 1975. [41](#), [42](#), [43](#)

- [25] Vajda I. *Theory of Information and Statistical Decisions*. Alfa: Bratislava, 1982. [40](#)
- [26] Lukin Imamoglu. *Physical. Review*, 2000. [6](#), [7](#)
- [27] Sanchez-Ruiz J. *Phys.* 1993. [42](#), [64](#)
- [28] Von Neumann J. *Hermodynamik quantum mechanischer Gesamheiten*. Gött. Nach, 1927. [32](#)
- [29] J J. Katriel, K.D. Sen. *Comput. appl. math.* 2010.
- [30] A. Zarzo J.C. Cuchi Eur J.C. Angulo, J. Antolin. *Phys.* 1999. [5](#)
- [31] I.I. Hirschmann Jr. *Am. j. math.* 1957. [36](#)
- [32] A.I. Aptekarev V. Buyarov J J.S. Dehesa, R.J. Yáñez. *Phys.* 1998.
- [33] R.J. Yáñez J.S. Dehesa, W. Van Assche. *Methods appl. math.* 1997.
- [34] V.N. Sorokin Mol J.S. Dehesa, A. Martínez-Finkelshtein. *Phys.* 2006.
- [35] J K.D. Sen. *Chem. phys.* 2005.
- [36] Brillouin L. *Science and Information Theory*. Westview, New York, 1965. [7](#), [41](#)
- [37] R. Landauer. *Irreversibility and Heat Generation in the omputing Process*. IBM Journal of Research and Development, vol. 5, 1961.
- [38] G. Lindblad. Completely positive maps and entropy inequalities, *commun. math. phys.* 1975. [33](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [39] Z. Meglicki. *Quantum Computing without Magic: Devices*. The MIT Press, 2008.
- [40] Gordon E. Moore. Cramming more components into integrated circuits. 1965. [9](#), [17](#)
- [41] Can. J M.W. Coffey. Phys. 2007.
- [42] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000. [36](#)
- [43] A. Orłowski. Phys. 1997.
- [44] Glansdorff P. and Prigogine I. *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*. WileyInterscience, London, 1971. [34](#)
- [45] Hewitt P.G. *Física Conceptual*. Addison-Wesley, New York, 1995. [25](#), [26](#)
- [46] Gantmacher F. R. *Applications of the Theory of Matrices*. Interscience, New York, 1959.
- [47] C.N. Kumar P. Panigrahi R. Atre, A. Kumar. Phys. 2004.
- [48] Feynman Richard. *Feynman Lectures on Computingeparation System*. Addison-Wesley, 1996. [8](#)
- [49] A. Rényi. *Probability Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1970. [37](#)
- [50] Wolfram S. *Mathematica, System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1997. [6](#)
- [51] S.H. Dong J.P. Draayer S. Dong, G.H. Sun. Phys. 2014.

- [52] Int S.H. Patil, K.D. Sen. J. quant. chem. 2007.
- [53] Gillespie Daniel T. *Introducción a la mecánica cuántica*. Reverté S. A., Barcelona, 1976.
- [54] Landsberg P T. *Uncertainty and measurement Quantum Theory Without Reduction*. M Cini and J-M Lévy-Leblond, Bristol, 1990. [7](#), [44](#)
- [55] T. Toffoli. *Reversible Computing*. MIT Technical Report MIT/LCS/TM, 1980.
- [56] T. Toffoli and N. Margolus. *Cellular Automata Machines: A New Enviroment for Modelling*. The MIT Press, 1987.
- [57] J.B.M. U-nk. Measures of uncertainty and the uncertainty principle. 1990. [37](#)
- [58] H. Umegaki. Conditional expectations in an operator algebra iv (entropy and information), kodai math. sem. 1962. [33](#)
- [59] Majerník V and Richterek L. J. phys. a: Math. gen. 1997. [39](#)
- [60] Majerník V and Richterek L. Phys. 1997. [29](#), [39](#), [42](#), [44](#)
- [61] Majerník V and Opatrny T. J. phys. a: Math. 1996. [28](#), [43](#)
- [62] J V. Majernik, T. Opatrný. Phys. 1996.
- [63] J. Von Neumann. *Mathematischen Grundlagender Quantemmechanik*. English translation: Mathematical foundations of quantum mechanics, Dover, New York, 1954, Berlin, 1932. [32](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [64] Finkel R W. Phys. 1987. [38](#)
- [65] Heisenberg W. Phys. 1927. [37](#), [40](#)
- [66] Ann W. Beckner. Math. 1975.
- [67] Ben-Bassat M. y Raviv j. Trans. inform. theory. 1978. [38](#)