



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS  
MONOCROMÁTICAS EN TORNEOS  
SIN  $C_3$  ARCOÍRIS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

NAYDEL SÁNCHEZ CASTRO

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. MARÍA DEL ROCÍO ROJAS MONROY



ENERO DE 2017



8.5 Voto Aprobatorio : Evaluación Profesional

Facultad de Ciencias  
Subdirección Académica  
Departamento de Evaluación Profesional



Versión Vigente No. 06

Fecha: 23/01/2015

VOTO APROBATORIO

Toda vez que el trabajo de evaluación profesional, ha cumplido con los requisitos normativos y metodológicos, para continuar con los trámites correspondientes que sustentan la evaluación profesional, de acuerdo con los siguientes datos:

Nombre del pasante	Naydel Sánchez Castro		
Licenciatura	Matemáticas	N° de cuenta	1022746 Gen: Femenino
Opción	Tesis	Escuela de Procedencia	Facultad de Ciencias
Nombre del Trabajo para Evaluación Profesional	NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS EN TORNEOS SIN C3 ARCOÍRIS		

NOMBRE		FIRMA DE VOTO APROBATORIO	FECHA
ASESOR	Dra. María del Rocío Rojas Monroy		12/01/2017
COASESOR ASESOR EXTERNO (Solo si aplica)			

NOMBRE		FIRMA Y FECHA DE RECEPCIÓN DE NOMBRAMIENTO	FIRMA Y FECHA DE ENTREGA DE OBSERVACIONES	FIRMA Y FECHA DEL VOTO APROBATORIO
REVISOR	Dr. Enrique Casas Bautista	09/12/16 	12/01/17 	12/01/17 
REVISOR	M. en C. Adriana Miranda Cotardo	8 dic 2016 	13 enero 2017 	13 enero 2017 

Derivado de lo anterior, se le AUTORIZA LA REPRODUCCIÓN DEL TRABAJO DE EVALUACIÓN PROFESIONAL de acuerdo con las especificaciones del anexo 8.7 "Requisitos para la presentación del examen de evaluación profesional".

NOMBRE		FIRMA	FECHA
ÁREA DE EVALUACIÓN PROFESIONAL			

# Dedicatoria

*A mis padres, por su amor, trabajo y sacrificios en todos estos años,  
gracias a su apoyo incondicional  
he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy.  
Ha sido un privilegio ser su hija,  
son los mejores padres.*

*A mis hermanitas, Aylín y Geraldine  
quienes me inspiran a ser mejor cada día,  
gracias por estar a mi lado y apoyarme siempre,  
las quiero mucho.*

*A mi hijo, tu afecto y tu cariño son los detonantes de mi felicidad,  
de mi esfuerzo, de mis ganas de buscar lo mejor para tí.  
Aún a tu corta edad,  
me has enseñado y me sigues enseñando muchas cosas de esta vida.  
Fuiste mi motivación más grande para concluir con éxito este proyecto de tesis.  
Te amo mi pequeño.*

*Finalmente a mi mentora Dra. María del Rocío Rojas Monroy,  
gracias por su paciencia, dedicación e inigualable compromiso.*

# Índice general

Dedicatoria	3
Introducción	5
<b>1. Conceptos Básicos</b>	<b>7</b>
1.1. Digráficas . . . . .	7
1.2. Conexidad . . . . .	10
<b>2. Núcleos por trayectorias monocromáticas</b>	<b>17</b>
2.1. Núcleos . . . . .	17
2.2. Digráficas $m$ -coloreadas . . . . .	21
2.3. Núcleos por trayectorias monocromáticas . . . . .	26
2.3.1. Historia de la Conjetura de Sands, Sauer y Woodrow . . . . .	30
<b>3. Torneos</b>	<b>32</b>
<b>4. Torneos con ciclos monocromáticos</b>	<b>49</b>
<b>5. Torneos y seminúcleos modulo <math>D_2</math></b>	<b>53</b>
5.1. $\gamma$ - ciclos y Torneos $m$ -coloreados . . . . .	53
5.2. Seminúcleos por Trayectorias Monocromáticas . . . . .	56
<b>6. Análisis de condiciones suficientes para la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas en Torneos</b>	<b>70</b>

# Introducción

Sea  $D$  una digráfica, donde  $V(D)$  y  $F(D)$  denotan respectivamente los vértices y las flechas de  $D$ . Decimos que una digráfica es  $m$ -coloreada si sus flechas están coloreadas con  $m$ -colores. Un conjunto  $N \subset V(D)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  si  $N$  es un conjunto independiente y además todo  $x \in V(D) - N$  es absorbido mediante una trayectoria monocromática por algún vértice en  $N$ . Nótese que el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo (definición 2.1.1).

En [13], Sands, Sauer y Woodrow demuestran que toda digráfica 2-coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, en particular ellos prueban que todo torneo 2-coloreado  $T$  tiene un vértice  $v$  tal que desde cualquier otro vértice  $u$  de  $T$  existe una trayectoria monocromática dirigida hacia  $v$ . También plantearon el siguiente problema: Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que no tiene ciclos dirigidos de longitud 3, 3-coloreados, ¿debe tener  $T$  un vértice que satisfaga lo anterior?

En [11] Shen Minggang prueba que si al problema anterior se pide además que no tenga subtorneos transitivos de orden 3, 3-coloreados entonces existe tal vértice. También prueba que este resultado es el más cercano a la conjetura anterior, para  $5 \leq m$ . Él presenta una serie de torneos  $m$ -coloreados, con  $5 \leq m$ , tales que no tienen ningún ciclo de longitud 3, 3-coloreado y estos no tienen núcleo por trayectorias monocromáticas.

En 2010 H. Galeana Sánchez y R. Rojas Monroy demuestran que el problema planteado por Sands, Sauer y Woodrow no es válido para  $m = 4$ , esto por medio de un contraejemplo (figura 2.13) que puede ser visto a detalle en [7].

El caso  $m = 3$  (si  $T$  es un torneo 3-coloreado tal que todo ciclo dirigido es cuasi-monocromático entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas) continúa abierto.

Durante el desarrollo del presente trabajo nos enfocaremos en analizar teoremas establecidos sobre núcleos por trayectorias monocromáticas para digráficas  $m$ -coloreadas en general, aplicados principalmente a torneos 3-coloreados en virtud del problema establecido por Sands, Sauer y Woodrow, con el objetivo principal de establecer resultados centrados en torneos  $m$ -coloreados, como consecuencia de aquellos que ya existen

para digráficas  $m$ -coloreadas pero con hipótesis más débiles por tratarse de torneos.

A lo largo del Capítulo 1 se verán algunos conceptos y resultados referentes a digráficas en general, los cuales nos resultaran de mucha utilidad a lo largo del desarrollo del presente, junto con ellos se mencionaran algunas referencias cuya consulta facilitara de gran manera la comprensión del tema que aquí se desarrollará.

Durante el Capítulo 2 el lector se adentrará en el mundo de las digráficas coloreadas, aquí se definirán conceptos de suma importancia tales como núcleo por trayectorias monocromáticas ó digráficas  $m$ -coloreadas, además se presentaran algunos de los resultados más importantes sobre la existencia del núcleo por trayectorias monocromáticas. Tambien se incluirá la historia de la conjetura establecida por Sands, Sauer y Woodrow, para torneos  $m$ -coloreados.

En el Capítulo 3 se presentarán principalmente 3 teoremas que surgieron al enfocar resultados ya conocidos acerca de la existencia del núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas  $m$ -coloreadas a torneos  $m$ -coloreados, además mediante algunos ejemplos veremos con más claridad como estos últimos se aplican.

A lo largo del Capítulo 4 se desarrollarán dos teoremas que surgieron al aplicar un resultado para digráficas  $m$ -coloreadas tales que sus ciclos son monocromáticos. Se ofrecerán las demostraciones de cada uno de estos y también se verán algunos ejemplos acerca de estos mismos, veremos como es que la conexidad afecta ó no el resultado aplicado a torneos.

En el penúltimo Capítulo de este trabajo se mostrarán conceptos relativamente nuevos para digráficas  $m$ -coloreadas, tales como  $\gamma$ -ciclo ó seminúcleo por trayectorias monocromáticas. Además se establecerán tres nuevos teoremas para torneos  $m$ -coloreados, como resultado de enfocar un último teorema acerca de la existencia del núcleo por trayectorias monocromáticas considerando particiones del conjunto de colores usados para colorear las flechas del torneo así como ciertas propiedades que serán definidas más adelante.

Finalmente en el último capítulo se mostrará mediante una serie de ejemplos como es que los resultados que surgieron a lo largo del desarrollo de este trabajo no dependen uno del otro, es decir son independientes pues las hipótesis de cada teorema no implican que se cumplan necesariamente las de otro teorema. Además se presentara un cuadro comparativo mediante el cual se pretende facilitar la consulta de esto último.

# Capítulo 1

## Conceptos Básicos

Este capítulo tiene como objetivo presentar algunos conceptos y resultados referentes a digráficas así como algunas demostraciones de teoremas que nos serán de utilidad más adelante, de igual manera se incluyen algunas referencias que pueden ser consultadas por el lector para una mejor comprensión del tema, estas son [12] y [1].

### 1.1. Digráficas

**Definición 1.1.1** Una **digráfica**  $D$  es un par ordenado  $(V(D), F(D))$  donde  $V(D)$  es un conjunto no vacío de objetos llamados vértices y  $F(D)$  es un conjunto de pares ordenados de vértices a los que denominamos flechas. Una digráfica es de orden  $n$  si  $V(D)$  consta de  $n$  vértices.

**Definición 1.1.2** Sea  $f = (u, v)$  una flecha en  $F(D)$ , decimos que  $u$  y  $v$  son los **extremos** de  $f$ . A  $u$  lo llamamos extremo inicial y a  $v$  extremo final.

**Definición 1.1.3** Sea  $D$  una digráfica, un **camino**  $P = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  en  $D$  es una sucesión de vértices tal que para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  se tiene que  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ .

**Definición 1.1.4** Sea  $D$  una digráfica, una **trayectoria dirigida**  $T = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  en  $D$  es una sucesión de vértices tal que para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  se tiene que  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$  y para todo  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  tal que  $i \neq j$  se tiene que  $u_i \neq u_j$ .

**Definición 1.1.5** Sea  $D$  una digráfica, una **semi-trayectoria**  $T = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  en  $D$  es una sucesión de vértices tal que para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  se tiene que  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$  ó  $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$  y para todo  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  tal que  $i \neq j$  se tiene que  $u_i \neq u_j$ .

**Definición 1.1.6** Sea  $D$  una digráfica, un **camino cerrado**  $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = u_0)$  en  $D$  es una sucesión de vértices tal que para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  se tiene que  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ , los índices se toman módulo  $n + 1$ .

**Definición 1.1.7** Sea  $D$  una digráfica, un **ciclo**  $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  en  $D$  es una sucesión de vértices tal que para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  se tiene que  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$  (tomando los índices módulo  $n + 1$ ) y para todo  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  tal que  $i \neq j$  se tiene que  $u_i \neq u_j$ .

**Definición 1.1.8** Sea  $D$  una digráfica,  $C$  es un **ciclo hamiltoniano** de  $D$  si  $V(D) = V(C)$ .

**Definición 1.1.9** Sea  $D$  una digráfica, decimos que  $D$  es **acíclica** si no contiene ciclos dirigidos.

**Observación 1.1.1** Sea  $D$  una digráfica, tal que  $H$  es un camino, una trayectoria o un ciclo, la longitud de  $H$  se denota como  $l(H)$ .

**Definición 1.1.10** Sea  $H$  una digráfica, decimos que  $H$  es **subdigráfica** de  $D$  si  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ .

**Definición 1.1.11** Sea  $D$  una digráfica,  $H$  es  $D \cong H$  si y sólo si  $H$  es subdigráfica de  $D$  y  $D$  es subdigráfica de  $H$ .

**Definición 1.1.12** Sea  $D$  una digráfica, decimos que  $H$  es una **subdigráfica generadora** de  $D$  si  $V(H) = V(D)$ .

**Definición 1.1.13** Una flecha  $(u_1, u_2) \in F(D)$  es llamada **asimétrica** (resp. **simétrica**) si  $(u_2, u_1) \notin F(D)$  (resp.  $(u_2, u_1) \in F(D)$ ). La parte asimétrica de  $D$  (resp. parte simétrica de  $D$ ) que se denota como  $Asym(D)$  (resp.  $Sym(D)$ ), es la subdigráfica generadora tal que todas sus flechas son asimétricas (resp. flechas simétricas) de  $D$ .

**Definición 1.1.14** Sea  $D$  una digráfica,  $D$  es llamada **asimétrica** si  $Asym(D) = D$  (respectivamente **simétrica** si  $Sym(D) = D$ ).

**Ejemplo 1** Sean  $D_1, D_2$  y  $D_3$  digráficas tal como se muestran en la figura 1.1.

$D_1$  es una digráfica simétrica dado que para cada  $(u, w) \in F(D_1)$  se tiene que  $(w, u) \in F(D_1)$  de donde  $Sym(D_1) = D_1$ .  $D_2$  es una digráfica asimétrica dado que para cada  $(u, w) \in F(D_2)$  se tiene que  $(w, u) \notin F(D_2)$  de donde  $Asym(D_2) = D_2$ .

Por otra lado,  $D_3$  no es una digráfica asimétrica ni una digráfica simétrica, dado que como se muestra en la figura 1.2 se tiene que  $Asym(D_3) \neq D_3$  dado que en particular la flecha  $(z, t) \in F(D_3)$  y  $(z, t) \notin F(Asym(D_3))$  y  $Sym(D_3) \neq D_3$ , pues  $(z, s) \in F(D_3)$  y  $(z, s) \notin F(Sym(D_3))$ .

**Definición 1.1.15** Sea  $S$  un subconjunto no vacío de  $V(D)$ , entonces la **subdigráfica  $D[S]$  inducida por  $S$**  es la digráfica con vértices en  $S$  y cuyas flechas son las flechas de  $D$  cuyos ambos extremos están en  $S$ .

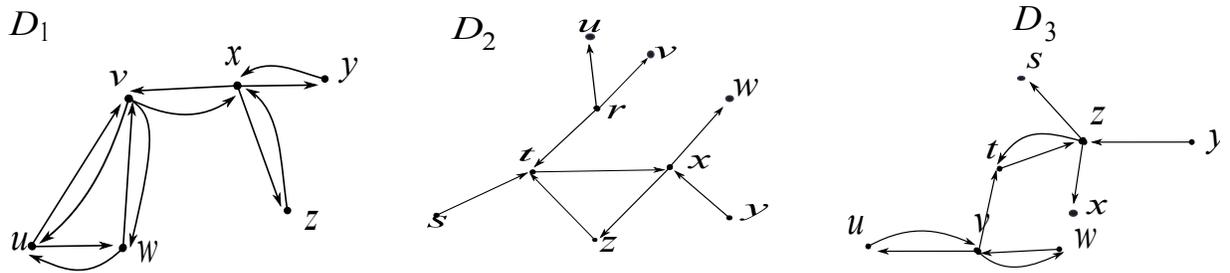


Figura 1.1:  $D_1$  es una digráfica asimétrica,  $D_2$  es una digráfica asimétrica y  $D_3$  no es ni simétrica ni asimétrica

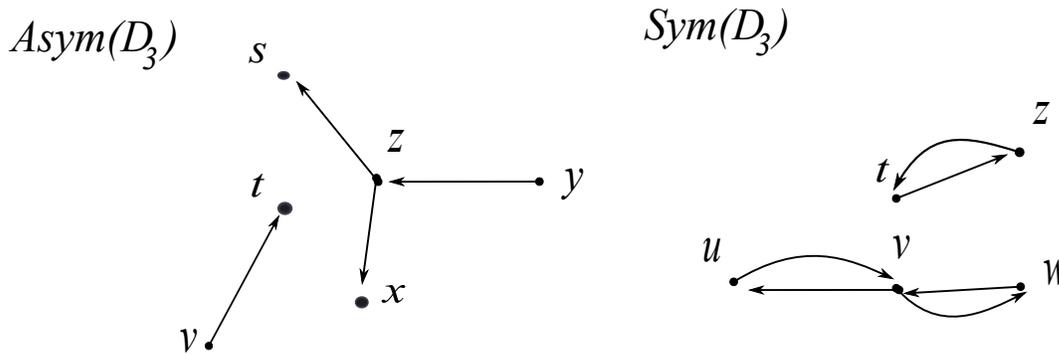


Figura 1.2:  $Asym(D_3)$  y  $Sym(D_3)$

**Ejemplo 2** Sea  $D$  una digráfica tal como se muestra en la figura 1.3.

Sea  $S \subset V(D)$ , tal que  $S = \{u, w, x, y\}$ , entonces la subdigráfica  $D[S]$  inducida por  $S$  para  $D$ , queda definida como se muestra en la figura 1.4

**Definición 1.1.16** Un conjunto  $I \subset V(D)$  es **independiente** si  $A(D[I]) = \emptyset$ .

**Ejemplo 3** Sea  $D$  la digráfica mostrada en la figura 1.3,  $I \subset V(D)$  definido como  $I = \{s, r, z, x\}$  es un conjunto independiente para  $D$  dado que  $V(D[I]) = \emptyset$ .

**Definición 1.1.17** Una digráfica  $D$  es llamada **completa** si para cualquier par de vértices  $u, v$  distintos de  $D$  al menos una de las flechas  $(u, v)$  ó  $(v, u)$  esta presente en  $D$ .

**Ejemplo 4** La digráfica  $D$  que se muestra a continuación es completa, dado que entre cada par de vértices  $u, v \in V(D)$  existe al menos una de las flechas  $(u, v)$  ó  $(v, u)$ .

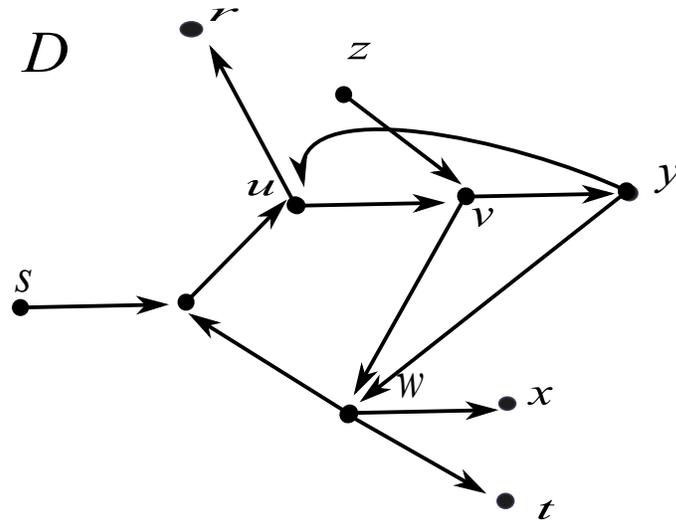


Figura 1.3: Digráfica

**Definición 1.1.18** Un **torneo** es una digráfica completa asimétrica.

**Ejemplo 5** Las digráficas mostradas en la figura 1.6 son ejemplos de torneos de orden 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

**Definición 1.1.19** Una digráfica  $D$  es llamada **transitiva** si siempre que  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, w) \in F(D)$  se tiene que  $(u, w) \in F(D)$ , donde  $u, v$  y  $w$  son vértices distintos de  $D$ .

**Ejemplo 6** En la figura 1.7 se muestra una digráfica transitiva.

**Definición 1.1.20** Sea  $T$  un torneo,  $T_1$  es un **triángulo** de  $T$  si es una subdigráfica de  $T$  inducida por tres vértices y  $T_1 \cong C_3$ .

## 1.2. Conexidad

**Definición 1.2.1** Sea  $D$  una digráfica decimos que  $D$  es **conexa** (resp. **disconexa**) si dado cualquier par de vértices  $u, v$  existe una  $uv$ -semitrayectoria en  $D$  (resp. si existe una par de vértices  $u, w$  tales que no existe ninguna semi-trayectoria entre ellos).

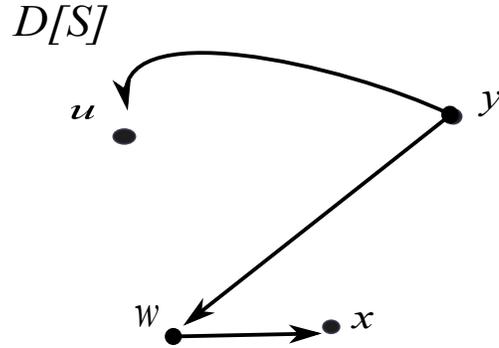


Figura 1.4: Subdigráfica inducida por  $S$

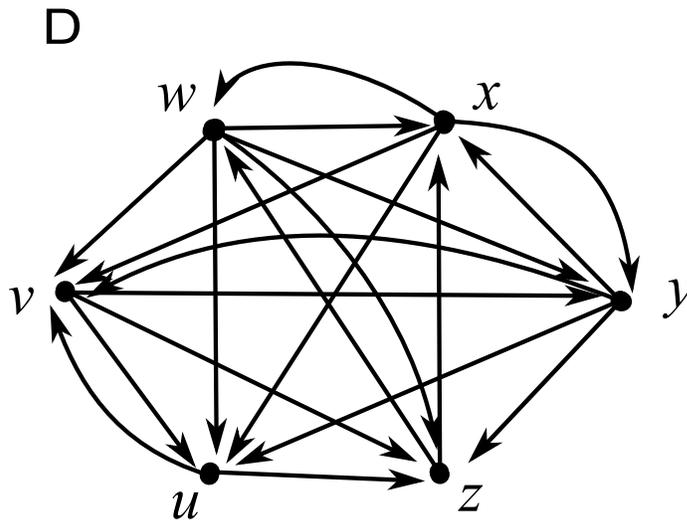


Figura 1.5: Digráfica completa

**Ejemplo 7** Sean  $D_1, D_2$  digráficas definidas como en la figura 1.8

$D_1$  es un ejemplo de una digráfica conexa pues entre cada par de vértices existe una semitrayectoria que los une,  $D_2$  es una digráfica desconexa, dado que para  $s, t \in V(D_2)$  no existe una semitrayectoria que conecte a ambos.

**Definición 1.2.2** Sea  $D$  una digráfica decimos que  $D$  es **débil ó débilmente conexa** si para cualesquiera  $u, v \in V(D)$  existe una  $uv$ -trayectoria en  $D$  no necesariamente dirigida.

**Definición 1.2.3** Sea  $D$  una digráfica decimos que  $D$  es **fuerte o fuertemente co-**

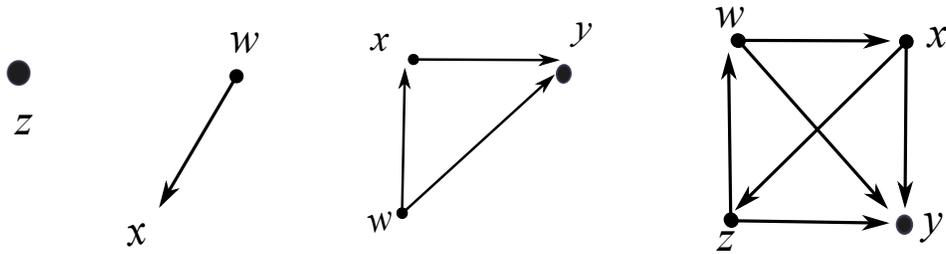


Figura 1.6: Ejemplos de torneos

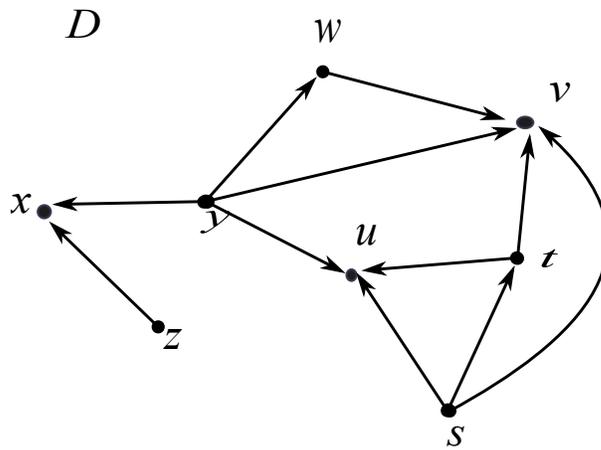


Figura 1.7: Digráfica transitiva

**nexa** si para cualesquiera  $u, v \in V(D)$  se tiene que existe una  $uv$ -trayectoria dirigida en  $D$  y una  $vu$ -trayectoria dirigida en  $D$ .

**Ejemplo 8** Sean  $D_1, D_2$  digráficas tal como se muestran en la figura 1.9.

De acuerdo con las definiciones anteriores se tiene que  $D_1$  es una digráfica fuertemente conexa, mientras que  $D_2$  es una digráfica debilmente conexa y no es fuerte.

**Teorema 1.2.1** Sea  $D$  una digráfica,  $D$  es fuerte si y sólo si  $D$  contiene un camino cerrado generador.

**Definición 1.2.4** Sea  $D$  una digráfica,  $H$  es **componente fuerte** de  $D$  si y solo si  $H$  es una subdigráfica fuerte de  $D$  y además es maximal con la propiedad de ser fuerte.

**Definición 1.2.5** Sea  $D$  una digráfica y sea  $\mathcal{F}$  una componente fuerte de  $D$ , decimos que  $\mathcal{F}$  es una **componente fuerte terminal** de  $D$  si  $\{(u, v) \in F(D) : u \in V(\mathcal{F}) \text{ y } w \in V(D) - V(\mathcal{F})\} = \emptyset$ .

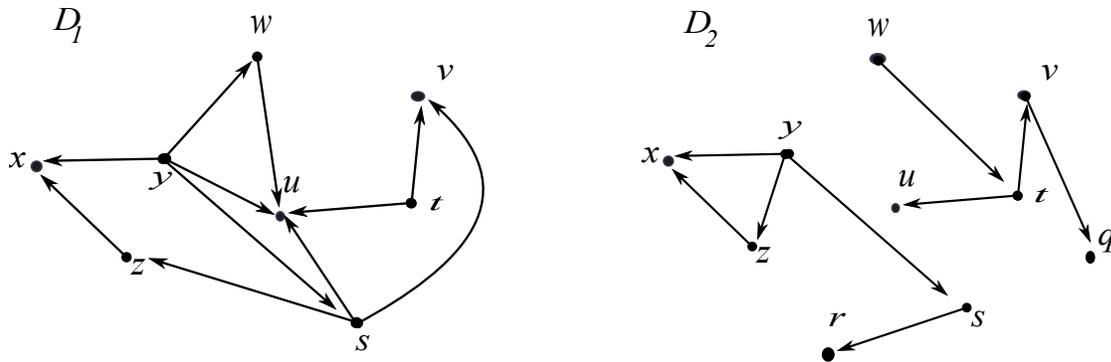


Figura 1.8: Digráfica conexa, digráfica disconexa

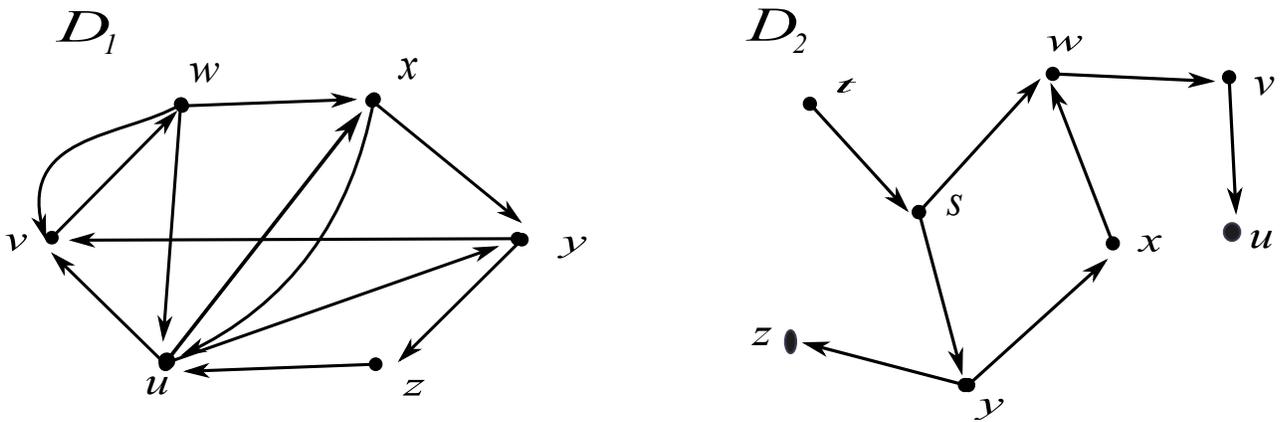


Figura 1.9:  $D_1$  es fuerte y  $D_2$  es debil

**Definición 1.2.6** Sea  $D$  una digráfica, la **digráfica de condensación** de  $D$ , denotada por  $\mathcal{D}$  esta definida como:  $V(\mathcal{D}) = \{H : H \text{ es una componente fuerte de } D\}$  y  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in F(\mathcal{D})$  si y sólo si existe un  $v \in V(\mathcal{F}_1)$  y  $w \in V(\mathcal{F}_2)$  tales que  $(v, w) \in F(D)$ , donde  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  son componentes fuertes de  $D$ .

**Ejemplo 9** Sea  $D$  la digráfica como se muestra en la figura 1.10.

De acuerdo con la definición las componentes fuertes de  $D$ ,  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7$  y  $\mathcal{F}_8$  quedan definidas como se muestra en la figura 1.11.

Recordemos que las componentes fuertes de  $D$  son subdigráficas tales que para cualquier par de vértices en ellas existe una trayectoria dirigida que lleva de uno al otro además de ser maximales con la propiedad de ser fuertes. Tenemos que  $\mathcal{F}_i$  tal que  $3 \leq i \leq 7$  son digráficas triviales (de un sólo vértice), por ende son fuertes, además si

$D$

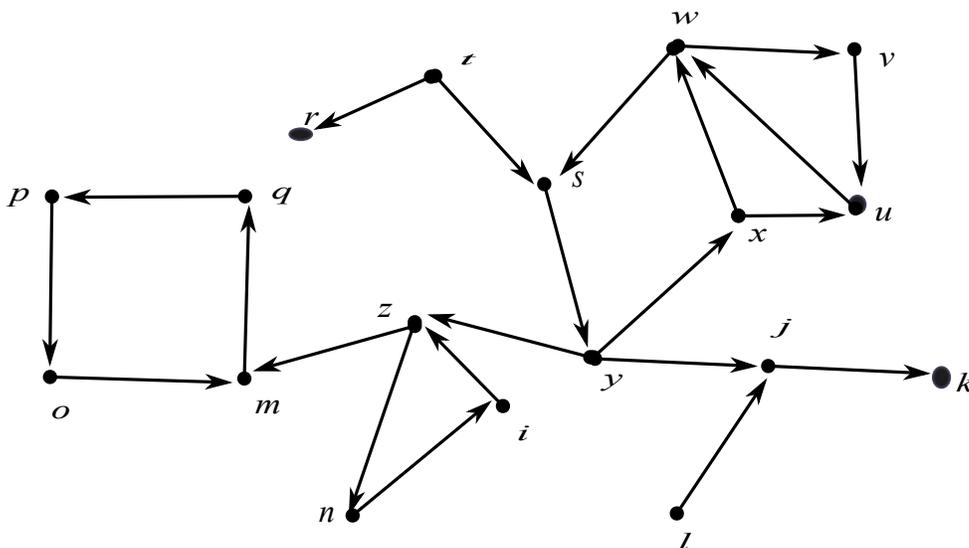


Figura 1.10: Digráfica

a alguna de ellas le agregamos algún otro vértice o más vértices esta deja de ser fuerte, de ahí que son maximales. Ahora bien  $\mathcal{F}_1$  contiene a  $C = (o, m, q, p, o)$  un camino cerrado generador, de ahí que  $\mathcal{F}_1$  es fuerte, luego si agregamos algún otro vértice o más vértices a  $\mathcal{F}_1$  no es posible encontrar un camino cerrado generador, de donde es maximal con respecto a esta propiedad.  $\mathcal{F}_2$  es fuerte pues contiene a  $C_1 = (n, i, z, n)$  un camino cerrado generador, además si a  $\mathcal{F}_2$  le agregamos algún otro vértice deja de ser fuerte, i.e. es maximal. Finalmente para  $\mathcal{F}_8$ , se tiene que  $C_2 = (y, x, w, v, u, w, s, y)$  es un camino cerrado generador, de donde  $\mathcal{F}_8$  es fuerte; por otro lado si le agregamos otro vértice o más vértices a  $\mathcal{F}_8$  no es posible encontrar un camino cerrado generador, i.e. es maximal con la propiedad de ser fuerte.

Por lo tanto para  $D$  se tiene que  $\mathcal{F}_i$  con  $1 \leq i \leq 8$  es componente fuerte.

Por otro lado las componentes fuertes terminales de  $D$ , de acuerdo con la definición son aquellas componentes fuertes tales que de ellas no salen flechas hacia ningún vértice de otra componente fuerte. De donde las componentes fuertes terminales de  $D$  son aquellas que se muestran en la figura 1.12.

Finalmente, de acuerdo con la definición la digráfica de condensación de  $D$ , donde los vértices son las componentes fuertes de  $D$  y hay flechas entre ellas siempre y cuando exista alguna flecha entre los vértices que estas contienen, queda definida como se muestra en la figura 1.13.

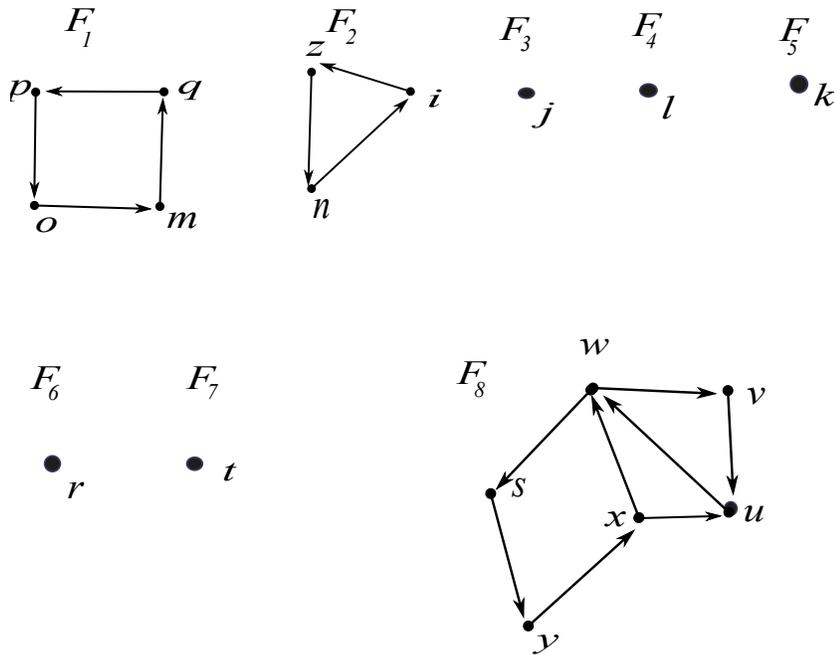


Figura 1.11: Componentes fuertes de  $D$

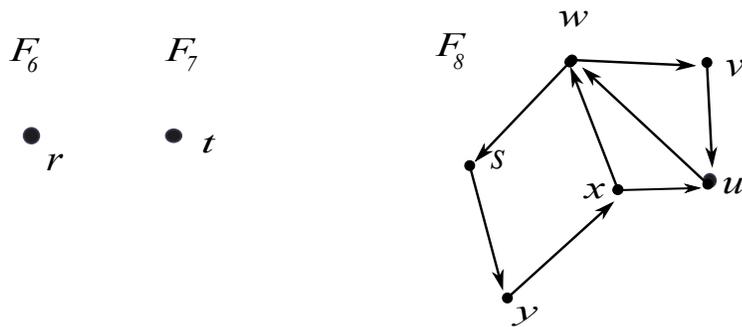


Figura 1.12: Componentes fuertes terminales de  $D$

El teorema que se muestra a continuación es un resultado clásico en la Teoría de Digráficas.

**Teorema 1.2.2** *Sea  $D$  una digráfica entonces la digráfica de condensación  $\mathcal{D}$  siempre es acíclica, es decir no existen ciclos dirigidos contenidos en  $D$ .*

**Teorema 1.2.3** *Sea  $T$  un torneo entonces la digráfica de condensación  $\mathcal{T}$  es un torneo.*

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo. Por demostrar que  $\mathcal{T}$  es un torneo.

Sean  $F_1, F_2 \in V(\mathcal{T})$ . Veamos que existe una flecha entre este par de vértices, dado que  $F_i \in V(\mathcal{T})$  para  $i \in \{1, 2\}$  se tiene que  $V(F_i)$  es distinto del vacío, de donde existe

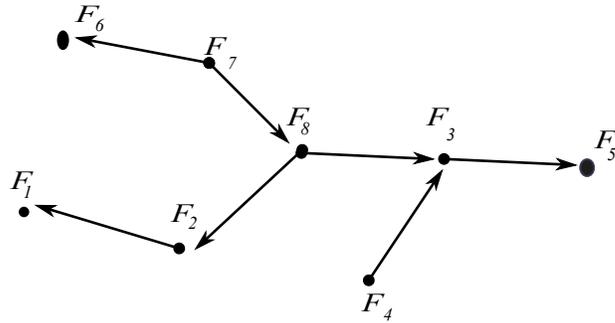


Figura 1.13: Digráfica de condensación

un vértice de  $T$  tal que pertenece a  $V(F_i)$ . Luego entonces dado que  $T$  es un torneo, se tiene que en  $\mathcal{T}$  existe una flecha entre  $F_1, F_2$  pues en el torneo original dado un vértice en  $F_1$  y uno en  $F_2$  se tiene que existe una flecha que los une. Sin pérdida de generalidad supongamos que la flecha que existe es la  $(F_1, F_2)$ .

Ahora bien sólo resta probar que la flecha  $(F_2, F_1)$  no pertenece a las flechas de  $\mathcal{T}$ . Supongamos que  $(F_2, F_1) \in F(\mathcal{T})$ , luego entonces  $C = (F_1, F_2, F_1)$  es un ciclo en  $T$ , lo cual no es posible dado que por el Teorema 1.2.2 sabemos que la digráfica de condensación es acíclica.

Por lo tanto podemos concluir que la digráfica de condensación de un torneo es un torneo. ■

**Corolario 1.2.1** *Si  $T$  es un torneo entonces, existe una única componente fuerte terminal.*

# Capítulo 2

## Núcleos por trayectorias monocromáticas

Durante el desarrollo de este capítulo se procederá a definir conceptos propios de la teoría de núcleos (núcleo y núcleo por trayectorias monocromáticas). De igual manera se analizarán algunos ejemplos propios de las definiciones establecidas en el transcurso de este capítulo.

A lo largo de la primera sección definiremos el concepto de núcleo así como el de digráfica núcleo perfecta, en adelante procederemos a enunciar algunos resultados clásicos que nos serán de gran utilidad conforme avancemos en el desarrollo del presente trabajo. Durante la sección titulada "Digráficas  $m$ -coloreadas" se definirán conceptos tales como digráfica monocromática ó cuasi-monocromática, así como la cerradura de una digráfica.

Finalmente durante el último apartado de este capítulo se establecerán condiciones para la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas dada una digráfica  $m$ -coloreada, además haremos un breve repaso en la historia de la Teoría de Digráficas para así tener un panorama general de la conjetura establecida por Sands, Sauer y Woodrow para torneos  $m$ -coloreados sin  $C_3$  arcoíris, además de los resultados que surgieron apartir de dicha conjetura (el Teorema de Shen Mingang y el contraejemplo establecido por H. Galeana Sánchez y R. Rojas Monroy para torneos 4-coloreados).

### 2.1. Núcleos

**Definición 2.1.1** *Un núcleo  $N$  de  $D$  es un conjunto independiente de vértices tal que para cada  $z \in (V(D) - N)$  existe un  $u \in N$  tal que  $(z, u) \in F(D)$ .*

**Ejemplo 10** *Sea  $D$  una digráfica definida tal como se muestra en la figura 2.1.*  
**Afirmación**

$N = \{z, y, x, w, r\}$  es núcleo de  $D$ .

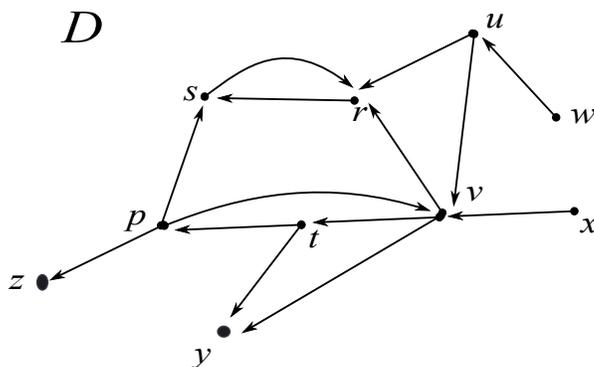


Figura 2.1: Digráfica con núcleo

*Demostración:*  $N$  es independiente dado que entre cada par de vértices de  $N$  no existe ninguna flecha que los una, i. e. cumple la condición de independencia.

Veamos que  $N$  es absorbente, tenemos que  $V(D) - N = \{p, t, v, s, u\}$  ahora bien veamos que para cada vértice  $a$  de  $V(D) - N$  existe un vértice  $b$  en  $N$  tal que  $(a, b) \in F(D)$ :

- Para  $p$  tenemos que  $z \in N$  y  $(p, z) \in F(D)$ .
- Para  $t$  tenemos que  $y \in N$  y  $(t, y) \in F(D)$ .
- Para  $v$  tenemos que  $y \in N$  y  $(v, y) \in F(D)$ .
- Para  $s$  tenemos que  $r \in N$  y  $(s, r) \in F(D)$ .
- Finalmente para  $u$ ,  $r \in N$  y  $(u, r) \in F(D)$ .

De donde se tiene que  $N$  es absorbente.

Por lo tanto  $N$  es núcleo de  $D$ . ■

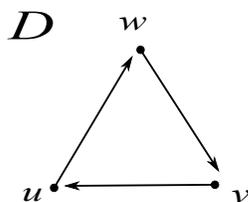


Figura 2.2: Digráfica sin núcleo

**Ejemplo 11** Sea  $D$  una digráfica definida tal como se muestra en la figura 2.2.

**Afirmación:**

$D$  no tiene núcleo.

*Demostración:* Supongamos que existe  $N \subset V(D)$  tal que  $N$  es núcleo de  $D$ .

Dado que  $N$  es núcleo de  $D$  tenemos que  $N$  es independiente, luego entonces consta de un sólo vértice. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $N = \{w\}$ , tenemos que  $N$  absorbe a  $u$  pero no así a  $v$ , de donde  $N$  no es un conjunto absorbente, i.e.  $N$  no es núcleo de  $D$ .

Por lo tanto  $D$  no tiene núcleo. ■

**Definición 2.1.2** Una digráfica es llamada **núcleo perfecta o KP-digráfica** si cada subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.

**Definición 2.1.3** Una digráfica es llamada **núcleo perfecta crítica** si salvo la digráfica original toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.

**Ejemplo 12** Sea  $D$  la digráfica definida en la figura 2.2.

**Afirmación:**

$D$  es núcleo perfecta.

*Demostración:* Sea  $D$  la digráfica definida en la figura 2.2. Por demostrar que  $D$  es núcleo perfecta crítica.

Sea  $S \subset V(D)$  veamos que  $D[S]$  tiene núcleo siempre que  $D[S]$  no sea igual a la digráfica original. Ahora bien existen tres posibilidades para  $S$ .

**Caso A:**  $S$  consta de un sólo elemento.

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $S = \{w\}$ , luego entonces  $D[S]$  es una digráfica trivial, para la cual  $N = \{w\}$  es núcleo pues es independiente al contar con un sólo elemento y es absorbente pues contiene a todos los vértices de  $D[S]$ .

**Caso B:**  $S$  consta de dos elementos.

De ahí que  $S = \{w, u\}$  ó  $S = \{w, v\}$  ó bien  $S = \{u, v\}$ . Si  $S = \{w, u\}$  entonces tenemos que  $N = \{w\}$  es núcleo de  $D[S]$ , pues absorbe a  $u$  y al constar de un solo

elemento es independiente. Luego si  $S = \{w, v\}$  se tiene que  $N = \{v\}$  es núcleo de  $D[S]$ , pues  $v$  absorbe a  $w$  y además al ser un solo vértice es independiente. Finalmente si  $S = \{u, v\}$  se tiene que  $N = \{u\}$  es núcleo de  $D[S]$  dado que es independiente y absorbe a  $v$  por una flecha.

**Caso C:**  $S$  consta de tres elementos.

De ahí que  $S = \{w, u, v\}$ , i.e.  $D[S] = D$ , y como ya se ha visto con anterioridad para esta digráfica no existe núcleo.

Por lo tanto, para ambos casos  $D[S]$  siempre tiene núcleo, i.e.  $D$  es núcleo perfecta crítica. ■

Por otro lado, siempre que una digráfica  $D$  tenga núcleo esto no implica que sea núcleo perfecta, como lo podemos observar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 13** Sea  $H$  una digráfica definida tal como se muestra en la figura 2.3.

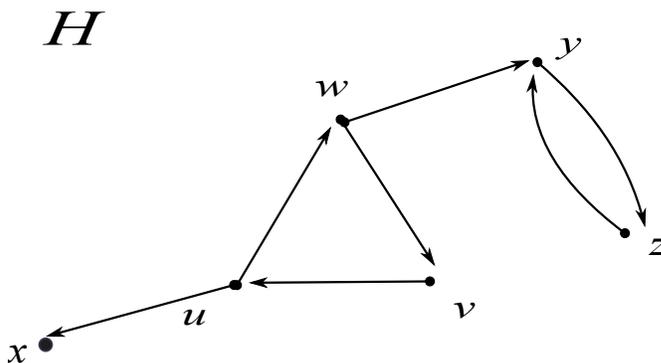


Figura 2.3: Digráfica

Tenemos que  $H$  tiene núcleo, de hecho  $N = \{x, v, y\}$  es núcleo de  $H$  pues es independiente (no hay flechas entre estos vértices) y además es absorbente (para todo vértice  $a \in V(H) - N$  existe un vértice  $b \in N$  tal que  $(a, b) \in F(D)$ ). Pero  $H$  no es núcleo perfecta, veamos por qué:

Dado  $S = \{w, u, v\}$ , tenemos que  $D[S]$  queda definida como en la figura 2.4, digráfica para la cual, según vimos antes no existe núcleo. Por lo tanto  $H$  no es núcleo perfecta.

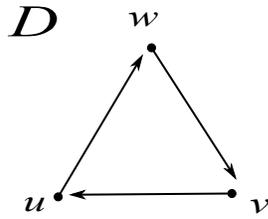


Figura 2.4: Subdigráfica inducida por  $S$

El siguiente resultado fue demostrado por Berge y Duchet en [1], y nos será de gran utilidad más adelante.

**Teorema 2.1.1** *Una digráfica es una KP-digráfica si y sólo si todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica*

Ahora bien procederemos a enunciar algunos resultados clásicos para la existencia del núcleo en digráficas simétricas, transitivas y acíclicas.

**Teorema 2.1.2** *Sea  $D$  una digráfica simétrica ( $Sym(D) = D$ ). Entonces  $D$  tiene núcleo.*

**Teorema 2.1.3** *Sea  $D$  una digráfica acíclica. Entonces  $D$  tiene núcleo.*

**Teorema 2.1.4** *Sea  $D$  una digráfica transitiva. Entonces  $D$  tiene núcleo, más aún cada núcleo se obtiene al elegir un solo vértice de cada componente fuerte terminal de  $D$ .*

Las demostraciones de los teoremas anteriores y demás resultados clásicos así como el problema para la existencia de núcleos pueden ser consultados en [12].

## 2.2. Digráficas $m$ -coloreadas

**Definición 2.2.1** *Decimos que  $D$  es una **digráfica  $m$ -coloreada** si  $D$  esta coloreada con  $m$  colores.*

**Observación 2.2.1** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, si  $(u, w) \in F(D)$  se tiene que  $c(u, w) = n$  con  $n \leq m$  un número natural, denota el color usado para colorear a  $(u, w)$ .*

**Definición 2.2.2** Una digráfica  $D$  es llamada **monocromática** si todas sus flechas tienen el mismo color, es llamada **cuasi-monocromática** si salvo una todas sus flechas tienen el mismo color.

**Definición 2.2.3** Una subdigráfica  $H$  de  $D$  es llamada **arcoíris** si todas sus flechas tienen distinto color.

**Ejemplo 14** Sea  $H$  la digráfica definida en la figura 2.5.

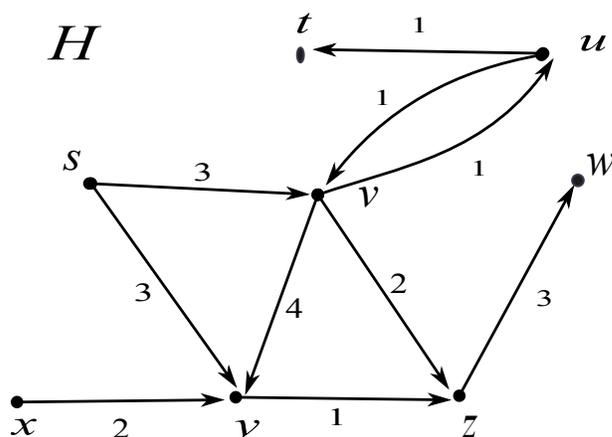


Figura 2.5: Digráfica  $m$ -coloreada

Se ha asignado a cada una de las flechas de  $H$  un color, por ejemplo a la flecha  $(x, y)$  le hemos asignado el color 2, a la flecha  $(u, v)$  le hemos asignado el color 1, ahora bien de acuerdo con la notación antes descrita tenemos que  $c(x, y) = 2$  y que  $c(u, v) = 1$ . Luego para colorear a  $H$  hemos utilizado 4 colores diferentes i.e.  $H$  es una digráfica 4-coloreada.

Ahora bien consideremos a  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  subdigráficas de  $H$  definidas como en la figura 2.6.

Tenemos que  $H_1$  es una digráfica monocromática, dado que a todas las flechas de  $D_1$  se les ha asignado un solo color, el color 1. Luego  $H_2$  es una digráfica cuasi-monocromática pues salvo la flecha  $(v, y)$  que tiene color 4, el resto de sus flechas tienen el mismo color, el 3. Finalmente  $H_3$  es una digráfica arcoíris, pues dadas las flechas  $(v, z)$ ,  $(v, y)$ ,  $(y, z) \in F(H_3)$  se tiene que  $2 = c(v, z) \neq c(v, y) = 4$ ,  $2 = c(v, z) \neq c(y, z) = 1$  y que  $1 = c(y, z) \neq c(v, y) = 4$ .

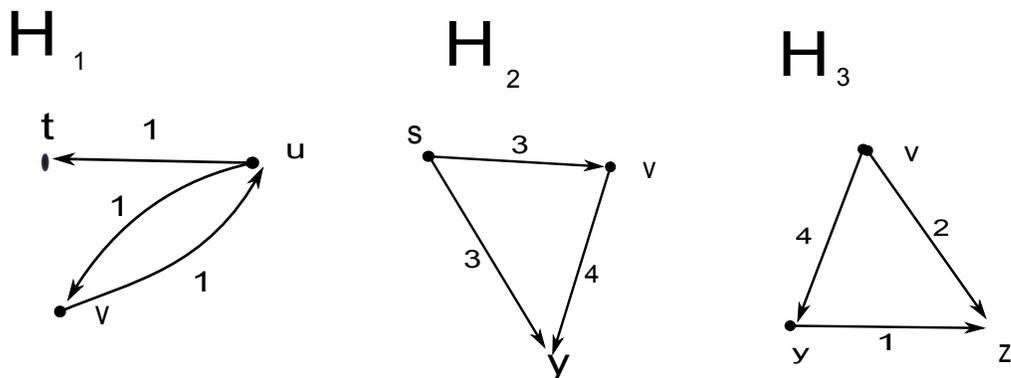


Figura 2.6:  $H_1$  es monocromática,  $H_2$  es cuasi-monocromática y  $H_3$  es arcoíris

**Definición 2.2.4** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada la **cerradura de  $D$**  denotada por  $\mathcal{C}(D)$  es la multidigráfica  $m$ -coloreada definida como:  $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$ ,  $F(\mathcal{C}(D)) = F(D) \cup \{(u, v) \text{ con color } i: \text{ existe una } uv\text{-trayectoria monocromática de color } i \text{ en } D\}$ .

**Ejemplo 15** Sea  $D$  una digráfica 4-coloreada, tal como se muestra en la figura 2.7

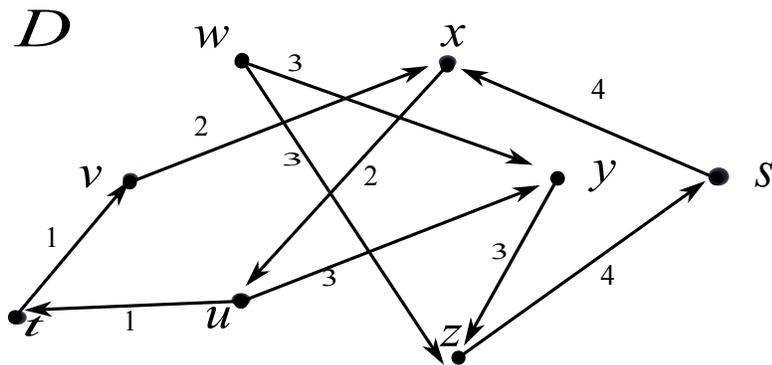


Figura 2.7: Digráfica

Ahora bien en  $D$  tenemos varias trayectorias monocromáticas que según la definición de cerradura daran origen a nuevas flechas pertenecientes a  $\mathcal{C}(D)$ . Estas son:

$-T_1 = (z, s, x)$  una trayectoria de color 4, que da origen a la flecha  $(z, x)$  de color 4 en  $\mathcal{C}(D)$ .

$-T_2 = (w, y, z)$  una trayectoria de color 3, que da origen a la flecha  $(w, z)$  de color 3 en  $\mathcal{C}(D)$ .

$-T_3 = (v, x, u)$  una trayectoria de color 2, que da origen a la flecha  $(v, u)$  de color 2 en  $\mathcal{C}(D)$ .



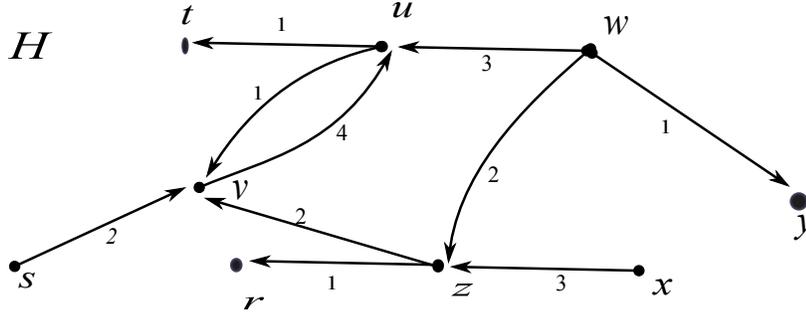


Figura 2.9: Digráfica

- Para  $u \in V(D)$  tenemos que  $\xi(u) = \{1, 4, 3\}$ , dado que  $\xi^+(u) = \{4, 3\}$  y  $\xi^-(u) = \{1\}$ .
- Para  $v \in V(D)$  tenemos que  $\xi(v) = \{1, 4, 2\}$ , dado que  $\xi^+(v) = \{1, 2\}$  y  $\xi^-(v) = \{4\}$  dado que en  $H$  solo hay una flecha que tenga a  $v$  como vértice inicial.
- Para  $w \in V(D)$  tenemos que  $\xi(w) = \{3, 2, 1\}$ , dado que  $\xi^+(w) = \emptyset$  pues en  $H$  no existe ninguna flecha que tenga a  $w$  como vértice final y  $\xi^-(w) = \{3, 2, 1\}$ .
- Para  $x \in V(D)$  tenemos que  $\xi(x) = \{3\}$ , dado que  $\xi^+(x) = \emptyset$  y  $\xi^-(x) = \{3\}$ .
- Ahora bien para  $y \in V(D)$  tenemos que  $\xi(y) = \{1\}$ , dado que  $\xi^+(y) = \{1\}$  y  $\xi^-(y) = \emptyset$  pues en  $H$  no hay flechas que inicien en  $y$ .
- Finalmente para  $z \in V(D)$  tenemos que  $\xi(z) = \{3, 2, 1\}$ , dado que  $\xi^+(z) = \{2, 3\}$  y  $\xi^-(z) = \{2, 1\}$ .

**Definición 2.2.6** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $\{C_1, C_2\}$  una partición de  $C$ , el conjunto de colores de  $D$ ,  $D_i$  denota a la subdigráfica generada por el conjunto  $\{f \in F(D) : c(f) \in C_i\}$ .

**Ejemplo 17** Sea  $D$  una digráfica 5-coloreada definida como se muestra en la figura 2.10.

Se tiene que el conjunto de colores usados para colorear a  $D$  es  $C = \{i; 1 \leq i \leq 5\}$ . Ahora bien consideremos la partición del conjunto de colores de  $D$ ,  $C_1 = \{3, 5\}$  y  $C_2 = \{1, 2, 4\}$ .

Ahora bien de acuerdo con la definición anterior tenemos que  $V(D_1) = \{u, v, w, z, y, r\}$  pues es el conjunto de vértices de  $D$  tales que son extremo de alguna flecha con color en  $C_1$ , además  $F(D_1) = \{f : f \in F(D) \text{ y } c(f) = 3 \text{ ó } 5\}$ , luego entonces de manera similar  $V(D_2) = \{r, s, t, u, v, x, y\}$  dado que son los vértices que son extremo de las flechas en  $D$  tales que tienen color 1, 2 ó 4 y  $F(D_2) = \{f : c(f) \in C_2\}$ .

Luego entonces  $D_i$  con  $i \in \{1, 2\}$  queda definida tal como se muestra en la figura 2.11.

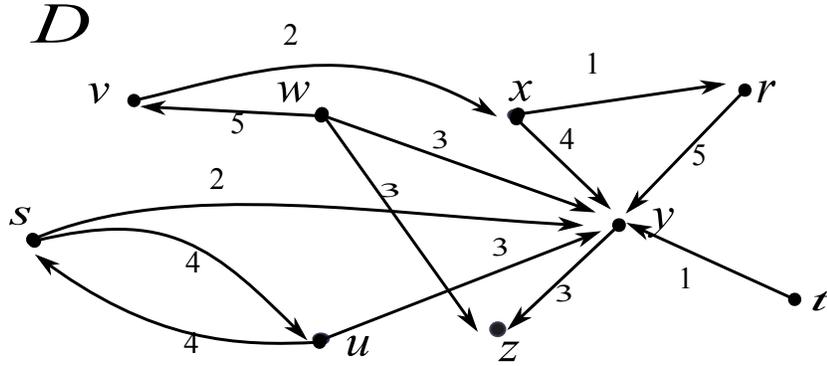


Figura 2.10: Digráfica

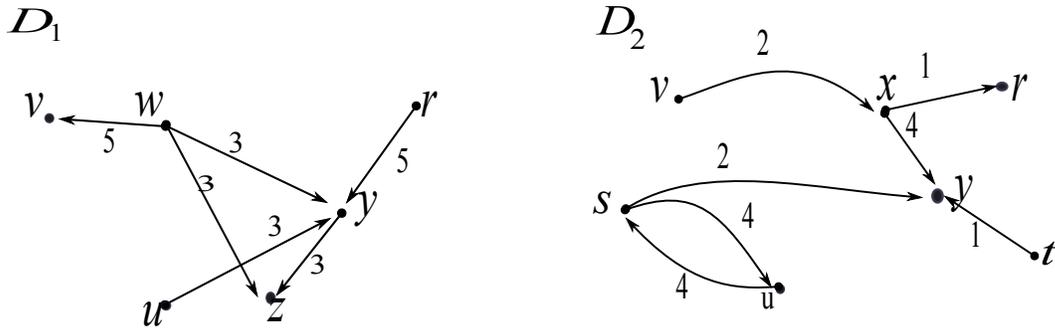


Figura 2.11:  $D_1$  y  $D_2$

### 2.3. Núcleos por trayectorias monocromáticas

**Definición 2.3.1** Un conjunto  $N \subset V(D)$  es llamado **núcleo por trayectorias monocromáticas** si satisface las siguientes dos condiciones:

(i) Para cada par de vértices distintos  $u, v \in N$  no existe una trayectoria monocromática entre ellos

(ii) Para cada vértice  $x \in (V(D) - N)$  hay un vértice  $y \in N$  tal que existe una  $xy$ -trayectoria monocromática.

**Ejemplo 18** Sea  $H$  una digráfica 4-coloreada, como se muestra en la figura 2.12.

**Afirmación:**

$N = \{x, y\}$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $H$ .

*Demostración:* Sea  $H$  una digráfica 4-coloreada definida como se muestra en la figura 2.12, sea  $N \subset V(H)$  tal que  $N = \{x, y\}$ . Por demostrar que  $N$  es núcleo por trayectorias

monocromáticas de  $H$ .

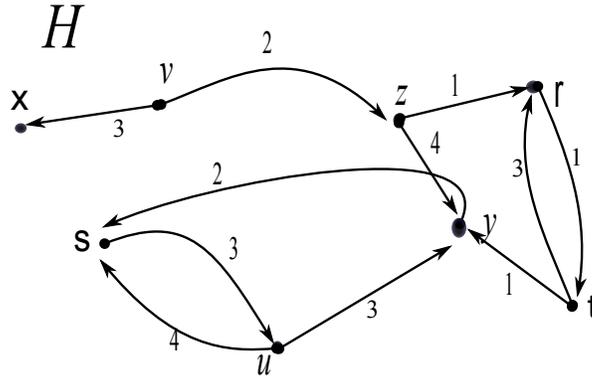


Figura 2.12: Digráfica con núcleo por trayectorias monocromáticas

Podemos afirmar que  $N$  es independiente pues en  $H$  no existe ninguna trayectoria monocromática que una a  $x$  con  $y$ , ni de ida ni de regreso.

Ahora bien para cada vértice en  $V(H) - N$  tenemos que verificar que existe un vértice en  $N$  tal que absorbe al anterior por una trayectoria monocromática. Tenemos que  $V(H) - N = \{v, z, r, t, s, u\}$  de donde:

- Para  $v \in V(H) - N$  existe  $x \in N$  tal que en  $H$  hay una trayectoria monocromática de color 3, esta es  $T_1 = (v, x)$ .
- Para  $z \in V(H) - N$  existe  $y \in N$  tal que existe  $T_2 = (z, y)$  una  $zy$ -trayectoria monocromática de color 4.
- Para  $r \in V(H) - N$  existe  $y \in N$  tal que en  $H$  existe  $T_3 = (r, t, y)$  una  $ry$ -trayectoria monocromática de color 1.
- Para el vértice  $t \in V(H) - N$  se tiene que existe  $y \in N$  tal que en  $H$  hay una  $ty$ -trayectoria monocromática de color 1, esta es  $T_4 = (t, y)$ .
- Para  $s \in V(H) - N$  existe el vértice  $Y \in N$  tal que  $T_5 = (s, u, y)$  es una  $sy$ -trayectoria monocromática de color 3 en  $H$ .
- Finalmente para el vértice  $u \in V(H) - N$  existe  $y \in N$  tal que  $T_6 = (u, y)$  es una trayectoria que conecta a  $u$  con  $y$ .

Por lo tanto podemos concluir que  $N$  es absorbente por trayectorias monocromáticas, i.e.  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $H$ . ■

**Teorema 2.3.1** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $N \subset V(D)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  si y sólo si  $N$  es núcleo de  $\mathcal{C}(D)$ .

*Demostración:* Sea  $D$  la digráfica  $m$ -coloreada tal que  $N \subset V(D)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ . Por demostrar que  $N$  es núcleo de  $\mathcal{C}(D)$ .

Veamos que  $N$  es independiente en  $\mathcal{C}(D)$ . Sean  $u, v \in N$  por demostrar que no existen flechas entre ellos, se tiene que existe flecha entre  $u$  y  $v$  si y solo si en  $D$  existe una trayectoria monocromática entre ellos, pero esto no ocurre pues  $N$  es independiente por trayectorias monocromáticas en  $D$ , de aquí se tiene que  $N$  es independiente por flechas en  $\mathcal{C}(D)$ .

Ahora veamos que  $N$  es absorbente por flechas para  $\mathcal{C}(D)$ , sea  $x \in V(D) - N$  por demostrar que existe la flecha  $(x, v)$  en  $\mathcal{C}(D)$  para algún  $v \in N$ , dado que  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  entonces en  $D$  existe una  $xv$ -trayectoria monocromática para algún  $v \in N$  i.e.  $x, v \in (\mathcal{C}(D))$ , luego entonces  $N$  es absorbente por flechas para  $\mathcal{C}(D)$ .

Por lo tanto  $N$  es núcleo de  $\mathcal{C}(D)$ .

Inversamente, sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada tal que  $N \subset V(D)$  es núcleo de  $\mathcal{C}(D)$ . Por demostrar que  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ .

Veamos que  $N$  es independiente por trayectorias monocromáticas en  $D$ . Sean  $v, w \in N$  tenemos que en  $\mathcal{C}(D)$  no existen flechas entre ellos esto pasa si y solo si no existen trayectorias monocromáticas de uno al otro en  $D$ , de ahí que  $N$  es independiente por trayectorias monocromáticas.

Ahora bien sea  $x \in V(D) - N$  por demostrar que existe un  $w \in N$  tal que en  $D$  hay una  $xw$ -trayectoria, dado que  $N$  es núcleo de  $D$  entonces existe un  $w \in N$  tal que  $(x, w) \in F(\mathcal{C}(D))$  esto pasa si y solo si existe una  $xw$ -trayectoria monocromática en  $D$ , de aquí  $N$  es absorbente por trayectorias monocromáticas.

Por lo tanto  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ . ■

**Corolario 2.3.1** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada si  $\mathcal{C}(D)$  es una KP-digráfica entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

*Demostración:* Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada tal que  $\mathcal{C}(D)$  es una KP-digráfica. Por demostrar que  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Dado que  $\mathcal{C}(D)$  es una KP-digráfica entonces toda subdigráfica inducida de  $\mathcal{C}(D)$  tiene núcleo en particular  $\mathcal{C}(D)$ , i.e. de acuerdo con el teorema anterior  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Por lo tanto, si  $\mathcal{C}(D)$  es una KP-digráfica entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

En [13] Sands, Sauer y Woodrow prueban el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.2** *Toda digráfica 2-coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

En [2] V. Chvátal y L. Lovász demostraron el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.3** *Toda digráfica tiene un conjunto independiente  $Q$  tal que para cada  $z \in (V(D) - Q)$  existe una  $zy$ -trayectoria dirigida de longitud al más dos para  $y \in Q$*

Ahora bien resulta sencillo observar que del teorema anterior, puede obtenerse un resultado aplicado a torneos en virtud de la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas. Dicho resultado es el siguiente:

**Teorema 2.3.4** *Todo torneo 1-coloreado tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo 1-coloreado. Por demostrar que existe  $N \subset V(T)$  tal que  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

De acuerdo con el teorema anterior toda digráfica tiene un conjunto independiente  $Q$  tal que para cada  $z \in V(D) - Q$  existe una  $zy$ -trayectoria dirigida de longitud a lo más dos para algún  $y \in Q$ , de aquí se tiene que  $Q$  absorbe a todos los vértices de  $V(D) - Q$  mediante una trayectoria de longitud uno ó dos, en cualquiera de estos casos es una trayectoria monocromática.

Ahora bien, dado un torneo, si  $Q$  es un conjunto independiente por flechas entonces  $Q$  consta de un solo elemento, de ahí que  $Q$  también es independiente por trayectorias monocromáticas.

Por lo tanto  $Q$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ , i.e. todo torneo 1-coloreado tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

**Lema 2.3.5** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado si  $N \subset V(T)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ , entonces  $N$  consta de un solo elemento.*

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que  $N \subset V(T)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ . Por demostrar que  $N$  consta de a lo más un elemento.

Procedamos por reducción al absurdo:  
Supongamos que  $2 \leq |N|$ , entonces existen  $w$  y  $u$  vértices de  $T$  tal que  $w, u \in N$ .

Ahora bien dado que  $T$  es un torneo  $(w, v) \in F(T)$  ó  $(v, w) \in F(T)$  de donde  $N$  no es independiente por trayectorias monocromáticas.

Por lo tanto  $|N| = 1$ . ■

En [13] Sands, Sauwer y Woodrow prueban el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.6** *Todo torneo 2-coloreado tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

### 2.3.1. Historia de la Conjetura de Sands, Sauer y Woodrow

En [13] Sands, Sauer y Woodrow probaron que toda digráfica 2-coloreada tiene un conjunto de vértices  $S$  de  $D$  tal que para todo vértice  $x \in V(D) - S$  existe una trayectoria monocromática de  $x$  a los vértices de  $S$ .

En particular ellos probaron que todo torneo 2-coloreado tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. También plantearon la siguiente conjetura: Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 es cuasi-monocromático entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

En [11] Shen Minggang prueba que si  $T$  es un torneo  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 es cuasi-monocromático y todo torneo transitivo de orden 3 es cuasi-monocromático entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, en el capítulo siguiente se dará una demostración distinta a la dada por Shen Minggang usando una técnica desarrollada por H. Galeana Sánchez. El también prueba que este resultado es el más cercano a la conjetura para torneos  $m$ -coloreados. De hecho probó que para cada  $5 \leq m$  existe un torneo  $m$ -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 es cuasi-monocromático y  $T$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. En [7] H. Galeana Sánchez y R. Rojas Monroy presentaron un torneo 4-coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 es cuasi-monocromático (figura 2.13) y  $T$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Luego de esto la conjetura establecida por Sands, Sauer y Woodrow ha quedado reducida a lo siguiente: "Sea  $T$  un torneo 3-coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 es cuasi-monocromático, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas".

Con el fin llegar a generar resultados que lleven a la solución de la conjetura anterior, apartir del siguiente Capítulo y por el resto del presente trabajo nos enfocaremos

$T$

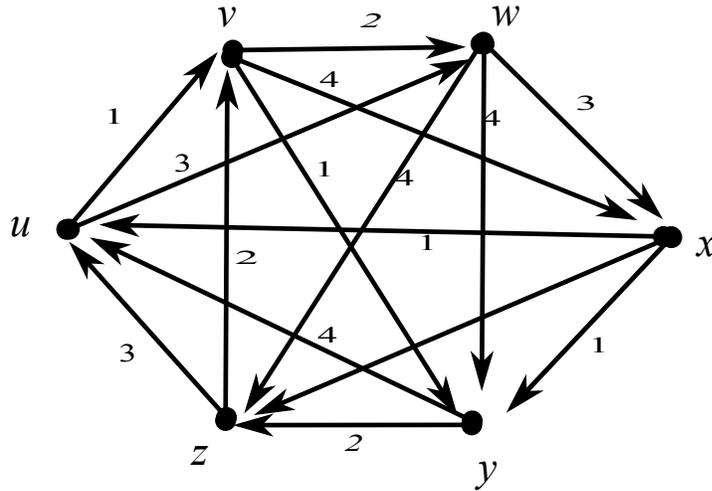


Figura 2.13: Contraejemplo por H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy

en analizar únicamente ejemplos de torneos 3-coloreados.

# Capítulo 3

## Torneos

En el presente capítulo se abordarán algunos teoremas acerca de la existencia del núcleo por trayectorias monocromáticas en torneos  $m$ -coloreados, tales como el Teorema de Shen Minggang y otro par que fueron consecuencia de resultados ya existentes para digráficas  $m$ -coloreadas en general, en cada caso se demostrarán estos mismos mediante una técnica que fuera introducida con anterioridad por H. Galeana-Sánchez. A su vez se mostrarán algunos ejemplos para ilustrar de mejor manera cada uno de estos resultados.

**Teorema 3.0.7** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado sin  $C_3$  arcoíris ni torneos transitivos de orden 3 arcoíris, entonces en  $\mathcal{C}(T)$  todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica.*

*Demostración:* Sea  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x_0)$  en  $\mathcal{C}(T)$ . Tenemos dos casos:

**Caso 1** Si  $C$  no es un ciclo de  $T$  entonces existe una flecha en  $C$  tal que no pertenece a  $F(T)$ , digamos  $(x_i, x_{i+1})$  para algún  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  luego entonces dado que  $T$  es un torneo se tiene que  $(x_{i+1}, x_i) \in F(T)$  y por ende en  $\mathcal{C}(T)$ .

Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica.

**Caso 2** Supongamos que  $C$  es un ciclo que pertenece a  $T$ . Procederemos por inducción sobre  $l(C)$ .

### i) Base de inducción

Si  $l(C) = 3$ , se tiene que  $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$  ahora bien por hipótesis tenemos que  $C$  está coloreado con a lo más dos colores. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $c(x_1, x_2) = c(x_2, x_3) = 1$  entonces  $P = (x_1, x_2, x_3)$  es una  $x_1x_3$ -trayectoria monocromática en  $T$  por lo que en  $\mathcal{C}(T)$  debe existir la flecha  $(x_1, x_3)$ , de donde

$C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

Por lo tanto se cumple.

### Hipótesis de inducción

Supongamos que si  $l(C) \leq k$  entonces en  $\mathcal{C}(T)$ ,  $C$  tiene al menos una flecha simétrica.

### Paso inductivo

Sea  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} = x_0)$  un ciclo de  $T$  con  $l(C) = k + 1$ , por demostrar que  $C$  tiene una flecha simétrica. Notemos que nuevamente tenemos dos subcasos:

**Subcaso A** Supongamos que  $C$  es un ciclo monocromático.

Entonces  $P_1 = (x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1} = x_0, x_1)$  es una  $x_2x_1$ -trayectoria monocromática por lo que en  $\mathcal{C}(T)$  debe existir la flecha  $(x_2, x_1)$ , i.e.  $C$  tiene una flecha simétrica.

**Subcaso B** Supongamos que  $C$  no es monocromático.

Entonces existen al menos dos flechas con colores distintos; sin pérdida de generalidad supongamos que  $c(x_0, x_1) = 1$  y  $c(x_1, x_2) = 2$ . Dado que  $T$  es un torneo entonces entre  $x_0$  y  $x_2$  debe existir una flecha, i.e. tenemos dos posibilidades:

1. Si  $(x_2, x_0) \in F(T)$ , entonces  $C_0 = (x_0, x_1, x_2, x_0)$  es un ciclo de longitud tres y dado que  $c(x_0, x_1) = 1$  y  $c(x_1, x_2) = 2$  entonces  $c(x_2, x_0) = 1$  ó  $c(x_2, x_0) = 2$  pues por hipótesis todo  $C_3$  es a lo más dos coloreado.

- Si  $c(x_2, x_0) = 1$  entonces  $P_1 = (x_2, x_0, x_1)$  es una  $x_2x_1$ -trayectoria monocromática de color 1 de donde  $(x_2, x_1)$  es una flecha de la cerradura de  $T$ ; así pues  $(x_1, x_2)$  y  $(x_2, x_1)$  son flechas en  $\mathcal{C}(T)$ .

Por tanto  $C$  tiene una flecha simétrica.

-Si  $c(x_2, x_0) = 2$  se tiene que  $P_3 = (x_1, x_2, x_0)$  es una  $x_1x_0$ -trayectoria monocromática de color 2 por lo que  $(x_1, x_0)$  es una flecha de la cerradura de  $T$ , i.e.  $(x_0, x_1)$  y  $(x_1, x_0)$  están en la cerradura de  $T$ .

Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica.

**2.** Supongamos que  $(x_0, x_2) \in F(T)$ . Notemos que  $C_0 = (x_0, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1} = x_0)$  es un ciclo de longitud menor que  $k$ , i.e. por hipótesis de inducción  $C_0$  tiene una flecha simétrica, si dicha flecha es simétrica a alguna flecha del ciclo original terminamos.

Sin embargo si la flecha que es simétrica es  $(x_0, x_2)$ , entonces existe una trayectoria monocromática en  $T$  de  $x_2$  a  $x_0$  digamos  $P_4 = (x_2 = z_0, z_1, \dots, z_m = x_0)$ , ahora bien tenemos varias posibilidades:

-Si  $P_4$  es de color uno, entonces  $P_4 \cup (x_0, x_1)$  es una  $x_2x_1$ -trayectoria monocromática de color uno, por lo que en  $\mathcal{C}(T)$  debe existir la flecha  $(x_2, x_1)$ . Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica.

-Si  $P_4$  es de color dos, entonces  $(x_1, x_2) \cup P_4$  es una  $x_1x_0$ -trayectoria monocromática de color dos, por lo que la flecha  $(x_1, x_0)$  pertenece a la cerradura de  $T$ . Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica.

-Supongamos que  $P_4$  no es de color uno ni dos, digamos que  $P_4$  es de color 3.

**Afirmación (I)**

Para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m-1\}$  la flecha entre  $x_i$  y  $z_i$  no es de color 3.

Procedamos por reducción al absurdo: Supongamos que existe alguna flecha de color 3. Sabemos que existe  $z_i$  para algún  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m-1\}$  tal que el color de la flecha entre  $x_1$  y  $z_i$  es 3, entonces para esta flecha tenemos dos posibilidades.

-Si  $(x_1, z_i) \in F(T)$ , tenemos que  $(x_1, z_i) \cup P_5$  donde  $P_5 = (z_i, z_{i+1}, \dots, z_m = x_0)$ , es una  $x_1x_0$ -trayectoria monocromática de color 3 en  $T$  por lo que  $(x_1, x_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ . Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica.

-Si  $(z_i, x_1) \in F(T)$ , tenemos que  $P_6 \cup (z_i, x_1)$  es una  $x_2x_1$ -trayectoria monocromática de color 3 en  $T$  por lo que  $(x_2, x_1) \in F(\mathcal{C}(T))$ , donde  $P_6 = (x_2 = z_0, z_1, \dots, z_i)$ . Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica.

**Afirmación (II)**

Si para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-2, m-1\}$  el color de la flecha que hay entre  $x_1$  y  $z_i$  no es de color 3, entonces el color de dicha flecha es 2.

Procedamos por inducción sobre  $i$ .

**Base de inducción:**

Para  $i = 1$  dado que  $T$  es un torneo entonces entre  $x_1$  y  $z_1$  debe existir una flecha y como  $(x_1, x_2 = z_0)$  y  $(x_2 = z_0, z_1)$  son flechas en  $T$ , entonces con la flecha que existe entre  $x_1$  y  $z_1$  se forma un torneo transitivo de orden 3 ó un  $C_3$  (dependiendo de la orientación de la flecha entre estos vértices), además dado que  $c(x_1, x_2 = z_0) = 2$  y  $c(x_2 = z_0, z_1) = 3$  y como por hipótesis todo  $T_3$  transitivo y  $C_3$  es a lo más dos coloreado entonces el color de la flecha que existe entre  $x_1$  y  $z_1$  debe de ser 2 ó 3, pero ya probamos que no puede ser de color 3 por lo que es de color 2.

Por lo tanto, para  $i = 1$  la afirmación es cierta.

**Hipótesis de inducción:**

Supongamos que el color de la flecha entre  $x_1$  y  $z_k$  es dos.

**Paso inductivo:**

Por demostrar que el color de la flecha entre el vértice  $x_1$  y  $z_{k+1}$  es dos.

Notemos que  $(z_k, z_{k+1}) \in F(T)$  y  $c(z_k, z_{k+1}) = 3$  pues dicha flecha pertenece a  $P_4$  y  $P_4$  es monocromática de color 3, dado que  $T$  es torneo entonces entre los vértices  $x_1$  y  $z_k$  existe flecha y por la hipótesis de inducción  $c(x_1, z_k) = 2$ ; también entre los vértices  $x_1$  y  $z_{k+1}$  debe existir flecha, así al fijarnos en las adyacencias entre los vértices  $x_1, z_k$  y  $z_{k+1}$  tenemos un  $T_3$  transitivo ó un  $C_3$  los cuales por hipótesis son a lo más dos coloreados por lo que el color de la flecha entre  $x_1$  y  $z_{k+1}$  es dos ó tres pero por hipótesis no es de color tres por lo tanto es de color dos.

Por lo tanto la Afirmación anterior se cumple.

Una vez probado lo anterior observemos lo siguiente, debido a la Afirmación anterior el color de la flecha entre los vértices  $x_1$  y  $z_{m-1}$  es dos y además tenemos que el  $c(z_{m-1}, z_m = x_0) = 3$  y  $(z_m = x_0, x_1) = 1$  por lo que al fijarnos en las adyacencias entre los vértices  $x_1, z_{m-1}$  y  $z_m$  tenemos, dependiendo de la dirección de la flecha entre  $x_1$  y  $z_{m-1}$ , un  $T_3$  transitivo ó un  $C_3$  tres coloreado, lo cual claramente es una contradicción.

Por lo tanto podemos concluir que dado cualquiera de los casos anteriores, si  $C$  es un ciclo en  $\mathcal{C}(T)$  entonces  $C$  tiene al menos una flecha simétrica. ■

El siguiente resultado puede ser consultado con mayor detalle en [11].

**Teorema 3.0.8** (*Shen Minggang*)

*Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado sin  $C_3$  arcoíris ni torneos transitivos de orden 3 arcoíris entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado sin  $C_3$  arcoíris ni  $T_3$  transitivos arcoíris. Por demostrar que  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

De acuerdo con el teorema anterior todo ciclo en  $\mathcal{C}(T)$  tiene al menos una flecha simétrica, de aquí  $\mathcal{C}(T)$  tiene núcleo esto por el teorema 2.1.1.

Por lo tanto  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas esto por el teorema 2.3.1. ■

El resultado que se muestra a continuación puede ser consultado en [10].

**Teorema 3.0.9** *Sea  $D$  una digráfica finita  $m$ -coloreada. Supongase que se tiene una partición  $C = C_1 \cup C_2$  del conjunto de colores de  $D$  y que todo ciclo en la subdigráfica  $D[i]$  obtenida con las flechas de colores en  $C_i$  es monocromático. Supongamos además que  $\mathcal{C}(D)$  no contiene ni triángulos arcoíris ni  $P_3$  arcoíris que involucren los colores de  $C_1$  y  $C_2$ . Entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Notese que el teorema anterior generaliza el teorema 2.3.2 ya que:

1. Una digráfica 2-coloreada es una digráfica  $m$ -coloreada para  $m = 2$ .
2. Una digráfica 2-coloreada se puede dividir en dos subdigráficas generadoras monocromáticas  $D_1$  y  $D_2$  donde  $D_i = D[C_i]$ ,  $C_1 = \{Color1\}$  y  $C_2 = \{color2\}$  tales que  $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$ ,  $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ .
3. Cada ciclo en  $D_i$  es monocromático, para  $i \in \{1, 2\}$  pues cada  $D_i$  lo es.
4. Además en  $\mathcal{C}(D)$  no hay triángulos arcoíris ni  $P_3$  arcoíris, dado que  $D$  es 2-coloreada.

Por lo tanto toda digráfica 2-coloreada, cumple con las hipótesis del teorema anterior y como la conclusión de los dos teoremas es la misma se tiene efectivamente que el teorema 3.0.9 generaliza el teorema de Sands, Sauer y Woodrow.

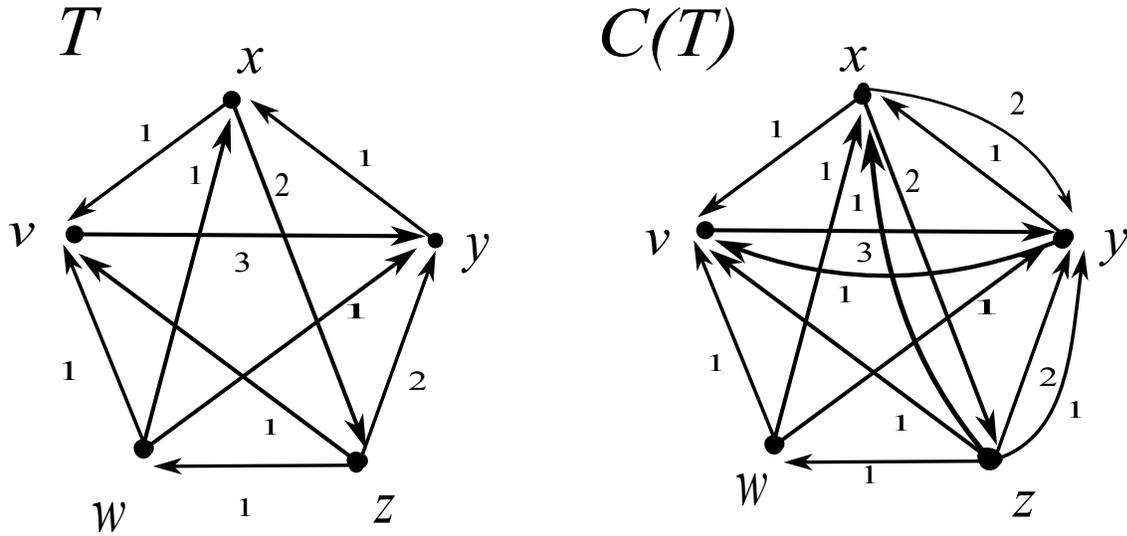


Figura 3.1: Torneo y su Cerradura

**Ejemplo 19** Sea  $T$  un torneo de orden 5 tal como se muestra en la figura 3.1.

$T$  cumple con las condiciones del teorema 3.0.9. Veamos por que:

Consideremos la partición  $C_1 = \{\text{color 1}\}$ ,  $C_2 = \{\text{color 2, color 3}\}$ .

Resulta sencillo verificar que cada ciclo en  $D_i$  es monocromático. Además en  $\mathcal{C}(D)$  no existen ni triángulos arcoíris ni  $P_3$  arcoíris. Por ende,  $T$  satisface las condiciones del teorema anterior.

A continuación mostraremos una serie de pasos mediante los cuales para cada  $n$  generaremos un torneo  $T$  de dicho orden que cumpla las condiciones del teorema anterior para  $\mathcal{C}(T)$ .

Sea  $T$  un torneo de orden  $n$ , donde no se consideran lazos.

Para obtener las flechas de  $T$  y su coloración hemos de seguir los pasos que se describen a continuación:

1. Pinte la flecha  $(v_2, v_n)$  de color 1.
2. Pinte la flechas  $(v_n, v_1)$  y  $(v_1, v_2)$  de color 2.
3. Proceda a pintar el conjunto  $\{(v_2, v_3), (v_{n-1}, v_n)\}$  de color 3.
4. Pinte la flecha  $(v_1, v_{n-1})$  de color 2.

5. Pinte el conjunto  $\{(v_i, v_{i+3}); 2 \leq i \leq n - 3\} \cup \{(v_2, v_4), (v_{n-2}, v_n)\}$  de color 3.
6. Pinte el conjunto  $\{(v_j, v_{j+1}); 3 \leq j \leq n - 2\} \cup \{(v_i, v_1); 3 \leq i \leq n - 1\} \cup \{(v_i, v_{i+2}); 3 \leq i \leq n - 3\}$  de color 2.
7. Finalmente si para  $i \leq j$  con  $0 \leq i, j \leq n$  se tiene que  $(v_i, v_j)$  y  $(v_i, v_j)$  no han sido pintadas aún mediante los pasos anteriores, se procedera a completar el torneo mediante las flechas de la forma  $(v_i, v_j)$  asignandoles el color 3.

En la figura 3.2 se muestran los primeros cuatro elementos de la familia  $\mathcal{T}$ .

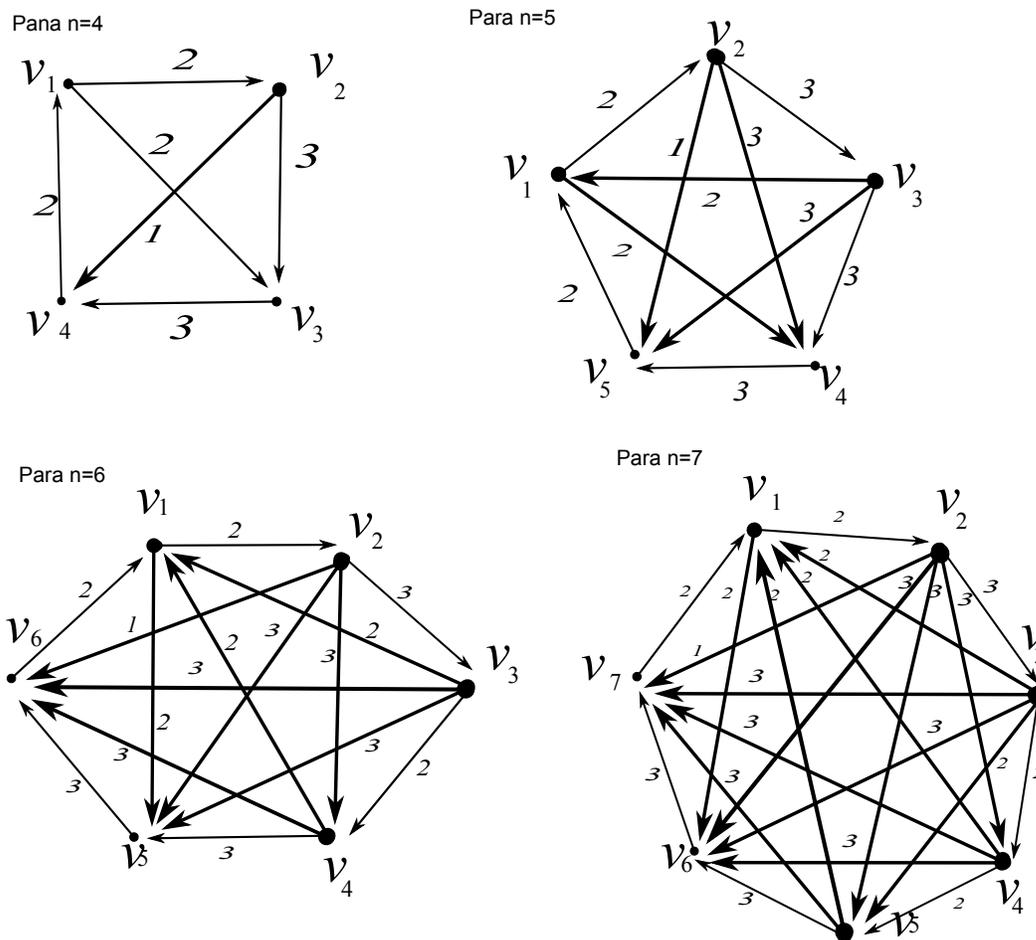


Figura 3.2: Primeros cuatro elementos de  $\mathcal{T}$

Consideremos  $\mathcal{T} = \{T; T \text{ es un torneo pintado siguiendo los pasos anteriores} \}$

**Afirmación:**

Sea  $T$  un torneo 3 coloreado de orden  $n$  tal que  $T \in \mathcal{T}$  entonces en  $\mathcal{C}(T)$  no existen

triángulos arcoíris ni  $P_3$  arcoíris.

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden  $n$  tal que  $T \in \mathcal{T}$ . Por demostrar que en  $\mathcal{C}(D)$  no existen ni triángulos arcoíris ni  $P_3$  arcoíris.

Supongamos que en  $\mathcal{C}(T)$  existe  $P$  un  $P_3$  arcoíris. Luego entonces  $(v_2, v_n) \in V(P)$ , dado que según los pasos anteriores es la única flecha de color 1 en  $T$  y por ende en  $\mathcal{C}(T)$ .

Luego entonces tenemos que una sucesión de colores posible en  $P$  es 3, 2, 1.

La cual no da origen a ningún  $P_3$ , pues dada una trayectoria de color 3 en  $T$  esta inicia o termina en algún extremo de  $(v_2, v_n)$ .

La otra sucesión posible de colores para  $P$  es 1, 2, 3, pero en  $\mathcal{C}(T)$  la única flecha de color 2 que inicia en  $v_n$  es la  $(v_n, v_{n-1})$  y la única flecha en  $\mathcal{C}(T)$  que es de color 3 y tiene como extremo inicial a  $v_{n-1}$  es la  $(v_{n-1}, v_n)$  la cual es simétrica a la anterior. Por ende esta sucesión de colores para las flechas de  $P$  no da origen a un  $P_3$  arcoíris.

Estas son las únicas posibles dado que  $\xi^+(v_n) = \{\text{color}2\}$  y  $\xi^-(v_n) = \{\text{color } 1, 3\}$ .

Por lo tanto en  $T$  no existen los  $P_3$  arcoíris.

De manera similar podemos probar que en  $T$  no se tiene ningún  $C_3$  arcoíris, dado que al igual que para los  $P_3$  las posibles sucesiones de colores dan origen a alguna flecha simétrica en  $T$ .

Por lo tanto  $T$  no contiene ningún  $C_3$  arcoíris. ■

En búsqueda de torneos que satisfagan tener núcleo por trayectorias monocromáticas, se ha hecho evidente que varios de los teoremas establecidos para digráficas  $m$ -coloredas pueden ser aplicados a torneos tal como lo veremos a lo largo de los siguientes capítulos.

El siguiente teorema nos será de gran utilidad para demostrar la primera aplicación a torneos de ciertos resultados establecidos para digráficas en general.

**Teorema 3.0.10** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que no contiene ni triángulos arcoíris ni  $P_3$  arcoíris entonces en  $\mathcal{C}(T)$  todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica.*

*Demostración:* Sea  $C = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_0)$  un ciclo en  $\mathcal{C}(T)$ , vamos a analizar dos casos:

**Caso A**  $C$  no es un ciclo contenido en  $T$ .

Entonces existe una flecha  $(v_i, v_{i+1}) \in F(\mathcal{C}(T))$  tal que  $(v_i, v_{i+1}) \notin F(T)$ . De aquí  $(v_{i+1}, v_i) \in F(T)$  dado que  $T$  es un torneo, luego entonces  $(v_{i+1}, v_i) \in F(\mathcal{C}(T))$ .

Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

**Caso B**  $C$  es un ciclo contenido en  $T$ .

Procedamos por inducción sobre la longitud de  $C$ .

i) **Base de inducción**

Para  $l(C) = 3$  con  $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ .

Existen dos posibilidades para  $C$ :

1)  $C$  es monocromático entonces en  $\mathcal{C}(T)$  existe la flecha  $(v_2, v_1)$  pues hay una  $v_2v_1$ -trayectoria monocromática en  $T$ . De aquí  $C$  tiene una flecha simétrica.

2)  $C$  es dos coloreado, sin pérdida de generalidad supongamos que  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_3)$  son de color 1 y  $c(v_3, v_1) = 2$ , luego entonces en  $\mathcal{C}(T)$  existe la flecha  $(v_1, v_3)$  pues en  $T$  hay una trayectoria de color 1 de  $v_1$  a  $v_3$ .

Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

ii) **Hipótesis de inducción**

Supongamos que  $C$  es un ciclo en  $T$  tal que  $l(C) \leq k$  entonces  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

iii) **Paso inductivo**

Sea  $C = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k+1}, v_0)$  un ciclo en  $T$  con  $l(C) = k + 1$ . Por demostrar que  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

Tenemos dos subcasos que analizar:

**Subcaso 1**  $C$  es monocromático.

Luego entonces existe una  $v_0v_{k+1}$ -trayectoria monocromática en  $T$  de donde  $(v_0, v_{k+1}) \in F(\mathcal{C}(T))$ , luego entonces  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

**Subcaso 2**  $C$  es dos coloreado.

Entonces existen dos flechas tales que tienen colores distintos, sin pérdida de generalidad supongamos que  $c(v_0, v_1) = 1$  y  $c(v_1, v_2) = 2$ . Ahora bien dado que  $T$  es un torneo debe existir la flecha  $(v_0, v_2)$  o bien la flecha  $(v_2, v_0)$ .

-Si  $(v_2, v_0) \in F(T)$ , entonces  $C_1 = (v_0, v_1, v_2, v_0)$  es un ciclo en  $T$ , tal que es dos coloreado de donde  $c(v_2, v_0) = 1$  ó  $c(v_2, v_0) = 2$ . Si  $c(v_2, v_0) = 1$  entonces  $T = (v_2, v_0, v_1)$  es una  $v_2v_1$ -trayectoria monocromática, de aquí  $(v_2, v_1) \in F(\mathcal{C}(T))$  y entonces  $C$  tiene una flecha simétrica. Si  $c(v_2, v_0) = 2$  entonces  $T = (v_1, v_2, v_0)$  es una  $v_1v_0$ -trayectoria monocromática, de aquí  $(v_1, v_0) \in F(\mathcal{C}(T))$  y entonces  $C$  tiene una flecha simétrica.

-Si  $(v_0, v_2) \in F(T)$ , entonces  $C_2 = (v_0, v_2, v_3, \dots, v_{k+1} = v_0)$  es un ciclo de longitud menor que  $k + 1$ . Por lo que  $C_2$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ , si dicha flecha es simétrica a una que pertenece originalmente a  $C$  ya acabamos. Si la flecha que existe es la  $(v_2, v_0)$ , es decir  $(v_2, v_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ , entonces en  $T$  existe una  $v_2v_0$ -trayectoria monocromática digamos  $T_1 = (v_2 = z_1, z_2, z_3, \dots, z_j = v_0)$  para lo cual tenemos que analizar 3 posibilidades:

1.  $T_1$  es de color 1, entonces  $T_1 \cup (v_0, v_1)$  es una  $v_2v_1$ -trayectoria monocromática de color 1, de donde la flecha  $(v_2, v_1) \in F(\mathcal{C}(T))$  por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

2.  $T_1$  es de color 2, entonces  $(v_1, v_2) \cup T_1$  es una  $v_1v_0$ -trayectoria monocromática de color 2 de donde  $(v_1, v_0) \in F(\mathcal{C}(T))$  por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

3.  $T_1$  no es de color 1 ni de color 2, entonces  $(v_0, v_1) \cup (v_1, v_2) \cup (v_2, z_1)$  es un  $P_3$  arcoíris, lo cual por hipótesis no es posible. Por lo tanto esto no puede ocurrir.

De aquí podemos concluir que para este caso  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ . ■

**Teorema 3.0.11** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que no contiene ni triángulos arcoíris ni  $P_3$  arcoíris entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

*Demostración:* Por el teorema anterior tenemos que en  $\mathcal{C}(T)$  todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, de donde por el teorema 2.1.1  $\mathcal{C}(T)$  tiene núcleo.

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 2.3.1  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Podemos notar que el Teorema 3.0.11 resulta ser una versión más sencilla del teorema 3.0.9 (esto por contar con hipótesis más débiles), dado que las condiciones que se pedían originalmente en la cerradura de la digráfica sobre los  $C_3$  y los  $P_3$  arcoíris, en el caso exclusivo para torneos basta con que las cumplan en el torneo original. Además de que la condición sobre los ciclos en  $D_1$  y  $D_2$  no es necesaria en las hipótesis del Teorema 3.0.11.

Ahora bien por otro lado la condición requerida sobre los  $C_3$  en el Teorema 3.0.11 no puede ser eliminada. Como lo veremos en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 20** *Sea  $T_1$  un torneo de orden 3, 3-coloreado tal como se muestra en la figura 3.3. Se puede observar que este torneo no contiene  $P_3$  arcoíris, sin embargo no existe un  $v \in V(T_1)$  tal que  $v$  es núcleo por trayectorias monocromáticas. Veamos por que:*

**Afirmación:**

*No existe un  $v \in V(T_1)$  tal que  $v$  es núcleo por trayectorias monocromáticas.*

*Demostración:*

*Veamos uno a uno por que cada vértice de  $V(T_1)$  no forma un núcleo por trayectorias monocromáticas para  $T_1$ .*

*$v$  no absorbe mediante una trayectoria monocromática a  $w$ . De donde  $v$  no es núcleo por trayectorias monocromáticas para  $T_1$ .*

*$w$  no absorbe mediante una trayectoria monocromática a  $u$ . De donde  $w$  no es núcleo por trayectorias monocromáticas para  $T_1$ .*

*$u$  no absorbe mediante una trayectoria monocromática a  $v$ . De donde  $u$  no es núcleo por trayectorias monocromáticas para  $T_1$ .*

*Por lo tanto  $T_1$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

**Definición 3.0.2** *Una digráfica es **transitiva por trayectorias monocromáticas** si cada vez que existe una  $xy$ -trayectoria monocromática y una  $yz$ -trayectoria monocromática, entonces existe una  $xz$ -trayectoria monocromática siempre que  $x, y, z$  sean vértices distintos.*

**Ejemplo 21** *Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 5 tal como se muestra en la figura 3.4.*

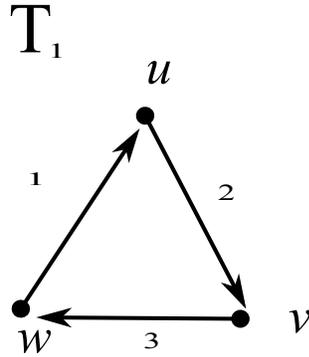


Figura 3.3: Torneos sin  $P_3$  arcoíris

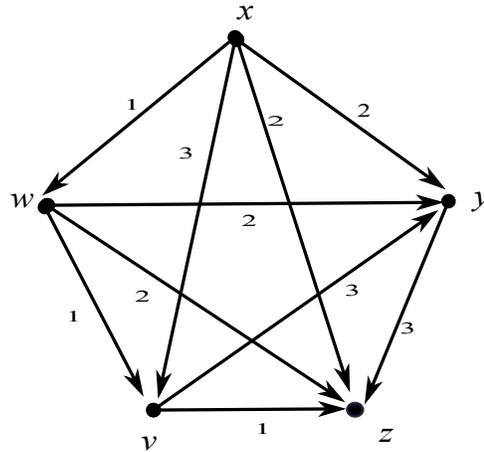


Figura 3.4: Torneo transitivo por trayectorias monocromáticas

*Veamos que  $T$  es transitivo por trayectorias monocromáticas.*

*Sean  $P_1 = (x, y)$  una trayectoria monocromática de color 2 y  $P_2 = (y, z)$  una trayectoria monocromática de color 3, tenemos que en  $T$  existe  $P_3 = (x, z)$  una  $xz$ -trayectoria monocromática de color 2.*

*Para  $P_4 = (x, v)$  y  $P_5 = (v, y)$  trayectorias monocromáticas de color 3 tenemos que existe  $P_6 = P_4 \cup P_5$  una  $xy$ -trayectoria monocromática de color 3.*

*Dadas  $P_7 = (x, v)$  y  $P_8 = (v, y, z)$  trayectorias monocromáticas de color 3 existe en  $T$   $P_9 = P_7 \cup P_8$  una  $xy$ -trayectoria monocromática de color 3.*

*Ahora bien para  $P_{10} = (x, w)$  y  $P_{11} = (w, y)$  trayectorias monocromáticas de color 1 y 2 respectivamente, existe  $P_{12} = (x, y)$  una trayectoria monocromática de color 2 que*

conecta a  $x$  con  $y$ .

*Siguendo con un proceso similar al anterior podemos comprobar que dado cualquier par de trayectorias monocromáticas tales que el vértice final de la primera sea el inicial de la segunda, se tiene que existe  $P_j$  una trayectoria monocromática que cumple las condiciones de la definición anterior.*

**Definición 3.0.3** Una digráfica  $D$  es **transitiva por trayectorias monocromáticas para  $k$  colores**,  $k \leq m$  donde  $m$  es la cardinalidad del conjunto de colores usados para colorear las flechas de  $D$ , si existe un subconjunto  $S$  con  $|S| = k$ , del conjunto de colores usados para colorear a  $D$  tal que la subdigráfica inducida por las flechas con color en  $S$  es transitiva por trayectorias monocromáticas.

**Ejemplo 22** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 6 tal como se muestra en la figura 3.5.

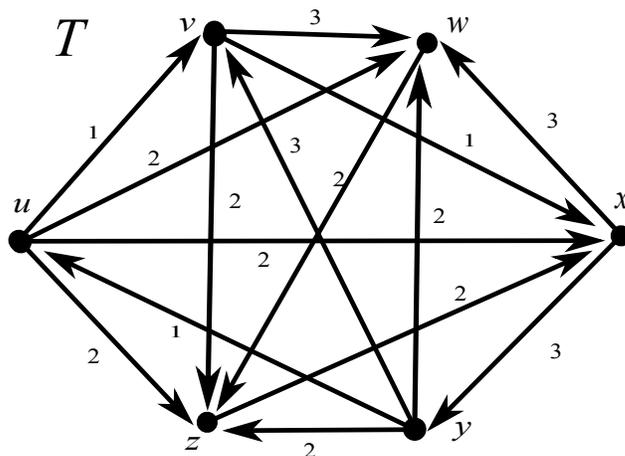


Figura 3.5: Torneo transitivo por trayectorias monocromáticas para dos colores

*Tenemos que  $T$  es transitivo por trayectorias monocromáticas para el subconjunto de colores  $\{1, 2\}$ , además no es transitivo para ningún otro subconjunto de colores con cardinalidad mayor a uno. Veamos por que:*

*Para  $P_1 = (u, v)$  una trayectoria monocromática de color 1 y  $P_2 = (v, z, x)$  una trayectoria monocromática de color 2 se tiene que existe  $P = (u, x)$  una trayectoria monocromática de color 2.*

*Ahora bien para  $P_3 = (u, v)$  una trayectoria monocromática de color 1 y  $P_4 = (v, z)$  una trayectoria monocromática de color 2 se tiene que existe  $P = (u, z)$  una uz-*

trayectoria monocromática de color 2.

Luego dada la coloración y la estructura de las flechas de  $T$  se tiene que si  $P_j$  y  $P_i$  son trayectorias monocromáticas de color 1 ó 2 tales que el vértice final de  $P_j$  es el inicial de  $P_i$  y además no son iguales a ninguna de las trayectorias mencionadas con anterioridad, entonces ambas son de color 1 o bien ambas son de color 2 de donde basta con considerar a la trayectoria  $P = P_j \cup P_i$  que resulta un camino monocromático, el cual contiene una trayectoria monocromática y une el extremo inicial de  $P_j$  con el extremo final de  $P_i$ .

Por lo tanto  $T$  es transitivo por trayectorias monocromáticas para los colores 1 y 2.

Se tiene que  $T$  no es transitivo por trayectorias monocromáticas para los colores 1 y 3. Pues dadas  $P_1 = (u, v)$  una trayectoria monocromática de color 1 y  $P_2 = (v, w)$  una trayectoria monocromática de color 3, en  $T$  no existe una  $uw$ -trayectoria monocromática de color 1 ó 3.

De igual manera  $T$  no es transitivo por trayectorias monocromáticas para los colores 2 y 3. Pues considerando  $P_3 = (z, x)$  y  $P_4 = (x, y)$  trayectorias monocromáticas de color 2 y 3 respectivamente tenemos que no existe una trayectoria monocromática en  $T$  que conecte a  $z$  con  $y$  de ningún color, pues  $\xi(z)^+ = \{2\}$  y  $\xi(y)^- = \{3\}$ . De aquí también se puede concluir que  $T$  no es transitivo por trayectorias monocromáticas para el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ .

**Teorema 3.0.12** Sea  $T$  un torneo 3 coloreado transitivo por trayectorias monocromáticas para dos colores, entonces en  $\mathcal{C}(T)$  todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica.

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo 3 coloreado transitivo por trayectorias monocromáticas para los colores 1 y 2. Por demostrar que en  $\mathcal{C}(T)$  todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica.

Sea  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$  un ciclo en  $\mathcal{C}(T)$ . Vamos analizar dos posibles casos:

**Caso 1**  $C$  no está contenido en  $T$ .

Entonces existe  $(v_i, v_{i+1}) \in F(C)$  tal que  $(v_i, v_{i+1}) \notin F(T)$ , dado que  $T$  es un torneo se tiene que  $(v_{i+1}, v_i) \in F(T)$  luego entonces  $(v_{i+1}, v_i) \in \mathcal{C}(T)$ .

Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

**Caso 2**  $C$  esta contenido en  $T$ .

Procedamos por inducción sobre la longitud de  $C$ .

**i) Base de inducción**

Para  $l(C) = 3$ , tal que  $C = (v_0, v_1, v_2, v_0)$

Tenemos nuevamente dos posibilidades:

-  $C$  es monocromático i.e. existe en  $T$  una  $v_0v_2$ -trayectoria monocromática de donde la flecha  $(v_0, v_2)$  esta presente en  $\mathcal{C}(T)$ , i.e.  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

-  $C$  no es monocromático i.e. si  $C$  está coloreado sólo con los colores 1 y 2 dado que  $T$  es transitivo para estos dos colores y  $C$  está contenido en dicho torneo entonces la flecha  $(v_0, v_2)$  está contenida en  $\mathcal{C}(T)$ . Si alguna de las flechas de  $C$  tiene color 3, entonces dos flecha en  $C$  tienen colores distintos ahora bien, sin perdida de generalidad supongamos que  $c(v_0, v_1) = 3$  y que  $c(v_1, v_2) = 1$ , luego dado que  $T$  es un torneo entonces tenemos que  $c(v_2, v_0) = 3$  ó que  $c(v_2, v_0) = 1$  ó 2, si es de color 3 entonces existe en  $T$  una  $v_2v_0$ -trayectoria monocromática de donde  $(v_2, v_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ , i.e.  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ ; si es de color 1 ó 2 entonces dado que  $T$  es transitivo por trayectorias monocromáticas existe una  $v_1v_0$ -trayectoria monocromática en  $T$  i.e.  $(v_1, v_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ .

Por lo tanto  $C$  tiene al menos una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

**Hipótesis de inducción:**

Supongamos que para todo ciclo  $C$  en  $T$  tal que  $l(C) \leq k$ , éste tiene al menos una flecha simétrica.

**Paso inductivo:**

Sea  $C = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} = v_0)$  un ciclo en  $T$ . Por demostrar que  $C$  tiene al menos una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

Tenemos dos posibles casos:

**Caso 1**  $C$  es monocromático.

De aquí existe una  $v_0v_{k+1}$ -trayectoria monocromática en  $T$  de donde  $(v_0, v_{k+1}) \in F(\mathcal{C}(T))$ . Luego entonces  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

**Caso 2**  $C$  no es monocromático.

Vamos a analizar dos subcasos:

**Subcaso 2.1** Ninguna en  $C$  está coloreada con el color 3.

Afirmación:

Existe una  $v_0v_{k+1}$ -trayectoria monocromática en  $T$ .

Demostración:

Sea  $T_1 = C - (v_{k+1}, v_0)$ . Procedamos por inducción sobre la longitud de  $T_1$ .

i) Base de inducción:

Para  $l(T_1) = 2$  tal que  $T_1 = (v_0, v_1, v_2)$  tenemos que existe una trayectoria monocromática de  $v_0$  a  $v_2$ . Por lo tanto se cumple.

ii) Hipótesis de inducción:

Supongamos que para  $l(T_1) \leq m$  se tiene que existe una trayectoria monocromática que une el extremo inicial de  $T_1$  con el final.

iii) Paso inductivo:

Sea  $T_1 = (v_0, v_1, \dots, v_{m+1})$ , por demostrar que existe una trayectoria monocromática de  $v_0$  a  $v_{m+1}$ , ahora bien  $T_2 = (v_0, v_1, \dots, v_m)$  es una trayectoria cuya longitud es menor o igual a  $m$  de donde por hipótesis de inducción existe una trayectoria monocromática de  $v_0$  a  $v_m$  de color 1 ó 2, luego entonces existe una  $v_0v_{m+1}$ -trayectoria monocromática en  $T$ .

Por lo tanto la afirmación anterior es cierta.

Luego entonces en  $T$  existe la  $v_0v_{k+1}$ -trayectoria, i.e.  $(v_0, v_{k+1}) \in F(\mathcal{C}(T))$ . Por lo tanto  $C$  tiene una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ .

**Subcaso 2.2** Existe  $(v_j, v_{j+1}) \in F(T)$  tal que  $c(v_j, v_{j+1}) = 3$ .

Entonces existen en  $C$  al menos dos flechas consecutivas tales que tienen colores distintos, con una que es de color 3, sin pérdida de generalidad supongamos que  $c(v_0, v_1) = 1$  y que  $c(v_1, v_2) = 3$ .

Ahora bien dado que  $T$  es un torneo entonces tenemos que existe la flecha  $(v_2, v_0)$  o bien la flecha  $(v_0, v_2)$ , vamos a analizar ambas posibilidades:

-Si  $(v_2, v_0) \in F(T)$  y  $c(v_2, v_0) = 3$  entonces  $T_3 = (v_1, v_2, v_0)$  es una  $v_1v_0$ -trayectoria monocromática de color 3, i.e.  $(v_1, v_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ . Si  $c(v_2, v_0) = 1$  ó 2

dado que  $c(v_0, v_1) = 1$  y  $T$  es transitivo por trayectorias monocromáticas entonces existe una  $v_2v_1$ -trayectoria monocromática en  $T$  de donde  $(v_2, v_1) \in F(\mathcal{C}(T))$ , i.e.  $C$  tiene al menos una flecha simétrica.

-Si  $(v_0, v_2) \in F(T)$   $c(v_0, v_2) = 1$  ó  $2$ , entonces  $C_1 = (v_0, v_2, v_3, \dots, v_{k+1} = v_0)$  es un ciclo de longitud menor ó igual a  $k$ , entonces por hipótesis de inducción existe una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ , si dicha flecha es simétrica a una del ciclo original entonces ya acabamos. Ahora bien si la flecha que existe es la  $(v_2, v_0)$  entonces en  $T$  existe una  $v_2v_0$ -trayectoria monocromática digamos  $T_4$ , si es de color 1 entonces  $T_4 \cup (v_0, v_1)$  es una  $v_2v_1$ -trayectoria monocromática en  $T$ , i.e.  $(v_2, v_1) \in F(\mathcal{C}(T))$  que es simétrica a una flecha del ciclo original. Si  $T_4$  es de color 2 dado que  $(v_0, v_1)$  es de color 1 y  $T$  es transitivo por trayectorias monocromáticas para estos dos colores, entonces existe en  $T$  una  $v_2v_1$ -trayectoria monocromática, i.e.  $(v_2, v_1) \in F(\mathcal{C}(T))$ , que es simétrica a  $(v_1, v_2) \in F(C)$ . Si  $T_4$  es de color 3 entonces  $(v_1, v_2) \cup T_4$  es una  $v_1v_0$ -trayectoria monocromática de color 3 i.e.  $(v_1, v_0) \in F(\mathcal{C}(T))$  que es simétrica a  $(v_0, v_1) \in F(C)$ .

Por lo tanto dado un ciclo  $C$  en  $T$  tenemos que  $C$  tiene al menos una flecha simétrica en  $\mathcal{C}(T)$ . ■

**Teorema 3.0.13** *Sea  $T$  un torneo 3 coloreado tal que es transitivo por trayectorias monocromáticas para 2 colores entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo 3 coloreado tal que es transitivo por trayectorias monocromáticas para 2 colores. Por demostrar que  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

En virtud del teorema anterior tenemos que en  $\mathcal{C}(T)$  todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica luego entonces por el teorema 2.1.1  $\mathcal{C}(T)$  es una KP-digráfica i.e. por el teorema 2.3.1 se tiene que  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

# Capítulo 4

## Torneos con ciclos monocromáticos

A lo largo de este Capítulo se presentaran algunos resultados que surgieron al enfocar el Teorema 4.0.14 a torneos  $m$ -coloreados, en los que se hace hincapié en si el torneo es fuertemente conexo ó no lo es, dado que apartir de este hecho suirieron nuevos resultados, además se hace uso particularmente de conceptos y resultados propios del Capítulo 2.

**Teorema 4.0.14** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada tal que todo ciclo en  $D$  es monocromático entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

El teorema anterior puede ser consultado con mayor detalle en ??.

**Ejemplo 23** *Sea  $T$  un torneo de orden 4 tal como se muestra en la figura 4.1 Tenemos*

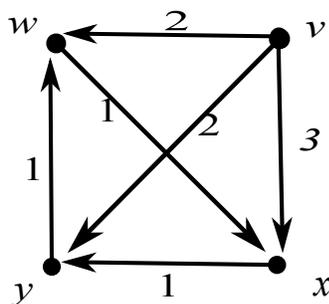


Figura 4.1: Torneo

*que es un torneo que cumple con las hipótesis del teorema anterior, y en particular es un torneo que no es fuertemente conexo.*

Ahora bien veamos que ocurre con un torneo fuerte.

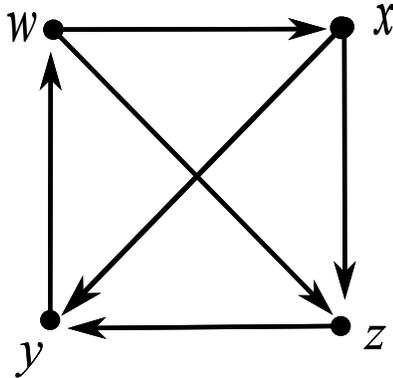


Figura 4.2: Torneo fuerte

**Ejemplo 24** Sea  $T$  un torneo de orden 4 tal como se muestra en la figura 4.2

Ahora bien, vamos a colorear a  $T$  de tal forma que cumpla con las condiciones del Teorema anterior. Tenemos que  $C_1 = (w, x, z, y, w)$  es un ciclo en  $T$ , i.e. todas sus flechas deben tener el mismo color digamos 1, luego  $C_2 = (y, w, z, y)$  es otro ciclo en  $T$  el cual debe de ser monocromático pues así lo pide el Teorema anterior, dado que las flechas  $(w, y)$  y  $(z, y)$  pertenecen también a  $C_1$  éstas tienen color 1 de donde la flecha  $(w, z)$  también debe de ser color 1. Finalmente solo resta colorear a la flecha  $(x, y)$ , ésta pertenece al ciclo  $C_3 = (w, x, y, w)$  en el cual salvo ésta el resto de sus flechas se les ha asignado el color 1 y dado que todos los ciclos en  $T$  deben de ser monocromáticos entonces esta última flecha también tiene color 1.

Podemos notar que hemos coloreado a todas las flechas presentes en  $T$  bajo las condiciones del teorema anterior y esto dio como resultado un torneo monocromático.

**Teorema 4.0.15** Sea  $T$  un torneo fuerte tal que todo ciclo en  $T$  es monocromático entonces  $T$  es monocromático.

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo fuerte de orden  $n$ .

Dado que  $T$  es fuerte entonces existe un ciclo hamiltoniano en  $T$  digamos  $C = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n, u_1)$  que es monocromático, esto por hipótesis, digamos que  $C$  es de color 1.

**Afirmación:**

Si  $(u_i, u_j) \in F(T)$  entonces  $c(u_i, u_j) = 1$

*Demostración:*

Tenemos 2 casos:

**Caso A** Supongamos que  $i < j$

Entonces  $(u_i, u_j) \in F(C_1)$  con  $C_1 = (u_1, u_2, \dots, u_i, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n, u_1)$  un ciclo en  $T$  que por hipótesis es monocromático de donde se tiene que  $c(u_i, u_j) = 1$  dado que el resto de las flechas en  $C_1$  tienen ese color.

**Caso B** Supongamos que  $j < i$

Entonces  $(u_i, u_j) \in C_2$  con  $C_2 = (u_j, u_{j+1}, \dots, u_i, u_j)$  un ciclo en  $T$  que por hipótesis es monocromático, luego entonces  $c(u_i, u_j) = 1$  pues el resto de las flechas en  $C_2$  tienen ese color por pertenecer originalmente a  $C$ .

Por lo tanto  $T$  es monocromático. ■

**Teorema 4.0.16** *Sea  $T$  un torneo tal que la componente fuerte terminal de  $T$  es monocromática, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo tal que la componente fuerte terminal es monocromática.

Sea  $\mathcal{F}(T) = \{F_i; F_i \text{ es componente fuerte de } T\}$ , sin pérdida de generalidad consideremos que  $F_1$  es la componente fuerte terminal de  $T$  y es la única esto por el corolario 1.2.1.

Por hipótesis tenemos que  $F_1$  es monocromática, luego entonces  $F_1$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, más aún  $\{x\}$  es núcleo por trayectorias monocromáticas para cualquier  $x$  en  $F_1$ .

**Afirmación:**

$\{x\}$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

*Demostración:*

Sea  $w \in (V(T) - V(F_1))$ . Por demostrar que existe una  $wx$ -trayectoria monocromática en  $T$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $w \in V(F_2)$ . Luego entonces se sabe que la digráfica de condensación es un torneo esto por el Teorema 1.2.3, de aquí tenemos 2 casos :

**Caso A**  $(F_2, F_1) \in V(H)$ , donde  $H$  denota la digráfica de condensación fuertes de  $T$ .

Entonces para todo  $u \in V(F_2)$  se tiene que en  $T$  existe flecha desde  $u$  hacia cada uno de los vértices de  $F_1$ , en particular existe la flecha  $(w, x)$ , luego entonces  $x$  absorbe por una trayectoria monocromática a  $w$ .

**Caso B**  $(F_1, F_2) \in V(H)$ , donde  $H$  denota la digráfica de condensación de  $T$ .

Este caso no es posible por ser  $F_1$  componente fuerte terminal de  $T$ .

De aquí se concluye que  $\{x\}$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

Por lo tanto, si  $T$  es un torneo tal que la componente fuerte terminal de  $T$  es monocromática entonces  $T$  tiene núcleo. ■

**Corolario 4.0.2** *Sea  $T$  un torneo tal que todo ciclo en la componente fuerte terminal es monocromático entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

# Capítulo 5

## Torneos y seminúcleos modulo $D_2$

En el presente capítulo abordaremos conceptos relativamente nuevos tales como  $\gamma$ -ciclo ó seminúcleo, de los cuales se desprenden resultados importantes acerca de la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas en general, tales como el Teorema 5.2.3 o el Teorema 5.2.4. Los cuales al ser enfocados exclusivamente a torneos generan nuevos resultados. Además se incorporarán algunos ejemplos para aclarar ciertas definiciones y de igual manera algunos teoremas.

### 5.1. $\gamma$ - ciclos y Torneos $m$ -coloreados

**Definición 5.1.1** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada un  $\gamma$ -ciclo en  $D$  es una secuencia de vértices  $\gamma = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  tal que:

i)  $u_i \neq u_j$  para cada  $i \neq j$ .

ii) Para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática en  $D$  (los índices se toman modulo  $n + 1$ ).

iii) Para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  no existe una  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria monocromática en  $D$ .

Diremos que el  $\gamma$ -ciclo es trivial si para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  la trayectoria monocromática que existe de  $u_i$  a  $u_{i+1}$  es de longitud uno.

La longitud de  $\gamma$  es  $l(\gamma) = n$ .

**Ejemplo 25** Sea  $T$  tal como se muestra en la figura 5.1

Tenemos que para  $T$   $\gamma = (w, x, z, v, w)$  es un  $\gamma$ -ciclo. Veamos por qué:

De acuerdo con la definición debe de existir una trayectoria monocromática entre  $w$  y  $x$ , de hecho en  $T$   $(w, x) \in F(T)$ , y no existe una trayectoria monocromática que

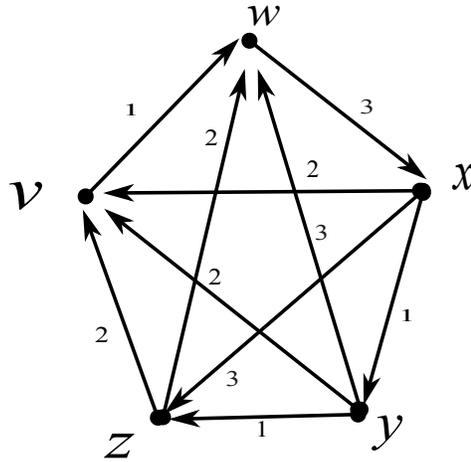


Figura 5.1: Torneo con  $\gamma$ -ciclos

conecte a  $x$  con  $w$ .

Luego para  $x$  y  $z$  tenemos que  $(x, z) \in F(T)$  y en  $T$  no existe una trayectoria monocromática que conecte a  $z$  con  $y$ .

Ahora bien para  $z$  y  $v$  no existe una trayectoria monocromática que conecte  $v$  con  $z$ , pero  $(z, v) \in F(T)$  por lo que existe una  $zv$ -trayectoria monocromática.

Finalmente para  $v$  y  $w$ , se tiene que existe en  $T$  la flecha  $(v, w)$  por lo que hay en  $T$  una trayectoria monocromática de  $v$  a  $w$  pero no la hay de regreso.

Por lo tanto podemos concluir que  $\gamma$  es un  $\gamma$ -ciclo, pues cumple con la definición anterior.

Una digráfica, en particular un torneo, no siempre tiene  $\gamma$ -ciclos, como lo podemos observar a continuación.

**Ejemplo 26** Sean  $T_1$  y  $T_2$  tal como se muestran en la figura 5.2:

$T_1$  no tiene  $\gamma$ -ciclos dado que contiene un ciclo hamiltoniano monocromático, por medio del cual cada par de vértices en  $V(T)$  están conectados por una trayectoria monocromática, luego entonces en  $T$  resulta imposible que exista un  $\gamma$ -ciclo.

Notese que dicha condición (existencia de un ciclo hamiltoniano monocromático) es suficiente para que en cualquier digráfica que la cumpla no existan  $\gamma$ -ciclos. Sin

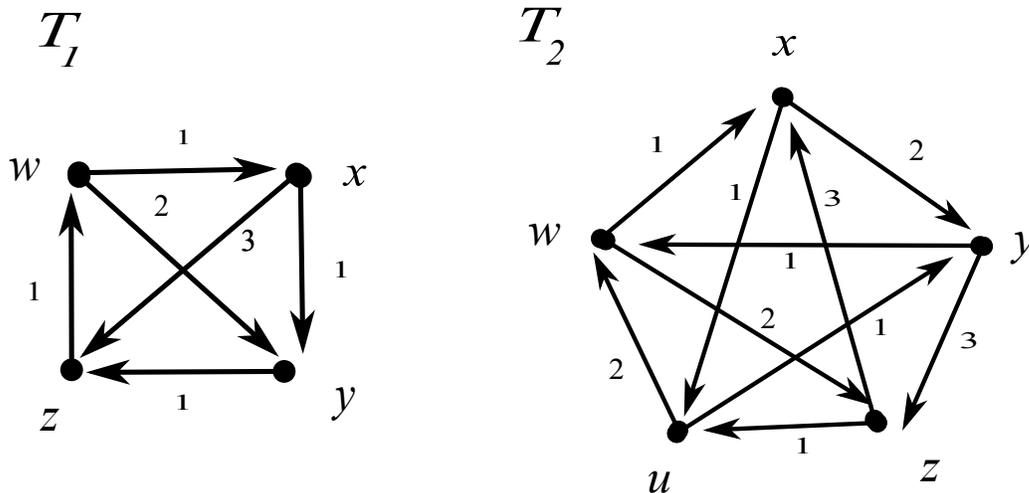


Figura 5.2: Torneo sin  $\gamma$ -ciclos

embargo dada una digráfica sin  $\gamma$ -ciclos ésta no necesariamente contiene un ciclo hamiltoniano monocromático, como lo podemos observar en  $T_2$ .

### Afirmación

No hay  $\gamma$ -ciclos en  $T_2$ .

Ahora bien procederemos a analizar algunos casos para cada vértice en  $T_2$ .

Sea  $C_k$  es una sucesión de vértices tales que cumplen las condiciones i) e ii) de la definición de  $\gamma$ -ciclo.

Para  $x$  se tiene que este vértice está contenido en algunas sucesiones  $C_k$  tales que cumplen con las primeras dos condiciones de la definición anterior, algunas de estas son  $C_1 = (x, y, z, x)$ , donde en particular existe una  $T_1 = (y, w, x)$  una  $yx$ -trayectoria monocromática de color 1 en  $T$ . Luego entonces  $C_1$  no es un  $\gamma$ -ciclo. Para  $C_2 = (x, y, z, u, w, x)$  tenemos que nuevamente para los vértices  $x, y$  existe  $P_1$  una  $yx$ -trayectoria monocromática de color 1, i.e.  $C_2$  no es un  $\gamma$ -ciclo. Finalmente para  $C_3 = (x, u, w, x)$  se tiene que en  $P_2$  para los vértices  $x, u$  existe  $P_3 = (u, y, w, x)$  una  $ux$ -trayectoria monocromática de color 1, de donde  $C_3$  no es un  $\gamma$ -ciclo para  $T_2$ . Siguiendo un procedimiento muy parecido al anterior podemos concluir que  $T_2$  no tiene ningún  $\gamma$ -ciclo que contenga a  $x$ .

Para  $y$  se tiene que está contenido en algunas sucesiones tales que cumplen las primeras dos condiciones de la definición de  $\gamma$ -ciclo. Algunas de estas son  $C_1 = (x, y, z, x)$ ,  $C_2 = (x, y, z, u, w, x)$  y finalmente  $C_4 = (y, z, u, y)$ , notese que ya se ha visto que  $C_1$  y  $C_2$  no son  $\gamma$ -ciclos, luego entonces solo resta verificar a  $C_4$ , para los vértices  $z, y$  se tiene que en  $T_2$  existe  $P_4 = (z, u, y)$  una  $zy$ -trayectoria monocromática de color 1, luego

entonces  $C_3$  no es un  $\gamma$ -ciclo, de aqui siguiendo un procedimiento similar para el resto de sucesiones tales que contengan a  $y$  se puede concluir que  $T_2$  no contiene  $\gamma$ -ciclos tales que  $y$  este contenido en alguno de ellos.

Para  $z$  tenemos que existen algunas sucesiones de vértices tales que cumplen las primeras dos condiciones de la definición de seminúcleo, estas son algunas de ellas  $C_4 = (y, z, u, y)$ ,  $C_2 = (x, y, z, u, w, x)$  y por tambien  $C_5 = (z, u, w, z)$ , al igual que para  $y$  las primeras dos sucesiones para  $z$  ya fueron analizadas y se llegó a la conclusión de que no eran  $\gamma$ -ciclos, luego para  $C_5$  se tiene que en  $T$  existe  $P_5 = (u, w, z)$  una  $uz$ -trayectoria monocromática de color 2, luego entonces  $C_5$  no es un  $\gamma$ -ciclo, de donde siguiendo un proceso similar para el resto de sucesiones con estas características se puede concluir que  $z$  no pertenece a ningún  $\gamma$ -ciclo en  $T_2$ .

Para  $u$  tenemos que existen algunas sucesiones de vértices tales que cumplen las primeras dos condiciones de la definición de seminúcleo, estas son algunas  $C_4 = (y, z, u, y)$ ,  $C_2 = (x, y, z, u, w, x)$  y  $C_6 = (u, w, z, u)$ , los primeros dos ya han sido descartados como  $\gamma$ -ciclos en el parrafo anterior, de donde solo resta verificar a  $C_6$ , tenemos que existe  $P_5$  una  $uz$ -trayectoria monocromática en  $T_2$ , luego entonces  $C_3$  no es un  $\gamma$ -ciclo en  $T_2$ . Por lo tanto siguiendo un proceso similar para el resto de sucesiones con estas características se puede concluir que no existen  $\gamma$ -ciclos en  $T_2$  que contengan a  $u$ .

Finalmente para el vértice  $w$ , tenemos que en  $T_2$  existen algunas sucesiones de vértices tales que cumplen con las condiciones i) e ii) de la definición anterior, estos son:  $C_6 = (u, w, z, u)$ ,  $C_2 = (x, y, z, u, w, x)$  y  $C_7 = (u, w, xu)$ , notese que  $C_6$  y  $C_2$  ya han sido descartados con anterioridad como posibles  $\gamma$ -ciclos, de donde basta con verificar a  $C_3$ , pero para  $C_3$  se tienen los vértices  $u, w$  para los cuales existe en  $T_2$   $P_7 = (w, x, u)$  una  $wu$ -trayectoria monocromática, de donde  $C_7$  no es un  $\gamma$ -ciclo. Por lo tanto luego de analizar el resto de sucesiones similares a las anteriores se puede concluir que en  $T_2$  no existe un  $\gamma$ -ciclo que contenga a  $w$ .

Por lo tanto podemos concluir que  $T_2$  no contiene ningún  $\gamma$ -ciclo.

En [10] se prueba el siguiente resultado respecto a la existencia de  $\gamma$ -ciclos en una digráfica.

**Teorema 5.1.1** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada si todo ciclo en  $D$  es monocromático entonces  $D$  no tiene  $\gamma$ -ciclos.*

## 5.2. Seminúcleos por Trayectorias Monocromáticas

**Definición 5.2.1** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada. Un conjunto  $S \subset V(D)$  es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas si:*

*i)  $S$  es independiente por trayectorias monocromáticas.*

*ii) Para cada  $z \in V(D) - S$  existe una  $zS$ -trayectoria monocromática.*

**Observación 5.2.1** *Si  $S$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas de un torneo entonces  $S$  consta de un sólo elemento.*

**Lema 5.2.2** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado,  $S \subset V(T)$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$  si y solo si  $S$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .*

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que  $S = \{x\} \subset V(T)$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ . Por demostrar que  $S$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

Sea  $w \in V(T) - S$  por demostrar que existe una  $wx$ -trayectoria monocromática contenida en  $T$ . Vamos a analizar dos casos:

a)  $(w, x) \in F(T)$ .

Si esto pasa entonces ya acabamos.

b)  $(w, x) \notin F(T)$ .

Entonces dado que  $T$  es un torneo tenemos que  $(x, w) \in F(T)$ , luego entonces dado que  $S$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$  tenemos que existe una  $wS$ -trayectoria en  $T$ .

Por otro lado, la condición de independencia para  $S$  se cumple pues  $S$  consta de un sólo elemento. Por lo tanto  $S$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

Inversamente, sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que  $S = \{x\} \subset V(T)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ . Por demostrar que  $S$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

Sea  $u \in V(T) - S$  tal que existe una  $Su$ -trayectoria monocromática en  $T$ . Por demostrar que existe una  $uS$ -trayectoria monocromática en  $T$ . Dado que  $u \in V(T) - S$  y  $S$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$  entonces existe una  $uS$ -trayectoria monocromática en  $T$ . Por lo tanto se cumple la condición antes mencionada.

Luego la condición sobre la independencia se cumple pues  $S$  consta de una solo elemento.

Por lo tanto  $S$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas. ■

El siguiente resultado puede ser analizado a profundidad consultando [9].

**Teorema 5.2.3** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada tal que no tiene  $\gamma$ -ciclos. Entonces existe un  $x \in V(D)$  tal que  $x$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ .*

**Corolario 5.2.1** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que no tiene  $\gamma$ -ciclos entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

*Demostración:* De acuerdo con el teorema anterior se tiene que existe  $x \in V(T)$  tal que  $\{x\}$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ , luego entonces por el Lema 5.2.2 se concluye que  $\{x\}$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T$ .

Por lo tanto si  $T$  es un torneo sin  $\gamma$ -ciclos entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

**Definición 5.2.2** *Sean  $D, C_1, C_2, D_1, D_2$  como en la definición 2.2.6 y  $S \subset V(D)$ , decimos que  $S$  es **seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo  $D_2$**  de  $D$  si:*

*i)  $S$  es independiente por trayectorias monocromáticas.*

*ii) si existe una  $Sz$ -trayectoria monocromática contenida en  $D_1$  entonces existe una  $zs$ -trayectoria monocromática contenida en  $D$ .*

**Ejemplo 27** *Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 6 tal como se muestra en la figura 5.3*

*Consideremos:*

$C_1 = \{\text{color3}\}$  y  $C_2 = \{\text{color1}, \text{color2}\}$  una partición del conjunto de colores de  $T$ .

*Luego entonces de acuerdo a la definición 2.2.6  $D_1$  y  $D_2$  quedan definidas como se muestra en la figura 5.4*

**Afirmación:**

$S = \{z\}$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo  $D_2$ .

*Demostración:* Sea  $S = \{z\} \subset V(T)$ . Por demostrar que  $S$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas modulo  $D_2$ .

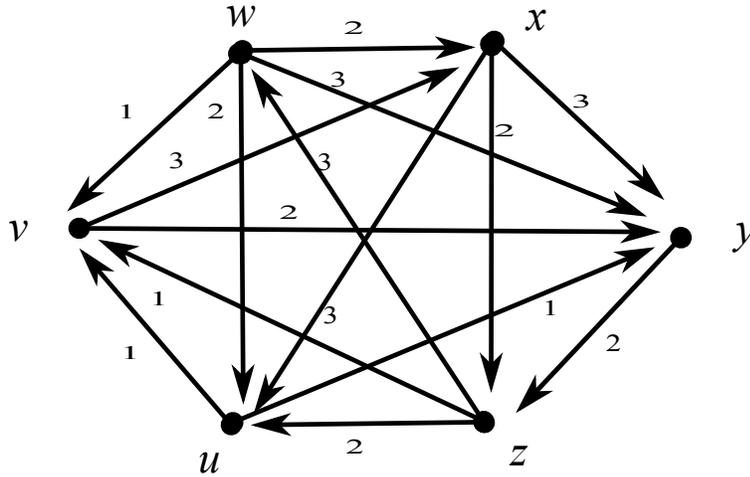


Figura 5.3: Torneo

Veamos que para todo  $c \in V(T)$  tal que hay una  $Sc$ -trayectoria monocromática en  $D_1$  existe una  $cS$ -trayectoria monocromática en  $T$ .

Notemos que las únicas  $Sc$ -trayectorias monocromática contenidas en  $D_1$  son:

$T_1 = (z, w, y)$  para la cual existe la trayectoria  $T_2 = (y, z)$  contenida en  $T$ .  
 $T_3 = (z, w)$  para la cual existe la trayectoria  $T_4 = (w, x, z)$  contenida en  $T$ .

Por lo tanto se cumple dicha condición. Luego  $S$  es independiente pues consta de un sólo elemento.

De donde se concluye que  $S$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo  $D_2$ . ■

El [9] se prueba el siguiente resultado referente a núcleos por trayectorias monocromáticas módulo  $D_2$ .

**Teorema 5.2.4** Supongamos que  $D_1$  no tiene  $\gamma$ -ciclos entonces existe  $x_0 \in V(D)$  tal que  $\{x_0\}$  es seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo  $D_2$  de  $D$ ,

**Definición 5.2.3** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Si  $C = (u_0, u_1, \dots, u_k = v_0, v_1, \dots, v_m = w_0, w_1, \dots, w_n = u_0)$  es un ciclo dirigido decimos que  $C$  es una  $(C_1, C_1, C_2)$  **subdivisión de  $\bar{C}_3$** , 3-coloreada si:

1.  $T_1 = (u_0, u_1, \dots, u_k)$  es una trayectoria dirigida monocromática de color  $a$  en  $D_1$ .

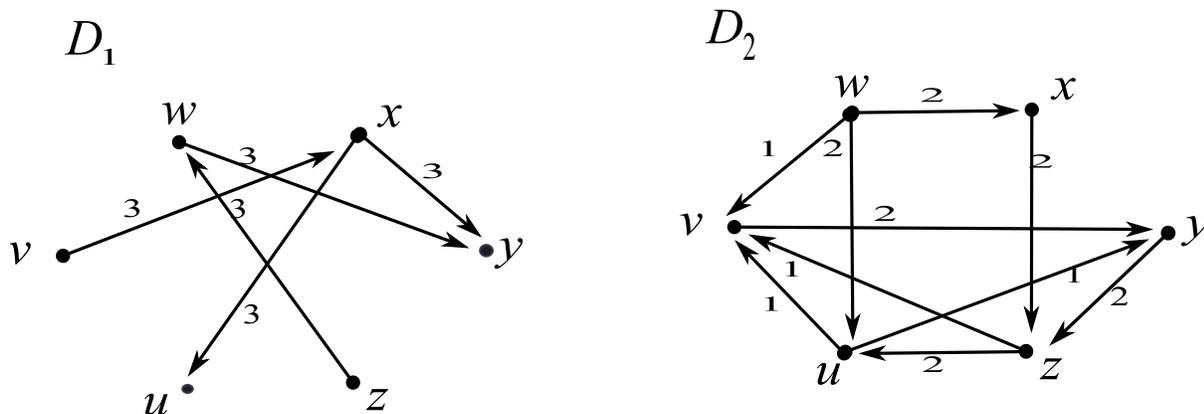


Figura 5.4:  $D_1$  y  $D_2$

2.  $T_2 = (v_0, v_1, \dots, v_m)$  es una trayectoria dirigida monocromática de color  $b$  en  $D_1$ .
3.  $T_3 = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  es una trayectoria dirigida monocromática de color  $c$  en  $D_2$ .

Tales que  $a, b \in C_1$  y  $c \in C_2$ , con  $a, b$  y  $c$  distintos entre sí.

**Definición 5.2.4** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Si  $P = (u_0, u_1, \dots, u_k = v_0, v_1, \dots, v_m = w_0, w_1, \dots, w_n)$  es una trayectoria dirigida decimos que  $P$  es una  $(C_1, C_1, C_2)$  **subdivisión de  $\bar{P}_3$** , 3-coloreada si:

1.  $T_1 = (u_0, u_1, \dots, u_k)$  es una trayectoria dirigida monocromática de color  $a$  en  $D_1$ .
2.  $T_2 = (v_0, v_1, \dots, v_m)$  es una trayectoria dirigida monocromática de color  $b$  en  $D_1$ .
3.  $T_3 = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  es una trayectoria dirigida monocromática de color  $c$  en  $D_2$ .

Tales que  $a, b \in C_1$  y  $c \in C_2$ , con  $a, b$  y  $c$  distintos entre sí.

**Definición 5.2.5** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Si  $C = (u_0, u_1, u_2, u_0)$  es un ciclo en  $D$ , decimos que  $C$  es un  $(C_1, C_1, C_2) - \bar{C}_3$ , 3-coloreado si  $a = c(u_0, u_1) \in C_1$ ,  $b = c(u_1, u_2) \in C_1$  y  $c = c(u_2, u_0) \in C_2$ , con  $a, b$  y  $c$  distintos entre sí.

**Definición 5.2.6** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Si  $P = (u_0, u_1, u_2, u_0)$  es una trayectoria en  $D$ , decimos que  $P$  es un  $(C_1, C_1, C_2) - \bar{P}_3$ , 3-coloreado si  $a = c(u_0, u_1) \in C_1$ ,  $b = c(u_1, u_2) \in C_1$  y  $c = c(u_2, u_0) \in C_2$ , con  $a, b$  y  $c$  distintos entre sí.

**Ejemplo 28** Sea  $T$  un torneo de orden 6 tal como se muestra en la figura 5.5.

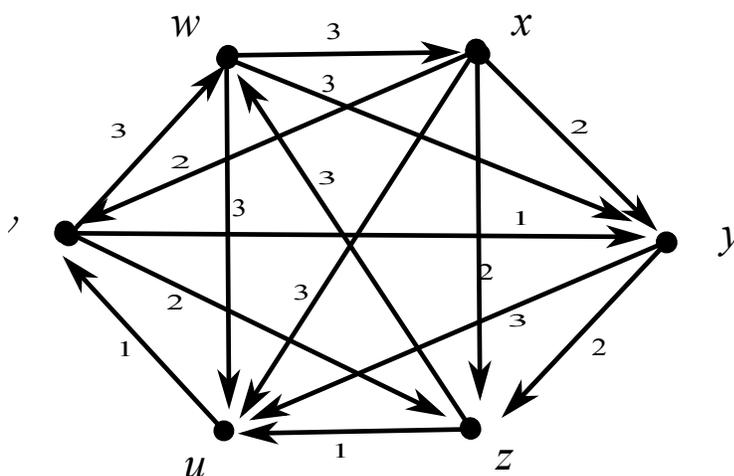


Figura 5.5: Torneo

Consideremos la partición  $C_1 = \{ \text{color 1, color 2} \}$ ,  $C_2 = \{ \text{color 3} \}$ . Tenemos que  $D_1, D_2$  quedan definidas tal como en la figura 5.6.

**Afirmación:**

$C = (x, y, z, u, v, w, x)$  es una  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión de  $\bar{C}_3$ , 3-coloreada.

*Demostración:* Basta con ver que  $C = T_1 \cup T_2 \cup T_3$  con  $T_i$  una trayectoria de color  $a$ , tal que  $a \in C_1$  si  $i \leq 2$  y  $a \in C_2$  si  $i = 3$ .

Ahora bien consideremos  $T_1 = (x, y, z)$ , claramente es una trayectoria pues no se repite ningún vértice además es monocromática de color 2, de donde  $T$  cumple con la condición requerida. Para  $T_2 = (z, u, v)$ , se tiene que  $T_2$  es una trayectoria monocromática de color 1, por lo tanto también cumple con lo pedido. Finalmente para  $T_3 = (v, w, x)$  tenemos que todas las flechas en  $T_3$  son de color 3, i.e. es monocromática y además es una trayectoria dado que en  $T_3$  no se repite ningún vértice.

Por lo tanto  $C$  es una  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión de  $\bar{C}_3$ , 3-coloreada para  $T$ . ■

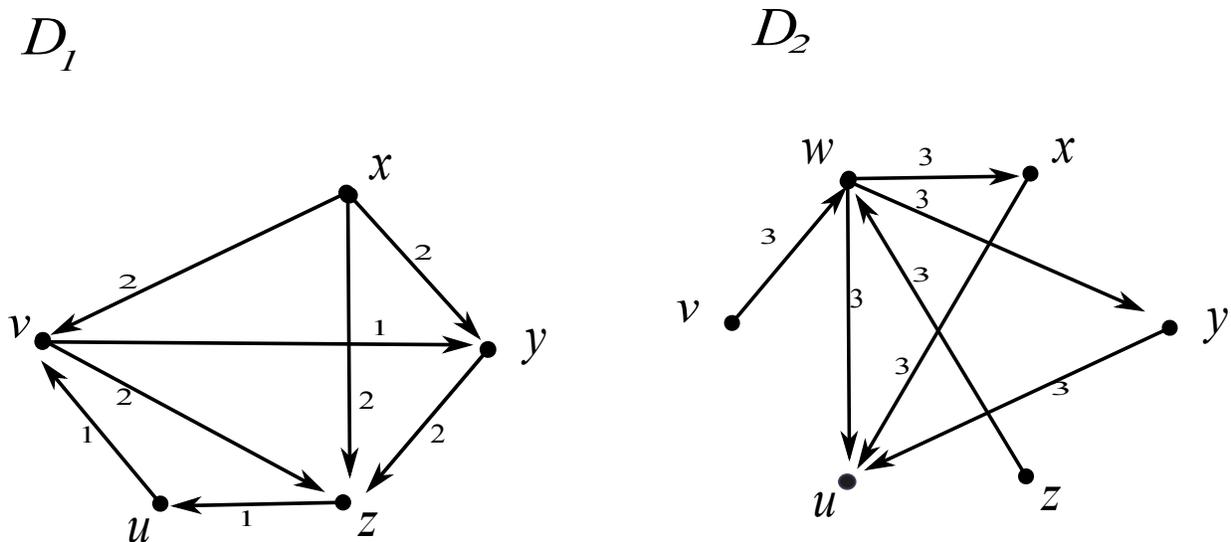


Figura 5.6:  $D_1$  y  $D_2$

**Afirmación:**

$P = (v, y, z, w, x)$  es una  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión de  $\bar{P}_3$ , 3-coloreada.

*Demostración:* Basta con probar que  $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$  con  $P_i$  una trayectoria de color  $a$ , tal que  $a \in C_1$  si  $i \leq 2$  y  $a \in C_2$  si  $i = 3$ .

Consideremos  $P_1 = (v, y)$ , tenemos que  $P_1$  es una trayectoria 1-coloreada que consta de una sola flecha de color 1. Luego para  $P_2 = (y, z)$  es una trayectoria 2-coloreada pues consta de una sola flecha coloreada con este color. Finalmente  $P_3 = (z, w, x)$  es una trayectoria (dado que no repite vértices) monocromática de color 3.

Por lo tanto  $P$  es una  $(D_1, D_1, D_2)$  subdivisión de  $\bar{P}_3$ , 3-coloreada, pues cumple con las condiciones antes descritas. ■

**Definición 5.2.7** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Decimos que la digráfica  $D$  satisface la **propiedad A** si:

i)  $D_1$  no tiene  $\gamma$ -ciclos.

ii)  $\mathcal{C}(D)$  posee las siguientes dos propiedades:

- Todo  $(C_1, C_1, C_2) - \bar{C}_3$  3-coloreado tiene al menos 2-flechas simétricas.

-Si  $(u, z, w, x)$  es un  $(C_1, C_1, C_2) - \bar{P}_3$  3-coloreado entonces  $(u, x) \in F(\mathcal{C}(D))$ .

A continuación procederemos a analizar un torneo tal que cumple la propiedad A.

**Ejemplo 29** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado como se muestra en la figura 5.7. Consideremos

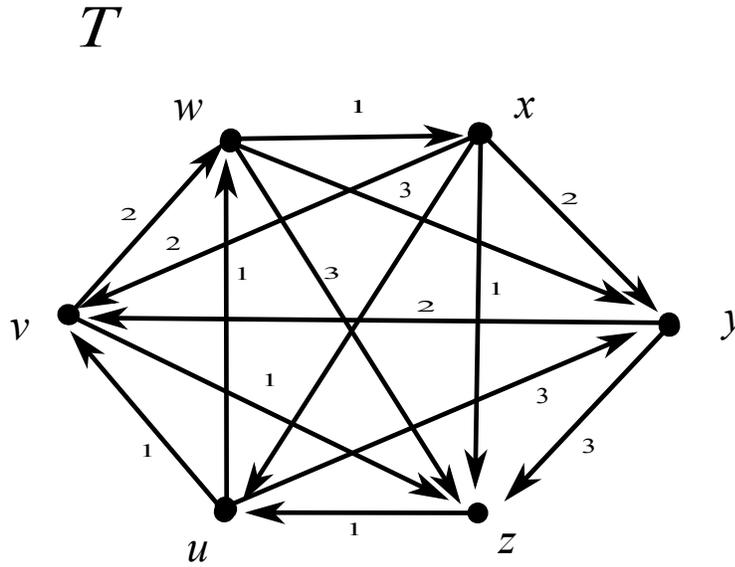


Figura 5.7: Torneo que satisface la propiedad A

la partición  $C_1 = \{\text{color 1, color 2}\}$  y  $C_2 = \{\text{color 3}\}$  del conjunto de colores usados para colorear las flechas de  $T$ . De ahí que  $D_1$  y  $D_2$  quedan definidas como se muestra en la figura 5.8

Podemos notar que  $D_1$  no contiene  $\gamma$ -ciclos, de ahí que  $T$  cumple la primera condición de la propiedad A. Ahora bien veamos que sucede con la cerradura de  $T$ .

Tenemos que los únicos  $H_i$  ciclos dirigidos tales que  $C_i$  son un  $(C_1, C_1, C_2) - \bar{C}_3$ , 3-coloreado en  $\mathcal{C}(T)$  son  $H_1 = (w, x, y, w)$ ,  $H_2 = (w, u, v, w)$ , los cuales tienen respectivamente dos flechas simétricas, para  $H_1$  son la flecha  $(x, w)$  y la  $(w, y)$ , mientras que para  $H_2$  las flechas simétricas en  $\mathcal{C}(D)$  son  $(u, w)$  y la flecha  $(v, u)$ .

Por lo tanto la condición sobre los  $\bar{C}_3$  en la cerradura de  $T$  se cumple.

Ahora veamos que ocurre con las trayectorias de longitud 3. Tenemos que  $P = (u, v, w, y)$  es un  $\bar{P}_3$ , 3-coloreado, y en  $\mathcal{C}(D)$  se encuentra la flecha  $(u, y)$ , i.e.  $P$  cumple la condición requerida. Ahora para  $P_1 = (u, v, w, x)$ , tenemos que existe la flecha

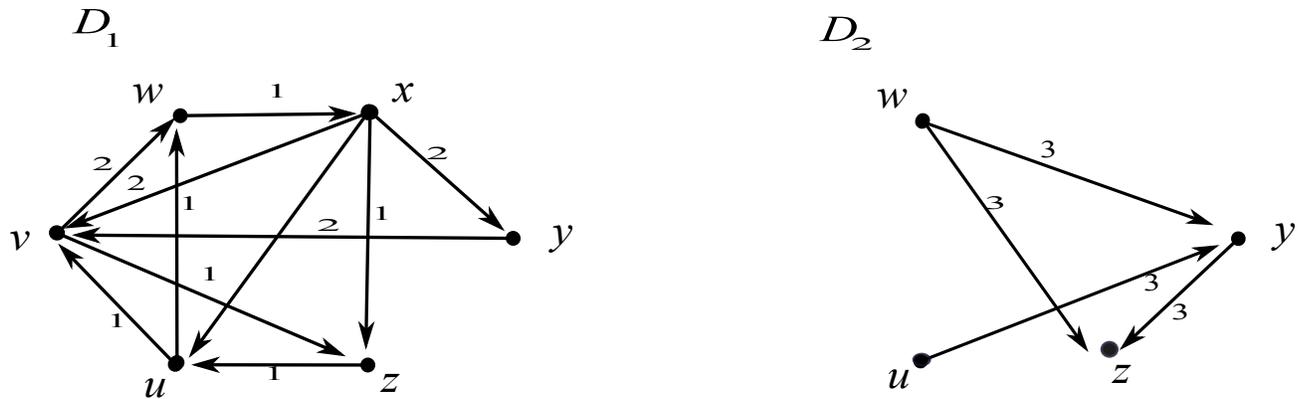


Figura 5.8:  $D_1$  y  $D_2$

$(u, x)$  en  $F(\mathcal{C}(T))$ , i.e. también cumple la condición requerida sobre los  $\bar{P}_3$ . Finalmente para  $P_2 = (u, x, w, z)$ , se tiene que  $(u, z) \in F(\mathcal{C}(T))$ , por lo tanto este y los otros  $(C_1, C_1, C_2) - \bar{P}_3$  3-coloreados cumplen con la última condición de la propiedad A.

Por lo tanto efectivamente,  $T$ , satisface la propiedad A.

**Definición 5.2.8** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Decimos que  $D$  satisface la **propiedad A**( $T$ ) si  $D$  es un torneo y satisface la propiedad A para digráficas en general.

El ejemplo anterior satisface la propiedad A( $T$ ), dado que satisface la propiedad A y es un torneo.

**Definición 5.2.9** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Decimos que una digráfica satisface la **propiedad B** si:

i) Todo ciclo contenido en  $D_1$  es monocromático.

ii)  $D$  no contiene  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisiones de  $\bar{C}_3$  3-coloreados.

iii) Si  $(u, z, w, x)$  es un  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión de  $\bar{P}_3$  3-coloreado entonces existe una trayectoria monocromática entre  $u$  y  $x$  en  $D$ .

A continuación se muestra un torneo que satisface la propiedad B.

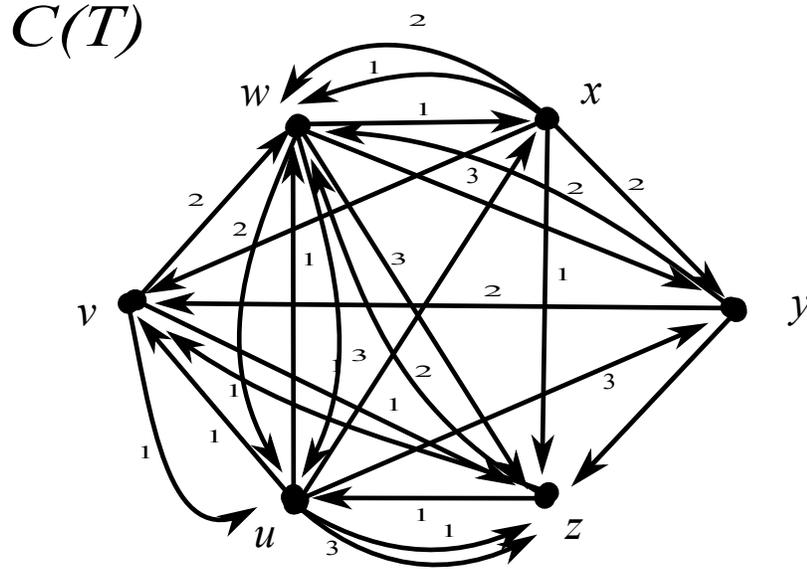


Figura 5.9: Cerradura de  $T$

**Ejemplo 30** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 5 como se muestra en la figura 5.10. Dada la siguiente partición  $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$  del conjunto de colores usados para colorear a  $T$ ,  $D_1$  y  $D_2$  se muestran en la figura 5.11.

Claramente en  $D_1$  todos sus ciclos son monocromáticos, además  $T$  no contiene ningún  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión  $\bar{C}_3$  dado que si este existiera la flecha  $(w, y)$  estaría contenida en dicha subdivisión pero  $xi^-(w) = \{2\}$  y  $xi^+(y) = \{2\}$ , luego entonces no existe ningún  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión  $\bar{C}_3$ . Ahora bien dado un  $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión  $\bar{P}_3$  se tiene que entre  $v_0$  y  $v_n$  siempre existe una flecha que los une, dado que  $T$  es un torneo.

En conclusión,  $T$  es un torneo 3-coloreado tal que satisface la propiedad  $B$ .

**Definición 5.2.10** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Decimos que  $D$  satisface la **propiedad  $B(T)$**  si  $D$  es un torneo y además:

i) Todo ciclo contenido en  $D_1$  es monocromático.

ii)  $D$  no contiene  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisiones de  $\bar{C}_3$  3-coloreados.

**Afirmación**

Sea  $T$  un torneo,  $T$  satisface la propiedad  $B$  si y sólo si satisface la propiedad  $B(T)$ .

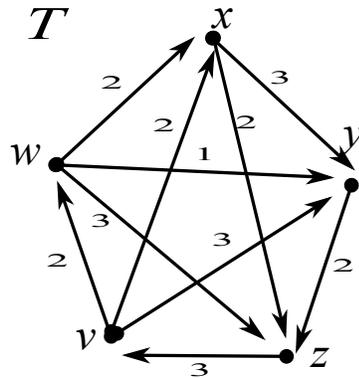


Figura 5.10: Torneo que satisface la propiedad  $B$

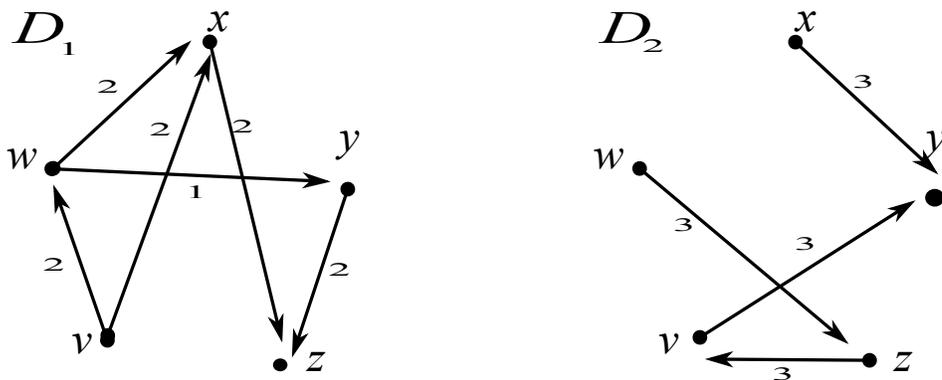


Figura 5.11:  $D_1$  y  $D_2$

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo tal que satisface la propiedad  $B(T)$  entonces tenemos que cumple las primeras dos condiciones de la propiedad  $B$ , finalmente si  $(u, z, w, x)$  es un  $(C_1, C_1, C_2) - \bar{P}_3$  3-coloreado hay que probar que existe una trayectoria monocromática entre  $u$  y  $x$  en  $T$ ; dado que  $T$  es un torneo esto siempre se cumple pues entre cada par de vértices existe una flecha que los une y por ende una trayectoria monocromática entre ellos.

Por lo tanto  $T$  satisface la propiedad  $B$ .

Inversamente, supongamos que  $T$  satisface la propiedad  $B$ . Entonces  $T$  satisface la propiedad  $B(T)$ .

Esto ocurre claramente pues las dos condiciones de la propiedad  $B(T)$  están presentes en la propiedad  $B$  para digráficas en general.

Por lo tanto  $T$  satisface la propiedad  $B(T)$ . ■

**Definición 5.2.11** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Decimos que una digráfica satisface la **propiedad C** si:

i)  $D_1$  no tiene  $\gamma$ -ciclos.

ii)  $D$  no contiene vértices con tres colores en su vecindad.

iii)  $D$  no contiene  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisiones de  $\bar{C}_3$  3-coloreados.

iv) Si  $(u, z, w, x)$  es un  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión de  $\bar{P}_3$ , 3-coloreado entonces existe una trayectoria monocromática entre  $u$  y  $x$  en  $D$ .

**Ejemplo 31** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 5 tal como se muestra en la figura 5.12.

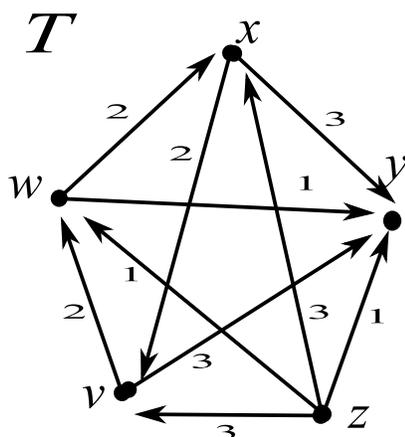


Figura 5.12: Torneo que satisface la propiedad C

Claramente  $D$  no contiene vértices con tres colores en su vecindad, de donde  $T$  cumple con la segunda condición de la propiedad C.

Consideremos la partición  $C_1 = \{\text{color 1, color 2}\}$ ,  $C_2 = \{\text{color 3}\}$ . De donde  $D_1, D_2$  quedan definidas como se muestra en la figura 5.13.

Podemos notar fácilmente que  $D_1$  no tiene  $\gamma$ -ciclos, i.e. satisface la primera condición de la propiedad C. Además  $T$  no contiene subdivisiones de  $\bar{C}_3$ , 3-coloreadas de donde cumple con la segunda condición requerida en la propiedad C.

Por otro lado dado  $C$  una  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión de  $\bar{P}_3$ , 3-coloreada se tiene que en  $T$  existe una flecha tal que une a los vértices inicial y final de  $C$ , pues  $T$  es un torneo.

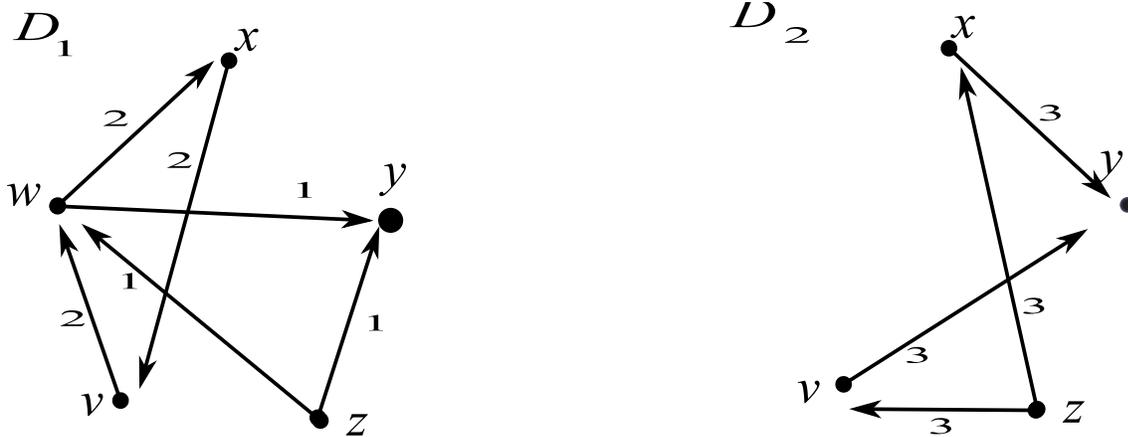


Figura 5.13:  $D_1$  y  $D_2$

Por lo tanto de acuerdo con lo analizado anteriormente se tiene que  $T$  satisface la propiedad  $C$ .

**Definición 5.2.12** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $C_1, C_2, D_1$  y  $D_2$  tal como en la definición 2.2.6. Decimos que  $D$  satisface la **propiedad  $C(T)$**  si  $D$  es un torneo y además:

- i)  $D_1$  no tiene  $\gamma$ -ciclos.
- ii)  $D$  no contiene vértices con tres colores en su vecindad.
- iii)  $D$  no contiene  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisiones de  $\bar{C}_3$  3-coloreados.

**Afirmación**

Sea  $T$  un torneo,  $T$  satisface la propiedad  $C$  si y sólo si satisface la propiedad  $C(T)$ .

*Demostración:* Sea  $T$  un torneo tal que satisface la propiedad  $C(T)$  de aquí  $T$  cumple con las primeras tres condiciones de la propiedad  $C$ , dado que satisface la propiedad  $C(T)$ . Ahora bien si  $(u, z, w, x)$  es un  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisión de  $\bar{P}_3$ , 3-coloreado hay que demostrar que existe una trayectoria monocromática entre  $u$  y  $x$  en  $T$ , i.e. dado que  $T$  es un torneo entre cualquier par de vértices  $u$  y  $x$  tenemos que existe una flecha entre ellos y por ende una trayectoria monocromática que los une.

Por lo tanto  $T$  satisface la propiedad  $C$ .

Inversamente supongamos que  $T$  satisface la propiedad  $C$ . Entonces satisface la propiedad  $C(T)$ , esto ocurre dado que las tres condiciones de la propiedad  $C(T)$  están incluidas en la propiedad  $C$ .

Por lo tanto  $T$  satisface la propiedad  $C(T)$ . ■

En [9] está probado el siguiente resultado para núcleos por trayectorias monocromáticas haciendo uso de las propiedades  $A$ ,  $B$  y  $C$  según corresponde.

**Teorema 5.2.5** *Sea  $D$  una digráfica,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$  y  $D_2$  como en la definición 2.2.6. Si  $D_2$  es transitiva por trayectorias monocromáticas y  $D$  satisface una de las propiedades  $A$ ,  $B$  ó  $C$ , entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

A continuación se muestran los teoremas que resultan de enfocar el teorema anterior a torneos 3-coloreados.

**Teorema 5.2.6** *Sea  $T$  un torneo 3-coloreado, con colores  $C = \{1, 2, 3\}$ . Consideremos la siguiente partición del conjunto de colores de  $T$   $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$ ,  $D_1$  y  $D_2$  como en la definición 2.2.6. Si  $D_1$  satisface que no tiene  $\gamma$ -ciclos y  $\mathcal{C}(T)$  satisface que todo  $C_3$  3-coloreado tiene al menos dos flechas simétricas y si  $(u, z, w, x)$  es un  $P_3$   $(1, 2, 3)$  ó  $(2, 1, 3)$  3-coloreado entonces  $(u, x) \in \mathcal{C}(T)$ . Entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

**Teorema 5.2.7** *Sea  $T$  un torneo 3-coloreado, con colores  $C = \{1, 2, 3\}$ . Consideremos la siguiente partición del conjunto de colores de  $T$   $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$ ,  $D_1$  y  $D_2$  como en la definición 2.2.6. Si todo ciclo en  $D_1$  es monocromático y  $T$  no contiene  $(C_1, C_1, C_2)$  3-coloreado subdivisiones  $\bar{C}_3$ . Entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

**Teorema 5.2.8** *Sea  $T$  un torneo 3-coloreado, con colores  $C = \{1, 2, 3\}$ . Consideremos la siguiente partición del conjunto de colores de  $T$   $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$ ,  $D_1$  y  $D_2$  como en la definición 2.2.6. Si  $D_1$  satisface que no tiene  $\gamma$ -ciclos y  $T$  satisface que no contiene vértices con tres colores en su vecindad, además de no contener  $(C_1, C_1, C_2)$  subdivisiones de  $\bar{C}_3$  3-coloreadas. Entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

# Capítulo 6

## Análisis de condiciones suficientes para la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas en Torneos

En este último capítulo nos enfocaremos en comparar las hipótesis de los teoremas obtenidos en capítulos anteriores, éstos resultaron al aplicar algunos resultados conocidos para digráficas en general a torneos, estos son 3.0.11, 3.0.8, 3.0.13, 5.2.6, 5.2.7 y 5.2.8 mediante una serie de ejemplos veremos como algunos de estos no son consecuencia uno de otros.

A continuación se muestra un cuadro comparativo en el cual, se han considerado los principales teoremas que surgieron a raíz del presente trabajo. En este se han utilizado los siguientes caracteres para indicar la regla de correspondencia entre un teorema y otro: la entrada ( Teorema  $I$ , Teorema  $J$ ) es 1 si el Teorema  $I$  implica el Teorema  $J$ , 0 si se desconoce si es valida la implicación, y finalmente, si el Teorema  $I$  no implica al Teorema  $J$  se indica el ejemplo que lo muestra.

TEOREMAS	Teo. 3.0.8	Teo. 3.0.11	Teo. 3.0.13	Teo. 5.2.6	Teo. 5.2.7	Teo. 5.2.8
Teo. 3.0.8	1	Ejemplo 35	Ejemplo 37	Ejemplo 40	Ejemplo 44	Ejemplo 47
Teo. 3.0.11	Ejemplo 32	1	Ejemplo 38	Ejemplo 41	Ejemplo 45	Ejemplo 48
Teo. 3.0.13	0	0	1	Ejemplo 42	0	0
Teo. 5.2.6	Ejemplo 33	0	0	1	0	0
Teo. 5.2.7	0	0	0	0	1	0
Teo. 5.2.8	Ejemplo 34	Ejemplo 36	Ejemplo 39	Ejemplo 43	Ejemplo 46	1

**Ejemplo 32** Sean  $T_1$  y  $T_2$  torneos 3-coloreados de orden 4 y 5 respectivamente tal como se muestran en la figura 6.1.

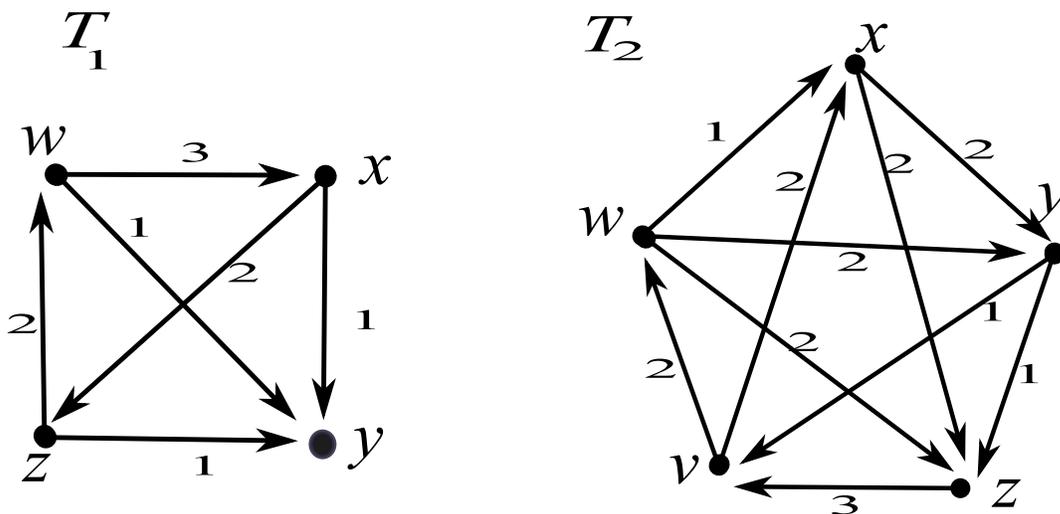


Figura 6.1: Torneos que satisfacen el Teorema 3.0.8

Tenemos que  $T_1$  y  $T_2$  cumplen las condiciones del teorema 3.0.8 dado que no existen  $C_3$  arcoíris ni torneos transitivos de orden 3 arcoíris en ninguno de estos dos torneos. Luego en  $T_1$  existe  $P = (z, w, x, y)$  un  $P_3$  arcoíris, i.e.  $T_1$  no cumple las condiciones del teorema 3.0.11, para  $T_2$  tenemos que existe  $T = (z, v, w, x)$  un  $P_3$  arcoíris de donde  $T_2$  no cumple las hipótesis de teorema 3.0.11.

Por lo tanto podemos concluir que el Teorema 3.0.11 no implica el Teorema 3.0.8.

**Ejemplo 33** Sea  $T_2$  un torneo 3-coloreado de orden 5, tal como se muestra en la figura 6.1. Se ha probado con anterioridad que  $T_2$  cumple con las hipótesis del Teorema 3.0.8. Ahora bien veamos que ocurre con el Teorema 5.2.6, tenemos que en  $\mathcal{C}(T_2)$  (observe figura 6.2) existe  $P = (x, y, z, v)$  un  $P_3$  3-coloreado, sin embargo  $(x, v) \notin F(\mathcal{C}(T_2))$ , i.e. no cumple con una de las hipótesis del Teorema 5.2.6.

Por lo tanto, podemos concluir que el Teorema 5.2.6 no implica el Teorema 3.0.8.

**Ejemplo 34** Sea  $T_2$  un torneo 3-coloreado de orden 5, tal como se muestra en la figura 6.1. Se ha observado con anterioridad que dicho torneo cumple con las hipótesis del Teorema 3.0.8, sin embargo  $z \in V(T_2)$  y es un vértice que consta de 3 colores en su vecindad, de aquí  $T_2$  no cumple con las condiciones del Teorema 5.2.8.

Por lo tanto el Teorema 5.2.8 no implica el Teorema 3.0.8.

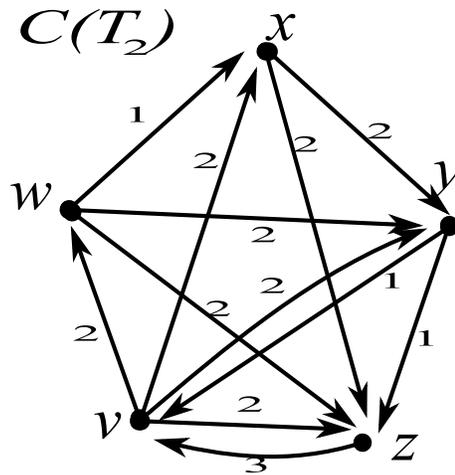


Figura 6.2: Cerradura de  $T$

**Ejemplo 35** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 5 tal como se muestra en la figura 6.3.

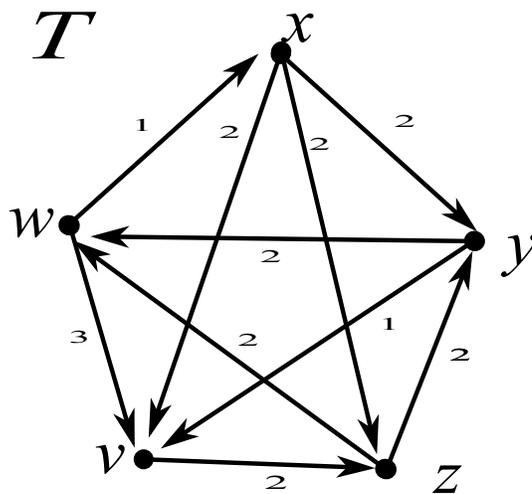


Figura 6.3: Torneo que satisface el Teorema 3.0.11

Se tiene que  $T$  cumple las hipótesis del teorema 3.0.11, dado que en  $T$  no existen ni  $P_3$  ni  $C_3$  arcoíris. Sin embargo dado  $S = \{w, x, v\}$  subconjunto de los vértices de  $T$  se tiene que  $D[S]$  es un torneo transitivo de orden 3, 3-coloreado, i.e.  $T$  no cumple con una de las hipótesis del Teorema 3.0.8.

Por lo tanto podemos concluir que el Teorema 3.0.8 no implica en Teorema 3.0.11.

**Ejemplo 36** Sea  $T$  un torneo 3 coloreado de orden 5 tal como se muestra en la figura 6.3. En el ejemplo anterior se prueba que este torneo cumple con las hipótesis del Teorema 3.0.11, sin embargo  $w \in V(T)$  y es un vértice con tres colores en su vecindad, i.e.  $T$  no cumple con las condiciones del Teorema 5.2.8.

Por lo tanto el Teorema 5.2.8 no implica el Teorema 3.0.11.

**Ejemplo 37** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 5, tal como se muestra en la figura 6.4.

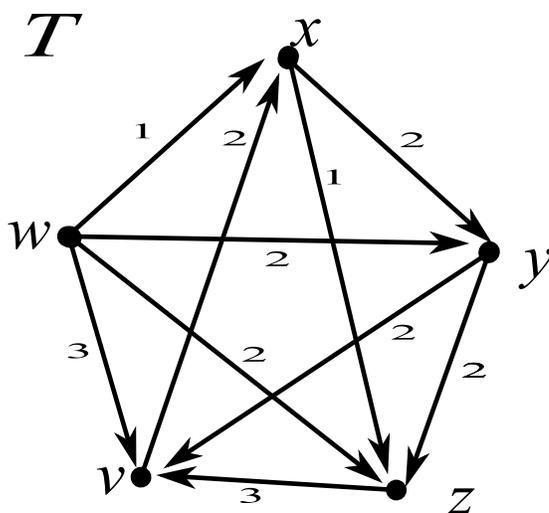


Figura 6.4:  $T$  transitivo para dos colores

$T$  es transitivo por trayectorias monocromáticas para los colores 1 y 2, pues dadas  $T_i, T_j$  trayectorias monocromáticas de colores 1 ó 2 existe  $T_r$  una trayectoria monocromática de color 1 ó 2 que une al vértice inicial de  $T_i$  con el vértice final de  $T_j$ .

Ahora bien  $C = (x, z, v, x)$  es un  $C_3$  arcoíris que está contenido en  $T$ , luego entonces  $T$  no cumple una de las hipótesis del Teorema 3.0.8. Por lo tanto podemos concluir que el Teorema 3.0.8 no implica el Teorema 3.0.13.

**Ejemplo 38** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 6 tal como se muestra en la figura 6.5.

$T$  es transitivo por trayectorias monocromáticas para los colores 1 y 2, pues dadas  $T_i, T_j$  trayectorias monocromáticas de colores 1 ó 2 existe  $T_r$  una trayectoria monocromática de color 1 ó 2 que une al vértice inicial de  $T_i$  con el vértice final de  $T_j$ .

$T$

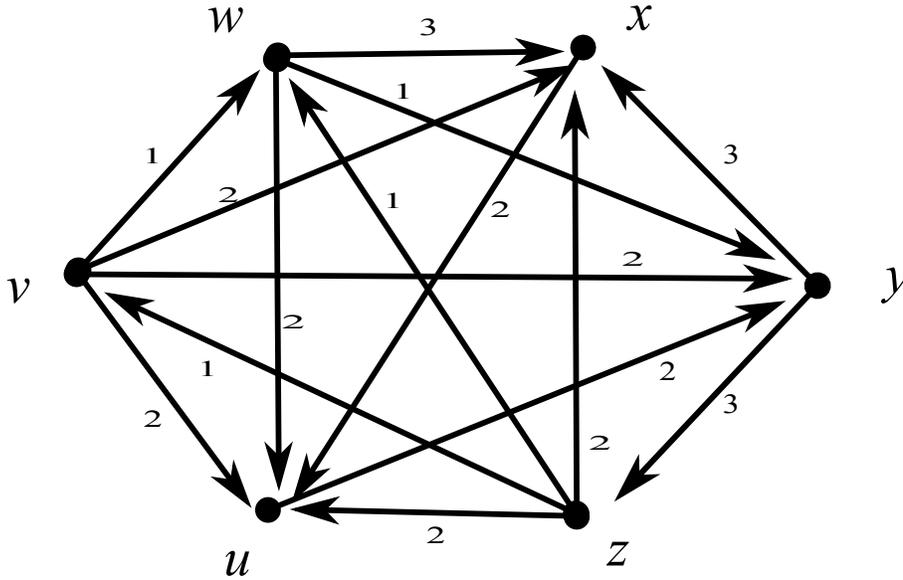


Figura 6.5:  $T$  transitivo para dos colores

Pero  $P = (w, y, z, u)$  es un  $P_3$  arcoíris contenido en  $T$ , de donde  $T$  no cumple las hipótesis del Teorema 3.0.11, i.e. podemos concluir que el Teorema 3.0.11 no implica el Teorema 3.0.13.

**Ejemplo 39** Sea  $T$  un torneo 3 coloreado de orden 5 tal como se muestra en la figura 6.4 hemos observado que  $T$  cumple con las hipótesis del Teorema 3.0.13, pero no así las del Teorema 5.2.8, dado que  $w \in V(T)$  y es un vértice con 3 colores en su vecindad, de donde no cumple con una de las hipótesis de este teorema.

Por lo tanto el Teorema 5.2.8 no implica el Teorema 3.0.13 .

**Ejemplo 40** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 6 tal como se muestra en la figura 5.7. Se ha probado con anterioridad que considerando la siguiente partición para los colores usados al colorear las flechas de  $T$ ,  $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$ , este torneo cumple con la propiedad A, i.e. cumple con las hipótesis del Teorema 5.2.6. Sin embargo, no cumple con todas las condiciones del Teorema 3.0.8, dado que como se muestra en la figura 6.6 la subdigráfica inducida por  $S = \{w, x, y\}$  subconjunto de los vértices de  $T$ , es un torneo transitivo 3-coloreado.

Por lo tanto el Teorema 3.0.8 no implica el Teorema 5.2.6.

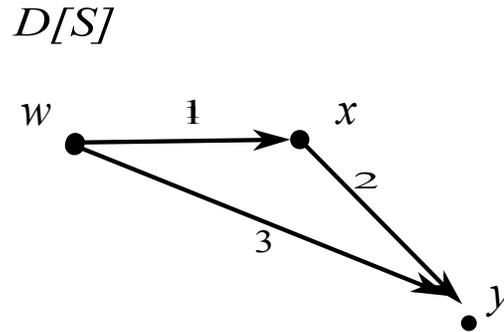


Figura 6.6: Subdigráfica inducida por  $S$

**Ejemplo 41** Sea  $T$  un torneo de orden 6, 3-coloreado tal como se muestra en la figura 5.7. Hemos visto que este torneo cumple con la propiedad  $A$  y por ende con las hipótesis del teorema 5.2.6. Por otro lado  $P = (u, v, w, y)$  es un  $P_3$  3-coloreado contenido en  $T$ , de donde dicho torneo no cumple con las hipótesis del Teorema 3.0.11.

Por lo tanto, el Teorema 3.0.11 no implica el Teorema 5.2.6.

**Ejemplo 42** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 6 tal como se muestra en la figura 5.7. Este torneo satisface las hipótesis del Teorema 5.2.6. Sin embargo  $T$  no satisface el Teorema 3.0.13 dado que no es transitivo por trayectorias monocromáticas para ningún par de colores. Veamos por que, sea  $C_i \subset C$  donde  $C$  es el conjunto de colores usados para colorear a  $T$ .

$C_1 = \{1, 2\}$  Se tiene que:  $T_1 = (w, x)$  es una trayectoria monocromática de color 1 y  $T_2 = (x, y)$  es una trayectoria monocromática de color 2 en  $T$  sin embargo no existe una  $wy$ -trayectoria monocromática de color 1 ó 2, esto dado que  $\xi^+(w) = \{1, 3\}$  y  $\xi^-(y) = \{2, 3\}$ . De donde  $T$  no es transitivo por trayectorias monocromáticas para los colores 1 y 2.

$C_2 = \{1, 3\}$  Tenemos que:  $T_1 = (y, z)$  es una trayectoria monocromática de color 3 y  $T_2 = (z, u)$  es una trayectoria monocromática de color 1 en  $T$  pero no existe una  $yu$ -trayectoria monocromática de color 1 ó 3, dado que aunque  $\xi^+(y) = 2, 3$  y  $\xi^-(u) = \{1, 3\}$ , la única flecha de color 3 que llega a  $u$  desde un vértice distinto de  $y$  es  $(x, u)$  y a  $x$  no le llega flecha desde  $y$ . De aquí  $T$  no es transitivo para los colores 1 y 3.

$C_3 = \{2, 3\}$  Ahora bien  $T_1 = (v, w)$  es una trayectoria monocromática de color 2 y  $T_2 = (w, y)$  es una trayectoria monocromática de color 3 en  $T$  sin embargo no existe una  $vy$ -trayectoria monocromática de color 2 ó 3, esto dado que  $\xi^+(v) = \{1, 2\}$  y  $\xi^-(y) = \{2, 3\}$ , y la única flecha que tiene a  $v$  como vértice inicial y tiene color 2 es la  $(v, w)$ , pero de  $w$  no sale ninguna flecha que tenga dicho color. De donde  $T$  no es transitivo por trayectorias monocromáticas para los colores 2 y 3.

Por lo tanto  $T$  no es transitivo por trayectorias monocromáticas para ningún par de colores, i.e. el Teorema 3.0.13 no implica el Teorema 5.2.6.

**Ejemplo 43** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 6 tal como se muestra en la figura 5.7,  $T$  satisface las hipótesis del Teorema 5.2.6. Pero no cumple con el Teorema 5.2.7 pues  $w \in V(T)$ , y dicho vértice cuenta con tres colores en su vecindad.

Por lo tanto el Teorema 5.2.8 no implica el Teorema 5.2.6.

**Ejemplo 44** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 5 como se muestra en la figura 5.10 satisface la propiedad  $B$ , i.e. satisface las hipótesis del Teorema 5.2.7. Sin embargo como se muestra en la figura 6.7 la subdigráfica inducida por  $S = \{w, y, z\}$  es un torneo transitivo 3-coloreado, de donde dicho torneo no cumple con una de las hipótesis del Teorema 3.0.8.

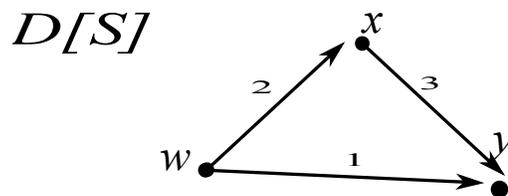


Figura 6.7: Subdigráfica inducida por  $S$

Por lo tanto el Teorema 3.0.8 no implica el Teorema 5.2.7.

**Ejemplo 45** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 4 como se muestra en la figura 5.10. Dada la siguiente partición  $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$  del conjunto de colores usados para colorear a  $T$  se ha probado que este torneo cumple con la propiedad  $B$ , i.e. satisface las condiciones del Teorema 5.2.7. Ahora bien  $P = (w, y, z, v)$  es un  $P_3$  3-coloreado contenido en  $T$ , de donde no se satisface una de las condiciones del Teorema 3.0.11.

Por lo tanto el Teorema 3.0.11 no implica el Teorema 5.2.7.

**Ejemplo 46** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 4 como se muestra en la figura 5.10. En el capítulo anterior se prueba que aquel torneo cumple con la propiedad  $B$ , considerando la siguiente partición  $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$  del conjunto de colores usados para colorear a  $T$ . Luego entonces satisface las condiciones del Teorema 5.2.7. Ahora bien  $y \in V(T)$  y es un vértice con tres colores en su vecindad, de donde  $T$  no satisface las condiciones del Teorema 5.2.8.

Por lo tanto el Teorema 5.2.8 no implica el Teorema 5.2.7.

**Ejemplo 47** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 5 tal como se muestra en la figura 5.12. Se mostró en el capítulo anterior que  $T$  cumple con la propiedad  $C$ , dada la siguiente partición del conjunto de colores usados para colorear las flechas de  $T$   $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$ , de aquí este torneo satisface las hipótesis del Teorema 5.2.8. Sin embargo no satisface las condiciones del Teorema 3.0.8, dado que como muestra en la figura 6.8 la subdigráfica inducida por  $S = \{w, x, y\}$  es un torneo transitivo arcoíris.

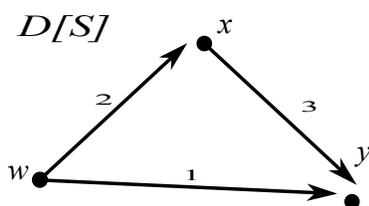


Figura 6.8: Subdigráfica inducida por  $S$

Por lo tanto el Teorema 3.0.8 no implica el Teorema 5.2.8.

**Ejemplo 48** Sea  $T$  un torneo 3-coloreado de orden 5 tal como se muestra en la figura 5.12. Se mostró con anterioridad que  $T$  cumple con la propiedad  $C$ , dada la partición  $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{3\}$  del conjunto de colores usados para colorear las flechas de  $T$ , luego entonces este torneo satisface las hipótesis del Teorema 5.2.8. Ahora bien  $P = (z, w, x, y)$  es un  $P_3$  arcoíris contenido en  $T$ , i.e. este torneo no satisface una de las condiciones del Teorema 3.0.11.

Por lo tanto el Teorema 3.0.11 no implica el Teorema 5.2.8.

# Bibliografía

- [1] C. Berge and P. Duchet, *Recent problems and results about kernels in directed graphs*, *Discrete Math.* **86** (1990) 27-31.
- [2] V. Chavátal and L. Lovász, *Every directed graph has a semikernel*, *Lecture Notes in Math.* **411** (1994) 175, Springer, Berlin.
- [3] E. Casas-Bautista, H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *Cycles and transitivity by monochromatic paths in arc-coloured digraphs*, *AKCE International J. of Graphs and Combin.* **12** (2015) 104-112.
- [4] P. Delgado-Escalante, *Núcleos por trayectorias monocromáticas*, *Tesis de Maestría UNAM* (2007).
- [5] H. Galeana-Sánchez, G. Gaytán-Gómez and R. Rojas-Monroy,  *$\gamma$ -Cycles in arc-colored digraphs*, *Discuss. Math. Graph Theory* **36** (2016) 103-116.
- [6] H. Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, *Discrete Math.*, **156**, (1996) 103-112.
- [7] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments*, *Discrete Math.*, **282**, (2004) 275-276.
- [8] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *Monochromatic paths and most 2-coloured arc sets in edge-coloured tournaments*, *Graphs and Combinatorics* **21** (2005) 307-317.
- [9] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy and E. Casas-Bautista,  *$\gamma$ -cycles and transitivity by monochromatic paths in arc-coloured digraphs*, *Discuss. Math. Graph Theory* **33** (2013) 493-507.
- [10] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy and G. Gaytán-Gómez, *Monochromatic cycles and monochromatic paths in arc-colored digraphs*, *Discuss. Math. Graph Theory* **31** (2011) 283-292.
- [11] S. Minggang, *On monochromatic paths in  $m$ -coloured tournaments*, *J. Combin. Theory (B)*, **45** (1988) 108-111.

- [12] V. Neumann-Lara and H. Galeana-Sánchez, *On kernels and semikernels of digraphs*, *Discrete Math*, **48**(1984) 67-76.  
doi:10.1016/0012-365X(84)90172-X
- [13] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, *J. Combin Theory*, (B) **33** (1982) 271-275.