



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE  
MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Modelado y análisis de vibraciones en el  
proceso de fresado**

**Tesis:**

**Que para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias de la Ingeniería  
Sistemas Dinámicos**

Presenta:

**Ing. Luis Felipe Ramírez Jerónimo**

Tutor Académico: Dra. Martha Belem Saldívar Márquez

Tutores Adjuntos

Dr. Juan Carlos Ávila Vilchis  
Dr. Saúl Montes de Oca Armeaga

Toluca de Lerdo, Estado de México, diciembre del 2017

# DEDICATORIA

---

A mi papá Marcos Raúl Ramírez Zarate, todo lo que soy se lo debo a usted, cuando no distingo el camino me toma de un brazo. Aunque me esfuerzo cada día, se que no llegaré a ser la mitad de la persona que usted fue, pero cuando nos volvamos a ver, se que estará orgulloso de mi.

A mi mamá María de las Mercedes Jerónimo Landeros, todo lo que soy se lo debo a usted. Soy una persona integra por sus enseñanzas. Con fuerza y entereza que he aprendido de usted afronto las dificultades de mi vida.

A mis hermanos Gicela, Luis Alberto, Marcos Gabriel y Rosario, por que son las personas en las que más confié y que sin dudar me han extendido la mano cuando fracaso.

A Maetzin, Quetzalli, Abigail y Gael, mis sobrinos que llenan de alegría mi vida.

Este trabajo se lo dedico a mi familia, los que están conmigo sin importar motivos, depositan fe en mi corazón cuando está vacío, ustedes que me han enseñado a nunca darme por vencido.

Jesús los miró y les dijo: “Para los hombres esto es imposible, pero para Dios todo es posible”

Mateo, 19:26

# **AGRADECIMIENTO**

A la Dra. Martha Belem Saldívar Márquez, por haberme brindado la oportunidad de obtener este grado académico, guiarme con su conocimiento y capacidad científica, así como su extraordinaria paciencia y valioso consejo durante el desarrollo de la tesis.

Al Dr. Juan Carlos Ávila Vilchis y al Dr. Saúl Montes de Oca Armeaga, por su valiosa ayuda en el desarrollo de este proyecto, sus comentarios le dieron buen rumbo a mi trabajo.

A mis compañeros de generación, ya que gracias a su apreciable amistad y apoyo moral me motivaron en cada etapa de la Maestría.

A todos los investigadores y personal de apoyo que forman parte de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México.

Al CONACYT, por el otorgamiento de la beca de postgrado nacional.

A la Universidad Autónoma del Estado de México, por abrirme sus puertas y permitirme crecer.

“Si he visto más lejos, es al estar sobre los hombros de gigantes”

Isaac Newton

# Resumen

Un problema que afecta los costos de producción en el proceso de fresado es la ocurrencia de vibraciones generadas por el efecto regenerativo, el cual se presenta debido a las ondulaciones en la superficie de la pieza de trabajo generadas en cortes consecutivos. En este trabajo se desarrolla un análisis de estabilidad para establecer las condiciones de operación que garanticen que el proceso de fresado no sea afectado por la presencia de vibraciones.

Para desarrollar el análisis es imprescindible contar con un modelo matemático que describa las dinámicas del proceso de fresado; en este trabajo se seleccionan dos modelos paramétricos de la vibración auto-excitada en el proceso de fresado, de uno y dos grados de libertad. Estos modelos son descritos mediante ecuaciones diferenciales funcionales con retardos en el tiempo. El primer modelo corresponde a un sistema de un grado de libertad en el que se considera el avance de la herramienta en una sola dirección. Este modelo simple sirve como ejemplo introductorio al análisis de estabilidad de sistemas con retardos. El segundo modelo caracteriza adecuadamente las dinámicas observadas en el proceso de fresado. Este modelo considera dos grados de libertad relativos a la dirección de avance y a la profundidad de corte radial de la herramienta, y describe las fuerzas de corte en el sistema en función del tipo de inmersión analizada.

El primer acercamiento al análisis de estabilidad en el plano de parámetros de ecuaciones diferenciales con retardos temporales se realiza a través del método de D-particiones. Para aplicar el método se requiere de importantes simplificaciones en el modelo de un grado de libertad, por lo que los resultados obtenidos con el análisis no son reproducibles en la práctica.

La aportación principal de este trabajo de investigación es el análisis de estabilidad del proceso de fresado descrito por el modelo de dos grados de libertad mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. El método permite formular condiciones suficientes de estabilidad en términos de conjuntos de desigualdades matriciales lineales, con las que, a través de un barrido de las combinaciones de corte, se generan zonas de estabilidad en el espacio de parámetros. Cabe mencionar que el método

propuesto no ha sido utilizado antes en este contexto. Entre las ventajas del enfoque empleado está su simplicidad con respecto a otras técnicas como el método de semi-discretización o el método de colocación de Chebyshev. Además, no requiere de la integración explícita de las ecuaciones del movimiento ni de aproximaciones numéricas como en otros casos.

Para ilustrar la aplicación del método propuesto se analizan tres diferentes máquinas fresadoras; para cada una se generan las zonas de estabilidad que permiten conocer las combinaciones de parámetros que garantizan un proceso de fresado libre de vibración. Finalmente, la validación del método se realiza mediante la comparación de los resultados experimentales reportados en la literatura con las zonas de estabilidad obtenidas en este trabajo de investigación. Esta comparación muestra que existe congruencia entre las zonas de estabilidad obtenidas y las combinaciones de parámetros en las que no se observó vibración en la práctica, con lo que se concluye que el método propuesto es efectivo.

# Abstract

A problem that affects the production costs of the milling process is the vibration occurrence generated by the regenerative effect, which take place due to wavy surface of the work-piece generated in consecutive cuts. In this work a stability analysis is developed to establish operational guidelines for the proper selection of the cutting parameters that guarantee a stable vibration-free process.

To develop the analysis, it is essential to have a mathematical model that describes the dynamics of the milling process; in this work, two parametric models, described by time-delay functional differential equations, of one and two degrees of freedom are selected. The first model corresponds to a single degree of freedom system in which the feed of the tool in only one direction is considered. This simple model is used as an introductory example to the stability analysis of time-delay systems. The second model adequately characterizes the dynamics observed in the milling process. This model considers two degree of freedom related to the feed direction and to the radial cutting depth of the tool and describes the cutting forces of the system depending on the immersion conditions analysed.

The first insight to the stability analysis on the parameter-plane for time-delay differential equations is carried out with the D-partitions method. To apply this method, important simplifications of the one degree of freedom model are required, then, the obtained results are not reproducible in practice.

The main contribution of this research work is the stability analysis of the milling process described by the model of two degrees of freedom through the Lyapunov-Krasovskii approach. The method allows formulating sufficient stability conditions stated in terms of linear matrix inequality sets, with which, through a scanning of cutting combinations, stability regions are generated in the parameter-space. It is important to highlight that, to the best knowledge of the authors, the Lyapunov-Krasovskii approach has not been considered for this purpose before. Among the advantages of the proposed method is its simplicity with respect to other techniques such as the semi-discretization method and the Chebyshev collocation method. In addition, neither the explicit integration of movement equations nor numerical ap-

proximations are not required.

To illustrate the application of the proposed method, three different milling machines are analysed; for each one, the stability regions, which allow knowing the combinations of cutting parameters that guarantee a vibration-free milling process are generated. Finally, the validation of the method is carried out by comparing the experimental results reported in the literature with the stability regions obtained in this research work. This comparison shows that there is a congruence between the stability zones obtained and the vibration-free parameters combinations observed in practice; it is concluded that the proposed method is effective.

# Contenido

	Página
<b>Dedicatoria</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>X</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>XII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Marco teórico</b>	<b>4</b>
1.1. Fundamentos teóricos del proceso de fresado . . . . .	4
1.2. Vibraciones mecánicas . . . . .	10
1.2.1. Tipos de vibraciones . . . . .	12
1.2.2. Elementos utilizados para describir y modelar un sistema vi- bratorio . . . . .	13
1.2.3. Vibración en el proceso de fresado . . . . .	16
1.3. Modelado de sistemas dinámicos . . . . .	17
1.3.1. Parámetros concentrados y distribuidos . . . . .	18
1.3.2. Clasificación de sistemas dinámicos . . . . .	18
1.3.3. Sistemas dinámicos con retardos temporales . . . . .	19
1.4. Estabilidad . . . . .	22
1.4.1. Tipos de estabilidad . . . . .	23
1.4.2. Criterio de estabilidad de Lyapunov . . . . .	25
1.5. Estado del arte . . . . .	26



<b>2. Modelo matemático del proceso de fresado</b>	<b>31</b>
2.1. Modelo de un grado de libertad . . . . .	32
2.2. Modelo de dos grados de libertad . . . . .	34
<b>3. Análisis de estabilidad</b>	<b>39</b>
3.1. Análisis en el dominio de la frecuencia . . . . .	39
3.1.1. Resultados numéricos . . . . .	43
3.1.2. Discusión de resultados . . . . .	44
3.2. Análisis en el dominio del tiempo . . . . .	45
3.2.1. Funcionales de Lyapunov . . . . .	48
3.2.2. Resultados numéricos . . . . .	62
3.2.3. Discusión de resultados . . . . .	68
3.2.4. Análisis comparativo . . . . .	69
<b>4. Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>
<b>Anexo 1: Programa para la obtención de los límites de estabilidad</b>	<b>82</b>

# Índice de figuras

	Página
1.1. Sección transversal de mecanizado [1] . . . . .	4
1.2. Clasificación de los procesos de remoción de material [3] . . . . .	5
1.3. Partes de una fresadora [9] . . . . .	7
1.4. Procesos de fresado [9], [10] . . . . .	8
1.5. Parámetros de fresado [3] . . . . .	9
1.6. Tipos de inmersión de corte [11] . . . . .	10
1.7. Grados de libertad para diferentes sistemas mecánicos [12] . . . . .	11
1.8. Representación del resorte [12] . . . . .	14
1.9. Efecto regenerativo en el proceso de fresado [22] . . . . .	21
1.10. Regiones de estabilidad en el plano complejo [24] . . . . .	22
1.11. Estabilidad en el sentido de Lyapunov [18] . . . . .	24
1.12. Lóbulos de estabilidad [29] . . . . .	29
2.1. Representación del proceso de fresado . . . . .	31
2.2. Diagrama de un grado de libertad del proceso de fresado . . . . .	32
2.3. Diagrama de dos grados de libertad del proceso de fresado . . . . .	34
3.1. Lóbulos de estabilidad por el método de D-particiones . . . . .	43
3.2. Lóbulos de estabilidad con $Ra > 0$ y $\Omega > 0$ . . . . .	44
3.3. Comportamiento de los puntos seleccionados . . . . .	45
3.4. Diagrama de flujo para la determinación de las condiciones de estabilidad . . . . .	63
3.5. Regiones de estabilidad para la <b>Fresadora 1</b> generadas a partir de las condiciones sujetas a la desigualdad de Jensen definidas por los conjuntos LMI $W_1, W_2, W_3$ y $W_4$ . . . . .	64
3.6. Regiones de estabilidad para la <b>Fresadora 1</b> generadas a partir de las condiciones sujetas a las desigualdades de Bessel-Legendre definidas por los conjuntos LMI $W_4, W_5, W_6, W_7, W_8$ y $W_9$ . . . . .	65
3.7. Regiones de estabilidad para la <b>Fresadora 2</b> generadas a partir de las condiciones sujetas a la desigualdad de Jensen definidas por los conjuntos LMI $W_1, W_2, W_3$ y $W_4$ . . . . .	66

3.8. Regiones de estabilidad para la <b>Fresadora 2</b> generadas a partir de las condiciones sujetas a las desigualdades de Bessel-Legendre definidas por los conjuntos LMI $W_4, W_5, W_6, W_7, W_8$ y $W_9$ . . . . .	66
3.9. Regiones de estabilidad para la <b>Fresadora 3</b> generadas a partir de las condiciones sujetas a la desigualdad de Jensen definidas por los conjuntos LMI $W_1, W_2, W_3$ y $W_4$ . . . . .	67
3.10. Regiones de estabilidad para la <b>Fresadora 3</b> generadas a partir de las condiciones sujetas a las desigualdades de Bessel-Legendre definidas por los conjuntos LMI $W_4, W_5, W_6, W_7, W_8$ y $W_9$ . . . . .	68
3.11. Regiones de estabilidad presentadas en [42] . . . . .	70
3.12. Zonas de estabilidad para la <b>Fresadora 1</b> . La línea azul delimita la zona estable obtenida mediante el enfoque propuesto; la línea negra, la que se obtiene con el análisis de estabilidad analítico de chatter propuesto en [27]; y la línea punteada roja, y la verde, las que se obtienen con los métodos propuestos en [42]: el Teorema de Edge, y el enfoque LMI dependiente de los parámetros, respectivamente . . . . .	71
3.13. Regiones de estabilidad presentadas en [52] . . . . .	72
3.14. Zonas de estabilidad para la <b>Fresadora 2</b> . La línea azul delimita la zona estable obtenida mediante el enfoque propuesto; la línea negra, y la línea punteada roja, las que se obtiene con el análisis de estabilidad con múltiples modos de vibración [52]: sin tomar en cuenta la desviación de la herramienta y tomando en cuenta la desviación, respectivamente . . . . .	72
3.15. Resultados para la fresadora estudiada en [27] . . . . .	73
3.16. Zonas de estabilidad para la <b>Fresadora 3</b> . La línea azul delimita la zona estable obtenida mediante el enfoque propuesto; la línea continua negra, y la línea segmentada negra, las que se obtienen con el análisis de estabilidad propuestos en [37] y [34]; y la línea punteada negra, y la negra compuesta por guiones y puntos, las que se obtienen con los métodos propuestos en [25] y [27], respectivamente . . . . .	74

# Lista de símbolos

$\mathbf{a}_{xx,xy,yx,yy}$	Coefficientes direccionales de corte variantes en el tiempo
$\Omega$	Velocidad angular
$\omega_n$	Frecuencia natural
$\phi_j$	Ángulo de corte del $j$ -ésimo diente
$\phi_{ex}$	Ángulo de salida del diente
$\phi_{st}$	Ángulo de entrada del diente
$\alpha_{xx,xy,yx,yy}$	Coefficientes direccionales de corte invariantes en el tiempo dependientes del tipo de inmersión
$\zeta$	Factor de amortiguamiento
$a$	Profundidad de corte axial
$ae$	Profundidad de corte radial
$c$	Constante de amortiguamiento
$D(t)$	Matriz direccional de corte variante en el tiempo
$D_0$	Matriz direccional de corte invariante en el tiempo dependiente del tipo de inmersión
$Ec$	Energía cinética
$Ed$	Disipación de energía
$Ep$	Energía potencial
$f_z$	Avance de diente
$h(\phi_j)$	Coefficiente de espesor de viruta
$k$	Constante de resorte

$K_n$	Coeficiente linealizado de corte normal
$K_r$	Coeficiente linealizado de corte radial
$K_t$	Coeficiente linealizado de corte tangencial
$m$	Masa
$N$	Número de dientes
$R(t)$	Coeficiente de fuerzas de corte
$V$	Funcional de Lyapunov
$V_c$	Velocidad de corte
$V_f$	Velocidad de avance
$D$	Diámetro del cortador
$H$	Herramienta de corte
$P$	Pieza

#### Vectores y matrices

$A_0, A_1,$ $B$	Matrices de estado
$M^T$	Transpuesta de una matriz
$P > 0$	Matriz simétrica $P$ definida positiva
$P \geq 0$	Matriz simétrica $P$ semidefinida positiva
$P < 0$	Matriz simétrica $P$ definida negativa
$P \leq 0$	Matriz simétrica $P$ semidefinida negativa
*	Elementos simétricos de la matriz simétrica

#### Conjuntos y espacios

$\mathbb{C}$	El conjunto de números complejos
--------------	----------------------------------

$\mathbb{R}$	El conjunto de números reales
$\mathbb{R}^n$	El espacio euclídeo $n$ -dimensional con norma $ \cdot $
$\mathbb{R}^{m \times n}$	El espacio de matrices reales de dimensión $m \times n$ con la norma $ \cdot $
$\mathbb{R}^+$	El conjunto de números reales no negativos
$\mathbb{Z}$	El conjunto de números enteros
$\mathbb{Z}^+$	El conjunto de números enteros no negativos
$\mathbb{N}$	El conjunto de números naturales
$\mathbb{S}_n$	El conjunto de matrices simétricas
$\mathbb{S}_n^+$	El conjunto de matrices simétricas definidas positivas
$\dot{x}, \ddot{x}$	La primera y la segunda derivada de $x$ con respecto al tiempo
$x : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$	Donde $x(\theta) = x(t + \theta)$ , $\theta \in [-h, 0]$
$\mathcal{C}[a, b]$	El espacio de funciones continuas $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con la norma $\ \phi\ _{\mathcal{C}} = \max_{\theta \in [a, b]}  \phi(\theta) $

# Introducción

El fresado es un proceso de manufactura que permite modificar la forma, tamaño y superficie de una pieza mediante eliminación de material, esto se realiza acercando la pieza a una herramienta de corte giratoria. Es un proceso de importancia en el ámbito industrial debido a la capacidad y variedad de formas que se pueden obtener [1], [2], [3].

Un aspecto importante en el proceso de fresado es el acabado superficial y las tolerancias dimensionales que se obtienen en la pieza modificada después de la operación. Para realizar una operación de fresado exitosa, la máquina debe tener funcionamiento adecuado (debe someterse a mantenimientos periódicos) y el operador debe tener conocimiento de la máquina, de la herramienta de corte, del lenguaje de programación y de los materiales con los que se trabaja.

Existen factores fuera del control del proceso de fresado que merman la calidad en la producción de piezas [4]. Un ejemplo inherente al fresado son las vibraciones causadas por el efecto regenerativo, es decir, al ser el fresado un proceso periódico (varios cortes hasta obtener la forma deseada) se generan ondulaciones en la pieza y viruta de espesor variable que, en cortes subsecuentes, produce oscilaciones entre la pieza y el cortador [5], [6]. Si una vez que se presenta la oscilación, ésta no decae lo suficiente entre cortes consecutivos, la frecuencia del fenómeno se amplifica indefinidamente por los sucesivos impactos hasta alcanzar un punto de saturación. Se suele decir que el proceso se ha vuelto inestable y la vibración que lo produjo es conocida como vibración auto-excitada [4], [5], [6].

La vibración auto-excitada es un tema de interés en las investigaciones de manufactura debido a los efectos negativos que conlleva su aparición, su análisis es complejo por la diversidad de los elementos que componen el sistema. Si se mantienen parámetros de corte conservadores (profundidad y velocidad bajas), es posible evitar la aparición de vibración por el amortiguamiento propio del proceso, pero se reduce capacidad productiva, además de que se elevan los costos de energía y operación [4], [5].

Una de las líneas de investigación que busca comprender y erradicar el fenómeno vibratorio es la teoría de control, la cual analiza los componentes que interactúan en el sistema para obtener comportamientos deseados. El punto de partida en el análisis de un sistema es su representación mediante un modelo matemático, generalmente como un operador entre entradas y salidas, o como un conjunto de ecuaciones diferenciales [7].

Dada la naturaleza del fresado, el sistema tiene un comportamiento no lineal en el cual se identifican coeficientes que dependen del tiempo (cortes previos y espesor de viruta), además, el efecto regenerativo produce términos con retardos temporales en la dinámica del sistema y la particularidad en el proceso de fresado es que la cinemática rotacional de la herramienta conduce a efectos periódicos direccionales [8].

El sistema resultante se describe como un conjunto de ecuaciones diferenciales no homogéneas con retardos temporales y coeficientes periódicos. Estos retardos pueden limitar y degradar el rendimiento de los sistemas de control e incluso provocar inestabilidad. Con la presencia de retardos temporales, la solución de la ecuación característica es compleja y conduce a un número infinito de raíces, lo que dificulta el análisis de estabilidad y diseño de control con métodos clásicos. Por lo tanto, este tipo de problemas se resuelve a menudo mediante el uso de aproximaciones [5], [8].

La presencia de retardos temporales en las ecuaciones que modelan los procesos tiene un impacto en la respuesta del sistema, que generalmente produce inestabilidad. Sin embargo, puede suceder justo lo contrario: la presencia de retardos puede estabilizar un sistema inestable [8]. En cualquier caso, el análisis de estabilidad en este tipo de sistemas resulta notoriamente más complejo que en los sistemas sin retardos, principalmente debido a su naturaleza infinito-dimensional, es decir, la ecuación característica tiene un número infinito de soluciones. El análisis por ubicación de polos deja de tener sentido, siendo por tanto necesario recurrir a otras técnicas basadas, por ejemplo, en el Teorema de las pequeñas ganancias (*small gain Theorem*) o en métodos basados en la teoría de Lyapunov. La propia complejidad que se deriva del estudio de vibraciones en el proceso de fresado, junto con el interés práctico, han motivado una amplia línea de investigación con contribuciones que se abordan tanto en el dominio frecuencial como en el temporal.

La demanda de productividad, calidad y eficiencia por parte del sector industrial plantea retos en el análisis de sistemas dinámicos para tratar de mitigar la aparición de vibraciones auto-excitadas en operaciones de fresado. Para hacer frente a este problema, se requiere del desarrollo de soluciones innovadoras; el uso de la teoría de control representa uno de los caminos más prometedores debido a su potencial de desarrollo.



El **objetivo general** de este trabajo es realizar un análisis de la estabilidad de las dinámicas del proceso de fresado para identificar las condiciones bajo las que no se presenta la vibración auto-excitada. Los **objetivos particulares** son:

- Analizar la estabilidad del sistema con base en un modelo matemático representativo de la dinámica de la vibración auto-excitada en el proceso de fresado.
- Validar los resultados teóricos obtenidos.

A continuación se muestra un breve resumen del contenido de la presente tesis: los conceptos, definiciones y antecedentes que permiten el desarrollo y comprensión del presente trabajo son expuestos en el Capítulo 1. Los modelos matemáticos que permiten la caracterización de las vibraciones auto-excitadas presentes durante el proceso de fresado se presentan en el Capítulo 2. En el Capítulo 3 se desarrolla el análisis de estabilidad para la obtención de los parámetros de corte que garantizan la estabilidad del sistema. Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo de investigación.

# Capítulo 1

## Marco teórico

### 1.1. Fundamentos teóricos del proceso de fresado

El mecanizado es un proceso de manufactura en el cual se usa una herramienta de corte para remover material de una pieza de trabajo, de tal manera que la pieza tome la forma deseada [1], [2], [3]. La acción predominante del corte involucra la deformación cortante del material de trabajo produciendo láminas de material removido conocidas como viruta. En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo de mecanizado. Note que, al removerse la viruta, queda expuesta una nueva superficie del material.

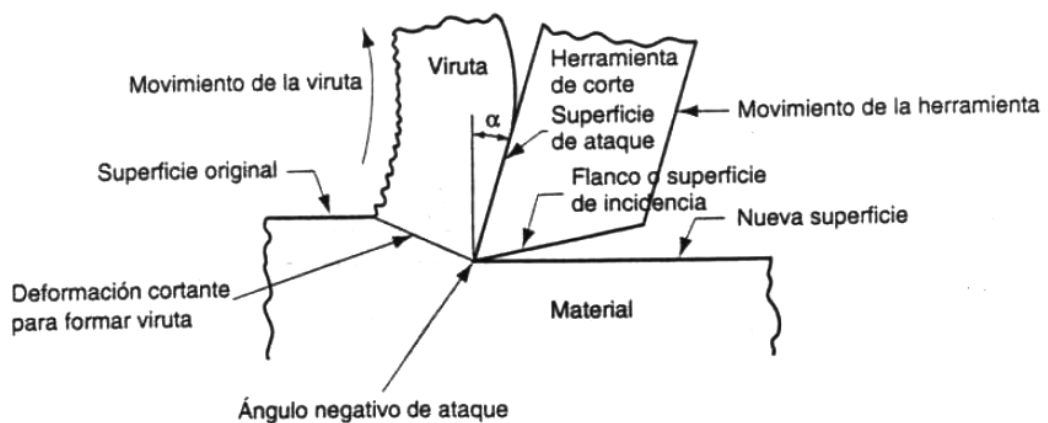


Figura 1.1: Sección transversal de mecanizado [1]

El mecanizado es uno de los procesos de mayor importancia para modificar la forma de un material y es elaborado mediante variadas técnicas. En la Figura 1.2 se muestran algunos ejemplos de mecanizado clasificados de acuerdo con la técnica que utilizan para el desprendimiento de material.

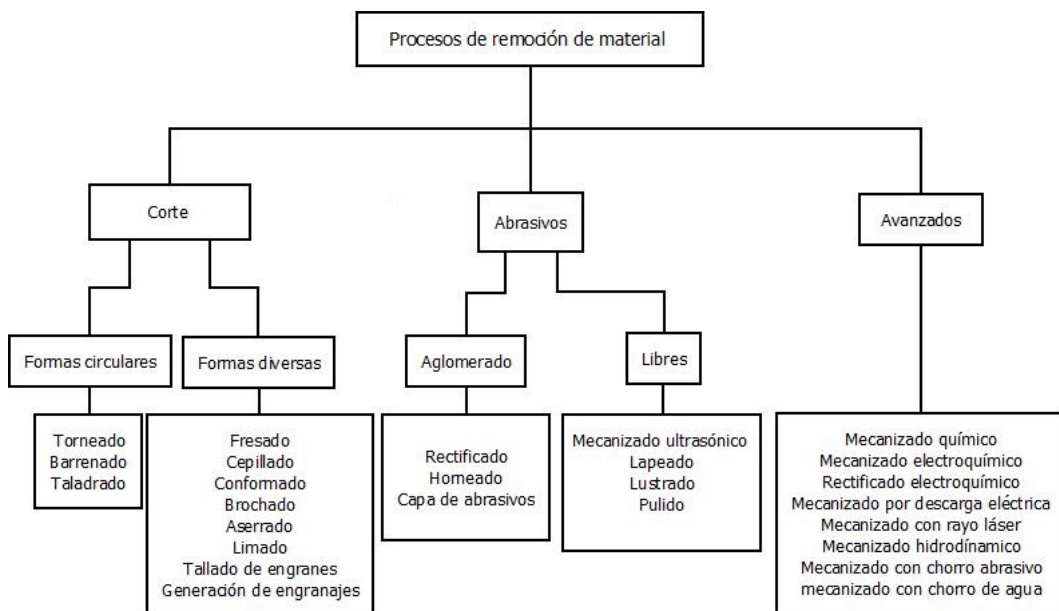


Figura 1.2: Clasificación de los procesos de remoción de material [3]

El fresado es un proceso de arranque de material que se obtiene mediante la traslación y el acercamiento de la pieza de trabajo a una herramienta multifilo (conocida como fresa o cortador) que gira alrededor de su eje y está orientado fundamentalmente al mecanizado de piezas prismáticas y para la manufactura de piezas de simetría no rotacional. El fresado es una operación de corte interrumpido, es decir, los dientes de la fresa son expuestos a fuerzas de impacto y choque térmico ya que entran y salen de la pieza de trabajo durante cada rotación [1], [2], [3]. El material de la herramienta y la geometría del cortador deben diseñarse para soportar estas condiciones.

Debido a la variedad de configuraciones y a la variedad formas posibles que el proceso puede generar, el fresado es una de las operaciones de mecanizado más versátiles ampliamente usadas en la industria [3]. Las fresadoras se pueden clasificar de acuerdo con la orientación de la herramienta con respecto a la pieza de trabajo, como se indica en la Tabla 1.1 [2].

Cuadro 1.1: Clasificación de las fresadoras

<b>Máquina</b>	<b>Características</b>	<b>Limitaciones</b>
Fresadora horizontal	El cortador se coloca sobre un eje horizontal. La mesa es fija y sobre ésta se desliza un carro con dos movimientos automáticos: transversal y longitudinal. Es especialmente utilizada para crear ranuras de formas diversas.	La profundidad a la que puede trabajar está restringida por la diferencia entre el radio exterior del porta herramientas y el radio exterior del cortador.
Fresadora vertical	El cortador se coloca en un husillo vertical, perpendicular a la mesa, al girar produce el movimiento principal. La mesa y el husillo realizan un desplazamiento vertical, lo que facilita la remoción de la viruta.	La fuerza generada por el contacto entre el cortador y la mesa de trabajo limita la velocidad de avance.
Fresadora universal	El cortador se coloca sobre un eje horizontal mientras que la mesa tiene un desplazamiento vertical. Este tipo de fresadoras posee un movimiento que le permite el giro horizontal. Sus características la hacen ideal en el corte de formas helicoidales tales como brocas, algunos engranajes, fresas, etc.	Las guías de este tipo de fresadora son de dimensión reducida, con lo cual se limita el tamaño de las piezas a mecanizar.

Las partes principales de la fresadora (véase Figura 1.3) se describen brevemente a continuación [3]:

- La base permite un apoyo correcto de la fresadora en el suelo.
- El cuerpo o columna se apoya sobre la base o ambas forman parte de la misma pieza. Habitualmente, la base y la columna son de fundición aleada estabilizada. La columna tiene en la parte frontal unas guías templadas y rectificadas para el movimiento y unos mandos para el accionamiento y control de la máquina.
- El soporte de mesa se desliza verticalmente sobre las guías del cuerpo y sirve de sujeción para la mesa.
- La mesa tiene una superficie ranurada sobre la que se sujeta la pieza a mecanizar. Se apoya sobre los carros que permiten el movimiento longitudinal, transversal y vertical.
- El portaherramientas es el apoyo de la herramienta de corte y le transmite el movimiento de rotación del husillo alojado en el interior del bastidor. Este eje suele ser de acero aleado al cromo vanadio para herramientas.

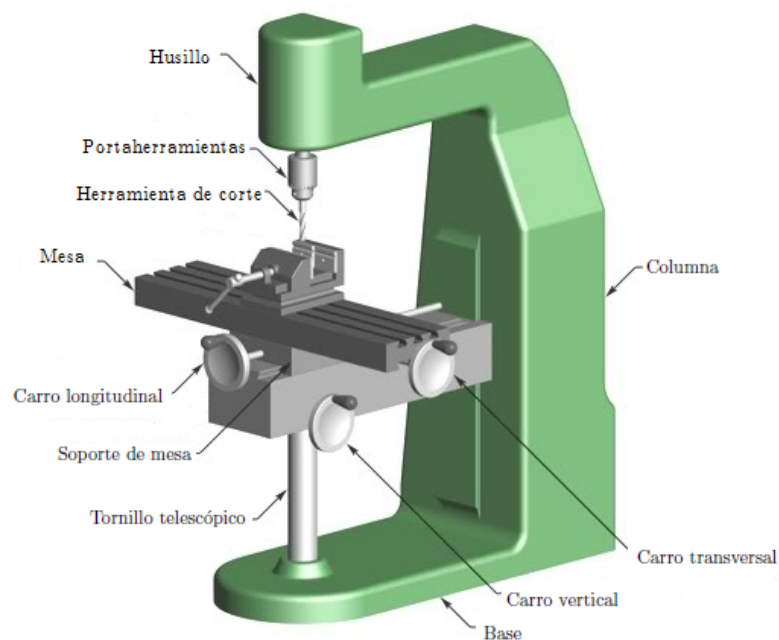


Figura 1.3: Partes de una fresadora [9]

La norma DIN 8589 clasifica las operaciones de fresado de acuerdo con las superficies producidas teniendo en cuenta el movimiento de la herramienta [9], [10]. En el fresado frontal, el eje de rotación de la herramienta es ortogonal a la superficie de trabajo, mientras que en el fresado periférico, el eje es paralelo a la superficie. El fresado lateral es una combinación de los dos procesos anteriores y es usado para

producir dos superficies ortogonales entre ellas. En el fresado de perfiles, la forma y las dimensiones de la herramienta son reproducidas en la pieza. El fresado de formas puede producir la mayor variedad de superficies, que dependen del número de ejes controlables en la fresadora (véase Figura 1.4).

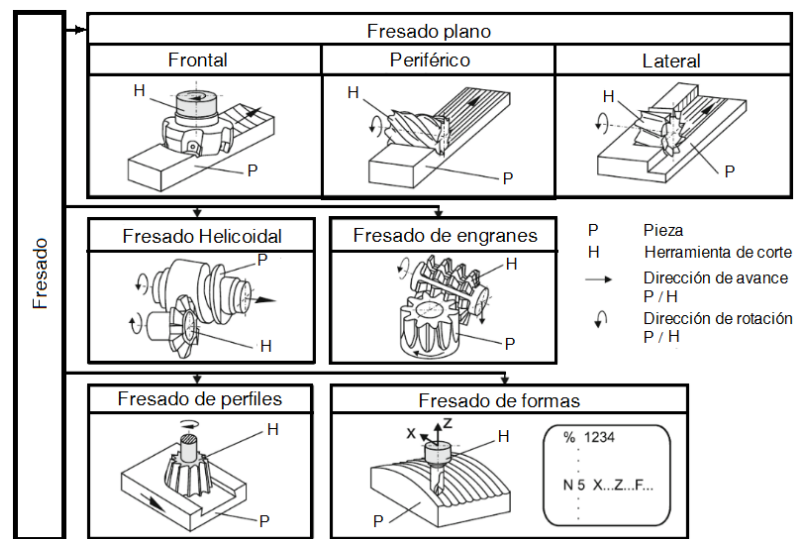


Figura 1.4: Procesos de fresado [9], [10]

Los parámetros de fresado son [1], [3], [10]:

- Velocidad de corte  $V_c$  (mm/min)(Figura 1.5 (a))

$$V_c = \frac{\pi D \Omega}{1000} \quad (1.1)$$

donde  $D$  es el diámetro de la fresa (mm) y  $\Omega$  es la velocidad de rotación (rpm).

- Profundidad de corte radial  $ae$  y axial  $a$  (mm)(Figura 1.5 (a))
- Velocidad de avance  $V_f$  (mm/min) (Figura 1.5 (b))
- Avance de diente  $f_z$  (mm) (Figura 1.5 (b))

$$f_z = \frac{V_f}{\Omega N} \quad (1.2)$$

donde  $N$  es el número de dientes del cortador.

- Espesor de viruta  $a_c$ . Varía a lo largo del recorrido del diente y depende de la posición radial del diente, definida por el ángulo de ataque.

- Sección de viruta  $S_c$  (Figura 1.5 (c)). Representa la sección de material que está siendo arrancada por un diente, y se obtiene multiplicando el espesor  $a_c$  por la anchura  $a_w$ .

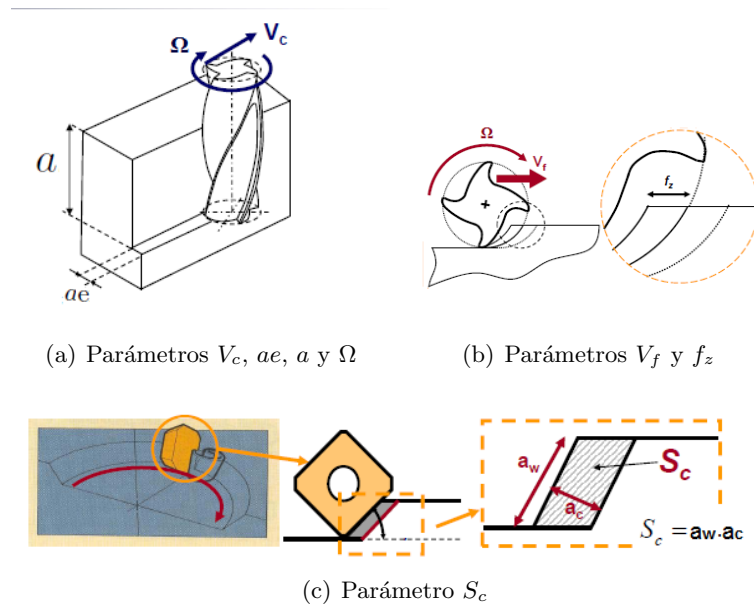


Figura 1.5: Parámetros de fresado [3]

La velocidad de avance  $V_f$  genera una profundidad de corte radial  $ae$ , el corte se realiza con los dientes del cortador que presentan un ángulo de entrada  $\phi_{st}$  al material y un ángulo de salida  $\phi_{ex}$ , es decir, cuando el diente está inmerso en el material. Estos ángulos dependen del *tipo de inmersión de corte*<sup>1</sup>. Los principales tipos de inmersión de corte se describen a continuación [11]:

- *Half-immersion down-milling*: La profundidad de corte radial es igual a la mitad del diámetro de la herramienta y tiene un sentido de rotación dextrorso, este tipo de inmersión se muestra en la Figura 1.6(a).
- *Half-immersion up-milling*: La profundidad de corte radial es igual a la mitad del diámetro de la herramienta y tiene un sentido de rotación sinistrorso, este tipo de inmersión se muestra en la Figura 1.6(b).
- *Full immersion milling (slotting)*: La profundidad de corte radial es igual al diámetro de la herramienta, una representación de este tipo de inmersión se muestra en la Figura 1.6(c).

<sup>1</sup>Traducido del inglés “cutting immersion conditions”.

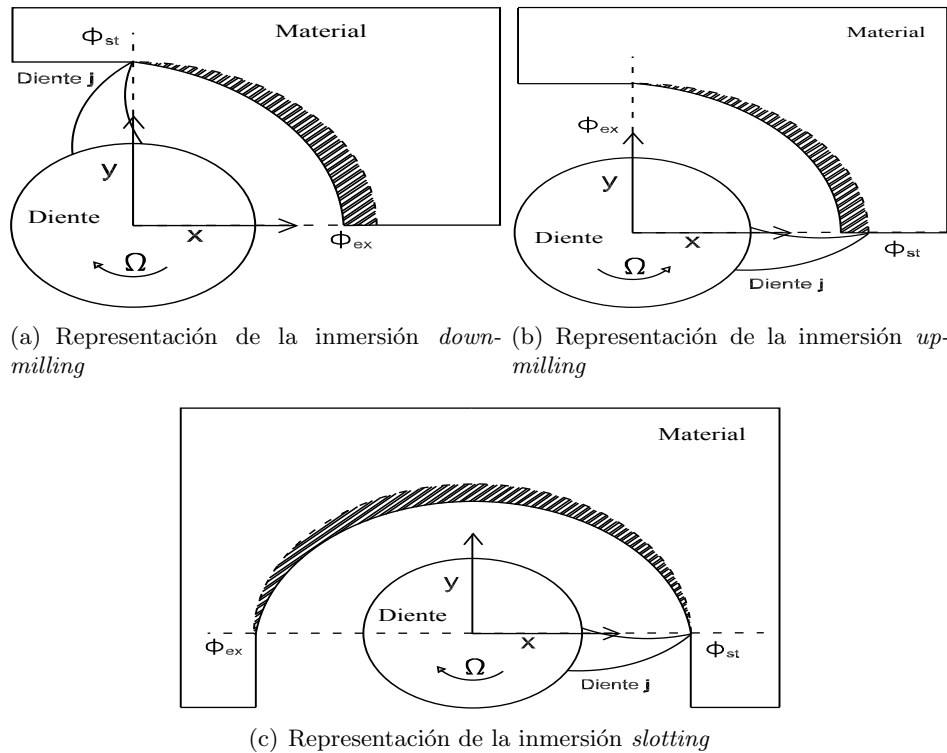


Figura 1.6: Tipos de inmersión de corte [11]

## 1.2. Vibraciones mecánicas

La vibración puede definirse como el movimiento oscilatorio de un cuerpo alrededor de una posición de equilibrio. Se define también como un movimiento repetitivo que permite a un cuerpo (o partícula) recuperar su posición inicial, si el movimiento se repite con todas sus características y valores de magnitud razonablemente semejantes en un cierto intervalo de tiempo, se dice que la vibración es periódica [12], [13].

La vibración de un sistema implica la transformación de su energía potencial en energía cinética y viceversa, de manera periódica. Si el sistema disipa energía en cada ciclo de vibración es necesario incorporar una fuente de energía externa para que se mantenga un estado de vibración [13]. Un sistema vibratorio se define como todo aquel que posee un movimiento oscilatorio.

Grado de libertad es un concepto fundamental en el estudio de cualquier sistema vibratorio, el cual se define como el mínimo y suficiente número de coordenadas independientes requeridas para determinar el estado del sistema en cualquier instante de tiempo (véase [12], [13], Figura 1.7).



Las coordenadas necesarias para describir el movimiento de un sistema se conocen como *coordenadas generalizadas* (véase [12], [13]). Éstas se suelen indicar como  $q_1, q_2, \dots, q_n$  y representan los grados de libertad del sistema. Las coordenadas generalizadas pueden representar coordenadas cartesianas, polares o de otro tipo. Por medio de una cantidad finita de grados de libertad, se pueden describir los sistemas prácticos, como los sistemas simples que se muestran en la Figura 1.7.

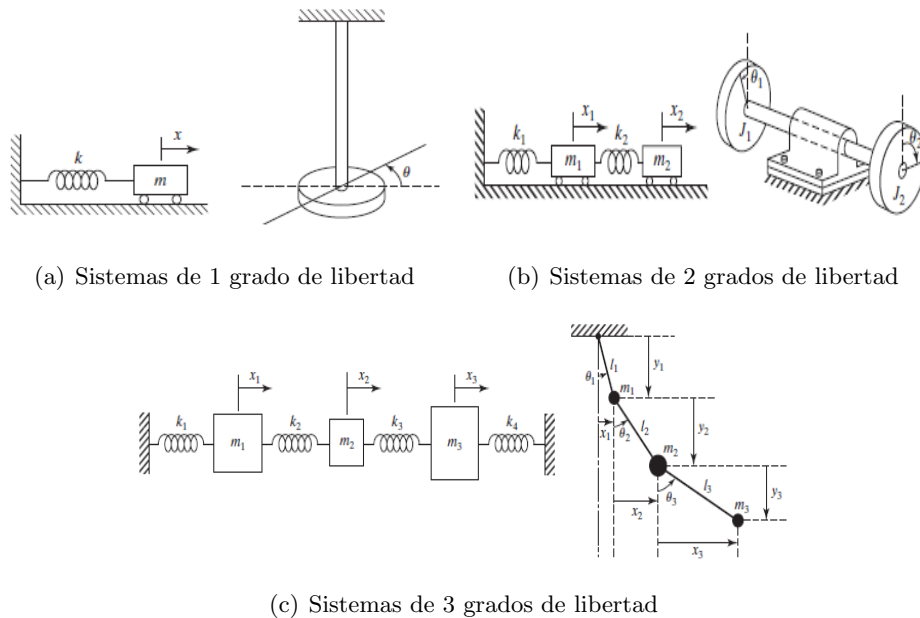


Figura 1.7: Grados de libertad para diferentes sistemas mecánicos [12]

Los sistemas vibratorios discretos tienen un número finito de grados de libertad y usualmente representan aproximaciones de sistemas vibratorios continuos, los cuales tienen un número infinito de grados de libertad. Como ejemplo de sistemas vibratorios continuos se tienen los cuerpos con masa y elasticidad continuamente distribuida; para especificar la posición de cada una de las partículas en el cuerpo elástico se requiere un número infinito de grados de libertad. Los sistemas continuos representan de manera más exacta el comportamiento real de los sistemas, sin embargo, los métodos empleados para su análisis son complejos comparados con los que se emplean para analizar sistemas discretos. Por esta razón la mayoría de los sistemas prácticos se estudian tratándolos como masas concentradas finitas, resortes y amortiguadores. El error en los resultados se disminuye aumentando la cantidad de masas, resortes y amortiguadores, es decir, aumentando la cantidad de grados de libertad [12].

### 1.2.1. Tipos de vibraciones

Las vibraciones mecánicas pueden clasificarse desde diferentes puntos de vista, por ejemplo, dependiendo del tipo de excitación que las produce, de sus propiedades de disipación de energía y de la linealidad de los elementos que componen al sistema vibratorio. A continuación, se presenta una breve descripción de algunas de estas clasificaciones [12], [13], [14]:

- Vibración libre o forzada

Vibración libre. Se presenta cuando después de una perturbación inicial, un sistema se mantiene vibrando. No actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema.

Vibración forzada. Se presenta cuando una fuerza externa (a menudo, una fuerza repetitiva) incide sobre un sistema. Si la frecuencia de la fuerza externa coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, ocurre una condición conocida como resonancia, y el sistema sufre oscilaciones peligrosamente grandes. Las fallas de estructuras como edificios, puentes, turbinas y alas de avión se han asociado a la ocurrencia de resonancia.

- Vibración no amortiguada y amortiguada

Vibración no amortiguada. Se presenta cuando en un sistema oscilatorio no existe pérdida o disipación de energía en forma por ejemplo de calor o sonido.

Vibración amortiguada. Se presenta cuando en el sistema existen elementos que gradualmente disipan energía. Para aplicaciones de ingeniería, la constante de amortiguamiento suele ser despreciable, sin embargo, la consideración del amortiguamiento se vuelve importante al analizar sistemas vibratorios próximos a la resonancia.

- Vibración lineal y no lineal

Vibración lineal. Se presenta cuando los componentes básicos de un sistema vibratorio se comportan en forma lineal, es decir, cuando el principio de superposición es válido.

Vibración no lineal. Se presenta cuando alguno de los componentes del sistema tiene un comportamiento no lineal. Las ecuaciones que rigen el comportamiento de estos sistemas son no lineales, el análisis matemático es complejo en comparación con los sistemas lineales y el principio de superposición no es válido.

La respuesta de un sistema vibratorio suele depender tanto de las condiciones iniciales como de las excitaciones externas. La mayoría de los sistemas vibratorios prácticos son complejos, y es imposible considerar todos los detalles para un análisis matemático. En el análisis sólo se consideran los detalles más importantes para

predecir el comportamiento del sistema en condiciones de entrada específicas. A menudo se puede determinar el comportamiento total del sistema por medio de un modelo simple del sistema físico complejo, por lo que el análisis de un sistema vibratorio suele implicar el modelado matemático, la derivación de las ecuaciones rectoras, la solución de las ecuaciones y la interpretación de los resultados.

### 1.2.2. Elementos utilizados para describir y modelar un sistema vibratorio

Los elementos que forman un sistema vibratorio comúnmente incluyen un medio para almacenar energía potencial (resorte o elasticidad), un medio para conservar energía cinética (masa o inercia) y un medio por el cual la energía se pierde gradualmente (amortiguador) [12]. Estos elementos se detallan a continuación:

- Elementos de rigidez (resorte) [13], [14].

Un resorte es un elemento elástico capaz de almacenar energía sin sufrir deformación permanente, para la mayoría de análisis su masa y su amortiguamiento se consideran insignificantes. Cualquier cuerpo o miembro deformable (cable, barra, viga, flecha o placa), puede considerarse como un resorte. Se suele representar como se muestra en la Figura 1.8(a). Cuando se aplica una fuerza axial al resorte de longitud inicial  $l$ , éste experimenta un alargamiento  $x$ , como se muestra en la Figura 1.8(b), mientras que cuando una fuerza de compresión  $F$  es aplicada en el extremo libre 2 se reduce la longitud  $x$  unidades (véase la Figura 1.8(c)).

Se dice que un resorte es lineal si el desplazamiento de longitud  $x$  se relaciona con la fuerza aplicada mediante:

$$F(x) = kx \quad (1.3)$$

donde  $F(x)$  es la fuerza de restauración del resorte y  $k$  es una constante, conocida como la *constante de resorte*, *rigidez de resorte* o *tasa de resorte*. La constante de resorte  $k$  siempre es positiva e indica la fuerza (positiva o negativa) requerida para producir una deformación unitaria (alargamiento o reducción de la longitud) en el resorte.

El trabajo realizado al deformar un resorte se almacena como energía potencial  $Ep_k$  en el resorte [12], y está dado por:

$$Ep_k = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.4)$$

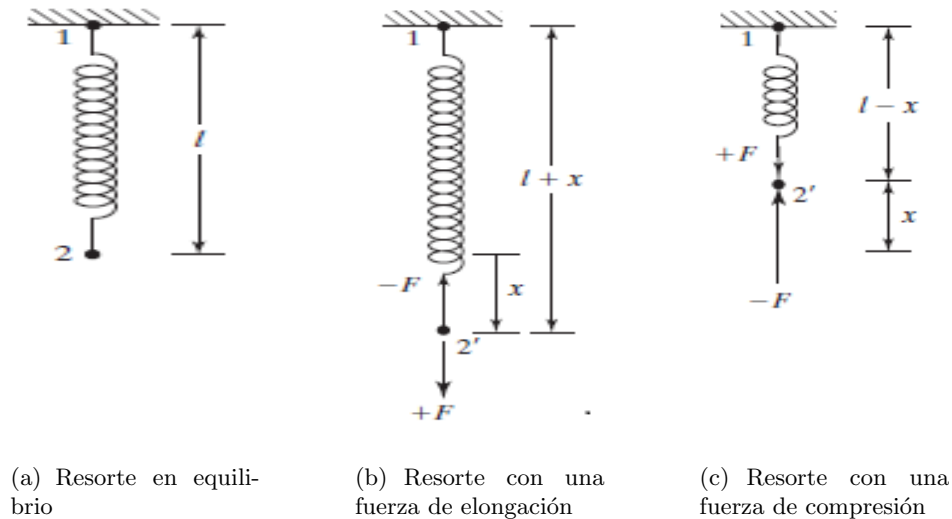


Figura 1.8: Representación del resorte [12]

- Elementos de inercia (masa) [12].

Los elementos de inercia o masa pueden ganar o perder energía cinética siempre que cambia su velocidad. De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, el producto de la masa y su aceleración son iguales a la fuerza aplicada a la masa.

$$F(\ddot{x}) = m\ddot{x} \quad (1.5)$$

donde  $F(\ddot{x})$  es la fuerza debida a la aceleración que experimenta una masa,  $m$  es la masa,  $\ddot{x}$  es la aceleración ( $\ddot{x}$  representa la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo).

El trabajo es igual a la fuerza que altera el estado de movimiento de un cuerpo [12], [14]. El trabajo realizado en una masa se almacena como energía cinética  $E_{c_m}$ :

$$E_{c_m} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (1.6)$$

- Elementos de disipación de energía (amortiguador) [12].

En sistemas físicos, la energía que produce la vibración se convierte gradualmente en calor o en sonido. Debido a la reducción de energía, la respuesta, como el desplazamiento del sistema, se reduce gradualmente.

El mecanismo mediante el cual la energía vibratoria se convierte gradualmente en calor o en sonido se conoce como amortiguamiento. Aún cuando la cantidad de energía convertida en calor o en sonido es relativamente pequeña, la

consideración del amortiguamiento llega a ser importante para predecir con exactitud la respuesta a la vibración de un sistema. Se supone que un amortiguador no tiene masa ni elasticidad, y que la fuerza de amortiguamiento existe sólo si hay una velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador. La expresión que relaciona la fuerza con la velocidad en un elemento de disipación es:

$$F(\dot{x}) = c\dot{x} \quad (1.7)$$

donde  $F(\dot{x})$  es la fuerza debida al amortiguador,  $c$  es la constante de amortiguamiento la cual es positiva y representa la disipación de energía del amortiguador,  $\dot{x}$  es la velocidad ( $\dot{x}$  representa la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo).

La disipación de energía  $Ed_c$  en un amortiguador está dada por:

$$Ed_c = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 \quad (1.8)$$

Se pueden identificar algunos parámetros que definen a un fenómeno vibratorio, como son la frecuencia natural no amortiguada, el factor de amortiguamiento relativo y el periodo de la vibración [13], [14]. Estos parámetros se especifican a continuación:

1. Frecuencia natural no amortiguada ( $\omega_n$ ). Representa la frecuencia de oscilación del sistema en *rad/s*:

$$\omega_n = 2\pi f_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.9)$$

donde  $f_n$  se refiere a la frecuencia natural en *Hz*,  $k$  es la constante de resorte y  $m$  es la masa.

2. Factor de amortiguamiento relativo ( $\zeta$ ). Sirve para interpretar la respuesta de un sistema ante una excitación:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c\omega_n}{2k} \quad (1.10)$$

cuando  $\zeta = 1$ , el sistema es críticamente amortiguado; cuando  $0 < \zeta < 1$ , el sistema es subamortiguado; y cuando  $\zeta > 1$ , el sistema es sobreamortiguado.

3. Periodo de vibración ( $T$ ). Tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de la oscilación:

$$T = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (1.11)$$

### 1.2.3. Vibración en el proceso de fresado

Un problema recurrente en el proceso de fresado son las vibraciones que pueden ser causadas por sujeciones incorrectas o poco rígidas de la pieza o porque la pieza se deforma cuando incide sobre ella cada diente de la fresa [4], [5]. Dichas vibraciones afectan a las tolerancias dimensionales y a los acabados superficiales obtenidos. Para mejorar los acabados superficiales de las piezas mecanizadas es esencial que el sistema sea estable.

Tres tipos de vibración son susceptibles de presentarse durante las operaciones de fresado: libre, forzada y auto-excitada [4], [5], [15]. Los primeros dos tipos ya han sido definidos en la Sección 1.2.1; la vibración auto-excitada se define a continuación.

La vibración auto-excitada es consecuencia del efecto regenerativo relacionado con los parámetros de corte (la velocidad del husillo, la velocidad de avance, la profundidad axial y radial). Este efecto se presenta en el fresado debido a que, por ser un proceso interrumpido, los cortes de material generan ondulaciones en la pieza de trabajo y viruta de espesor variable; en cortes subsecuentes, estas condiciones generan oscilaciones entre la pieza y el cortador. Este tipo de vibración es también conocida como *chatter*<sup>2</sup> por el ruido característico y molesto que produce. De los tipos de vibraciones descritos, la vibración auto-excitada es la más indeseable por sus repercusiones en la calidad y por los daños que causa a los componentes del sistema [4], [5], [6], [15], [16].

Si la vibración auto-excitada no decae lo suficiente entre desbastes consecutivos, la frecuencia del fenómeno se amplifica indefinidamente por los sucesivos impactos hasta alcanzar un punto de saturación; suele decirse que el proceso se ha vuelto inestable. Existen dos condiciones para que se produzca la vibración auto-excitada [17], [4]:

- Que exista un cierto desfase entre la ondulación dejada por el filo anterior y el actual, estando el desfase más desfavorable en  $90^\circ$ . Esto quiere decir que si se consigue un régimen de funcionamiento en fase, no aparecería la vibración.
- Que el paso de diente sea constante, con lo cual la energía en cada filo impide la atenuación de la vibración actual y permite su aumento de manera exponencial. La energía depende directamente de la profundidad de corte, por lo que si se trabaja con una profundidad de corte suficientemente pequeña no se tendrán problemas de vibración.

El mecanismo de aparición y la disminución de la vibración auto-excitada son temas de interés en las investigaciones de manufactura debido al impacto negativo

---

<sup>2</sup>La traducción al español es traquetear, tintinear. En manufactura se entiende como retemblado o vibración auto-excitada.

que representan [16]. La naturaleza infinito-dimensional de las de las ecuaciones con retardos temporales genera incertidumbre en los análisis de estabilidad del proceso de fresado, ya que en algunos resultados se consiguen altas profundidades de corte estables, pero se ha mostrado que en la práctica se presenta vibración (véase [33]). Mantener una profundidad y una velocidad bajas durante las operaciones de corte, disminuye la posibilidad de aparición de vibraciones pero se reduce la capacidad productiva, lo que aumenta los costos del proceso [4], [6]. Establecer condiciones de corte óptimas, sin altas profundidades que den lugar a incertidumbre, ni bajas profundidades que limiten la capacidad productiva, es el objetivo de las investigaciones de la vibración en el proceso de fresado.

### 1.3. Modelado de sistemas dinámicos

La existencia de un modelo matemático permite el estudio del comportamiento de sistemas bajo distintas condiciones de análisis y permite proponer el diseño a partir de una predicción del funcionamiento del sistema antes de que pueda construirse físicamente. Por tanto, modelar cualquier sistema permite caracterizar las relaciones existentes entre los atributos con el fin de estudiar su comportamiento (análisis), o reproducir su evolución temporal bajo ciertas condiciones (simulación).

El conjunto de expresiones que caracterizan la evolución de las variables de estado o bien de las salidas de un sistema para distintas situaciones es conocido como modelo matemático. Si se trata de modelar un sistema físico, hay que buscar las leyes físicas que definen las relaciones entre las magnitudes fundamentales, dichas relaciones pueden representarse mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en la forma [7], [8]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1.12)$$

la cual es la descripción común de sistemas dinámicos. En esta ecuación, las variables  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  son conocidas como variables de estado y las derivadas representan la evolución de las variables de estado con respecto al tiempo.

Existen distintas formas de expresar el modelo matemático de un sistema dinámico, las principales son descripción interna y descripción externa. Las representaciones que consideran ecuaciones diferenciales que modelan la evolución de las variables de estado se denominan descripciones internas. Las ecuaciones diferenciales que componen una representación interna suelen llamarse modelos de estado. Las representaciones que únicamente consideran las ecuaciones diferenciales que relacionan las variables de entrada y salida se denominan descripciones externas. Las ecuaciones de las descripciones externas se obtienen eliminando las variables de estado de las ecuaciones diferenciales del sistema.

### 1.3.1. Parámetros concentrados y distribuidos

Para modelar matemáticamente fenómenos reales, se utilizan elementos ideales (masa puntual, carga concentrada en un punto del espacio), es decir, consideramos que los valores que determinan las características físicas de los objetos se encuentran concentrados en un punto. Estas entidades que no tienen existencia real reciben el nombre de *modelos de parámetros concentrados* [13]. Estos modelos se caracterizan mediante el uso de ecuaciones diferenciales ordinarias [8].

Los modelos matemáticos que toman en cuenta el comportamiento real de los elementos que interactúan en un sistema (cargas distribuidas, resistencias eléctricas con efectos capacitivos, resortes con masa) se denominan *modelos de parámetros distribuidos* [13]. Estos modelos se caracterizan mediante el uso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Los modelos matemáticos para representar elementos de parámetros distribuidos son complejos, además, la aparición de este tipo de elementos implica que la transmisión de señales entre sistemas no se hace de forma instantánea y, en ciertos casos, hay que considerar un tiempo de transmisión (retardo) [18].

Sin embargo, en muchas situaciones se puede considerar que el valor de los parámetros está concentrado en un punto determinado. Por tanto, son numerosos los casos en los que pueden utilizarse modelos de parámetros concentrados que aproximen con exactitud el comportamiento del sistema real [8], [12], [13], [14].

La mayoría de los sistemas presentan características no lineales. Una función no lineal puede aproximarse en un punto específico de operación por una función lineal; a este procedimiento se le llama linealización. Gracias a la linealización es posible aplicar numerosos métodos de análisis lineal que producen información acerca del comportamiento del sistema. Se denomina *punto de equilibrio* al valor que toman las variables de estado, en las condiciones en las que el sistema se encuentra normalmente [7], [18].

### 1.3.2. Clasificación de sistemas dinámicos

Para el análisis de procesos es necesario plantear modelos paramétricos que describan las dinámicas del sistema, para realizarlo es necesario conocer los tipos de sistemas que existen; a continuación se describen algunas clasificaciones [14].

**Discretos y continuos.** Cuando se considera que el tiempo sólo toma valores enteros ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) los valores de una variable  $y$  a lo largo del tiempo forman una sucesión numérica  $y_t$ . Cuando el valor de esta variable en el instante siguiente depende de los valores que toma en instantes anteriores tenemos un



sistema dinámico discreto. Si se tiene una regla que relaciona estos valores se dice que el sistema está definido de modo recursivo y, cuando la relación es funcional, toma la forma:

$$y_{n+t+1} = F(t, y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n})$$

Si el tiempo es medido en forma continua, el sistema dinámico resultante es expresado como una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

**Variantes e invariantes en el tiempo.** Normalmente, la variable independiente usada en el análisis de la dinámica de los sistemas es el tiempo, designado como  $t$ . Una ecuación diferencial es variable en el tiempo si alguno de los coeficientes que multiplican a la variable dependiente o a sus derivadas están en función del tiempo. Una ecuación diferencial es invariante en el tiempo si todos los coeficientes que multiplican a la variable dependiente o a sus derivadas son constantes.

**Lineal y no lineal.** La linealidad o no linealidad de un sistema está determinada por la naturaleza de la ecuación diferencial que lo modela. Una ecuación diferencial lineal es aquella que consiste en una suma de términos lineales, o sea, términos de primer grado en las variables dependientes y en sus derivadas. En realidad, la mayor parte de los sistemas son no lineales, sin embargo, en muchas situaciones pueden describirse por modelos lineales que dan buena información del comportamiento dinámico del sistema.

### 1.3.3. Sistemas dinámicos con retardos temporales

En la descripción de un sistema dinámico en la forma de la ecuación (1.12), una presunción fundamental es que la evolución futura del sistema está completamente determinada por el valor actual de las variables de estado, es decir, el valor de las variables de estado  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t < \infty$  para todo  $t_0$ , puede ser determinado por la condición inicial conocida  $x(t_0) = x_0$  [8], [18].

Es necesario aclarar que, en determinados casos, para conocer el comportamiento de los sistemas dinámicos, el modelado mediante EDO no es suficiente, ya que las variables de estado  $x(t)$  no solo dependen del valor actual, sino también de valores pasados y se construyen a partir de un segmento de trayectoria que constituye la condición inicial  $x(\theta)$ ,  $t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0$ . Cuando el modelo presenta este tipo de condición se dice que es un sistema con retardos temporales [8], [18], [19], [20].

La presencia de retardos temporales en sistemas prácticos puede presentarse como comportamientos propios del proceso (por ejemplo, calentamiento de agua) o

introducidos a la dinámica por agentes externos (por ejemplo, tiempos de cómputo). El atender la presencia de retardos permite conocer a profundidad la dinámica del sistema, aunque en ocasiones una aproximación del retardo converge a resultados similares con esquemas de análisis clásicos [8], [18].

Para establecer matemáticamente los sistemas con retardos es necesario definir las Ecuaciones Diferenciales Funcionales (EDF) que tienen la forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(g(t))) \quad (1.13)$$

donde se observa que al menos uno de los argumentos en la ecuación depende de una función  $g(t)$  y no directamente del tiempo  $t$  como en las EDO [19].

Con la definición de las EDF es posible describir sistemas en los que la tasa de cambio en el estado depende de argumentos diferentes al estado actual. Las EDF pueden clasificarse como retardadas, neutrales y avanzadas [19], [21].

**EDF retardada.** El sistema depende del valor presente y pasado de la variable de estado.

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \quad (1.14)$$

**EDF neutral.** El sistema depende de valores presentes y pasados de la variable de estado y sus derivadas.

$$\dot{x}(t) + B\dot{x}(t - h) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \quad (1.15)$$

**EDF avanzada.** El sistema depende del valor presente y futuro de la variable de estado. No es posible modelar fenómenos de la naturaleza con este tipo de ecuaciones [18], [19].

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t + \tau)$$

La solución particular de un sistema descrito por una EDO (ecuación (1.12)), es decir sin retardos, depende de las condiciones iniciales que incluyen un instante de tiempo inicial  $t_0$  y un estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Esto no es suficiente cuando se busca una solución para el sistema descrito por las EDF retardada (1.14) o EDF neutral (1.15) [20]. Para definir la solución de un sistema de tipo retardado, es necesario tomar un instante de tiempo inicial  $t_0 \geq 0$  y una función inicial  $\psi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces el problema de valor inicial para sistemas con retardos se define a partir de:

$$x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

donde la función  $\psi$  pertenece a un espacio funcional, que puede ser un espacio de funciones continuas, un espacio de funciones continuas por trozos o algún otro espacio funcional.

### Sistemas periódicos

Un sistema periódico es aquel que completa un patrón a intervalos medibles de tiempo. Este patrón es denominado periodo, y repite ese patrón en los periodos siguientes, es decir,  $x(t)$  tiene la propiedad de que existe un número positivo  $T$  para el cual

$$x(t) = x(t \pm nT)$$

En este caso se dice que el sistema es periódico para todo  $T$  y cualquier entero  $n$ .

En la literatura, la vibración auto-excitada dentro del proceso de fresado es normalmente descrita mediante ecuaciones no lineales donde se identifican coeficientes que dependen del tiempo (cortes previos y espesor de viruta), además, al ser un proceso de corte interrumpido, presenta un periodo determinado por la velocidad de giro y el número de dientes de la herramienta de corte, por lo tanto es considerado un sistema periódico (véase por ejemplo [22], [23]).

El efecto regenerativo produce términos con retardos temporales en la dinámica del sistema y la particularidad en el proceso de fresado es que la cinemática rotacional de la herramienta conduce a efectos periódicos direccionales, es decir, ondulaciones en la superficie, como se muestra en la Figura 1.9. En consecuencia, el modelo que describe las vibraciones auto-excitadas que ocurren en este proceso está dado por un sistema de ecuaciones con retardos y coeficientes periódicos (ecuación 1.16), [4], [5], [6], [8], [16], [22]. La siguiente ecuación constituye el modelo del proceso de fresado comúnmente utilizado en la literatura:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = R(t)a[x(t - \tau) - x(t)] \quad (1.16)$$

donde  $m$  es la masa,  $c$  es la constante del amortiguador,  $k$  es la constante de resorte,  $R(t)$  es el coeficiente de fuerza de corte,  $a$  es la profundidad de corte,  $x(t)$  es el desplazamiento de la herramienta de corte y  $x(t - \tau)$  es el desplazamiento previo de la herramienta de corte.

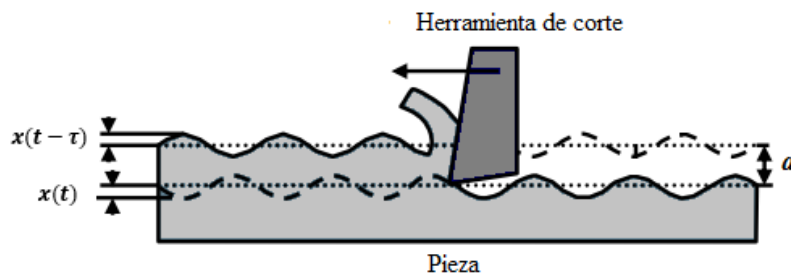


Figura 1.9: Efecto regenerativo en el proceso de fresado [22]

## 1.4. Estabilidad

La estabilidad en un sistema se refiere a la continuidad en el comportamiento dinámico del sistema, es decir, si en las entradas o condiciones iniciales se presenta una pequeña perturbación, un sistema estable presentaría modificaciones pequeñas en su respuesta. Pero, si se presenta una perturbación en las entradas o condiciones iniciales de un sistema inestable, por pequeña que sea ésta, llevará a los estados o salidas del sistema a crecer sin límite, lo que físicamente representaría que el sistema se quema, se desintegra o se satura. Por lo tanto, para sistemas dinámicos que realizan operaciones o procesan señales, la estabilidad es una condición necesaria que debe ser garantizada en el diseño del sistema de control [7], [12].

Para propósitos de análisis y diseño, la estabilidad se puede clasificar como estabilidad absoluta y relativa [18], [24]. Pero cuando se consideran todos los tipos de sistemas (lineal, no lineal, invariante en el tiempo y variante en el tiempo), la definición de estabilidad se puede dar en muchas formas diferentes.

El estudio de la estabilidad es de los principales problemas que se plantea la teoría de control desde sus orígenes. Para sistemas lineales de dimensión finita es posible aplicar las nociones de estabilidad conocidas en torno a conceptos básicos que pueden caracterizarse mediante términos algebraicos. Por ejemplo, la estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo queda asegurada si todas las raíces del polinomio característico del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo (véase Figura 1.10).

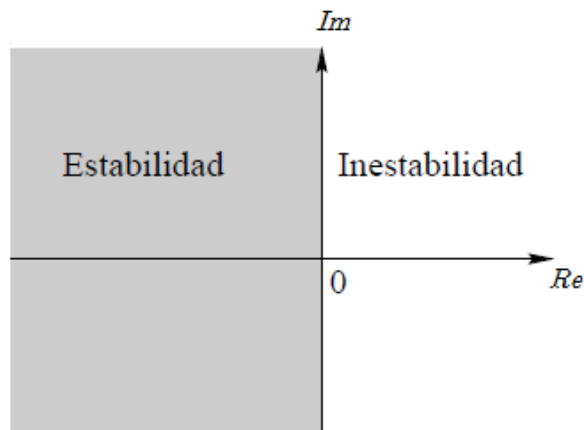


Figura 1.10: Regiones de estabilidad en el plano complejo [24]

Sin embargo, para los sistemas no lineales existen comportamientos mucho más amplios, de modo que la clasificación de sistemas estables y no estables que se realiza

para los sistemas lineales no es posible. Un problema en el estudio de los sistemas no lineales es el establecer condiciones de estabilidad de un sistema sin conocer explícitamente sus soluciones. La contribución clave para la solución de este problema son los trabajos de Lyapunov [18], [24]. En su segundo método de análisis de estabilidad permite demostrar propiedades locales y globales de estabilidad a partir de las características de disipación de una función de energía.

La ampliación la teoría de Lyapunov permitió reconocer que las funciones de Lyapunov pueden captar la propia naturaleza de la estabilidad asintótica y que la existencia de esas funciones, con adecuadas propiedades de disminución a lo largo de las trayectorias del sistema, permiten determinar la estabilidad asintótica tanto local como globalmente. El análisis de la disipación de energía y el segundo método de Lyapunov permiten el desarrollo de los llamados métodos constructivos de control no lineal que normalmente se aplican a sistemas de dimensiones finitas [24].

#### 1.4.1. Tipos de estabilidad

En general, la estabilidad de un sistema puede definirse de muchas maneras, dependiendo de los requerimientos de alguna aplicación especial. Para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, todas las definiciones comunes de estabilidad son equivalentes. Los tipos de estabilidad más comunes se describen a continuación [18], [24].

**Estabilidad asintótica** Un sistema es asintóticamente estable si, para todas las condiciones iniciales posibles, su respuesta de entrada cero se aproxima a cero con el tiempo. En un sistema lineal invariante en el tiempo con una función de transferencia racional existe un término de respuesta de entrada cero por cada raíz del denominador. Un término de respuesta crece (decrece) con el tiempo si la raíz está situada en el semiplano derecho (izquierdo). De aquí que el sistema sea asintóticamente estable si y solo si todas las raíces características del denominador pertenecen al semiplano izquierdo (véase Figura 1.10).

**Estabilidad exponencial** Se dice que el equilibrio  $x = 0$  de un sistema es exponencialmente estable si existen constantes positivas  $\alpha, \beta$  y  $\delta$  tales que

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0$$

Claramente el concepto de estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica; lo contrario no es cierto. La estabilidad exponencial es la propiedad deseada cuando se requiere especificar la velocidad del transitorio.

**Estabilidad en el sentido de Lyapunov** Se dice que el equilibrio  $x = 0$  de un sistema es localmente estable en el sentido de Lyapunov o simplemente estable,

cuando para cada  $\varepsilon > 0$  existe un valor  $\delta > 0$  (posiblemente dependiente de  $\varepsilon$ ) tal que

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

De manera informal, esta definición establece que si existe una distancia  $\delta$  dentro de la cual se puede escoger cualquier condición inicial y la evolución de la trayectoria correspondiente del sistema se mantiene dentro de una cota radial  $\varepsilon$  específica, se garantiza la estabilidad del sistema. La Figura 1.11 ilustra el significado de esta definición. En ella se observa en el plano una trayectoria que parte dentro del círculo de radio  $\delta$  y no sale del círculo de radio  $\varepsilon$  (si el sistema es estable esta trayectoria no debe salir de este círculo de radio  $\varepsilon$  por mucho que avance el tiempo ni ninguna otra trayectoria que parta del círculo de radio  $\delta$ ).

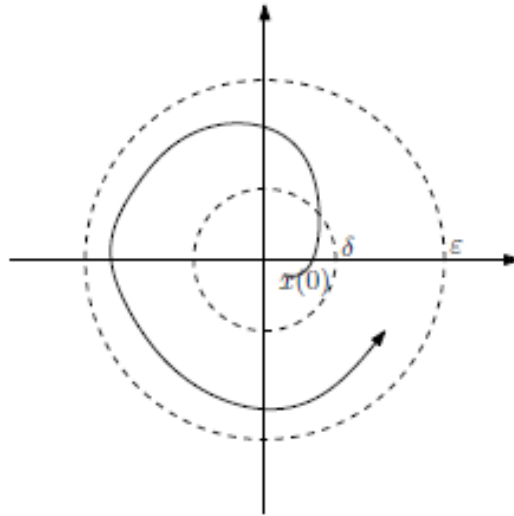


Figura 1.11: Estabilidad en el sentido de Lyapunov [18]

**Estabilidad asintótica global** Se dice que el equilibrio  $x = 0$  del sistema es global y asintóticamente estable si es estable en el sentido de Lyapunov y además, se tiene que para todo  $x(0) \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

**Estabilidad exponencial global** Se dice que el equilibrio  $x = 0$  de un sistema es global y exponencialmente estable si existen constantes positivas  $\alpha$  y  $\beta$  tales que

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \quad t \geq 0 \text{ para todo } x(0) \in \mathbb{R}^n$$

### 1.4.2. Criterio de estabilidad de Lyapunov

Alexandr Mikhailovich Lyapunov a finales del siglo XIX propone en su trabajo “*The general problem of motion stability*” dos métodos para analizar la estabilidad: el método de linealización (conocido también como primer método) y el método directo (conocido también como segundo método), los cuales constituyen la Teoría de estabilidad de Lyapunov. Mediante el método de linealización se puede concluir sobre la estabilidad local de sistemas no lineales alrededor de un punto de equilibrio mediante aproximaciones lineales. Por otra parte, el método directo es la herramienta más importante para el análisis de sistemas no lineales y es descrito a continuación.

#### Método directo de Lyapunov [24]

Considérese el sistema  $\dot{x} = f(x)$  y supóngase que existe una función continuamente diferenciable  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathcal{D}, x \neq 0$$

Si se cumple

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0, \quad x \in \mathcal{D}$$

entonces, el equilibrio  $x = 0$  es estable en el sentido de Lyapunov.

Si además se cumple

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0, \quad x \in \mathcal{D}, x \neq 0$$

entonces, el equilibrio  $x = 0$  es asintóticamente estable. Esta estabilidad será globalmente asintóticamente estable si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  y, además, la función  $V$  es radialmente no acotada, es decir,  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ . Finalmente, si existen escalares  $\alpha, \beta$  y  $\gamma > 0$  tales que

$$\alpha \|x\| \leq V(x) \leq \beta \|x\|, \quad x \in \mathcal{D},$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < \gamma, \quad x \in \mathcal{D}$$

entonces el equilibrio  $x = 0$  es exponencialmente estable. Esta estabilidad será globalmente exponencialmente estable si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  y, además, la función  $V$  es radialmente no acotada. Nótese que, el teorema de Lyapunov proporciona condiciones suficientes para determinar la estabilidad, pero no necesarias.

Es importante mencionar que no existe un método generalizado para encontrar la función de Lyapunov, con lo cual, el hecho de que una candidata a función de Lyapunov no cumpla las condiciones del teorema, no indica que el equilibrio  $x = 0$

no sea estable; siendo éste uno de los mayores inconvenientes del método.

Como ejemplo ilustrativo se analiza la estabilidad del siguiente sistema mediante el método directo de Lyapunov [24]:

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n$$

donde  $A$  es una matriz constante de dimensión  $n \times n$ . Se propone una función de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , de la cual se obtiene la derivada con respecto al tiempo

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

Sustituyendo la dinámica del sistema se tiene:

$$\dot{V} = x^T (A^T P + P A) x$$

El sistema es estable si  $\dot{V} < 0$ , lo que es equivalente a la existencia de una matriz simétrica definida positiva  $P$  que debe cumplir la desigualdad matricial

$$A^T P + P A < 0 \tag{1.17}$$

Esta desigualdad matricial lineal es conocida como LMI (por sus siglas en inglés).

## 1.5. Estado del arte

Existe un gran número de trabajos de investigación que buscan prevenir y erradicar las vibraciones, sin embargo este problema aún afecta la productividad del proceso de fresado en la industria [4]. A continuación se describen brevemente algunos de estos trabajos.

Las vibraciones son una limitante común en el proceso de fresado y han sido objeto de estudio desde las primeras décadas del siglo XX, en esa época se describió a la vibración como “el problema más oscuro y delicado que enfrentan los maquinistas” [4]. Se consideraba que la vibración auto-excitada se presentaba debido al efecto de amortiguamiento negativo, es decir, los elementos que disipan energía no cumplen esta función, por el contrario la aumentan debido a la oscilación propia de la estructura [31].

Después de realizar extensos trabajos de investigación, Tobias y Fishwick en 1958 [16] y Tlustý y Poláček en 1963 [6] describieron el efecto regenerativo en procesos de remoción de material, que es la explicación más aceptada de la aparición de vibración auto-excitada [4], [31].



Los modelos matemáticos que describen el efecto regenerativo están dados por EDF retardadas, que presentan naturaleza infinito dimensional. En el caso del proceso de torneado, la vibración puede ser analizada mediante el método de D-particiones ya que el modelo del sistema es lineal con retardos. A diferencia de éste, en el proceso de fresado la dirección de la fuerza cambia durante la rotación y el corte es interrumpido debido a la entrada y salida del diente, por lo cual el modelo es descrito mediante una EDF retardada no lineal con coeficientes periódicos. Mediante una extensión de la teoría de Floquet para sistemas con retardos, es posible analizar el modelo del fresado a través del análisis de los valores propios de la matriz de monodromía del sistema [32], [33].

Sridhar et al. en 1968 [28] proponen utilizar el concepto de matriz de transición de estados, que se calcula mediante simulaciones en el dominio del tiempo, en la que los valores propios de la matriz que se encuentran fuera del círculo unitario indican inestabilidad. Opitz y Bernardi en 1970 [34] aplicaron la teoría de la estabilidad del torneado para el proceso de fresado en donde aproximan los coeficientes periódicos del modelo por constantes mediante el cálculo de valores medios durante un periodo de giro de la herramienta.

Numerosos métodos analíticos se han desarrollado para determinar la estabilidad del proceso. Durante las décadas de los ochentas y noventas se realizaron trabajos basados en técnicas en el dominio del tiempo que proponen soluciones numéricas basadas en las aproximaciones de Euler, Runge Kutta y Tustin [35]. Las técnicas en el dominio del tiempo se basan en la integración numérica de las ecuaciones del movimiento y permiten introducir de forma precisa la cinemática del proceso, la geometría de corte de la herramienta y las posibles no linealidades. En una simulación en el dominio del tiempo, se predicen las fuerzas y vibraciones para un conjunto específico de parámetros de corte y las señales resultantes (fuerzas y desplazamientos) se analizan para determinar la presencia de vibración auto-excitada, sin embargo estos métodos no ofrecen información sobre las zonas estables e inestables de todo el sistema. Para obtener esta información hay que realizar un conjunto de simulaciones en el tiempo y un barrido de condiciones de corte para predecir las regiones de estabilidad [36], [37]. En el estudio de la estabilidad en el dominio del tiempo, el mayor inconveniente es su alto costo computacional en comparación con el correspondiente a los métodos en el dominio de la frecuencia [6], [28].

Como ejemplos de métodos para la obtención de las fronteras de estabilidad en el espacio de parámetros mediante técnicas en el dominio del tiempo en el proceso de fresado, están el análisis de elementos finitos temporales [38] y el análisis mediante semi-discretización [22], [23] que son técnicas numéricas que aproximan y reducen la complejidad de los sistemas con retardos temporales y coeficientes periódicos.

Minis et al. en 1993 [39] aplicaron la teoría de las ecuaciones diferenciales periódicas (la teoría de Floquet y el análisis de Fourier) en las ecuaciones dinámicas del fresado. El algoritmo depende de la evaluación numérica en el dominio de la frecuencia de los límites de estabilidad y proporciona una mayor comprensión del modelo en comparación con los resultados obtenidos con los métodos en el dominio del tiempo [31]. Los métodos en el dominio de la frecuencia para analizar la estabilidad de la ecuación dinámica del proceso se consideran rápidos computacionalmente, sin embargo, conllevan hipótesis simplificadoras tales como fuerzas lineales, geometrías de corte sencillas y no permiten incluir no linealidades [6], [27]. Esto aumenta el error en los resultados y el riesgo de incertidumbre en la operación.

Altintas y Budak en 1995 [25] proporcionaron una solución analítica, basada en un análisis monofrecuencial bidimensional, conocida como método de aproximación de orden cero (*the zeroth order approximation method ZOA*) que permite obtener rápidamente un gráfico de estabilidad para el proceso de fresado. El resultado converge al mismo valor obtenido por el algoritmo numérico de Minis et al. [39]. Estos modelos en el dominio de la frecuencia suponen que la vibración tiene un único armónico dominante (modelo monofrecuencia). Esta simplificación permite obtener una solución analítica al problema para determinados tipos de fresado tales como en el ortogonal continuo, sin embargo, es ineficiente para otros tipos de fresado en los que el proceso se lleva a cabo a altas velocidades con bajas inmersiones y altos armónicos [15], [27], [35].

Algunas investigaciones de principios del siglo XXI han buscado soluciones mediante aproximaciones matemáticas del desplazamiento relativo basadas en dividir el periodo de corte (inverso de la frecuencia de corte) en cierto número de intervalos, y en cada intervalo el vector de desplazamiento relativo se aproxima por los polinomios de Hermite [38].

La mayoría de los análisis descritos hasta ahora muestran sus resultados en una gráfica conocida como lóbulos de estabilidad. En los lóbulos de estabilidad se representa la frontera entre cortes estables (sin vibración) e inestables (con vibración) dependiendo de la profundidad de corte y la velocidad de giro del husillo (véase la Figura 1.12). Estos lóbulos establecen un límite entre profundidades de corte estables para una velocidad de giro de la herramienta determinada. A partir de la construcción del gráfico de lóbulos, se pueden seleccionar las condiciones de corte apropiadas para evitar la aparición de vibración [23], [25], [26].

Yang y Muñoa en 2010 [41] proponen el diseño de elementos de absorción de vibraciones, el prototipo se ha validado con pruebas controladas obteniendo una disminución en las ondulaciones de la pieza de trabajo y continúa en fase de implementación.

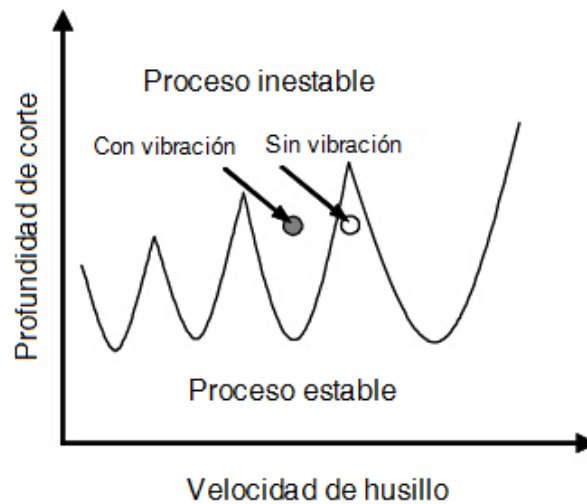


Figura 1.12: Lóbulos de estabilidad [29]

E. Graham en 2012 [42] analiza la estabilidad del proceso de fresado usando enfoques en la frecuencia y en el tiempo mediante el Teorema de Edge y la teoría de estabilidad de Lyapunov (considerando una aproximación de los términos retardados del modelo), respectivamente. Con base en el enfoque de control robusto, el análisis permite considerar la variación de los parámetros en cada giro de la herramienta.

Yang, Xu y Liu en 2014 [43] proponen la reducción de vibración mediante el amortiguamiento de la corriente parásita (Eddy Current Damping), el método se valida mediante experimentos con diferentes velocidades de avance, velocidad en el eje y profundidades axiales. Mediante lo cual obtienen disminuciones en la amplitud de la vibración, sin embargo, su implementación requiere de un dispositivo que esté en contacto con la pieza de trabajo.

Totis, Albertelli, Sortino y Monnob en 2014 [44] proponen un algoritmo basado en el método de colocación de Chebyshev para la predicción rápida de las variables que intervienen en la aplicación de la técnica conocida como variación de la velocidad en el husillo y comparan los resultados con los obtenidos con el método de semi-discretización; la técnica utilizada mostró una mayor precisión y rapidez en la obtención de los resultados.

Molnár e Insperger en 2015 [45] investigan la estabilidad para un modelo de dos grados de libertad del proceso de fresado con herramienta helicoidal, donde la fuerza de corte se modela como una fuerza distribuida a lo largo de la cara de la herramienta de corte. La presencia de la fuerza distribuida en lugar de la fuerza concentrada

modifica las ecuaciones que gobiernan el sistema y afecta significativamente la estabilidad, especialmente a bajas velocidades. El estudio se lleva a cabo mediante la técnica de semi-discretización.

Existen herramientas computacionales que se han desarrollado como parte del análisis de la vibración en el proceso de fresado. A continuación se describen algunas de éstas:

- *CutPro*<sup>®</sup> [29].

El software de simulación *CutPro*<sup>®</sup> *11 Milling Module* es una propuesta para la planificación y solución de problemas en el proceso de fresado. Este módulo permite seleccionar diferentes modos de simulación, modelos de fresadora y tipos de cortadores (de inclinación variable, con punta de bola, dentados y con cualquier geometría definida por el usuario). Además, permite considerar las características de una gran variedad de materiales y modificar los parámetros de la dinámica de la máquina, de la herramienta y de la pieza de trabajo.

El software desarrolla los siguientes análisis: fuerzas de corte en tres direcciones, fuerza resultante, fuerza tangencial, diagrama de fuerza contra velocidad de avance, espesor de viruta, vibraciones de la herramienta (desviación), vibraciones de la pieza de trabajo, esfuerzo de torsión del husillo, acabado superficial, lóbulos de estabilidad analítica y transformada rápida de Fourier. El costo y la limitada lista de fresadoras en su base de datos son su principal desventaja.

- *MetalMax and Harmonizer*<sup>®</sup> [30].

*MetalMax*<sup>®</sup> proporciona un diagrama de estabilidad que muestra los puntos de vibración y resonancia, así como las máximas tasas de remoción de material. Utiliza una técnica conocida como análisis modal para determinar las características estructurales del sistema con base en los datos obtenidos mediante *Harmonizer*<sup>®</sup>, el cual utiliza una técnica patentada de audio para analizar el proceso. Al tratarse de un dispositivo ajeno al proceso, puede entorpecer la operación de corte.

## Capítulo 2

# Modelo matemático del proceso de fresado

La vibración en el proceso de fresado (Figura 2.1) se ha estudiado desde la década de 1950 cuando J. Tlustý y M. Poláček [6] y S.A. Tobias y W. Fishwick [16] definen el efecto regenerativo. A partir de estos trabajos se generan investigaciones en las que se presentan diferentes modelos matemáticos del mecanismo de aparición de la vibración [25], [28], [34], [37]. Actualmente las investigaciones analíticas de la vibración en el proceso de fresado parten de los estudios previos y consideran los modelos que estos trabajos presentaron.

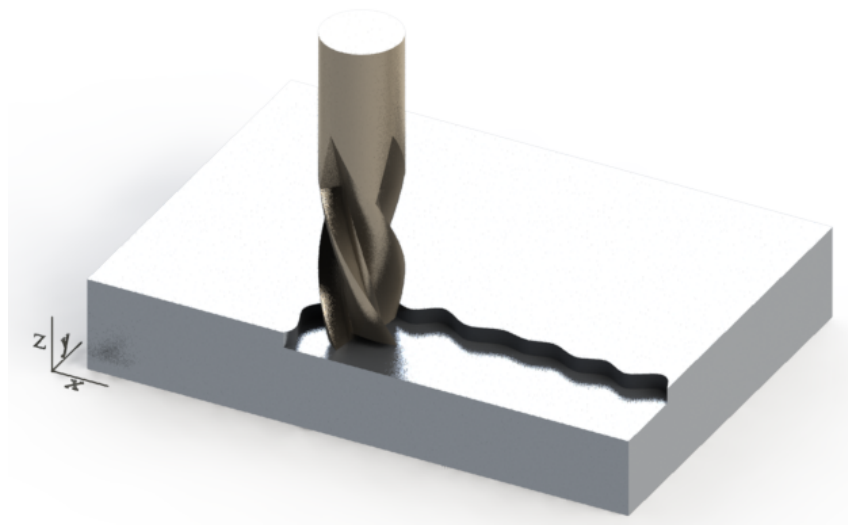


Figura 2.1: Representación del proceso de fresado

El modelo que comúnmente se utiliza para representar la dinámica de la vibración auto-excitada en el proceso de fresado está dado por la siguiente ecuación (véase [4], [5], [15]):

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (2.1)$$

la cual describe un sistema vibratorio de parámetros concentrados donde  $x(t)$ ,  $m$ ,  $c$  y  $k$  representan el desplazamiento, la masa, la constante de amortiguamiento y la constante de resorte, respectivamente. La parte derecha de la ecuación describe el efecto regenerativo, que usualmente se representa mediante un retardo temporal y, además, incluye términos no lineales que describen la dinámica de la formación de viruta.

## 2.1. Modelo de un grado de libertad

La Figura 2.2, que representa la vista frontal de la Figura 2.1 e ilustra las dinámicas del modelo de un grado de libertad, se toma como base para el modelo de un grado de libertad desarrollado por T. Insperger y G. Stépán [48].

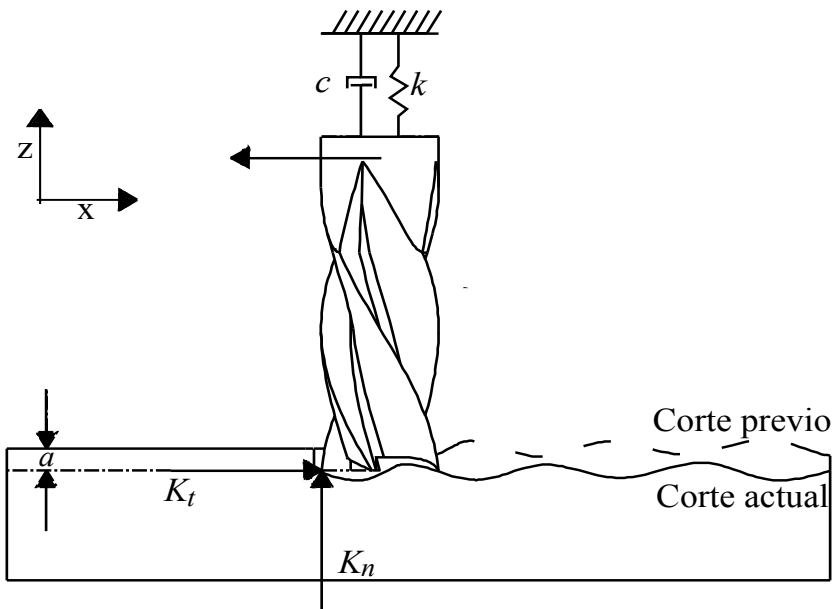


Figura 2.2: Diagrama de un grado de libertad del proceso de fresado

El modelo de un grado de libertad del proceso de fresado propuesto en [48] se muestra a continuación (véase también [21], [46]):

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = R(t)a[x(t - \tau) - x(t)] \quad (2.2)$$

La parte derecha de la ecuación describe el efecto regenerativo, donde las fuerzas generadas por la remoción de material causan una deflexión en la herramienta de corte. Si ésta vibra, se generan ondulaciones en la superficie de la pieza y en los cortes subsecuentes genera un espesor de viruta variable que puede desencadenar inestabilidad (presencia de *chatter*) [21]. En este modelo, el parámetro  $a$  es la profundidad de corte,  $x(t)$  es la pasada de corte actual,  $x(t - \tau)$  es la pasada de corte previo, donde el retardo  $\tau$  es igual al periodo de giro de la herramienta  $T$ :

$$\tau = T = \frac{2\pi}{N\Omega}$$

donde  $N$  es el número de dientes y  $\Omega$  es la velocidad de giro expresada en *rad/s*, que es equivalente a:

$$\tau = \frac{60}{N\Omega} \quad (2.3)$$

cuando  $\Omega$  se expresa en *rpm*.

El proceso involucra el contacto entre dos materiales, por lo cual se genera una fuerza de corte resultante  $R(t)$  expresada como [48]:

$$R(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \sin(\phi_j(t)) [K_t \cos(\phi_j(t)) + K_n \sin(\phi_j(t))] \quad (2.4)$$

donde  $\phi_j$  es el ángulo de corte del  $j$ -ésimo diente,  $K_t$  y  $K_n$  son los coeficientes linealizados de corte tangencial y normal expresados en  $N/m^2$  [48]. La función  $g(\phi_j(t))$  es definida como:

$$g(\phi_j(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_{st} \leq \phi_j(t) \leq \phi_{ex} \\ 0 & \text{si se encuentra en otra posición} \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $\phi_{st}$  y  $\phi_{ex}$  son los ángulos de entrada y salida del diente (véase Figura 2.3).

El modelo de un grado de libertad permite describir el comportamiento del proceso en el instante en el que el diente incide en el material sobre el eje  $x$ . La variación de  $R(t)$  mostrada en las ecuaciones (2.4) y (2.5) se determina a través del análisis del movimiento de la herramienta en el plano  $x$ - $z$  (véase [21]).

Cabe destacar que primeramente se selecciona el modelo de un grado de libertad aquí descrito, pero con la revisión de la literatura se concluye que este modelo no caracteriza en su totalidad las dinámicas del sistema, es decir, los resultados de análisis derivados mediante este modelo no se reproducen por completo en la práctica [4], [22], [46]. Por esta razón, es seleccionado el modelo de dos grados de libertad, que se identifica en la literatura especializada como una caracterización precisa de la vibración en el proceso de fresado [27], [42] y se presenta en la siguiente sección.

## 2.2. Modelo de dos grados de libertad

Se considera el modelo de dos grados de libertad del proceso de fresado desarrollado por Y. Altintas y E. Budak [25], y utilizado en [15], [27], [42]. Los autores descomponen la dinámica asociada al fresado en la dirección de avance y la dirección normal [24], [13]. Las dinámicas del sistema se describen mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_x \ddot{x}(t) + c_x \dot{x}(t) + k_x x(t) &= \sum_{j=1}^N F_{xj}(t) \\ m_y \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) &= \sum_{j=1}^N F_{yj}(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $m_i$ ,  $c_i$ ,  $k_i$ ,  $i = x, y$  representan la masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, respectivamente, en la dirección de avance  $x$  y normal  $y$ .

La Figura 2.3, que representa la vista inferior de la Figura 2.1, ilustra las dinámicas del modelo de dos grados de libertad y permite una mayor comprensión del modelo desarrollado en [25].

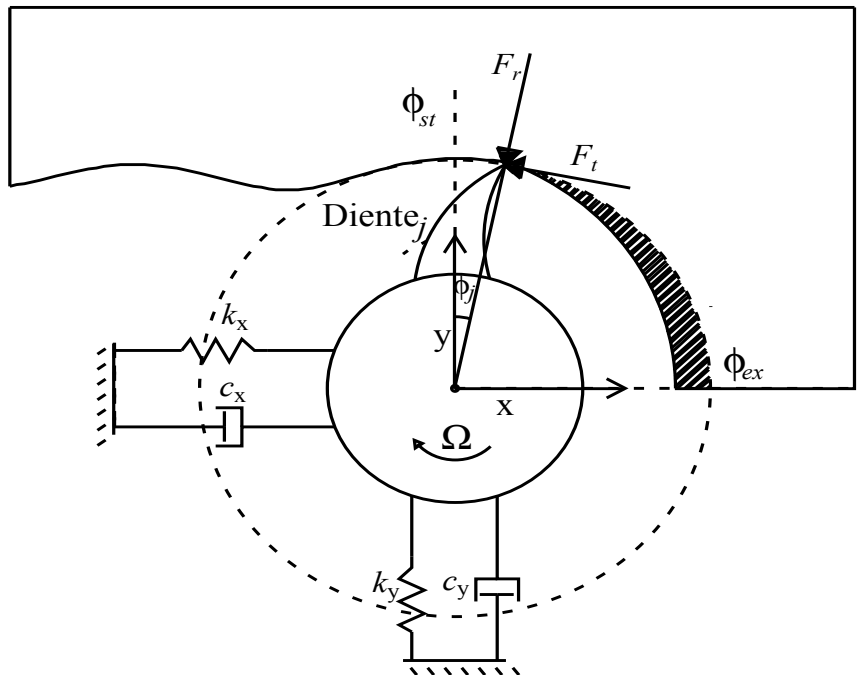


Figura 2.3: Diagrama de dos grados de libertad del proceso de fresado



La parte derecha de la ecuación (2.6) representa la suma de fuerzas de corte de cada uno de los dientes en las direcciones x y y, dadas por:

$$\begin{aligned} F_{xj} &= -F_{tj} \cos \phi_j - F_{rj} \sin \phi_j \\ F_{yj} &= F_{tj} \sin \phi_j - F_{rj} \cos \phi_j \end{aligned} \quad (2.7)$$

Durante el desprendimiento de material, en los puntos de contacto entre la herramienta y la pieza de trabajo, se generan dos vectores fuerza resultantes [15]: una tangencial ( $F_t$ ) y una radial ( $F_r$ ), las cuales se definen a continuación:

$$\begin{aligned} F_{tj} &= K_t a h(\phi_j) \\ F_{rj} &= K_r F_t = K_r K_t a h(\phi_j) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $a$  es la profundidad de corte axial expresada en  $m$ ,  $h(\phi_j)$  representa el coeficiente del espesor de viruta,  $K_r$  es el coeficiente de corte radial y  $K_t$  es el coeficiente de corte tangencial expresados en  $N/m^2$ . El espesor de viruta dinámico  $h(\phi_j)$  depende del ángulo de corte del  $j$ -ésimo diente y de las ondulaciones en la pieza. Esta variable puede describirse mediante la siguiente expresión propuesta en [25]:

$$h(\phi(t)) = [\Delta x(t) \sin \phi(t) + \Delta y(t) \cos \phi(t)] g(\phi_j) \quad (2.9)$$

donde la función  $g(\phi_j(t))$  se define en la ecuación (2.5),  $\Delta x(t)$  y  $\Delta y(t)$  representan la diferencia entre el corte actual y el corte previo en las direcciones x y y:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= x(t) - x(t - \tau) \\ \Delta y(t) &= y(t) - y(t - \tau) \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde el retardo  $\tau$  es igual al periodo de giro de la herramienta  $T$  (véase ecuación (2.3)).

Sustituyendo los coeficientes de corte tangencial y radial dados en (2.8) y el coeficiente de espesor de viruta definido en (2.9) en la ecuación (2.7), y considerando transformaciones de razones trigonométricas de producto en suma [7], se obtiene:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} a K_t \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta y(t) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde los coeficientes direccionales variantes en el tiempo son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{xx} &= \sum_{j=1}^N -g(\phi_j(t))[\sin 2\phi_j + K_r(1 - \cos 2\phi_j)] \\
\mathbf{a}_{xy} &= \sum_{j=1}^N -g(\phi_j(t))[(1 + \cos 2\phi_j) + K_r \sin 2\phi_j] \\
\mathbf{a}_{yx} &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t))[(1 - \cos 2\phi_j) - K_r \sin 2\phi_j] \\
\mathbf{a}_{yy} &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t))[\sin 2\phi_j - K_r(1 + \cos 2\phi_j)]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

La ecuación (2.11) puede expresarse como:

$$F(t) = \frac{1}{2} a K_t D(t) \Delta(t) \tag{2.13}$$

donde  $\Delta(t) = [\Delta x(t) \ \Delta y(t)]^T$  y la matriz  $D(t)$  varía en el tiempo dependiendo de la rotación de la herramienta y del periodo de paso de diente. Y. Altintas y E. Budak [25] y Y. Altintas y M. Weck [27] proponen sustituir los términos variantes en el tiempo por términos invariantes en el tiempo calculados mediante una expansión en las series de Fourier como sigue:

$$\begin{aligned}
D(t) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} D_r e^{ir\omega t} \\
D_r &= \frac{1}{T} \int_0^T D(t) e^{-ir\omega t} dt
\end{aligned}$$

El número de armónicos  $r$  de la frecuencia de paso de diente  $\omega$  requerido para una aproximación precisa de la matriz  $D(t)$  depende de las condiciones de corte (tipo de inmersión) y del número de dientes [25]. Y. Altintas y E. Budak en [25] consideran el caso más simple, es decir  $r = 0$ , para el cual se obtiene lo siguiente:

$$D_0 = \frac{1}{T} \int_0^T D(t) dt$$

Mediante el análisis anterior, la variación en el tiempo de los coeficientes periódicos de la matriz  $D(t)$  es sustituida por la diferencia del valor de los coeficientes calculados con los ángulos de entrada y de salida del material, en otras palabras, se calcula el valor del coeficiente cuando el diente incide en el material; por lo tanto

los coeficientes obtenidos son invariantes en el tiempo y dependientes del tipo de inmersión de la herramienta [27]. Tomando en cuenta que la matriz  $D_0$  es válida para los valores angulares de entrada  $\phi_{st}$  y de salida  $\phi_{ex}$  de la herramienta, es decir, cuando  $g(\phi_j) = 1$ , y que el proceso es periódico con un ángulo de paso  $\phi_p = 2\pi/N$  ( $N$  es el número de dientes), entonces el valor promedio de  $D(t)$  está dado por [47]:

$$D_0 = \frac{1}{\phi_p} \int_{\phi_{st}}^{\phi_{ex}} D(\phi) d\phi = \frac{N}{2\pi} \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

donde los coeficientes direccionales son:

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= 1/2[\cos 2\phi - 2K_r\phi + K_r \sin 2\phi]_{\phi_{st}}^{\phi_{ex}} \\ \alpha_{xy} &= 1/2[-\sin 2\phi - 2\phi + K_r \cos 2\phi]_{\phi_{st}}^{\phi_{ex}} \\ \alpha_{yx} &= 1/2[-\sin 2\phi + 2\phi + K_r \cos 2\phi]_{\phi_{st}}^{\phi_{ex}} \\ \alpha_{yy} &= 1/2[-\cos 2\phi - 2K_r\phi - K_r \sin 2\phi]_{\phi_{st}}^{\phi_{ex}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Reemplazando  $D(t)$  por la aproximación  $D_0$  en (2.13), se obtiene una ecuación con coeficientes direccionales invariantes en el tiempo, pero que dependen de la inmersión de la herramienta. La ecuación (2.13) se reescribe como:

$$F(t) = \frac{1}{2} a K_t D_0 \Delta(t) \quad (2.16)$$

Entonces las dinámicas del sistema pueden describirse mediante las siguientes ecuaciones, que representan un modelo de dos grados de libertad:

$$M\ddot{w}(t) + C\dot{w}(t) + Kw(t) = \frac{1}{2} a K_t D_0 \Delta(t) \quad (2.17)$$

donde:

$$w = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$$

Para expresar el modelo descrito por la ecuación (2.17) en el espacio de estados se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= x(t) & \dot{x}_1 &= \dot{x}(t) = x_2 \\ x_2 &= \dot{x}(t) & \dot{x}_2 &= \ddot{x}(t) \\ x_3 &= y(t) & \dot{x}_3 &= \dot{y}(t) = x_4 \\ x_4 &= \dot{y}(t) & \dot{x}_4 &= \ddot{y}(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Note que  $\ddot{x}(t)$  y  $\ddot{y}(t)$  pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\frac{c_x}{m_x}x_2 - \frac{k_x}{m_x}x_1 + \frac{aK_tN}{a\pi m_x}\alpha_{xx}(x_1 - x_1(t-\tau)) \\ &\quad + \frac{aK_tN}{4\pi m_x}\alpha_{xy}(x_3 - x_3(t-\tau)) \\ \ddot{y}(t) &= -\frac{c_y}{m_y}x_4 - \frac{k_y}{m_y}x_3 + \frac{aK_tN}{4m_y\pi}\alpha_{yx}(x_1 - x_1(t-\tau)) \\ &\quad + \frac{aK_tN}{4m_y\pi}\alpha_{yy}(x_3 - x_3(t-\tau))\end{aligned}$$

El modelo en el espacio de estados está dado por:

$$\dot{x} = A_0x(t) + A_1x(t-\tau) \quad (2.19)$$

donde

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_x}{m_x} + \frac{aK_tN}{4\pi m_x}\alpha_{xx} & -\frac{c_x}{m_x} & \frac{aK_tN}{4\pi m_x}\alpha_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{aK_tN}{4\pi m_y}\alpha_{yx} & 0 & -\frac{k_y}{m_y} + \frac{aK_tN}{4\pi m_y}\alpha_{yy} & -\frac{c_y}{m_y} \end{pmatrix}$$

y

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{aK_tN}{4\pi m_x}\alpha_{xx} & 0 & -\frac{aK_tN}{4\pi m_x}\alpha_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{aK_tN}{4\pi m_y}\alpha_{yx} & 0 & -\frac{aK_tN}{4\pi m_y}\alpha_{yy} & 0 \end{pmatrix}$$

En el capítulo siguiente se desarrolla un análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia utilizando el método de D-particiones para el modelo lineal de un grado de libertad definido en (2.2), con el que se obtiene un gráfico de las zonas estables e inestables del proceso en el plano de parámetros. Además, se presenta un análisis en el dominio del tiempo utilizando el enfoque de Lyapunov-Krasovski para el modelo de dos grados de libertad descrito por una ecuación con retardos definido en (2.19). Con este enfoque se obtienen condiciones suficientes de estabilidad y a través del análisis de su factibilidad, considerando un barrido de las condiciones de corte, se genera un gráfico que indica la zonas estables del proceso.

## Capítulo 3

# Análisis de estabilidad

Las ecuaciones diferenciales con retardos en el tiempo han sido objeto de estudio en diferentes áreas del conocimiento, una de las cuales es la teoría de control. El análisis de estabilidad permite conocer el comportamiento de los sistemas después de que son sometidos a perturbaciones, y representa una parte esencial en el estudio de la teoría de control.

El proceso de fresado es un sistema expuesto a perturbaciones generadas como consecuencia del efecto regenerativo, por lo cual, conocer las condiciones bajo las que el sistema es estable permite al usuario del proceso trabajar dentro de las zonas (en un espacio de parámetros) en las que no existe vibración.

Este capítulo presenta el análisis de estabilidad para los modelos del proceso de fresado utilizados en la literatura, los cuales contienen términos con retardos en el tiempo, lo que implica que el análisis de estabilidad se debe realizar utilizando técnicas específicas desarrolladas para este tipo de sistemas.

### 3.1. Análisis en el dominio de la frecuencia

El método de D-particiones es utilizado para la identificación de las regiones de estabilidad de los sistemas con retardos en el tiempo. El método consiste en la descomposición del espacio de parámetros en regiones de estabilidad en las cuales el número de raíces inestables es invariante. Los límites de estas regiones corresponden a los casos en los que la ecuación característica presenta una raíz en el eje imaginario [49]. Es importante mencionar que el número de raíces inestables dentro de una región es conocido como grado de inestabilidad [8]. A continuación, se describen los pasos a seguir para aplicar el método:

1. Se toma la ecuación característica del modelo matemático seleccionado, la cual se expresa como  $D(s)$ .
2. En la ecuación característica se sustituye  $s$  por  $\gamma + i\omega$ , que representan la parte real e imaginaria del número complejo  $s$ , respectivamente.
3. Se separa la parte real e imaginaria de la ecuación.
4. Para obtener los límites de estabilidad es necesario conocer el comportamiento de la parte imaginaria de la raíz ( $\omega$ ), por lo cual se iguala la parte real ( $\gamma$ ) con cero.
5. Se obtienen las ecuaciones de los límites de estabilidad en función de  $\omega$  y se representan en el espacio de parámetros. La gráfica resultante se conoce como curva D.

Es importante mencionar que el método de D-particiones es aplicable sólo para sistemas descritos por ecuaciones lineales con retardos constantes. Con esto en mente, es necesario considerar que en el modelo de un grado de libertad dado en (2.2), la función  $R(t)$  definida en (2.4) es una constante. Por lo que el método de D-particiones es una herramienta útil para el desarrollo de los lóbulos de estabilidad de una simplificación del modelo de un grado de libertad, donde debido a la omisión del término no lineal y periódico  $R(t)$ , no es posible considerar para este análisis los datos de una fresadora real.

A continuación se aplica el método siguiendo los pasos descritos anteriormente. Se obtiene la transformada de Laplace de la ecuación (2.2):

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = RaX(s)(e^{-\tau s} - 1)$$

$$X(s) [ms^2 + cs + k - Ra(e^{-\tau s} - 1)] = 0$$

La ecuación característica  $D(s)$  correspondiente es:

$$D(s) = ms^2 + cs + k - Ra(e^{-\tau s} - 1)$$

De acuerdo al método, se sustituye  $s = \gamma + i\omega$  en la ecuación  $D(s) = 0$

$$\begin{aligned} D(\gamma + i\omega) &= m(\gamma + i\omega)^2 + c(\gamma + i\omega) + k + Ra(1 - e^{-\tau(\gamma + i\omega)}) \\ &= m(\gamma^2 + 2\gamma\omega i - \omega^2) + c(\gamma + i\omega) + k + Ra(1 - e^{-\tau\gamma}e^{-i\omega\tau}) \\ &= m(\gamma^2 + 2\gamma\omega i - \omega^2) + c(\gamma + i\omega) + k + Ra(1 - e^{-\tau\gamma}(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau)) \end{aligned}$$

Se separa la parte real e imaginaria en la ecuación anterior y obtenemos:

$$\text{Re:} \quad m(\gamma^2 - \omega^2) + c\gamma + k + Ra(1 - e^{-\tau\gamma}(\cos \omega\tau)) = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{Im:} \quad 2m\gamma\omega + c\omega + Rae^{-\tau\gamma} \sin \omega\tau = 0 \quad (3.2)$$

Para representar gráficamente las zonas de estabilidad del sistema es necesario analizar las raíces que se encuentran sobre el eje imaginario, para esto se iguala la parte real con cero  $\gamma = 0$  y se obtienen los límites de estabilidad o curvas D como funciones paramétricas de la parte imaginaria  $\omega$ . Entonces las ecuaciones (3.1) y (3.2) pueden reescribirse como:

$$-m\omega^2 + k + Ra(1 - \cos \omega\tau) = 0 \quad (3.3)$$

$$c\omega + Ra \sin \omega\tau = 0 \quad (3.4)$$

Para generar el espacio de parámetros se eligen los términos  $\Omega$  y  $a$ , dos parámetros que son parte de las ecuaciones (3.3) y (3.4). Como  $R$  en este análisis es una constante se considera multiplicando al término  $a$  en la generación del espacio de parámetros como  $Ra$ . Para visualizar las regiones de estabilidad se resuelven las ecuaciones (3.3) y (3.4) para cada uno de los parámetros elegidos.

Para generar el espacio de parámetros dependiente del término  $a$  se realiza el siguiente procedimiento. De la ecuación (3.3) se tiene:

$$Ra(1 - \cos \omega\tau) = m\omega^2 - k$$

elevando al cuadrado la expresión anterior se obtiene:

$$(Ra)^2(1 - 2\cos \omega\tau + \cos^2 \omega\tau) - (m\omega^2 - k)^2 = 0 \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.4) se tiene:

$$Ra \sin \omega\tau = -c\omega$$

elevando al cuadrado la expresión anterior se obtiene:

$$c^2\omega^2 - (Ra)^2 \sin^2 \omega\tau = 0 \quad (3.6)$$

Igualando las ecuaciones (3.5) y (3.6), reduciendo y agrupando términos, se desarrolla la siguiente expresión:

$$2(Ra)^2(1 - \cos \omega\tau) = (m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2$$

donde  $Ra(1 - \cos \omega\tau) = m\omega^2 - k$ , entonces se tiene:

$$2(Ra)(m\omega^2 - k) = (m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2$$

Se despeja el parámetro  $Ra$  de la expresión anterior y se obtiene:

$$Ra = \frac{(m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2}{2(m\omega^2 - k)} \quad (3.7)$$

Por otra parte, para generar el espacio de parámetros dependiente de  $\Omega$  que depende de  $\tau$  se realiza el procedimiento descrito a continuación. De la ecuación (3.3) se tiene:

$$Ra = \frac{m\omega^2 - k}{1 - \cos \omega\tau}$$

Sustituyendo en la expresión anterior en (3.4) se deduce:

$$c\omega + \frac{m\omega^2 - k}{1 - \cos \omega\tau} \sin \omega\tau = 0$$

reagrupando términos se obtiene:

$$\frac{m\omega^2 - k}{c\omega} = -\frac{1 - \cos \omega\tau}{\sin \omega\tau} \quad (3.8)$$

Utilizando las identidades trigonométricas  $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  y  $-\tan(\alpha) = \tan(-\alpha)$ , la ecuación (3.8) se puede reescribir como:

$$\frac{m\omega^2 - k}{c\omega} = \tan\left(\frac{-\omega\tau}{2}\right)$$

Se utiliza la identidad  $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + \pi j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , para obtener:

$$\frac{m\omega^2 - k}{c\omega} = \tan\left(\frac{-\omega\tau}{2} + \pi j\right)$$

Se aplica la función arco tangente a ambos lados de la ecuación y se obtiene:

$$\arctan\left(\frac{m\omega^2 - k}{c\omega}\right) = -\frac{\omega\tau}{2} + \pi j$$

Para  $N = 1$ ,  $\tau = 60/\Omega$ . Entonces, despejando  $\Omega$  en la expresión anterior se tiene:

$$\Omega = \frac{30\omega}{\pi j - \arctan\left(\frac{m\omega^2 - k}{c\omega}\right)} \quad (3.9)$$



### 3.1.1. Resultados numéricos

Mediante las ecuaciones (3.7) y (3.9) se obtienen las D-curvas del modelo simplificado de un grado de libertad, es decir, es posible simular numéricamente el comportamiento del sistema en el espacio de parámetros. Es importante recalcar que el análisis desarrollado mediante el método de D-particiones que se presenta a continuación constituye un ejemplo académico en el que los valores de los parámetros no corresponden a los de una fresadora real. Éste constituye un desarrollo teórico tomado como introducción al análisis de ecuaciones diferenciales con retardos.

Considerando valores de masa, constante de resorte y constante de amortiguamiento dados por:  $m = 20\text{kg}$ ,  $k = 5\text{N/m}$  y  $c = 1\text{Ns/m}$ , respectivamente, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 3.1. En la Figura 3.2 se muestra sombreada la región estable para valores positivos de los parámetros  $Ra$  y  $\Omega$ .

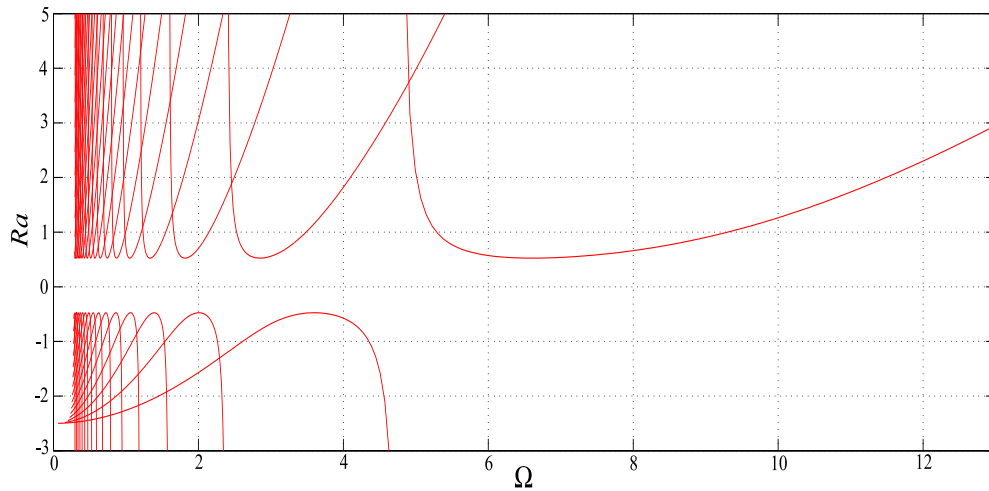
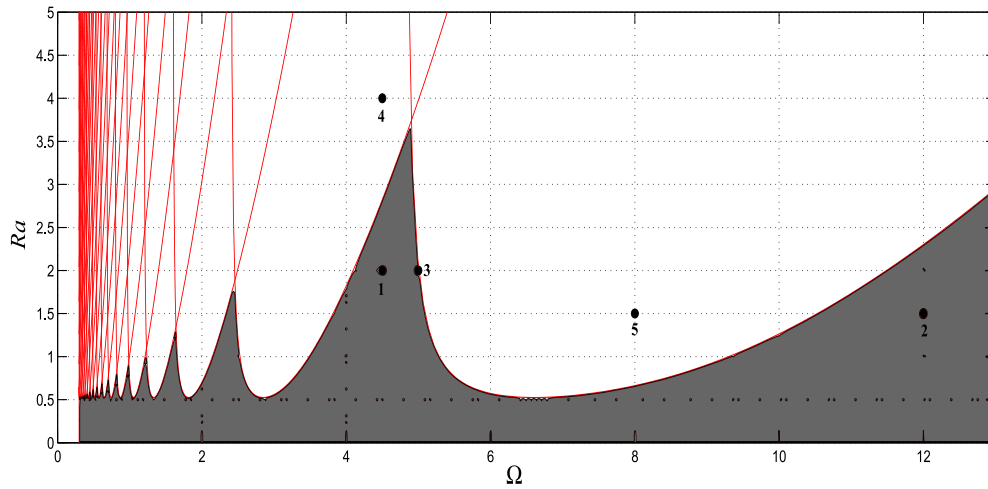


Figura 3.1: Lóbulos de estabilidad por el método de D-particiones

El modelo de un grado de libertad expresado en la ecuación (2.2) es simulado mediante MATLAB<sup>®</sup> Simulink<sup>®</sup> para conocer el comportamiento de algunos puntos en la gráfica de la Figura 3.2 y validar el análisis realizado. En la Tabla 3.1 se presentan las combinaciones de los parámetros  $Ra$  y  $\Omega$  que representan dos puntos dentro de la zona sombreada (1 y 2), un punto sobre la línea (3) y dos puntos más en la zona blanca (4 y 5).

Figura 3.2: Lóbulos de estabilidad con  $Ra > 0$  y  $\Omega > 0$ Cuadro 3.1: Combinaciones de los parámetros  $Ra$  y  $\Omega$ 

Punto	$Ra$	$\Omega$
1	2	4.5
2	1.5	12
3	2	5
4	4	4.5
5	1.5	8

### 3.1.2. Discusión de resultados

Es posible, después de simular para cada uno de los puntos, visualizar en la Figura 3.3 el comportamiento del sistema correspondiente a cada una de las combinaciones de parámetros. Las trayectorias del sistema correspondientes a los puntos 1 y 2 tienden al equilibrio con el tiempo, es decir, corresponden a un comportamiento estable, mientras que las trayectorias correspondientes a los puntos 4 y 5 se alejan del punto de equilibrio, lo que implica inestabilidad. La trayectoria en la que se considera la combinación de parámetros definida por el punto 3 presenta un comportamiento oscilatorio, lo que refiere un comportamiento marginalmente estable. Estos resultados son congruentes con lo observado en los lóbulos de estabilidad mostrados en la Figura 3.2, por lo tanto, el desarrollo queda validado.

El resultado de este análisis no corresponde a las zonas de estabilidad de una fresadora, puesto que para la aplicación del método, el modelo (2.2) empleado contempla simplificaciones como la aproximación de la resultante de fuerzas de corte por una constante. En la siguiente sección se desarrolla un análisis en el dominio del

tiempo en el que se considera el modelo de dos grados de libertad del proceso de fresado.

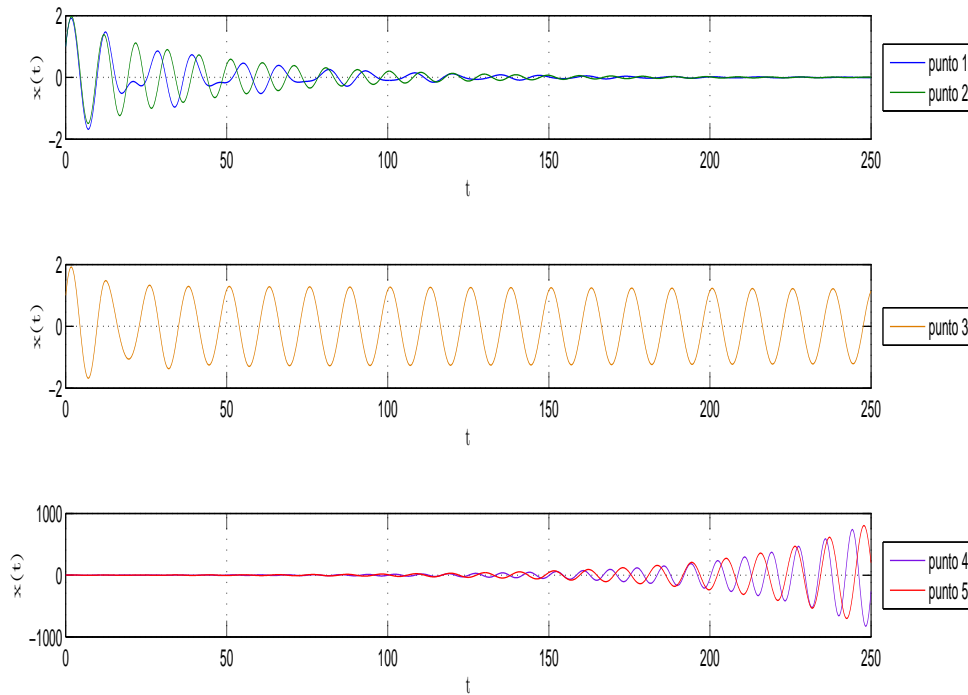


Figura 3.3: Comportamiento de los puntos seleccionados

## 3.2. Análisis en el dominio del tiempo

Es posible realizar un análisis de estabilidad del modelo de fresado de dos grados de libertad mediante el método directo de Lyapunov (véase Sección 1.4.2).

El método indica que la estabilidad de un punto de equilibrio  $x(t) \equiv 0$  se asegura si la función  $V(x(t))$  decrece con  $t$ , donde  $V$  es una función de Lyapunov. Los trabajos de Nikolai Nikolaevich Krasovskii y Boris Sergeevich Razumikhin extendieron los resultados de la teoría de Lyapunov para su aplicación a sistemas con retardos temporales, ya que para analizar estos sistemas es necesario proponer funcionales, es decir, una función cuyo dominio es un conjunto de funciones. Antes de describir estos enfoques, se introducen las siguientes definiciones.

**Definición 1**  $\mathbb{R}^n$  representa el espacio Euclidiano de dimensión  $n$  con la norma vectorial  $\|\cdot\|$  definida por

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

**Definición 2** Para  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se denota  $x_t(\theta) \triangleq x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$ .

**Definición 3** Sea  $C[-\tau, 0]$  el espacio de Banach de funciones continuas que mapean del intervalo  $[-\tau, 0]$  a  $\mathbb{R}^n$  bajo la norma definida por

$$\|x_t\|_C = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} |x(t + \theta)|$$

Los enfoques propuestos por Krasovskii y Razumikhin se describen a continuación.

- Enfoque de Lyapunov-Krasovskii: Sea  $V : \mathbb{R} \times C[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional continua y sea  $x(t, \psi)$  la solución del sistema con retardos en el tiempo con la condición inicial  $x(t_0 + \theta) = x_{t_0}(\theta) = \psi(\theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$ , donde el espacio de funciones  $\psi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua en  $[-\tau, 0]$ . Se define la derivada  $\dot{V}(t, x)$  como sigue:

$$\dot{V}(t, x) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, \psi)) - V(t, x)]$$

donde si  $\dot{V}(t, x)$  no es positiva, indicaría que  $x(t, \psi)$  no crece con el tiempo  $t$ , entonces el sistema es estable.

**Teorema 1 (Teorema de Lyapunov-Krasovskii)** También conocido como método de Krasovskii de funcionales de Lyapunov. Suponga que  $f : \mathbb{R} \times C[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y que  $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones continuas no decrecientes,  $u(s)$  y  $v(s)$  son positivas para  $s > 0$ , y  $u(0) = v(0) = 0$ . La solución trivial de un sistema con retardos es uniformemente estable si existe una funcional continua  $V : \mathbb{R} \times C[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , la cual es definida positiva, tal que satisface

$$u(|\psi(0)|) \leq V(t, \psi) \leq v(\|\psi\|_C),$$

y además, que la derivada no sea positiva en el sentido de que se cumpla

$$\dot{V}(t, \psi) \leq -w(|\psi(0)|)$$

Si  $w(s) > 0$  para  $s > 0$ , entonces la solución trivial es uniformemente asintóticamente estable, si además  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ , entonces es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

- Enfoque de Lyapunov-Razumikhin: Considere una función diferenciable  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  con la derivada de  $V$  definida como:

$$\dot{V}(t, x(t)) = \frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} f(t, x_t)$$

**Teorema 2 (Teorema de Lyapunov-Razumikhin)** *Suponga que  $f : \mathbb{R} \times C[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y que  $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones continuas no decrecientes,  $u(s)$  y  $v(s)$  son positivas para  $s > 0$ , y  $u(0) = v(0) = 0$ ,  $v$  es estrictamente creciente. La solución trivial de un sistema con retardos es uniformemente estable si existe una función diferenciable  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ , la cual es definida positiva, tal que satisface*

$$u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|),$$

*y tal que la derivada de  $V$  para la solución  $x(t)$  del sistema con retardos satisface*

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|) \text{ si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]$$

*Si, además,  $w(s) > 0$  para  $s > 0$ , y existe una función no decreciente  $\rho(s) > s$  para  $s > 0$  tal que se cumple la condición siguiente*

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|) \text{ si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq \rho(V(t, x(t))) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]$$

*entonces la solución trivial es uniformemente asintóticamente estable, si además,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho(s) = \infty$ , entonces es globalmente uniformemente asintóticamente estable.*

La mayoría de los resultados basados en el enfoque de Lyapunov-Krasovskii utilizan la aplicación de la desigualdad de Jensen [50] dada en la siguiente proposición.

**Proposición 1 (Desigualdad de Jensen)** *Para cualquier función continua  $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con escalares  $a, b > 0$  y la matriz definida positiva  $R$  de dimensión  $n \times n$  se cumple lo siguiente:*

$$\int_a^b \vartheta^T(s) R \vartheta(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \vartheta^T(s) ds R \int_a^b \vartheta(s) ds$$

En este trabajo se propone utilizar el enfoque de Lyapunov-Krasovskii para realizar el análisis de estabilidad del modelo de fresado de dos grados de libertad e identificar las combinaciones de parámetros para las que el sistema es libre de vibración. A continuación se describen los pasos a seguir para aplicar el método:

1. Se consideran algunas funcionales cuadráticas de Lyapunov  $V(x_t)$  que se han utilizado en la literatura para el análisis de estabilidad de sistemas con retardos.
2. Se deriva  $V(x_t)$  con respecto al tiempo y se agrupan términos en la forma matricial cuadrática  $\dot{V} = \eta^T W \eta$  donde  $\eta$  representa el vector de estados y  $W$  es una matriz simétrica.

3. De acuerdo con el método directo de Lyapunov, para la estabilidad del sistema se requiere que  $\dot{V} < 0$ , entonces el sistema será estable si la matriz  $W$  es definida negativa. El problema se formula entonces en términos de la factibilidad de una LMI, es decir,  $W < 0$  (véase Sección 1.4.2.).

Ya que la estabilidad del sistema depende de la profundidad de corte  $a$  y de la velocidad de giro  $\Omega$ , y que a su vez el retardo  $\tau$  depende de  $\Omega$ , es necesario que las LMI contengan los términos correspondientes a estos parámetros. El analizar la estabilidad del sistema implica analizar la factibilidad de múltiples LMI que contienen las combinaciones de dichos parámetros [50].

El método directo de Lyapunov es considerado conservativo en sus resultados, ya que ofrece condiciones suficientes de estabilidad. Existen métodos para reducir el conservadurismo tal como el enfoque descriptor planteado por E. Fridman en el 2001 [51] que será revisado en la siguiente sección.

### 3.2.1. Funcionales de Lyapunov

Considere el sistema:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \quad (3.10)$$

con las matrices constantes  $A_0$  y  $A_1$  de dimensión  $n \times n$ , donde  $n$  es el número de estados y la constante  $\tau$  que representa el retardo. Para realizar el análisis de estabilidad en el marco de la teoría de Lyapunov, se propone una función definida positiva. Considere por ejemplo:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P > 0$$

se deriva con respecto al tiempo y se obtiene:

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Px(t)$$

se sustituyen las trayectorias del sistema (ecuación (3.10))

$$\dot{V}(x_t) = x^T(t)P(A_0x(t) + A_1x(t - \tau)) + (x^T(t)A_0^T + x^T(t - \tau)A_1^T)Px(t)$$

se agrupan términos y se obtiene

$$\dot{V}(x_t) = x^T(t)PA_0x(t) + x^T(t)PA_1x(t - \tau) + x^T(t)A_0^TPx(t) + x^T(t - \tau)A_1^TPx(t)$$

En forma matricial,  $\dot{V}$  admite la siguiente representación cuadrática:

$$\dot{V}(x_t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^TP & PA_1 \\ A_1^TP & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}$$

Para asegurar la estabilidad, es necesario que la matriz sea definida negativa, esto implica que los elementos en la diagonal principal sean negativos, entonces es necesario compensar el elemento de la matriz correspondiente al término  $x(t - \tau)$ , para lo cual se utiliza la teoría de Lyapunov-Krasovskii.

El primer paso para analizar la estabilidad de este sistema mediante la teoría de Lyapunov-Krasovskii es considerar una funcional cuadrática. Como primer ejemplo se tiene:

$$V(t, x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds$$

con las matrices simétricas definidas positivas  $P$  y  $Q$  de dimensión  $n \times n$ . Para el caso del fresado se tiene un retardo constante, entonces la funcional anterior puede escribirse como:

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Qx(s)ds$$

se deriva con respecto al tiempo

$$\dot{V}(x_t) = x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \tau)Qx(t - \tau)$$

se sustituyen las trayectorias del sistema (ecuación (3.10))

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & x^T(t)P(A_0x(t) + A_1x(t - \tau)) + (x^T(t)A_0^T + x^T(t - \tau)A_1^T)Px(t) \\ & + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \end{aligned}$$

se agrupan términos y se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & x^T(t)PA_0x(t) + x^T(t)PA_1x(t - \tau) + x^T(t)A_0^TPx(t) + x^T(t - \tau)A_1^TPx(t) \\ & + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \end{aligned}$$

En forma matricial,  $\dot{V}$  admite la siguiente representación cuadrática:

$$\dot{V}(x_t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau) \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}$$

donde

$$W = \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^TP + Q & A_1^TP \\ PA_1 & -Q \end{bmatrix}$$

Si se satisface  $W < 0$  con  $P > 0$  y  $Q > 0$  entonces el sistema es estable. Note que la matriz  $W$  no contiene  $\tau$ , es decir la LMI es independiente del retardo, por lo cual, buscar la factibilidad de la LMI no es trascendente para el caso de estudio abordado en este trabajo.

**Funcional  $V_1$** 

La segunda propuesta de funcional de Lyapunov es un ejemplo utilizado en la literatura para determinar las condiciones de estabilidad de sistemas en términos de una LMI dependiente del retardo, y se muestra a continuación [50]:

$$V_1(x(t), \dot{x}_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s) ds d\theta \quad (3.11)$$

con las matrices simétricas definidas positivas  $P$  y  $R$  de dimensión  $n \times n$ ,  $\tau$  representa el retardo constante. Derivando con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V}_1(x(t), \dot{x}_t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) + \tau\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s) ds$$

se aplica la desigualdad de Jensen al término integral

$$\begin{aligned} - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s) ds &\leq -\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) ds R \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds \\ &= -\frac{1}{\tau} [x(t) - x(t-\tau)]^T R [x(t) - x(t-\tau)] \end{aligned}$$

Se sustituyen las trayectorias del sistema (ecuación (3.10)), se agrupan términos y se expresa en forma matricial, con lo que se obtiene:

$$\dot{V}_1(x(t), \dot{x}_t) \leq \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) \end{bmatrix} \bar{W}_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{W}_1 = \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^T P + \tau A_0^T R A_0 - R/\tau & PA_1 + \tau A_0^T R A_1 + R/\tau \\ A_1^T P + \tau A_1^T R A_0 + R/\tau & -R/\tau + \tau A_1^T R A_1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Considerando la funcional (3.11), se garantiza la estabilidad del sistema (3.10) cuando se satisface

$$W_1 = \{\bar{W}_1, P, R \mid \bar{W}_1 < 0, P > 0, R > 0\} \quad (3.13)$$

es decir, de acuerdo con la teoría de Lyapunov-Krasovskii la estabilidad del sistema está garantizada si el conjunto de LMI (3.13) es factible.

**Funcional  $V_1$  más enfoque descriptor**

Los resultados de la funcional anterior pueden mejorarse empleando el enfoque descriptor [50], el cual se describe a continuación. El sistema (3.10) puede representarse como sigue:

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad 0 = -y(t) + A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)$$



A esta representación se le conoce como sistema descriptor, en [50] se demuestra que éste es equivalente a (3.10) en estabilidad. En este modelo las trayectorias del sistema no se sustituyen en la parte derecha de la ecuación diferencial, sino que se consideran como un estado adicional. El cambio principal al utilizar este método es en la derivada de la funcional, en la cual se introduce el siguiente término nulo:

$$0 = 2 [x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] [-\dot{x}(t) + A_0x(t) + A_1x(t - \tau)]$$

donde  $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son “variables de holgura<sup>1</sup>”, es decir, no tienen restricciones adicionales a las de dimensión.

Aplicando el enfoque descriptor, la derivada de la funcional (3.11) está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x(t), \dot{x}_t) = & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + \tau\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \\ & + 2 [x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] [-\dot{x}(t) + A_0x(t) + A_1x(t - \tau)] \end{aligned}$$

Se aplica la desigualdad de Jensen al tercer término de la expresión anterior para obtener:

$$\begin{aligned} - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds & \leq -\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)ds R \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds \\ & = -\frac{1}{\tau} [x(t) - x(t - \tau)] R [x(t) - x(t - \tau)] \end{aligned}$$

se reescribe la derivada como

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x(t), \dot{x}_t) \leq & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + \tau\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \frac{1}{\tau} [x(t) - x(t - \tau)] R [x(t) - x(t - \tau)] \\ & + 2 [x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] [-\dot{x}(t) + A_0x(t) + A_1x(t - \tau)] \end{aligned}$$

con lo cual agrupando términos se obtiene la expresión siguiente

$$\dot{V}_1(x(t), \dot{x}_t) = [x^T(t) \ \dot{x}^T(t) \ x^T(t - \tau)] \bar{W}_2 \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{W}_2 = \begin{bmatrix} P_2^T A_0 + A_0^T P_2 - R/\tau & P - P_2^T + A_0^T P_3 & R/\tau + P_2^T A_1 \\ P - P_2 + P_3^T A_0 & -P_3 - P_3^T + \tau R & P_3^T A_1 \\ R/\tau + A_1^T P_2 & A_1^T P_3 & -R/\tau \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

---

<sup>1</sup>Del ingles *slack variables*

Considerando la funcional de Lyapunov-Krasovskii (3.11) con el enfoque descriptor, se garantiza la estabilidad del sistema (3.10) cuando se satisfacen las condiciones del conjunto

$$W_2 = \{\overline{W}_2, P, R \mid \overline{W}_2 < 0, P > 0, R > 0\} \quad (3.15)$$

es decir, la estabilidad del sistema está garantizada si el conjunto de LMI (3.15) es factible.

### Funcional $V_2$

La tercera propuesta de funcional de Lyapunov es un ejemplo utilizado en la literatura para analizar sistemas con retardos constantes, y se muestra a continuación [50]:

$$V_2(x_t, \dot{x}_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Sx(s)ds + \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta \quad (3.16)$$

se deriva con respecto al tiempo y se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) = & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) + \tau^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ & - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \end{aligned}$$

se aplica la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned} -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds & \leq - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)dsR \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds \\ & = -[x(t) - x(t-\tau)]^T R[x(t) - x(t-\tau)] \end{aligned}$$

agrupando términos se obtiene la expresión siguiente

$$\dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) \leq [x^T(t) \ x^T(t-\tau)] \overline{W}_3 \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}$$

donde

$$\overline{W}_3 = \begin{bmatrix} A_0^T P + PA_0 + S + \tau^2 A_0^T R A_0 - R & PA_1 + \tau^2 A_0^T R A_1 + R \\ A_1^T P + \tau^2 A_1^T R A_0 + R & \tau^2 A_1^T R A_1 - S - R \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Considerando la funcional  $V_2$  definida en (3.16), se garantiza la estabilidad del sistema (3.10) cuando se satisfacen las condiciones del conjunto

$$W_3 = \{\overline{W}_3, P, R, S \mid \overline{W}_3 < 0, P > 0, R > 0, S > 0\} \quad (3.18)$$

es decir, el sistema es estable si el conjunto de LMI (3.18) es factible.

**Funcional  $V_2$  más enfoque descriptor**

Se aplica el enfoque descriptor en la tercera propuesta de funcional dada en (3.16) con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) \leq & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T][A_0x(t) + A_1x(t-\tau) - \dot{x}(t)] \\ & + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) + \tau^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ & - [x(t) - x(t-\tau)]^T R[x(t) - x(t-\tau)] \end{aligned}$$

agrupando términos se obtiene la expresión siguiente

$$\dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) \leq [x^T(t) \ \dot{x}^T(t) \ x^T(t-\tau)] \bar{W}_4 \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{W}_4 = \begin{bmatrix} A_0^T P_2 + P_2^T A_0 + S - R & P - P_2^T + A_0^T P_3 & P_2^T A_1 + R \\ P - P_2 + P_3^T A_0 & -P_3 - P_3^T + \tau^2 R & P_3^T A_1 \\ A_1^T P_2 + R & A_1^T P_3 & -S - R \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Considerando el enfoque descriptor, las condiciones de estabilidad basadas en la funcional definida en (3.16) están dadas por:

$$W_4 = \{\bar{W}_4, P, R, S \mid \bar{W}_4 < 0, P > 0, R > 0, S > 0\} \quad (3.20)$$

En este caso el sistema es estable si el conjunto de LMI (3.20) es factible.

Note que, en todos los casos, en la derivada de las funcionales propuestas se obtiene el término

$$- \int_{-\tau}^0 \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$$

para poder incluirlo en las formas matriciales correspondientes, es necesario aproximarlos utilizando la desigualdad de Jensen dada en la Proposición 1, esto conlleva un conservadurismo inherente. Para reducir esto, A. Seuret y F. Gouaisbaut en el 2014 [53] proponen el uso de las desigualdades de Bessel-Legendre descritas en el Lema 1:

**Lema 1** Sea  $x \in \mathcal{C}$  y  $R \in \mathbb{S}_n^+$  y  $\tau > 0$ , se define  $\mathcal{I}(x, \tau)$  como sigue

$$\mathcal{I}(x, \tau) := \int_{-\tau}^0 x^T(u) R x(u) du$$

entonces, la desigualdad

$$\mathcal{I}(x, \tau) \geq \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{N_B} (2k+1) \Psi_k^T R \Psi_k$$

se mantiene para todo  $N_B \in \mathbb{N}$  y

$$\Psi_k = \int_{-L}^0 L_k(u)x(u)du$$

$L_k$  representan los polinomios de Legendre definidos como:

$$\forall k \in \mathbb{N}, L_k(u) = (-1)^k \sum_{l=0}^k p_l^k \left( \frac{u + \tau}{\tau} \right)^l$$

con  $p_l^k = (-1)^l \binom{k}{l} \binom{k+l}{l}$ , donde  $\binom{k}{l} = \frac{k!}{(k-l)! l!}$ .

La demostración de este lema puede consultarse en [53]. Para utilizar esta propuesta en la aproximación del término

$$- \int_{-\tau}^0 \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$$

el autor ofrece el Corolario 1.

**Corolario 1** Sea  $x$  tal que  $\dot{x} \in \mathcal{C}$ ,  $R \in \mathbb{S}_n^+$  y  $\tau > 0$ . Entonces, la desigualdad integral

$$\mathcal{I}(\dot{x}, \tau) \geq \frac{1}{\tau} \xi_{N_B}^T \left[ \sum_{k=0}^{N_B} (2k+1) \Gamma_{N_B}(k) R \Gamma_{N_B}(k) \right] \xi_{N_B}$$

se mantiene para todo entero  $N_B \in \mathbb{N}$  donde

$$\xi_{N_B} = \begin{cases} [x^T(t) \ x^T(t-\tau)]^T & \text{si } N_B = 0 \\ [x^T(t) \ x^T(t-\tau) \ \frac{1}{\tau} \Psi_0^T \dots \frac{1}{\tau} \Psi_{N_B-1}^T]^T & \text{si } N_B > 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_{N_B}(k) = \begin{cases} [I \ -I] & \text{si } N_B = 0 \\ [I \ (-1)^{k+1} I \ \gamma_{N_B k}^0 I \dots \gamma_{N_B k}^{N_B-1} I] & \text{si } N_B > 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{N_B k}^i = \begin{cases} -(2i+1)(1 - (-1)^{k+i}) & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

A continuación se aplica la propuesta de A. Seuret y F. Gouaisbaut para reducir el conservadurismo introducido por la desigualdad de Jensen, es decir, se aproxima el término integral en la derivada de  $V_2$  para diferentes valores de  $N_B$ .

La derivada de la funcional  $V_2$  definida en(3.16) con el enfoque descriptor esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) = & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T][A_0x(t) + A_1x(t - \tau) - \dot{x}(t)] \\ & + x^T(t)Sx(t) - x^T(t - \tau)Sx(t - \tau) + \tau^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ & - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \end{aligned} \quad (3.21)$$

Note que para  $N_B = 0$  la desigualdad de Bessel-Legendre corresponde a la desigualdad de Jensen, entonces la forma cuadrática de la derivada en este caso corresponde a  $\bar{W}_4$ .

### Funcional $V_2$ más enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para $N_B = 1$

Aplicando la desigualdad de Bessel-Legendre con  $N_B = 1$  se obtiene:

$$\begin{aligned} -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds & \leq -\xi_1^T [\Gamma_1(0)R\Gamma_1(0) + 3\Gamma_1(1)R\Gamma_1(1)] \xi_1 \\ & = -[x(t) - x(t - \tau)]^T R[x(t) - x(t - \tau)] - 3 \left[ x(t) \right. \\ & \quad \left. + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau}\Psi_0 \right]^T R \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau}\Psi_0 \right] \end{aligned}$$

considerando la desigualdad anterior y agrupando términos, la derivada de  $V_2$  definida en (3.21) puede escribirse como:

$$\dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) \leq [x^T(t) \ \dot{x}^T(t) \ x^T(t - \tau) \ \Psi_0^T] \bar{W}_5 \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t - \tau) \\ \Psi_0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{W}_5 = \begin{bmatrix} A_0^T P_2 + P_2^T A_0 + S - 4R & P - P_2^T + A_0^T P_3 & P_2^T A_1 - 2R & (6/\tau)R \\ P - P_2 + P_3^T A_0 & -P_3 - P_3^T + \tau^2 R & P_3^T A_1 & 0 \\ A_1^T P_2 - 2R & A_1^T P_3 & -S - 4R & (6/\tau)R \\ (6/\tau)R & 0 & (6/\tau)R & -(12/\tau^2)R \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Considerando el enfoque descriptor y la desigualdad de Bessel-Legendre para  $N_B = 1$ , las condiciones de estabilidad basadas en la funcional definida en (3.16) están dadas por:

$$W_5 = \{\bar{W}_5, P, R, S \mid \bar{W}_5 < 0, P > 0, R > 0, S > 0\} \quad (3.23)$$

**Funcional  $V_2$  más enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 2$**

La desigualdad de Bessel-Legendre con  $N_B = 2$  corresponde a:

$$\begin{aligned} -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds &\leq -\xi_2^T [\Gamma_2(0) R \Gamma_2(0) + 3\Gamma_2(1) R \Gamma_2(1) + 5\Gamma_2(2) R \Gamma_2(2)] \xi_2 \\ &= -[x(t) - x(t-\tau)]^T R [x(t) - x(t-\tau)] \\ &\quad - 3 \left[ x(t) + x(t-\tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 \right]^T R \left[ x(t) + x(t-\tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 \right] \\ &\quad - 5 \left[ x(t) - x(t-\tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 \right]^T R \left[ x(t) - x(t-\tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (3.21) y agrupando términos se obtiene:

$$\dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) \leq [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t-\tau) \quad \Psi_0^T \quad \Psi_1^T] \bar{W}_6 \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t-\tau) \\ \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{W}_6 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} - 9R & \Phi_{12} & \Phi_{13} + 3R & \frac{6}{\tau} R & \frac{30}{\tau} R \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & 0 \\ * & * & -S - 9R & \frac{6}{\tau} R & -\frac{30}{\tau} R \\ * & * & * & -\frac{12}{\tau^2} R & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{180}{\tau^2} R \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_0^T P_2 + P_2^T A_0 + S & \Phi_{12} &= P - P_2^T + A_0^T P_3 & \Phi_{13} &= P_2^T A_1 \\ \Phi_{22} &= -P_3 - P_3^T + \tau^2 R & \Phi_{23} &= P_3^T A_1 \end{aligned}$$

Considerando el enfoque descriptor y la desigualdad de Bessel-Legendre para  $N_B = 2$ , las condiciones de estabilidad basadas en la funcional definida en (3.16) están dadas por:

$$W_6 = \{\bar{W}_6, P, R, S \mid \bar{W}_6 < 0, P > 0, R > 0, S > 0\} \quad (3.25)$$

**Funcional  $V_2$  más enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 3$**

Para  $N_B = 3$ , la desigualdad de Bessel-Legendre está definida por:

$$\begin{aligned}
& -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
& \leq -\xi_3^T [\Gamma_3(0) R \Gamma_3(0) + 3\Gamma_3(1) R \Gamma_3(1) + 5\Gamma_3(2) R \Gamma_3(2) + 7\Gamma_3(3) R \Gamma_3(3)] \xi_3 \\
& = -[x(t) - x(t-\tau)]^T R [x(t) - x(t-\tau)] \\
& \quad - 3 \left[ x(t) + x(t-\tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 \right]^T R \left[ x(t) + x(t-\tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 \right] \\
& \quad - 5 \left[ x(t) - x(t-\tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 \right]^T R \left[ x(t) - x(t-\tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 \right] \\
& \quad - 7 \left[ x(t) + x(t-\tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 \right]^T R \left[ x(t) + x(t-\tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 \right]
\end{aligned}$$

Considerando la desigualdad anterior, la derivada de  $V_2$  puede escribirse como:

$$\dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) \leq [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t-\tau) \quad \Psi_0^T \quad \Psi_1^T \quad \Psi_2^T] \bar{W}_7 \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t-\tau) \\ \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{W}_7 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} - 16R & \Phi_{12} & \Phi_{13} - 4R & \frac{20}{\tau}R & \frac{30}{\tau}R & \frac{70}{\tau}R \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -S - 16R & \frac{20}{\tau}R & -\frac{30}{\tau}R & \frac{70}{\tau}R \\ * & * & * & -\frac{40}{\tau^2}R & 0 & -\frac{140}{\tau^2}R \\ * & * & * & * & -\frac{180}{\tau^2}R & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{700}{\tau^2}R \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= A_0^T P_2 + P_2^T A_0 + S & \Phi_{12} &= P - P_2^T + A_0^T P_3 & \Phi_{13} &= P_2^T A_1 \\
\Phi_{22} &= -P_3 - P_3^T + \tau^2 R & \Phi_{23} &= P_3^T A_1
\end{aligned}$$

Considerando el enfoque descriptor y la desigualdad de Bessel-Legendre para  $N_B = 3$ , las condiciones de estabilidad basadas en la funcional definida en (3.16) están dadas por:

$$W_7 = \{\bar{W}_7, P, R, S \mid \bar{W}_7 < 0, P > 0, R > 0, S > 0\} \quad (3.27)$$

**Funcional  $V_2$  más enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 7$**

La desigualdad de Bessel-Legendre con  $N_B = 7$  corresponde a:

$$\begin{aligned}
& -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
& \leq -\xi_7^T [\Gamma_7(0) R \Gamma_7(0) + 3\Gamma_7(1) R \Gamma_7(1) + 5\Gamma_7(2) R \Gamma_7(2) + 7\Gamma_7(3) R \Gamma_7(3) \\
& \quad + 9\Gamma_7(4) R \Gamma_7(4) + 11\Gamma_7(5) R \Gamma_7(5) + 13\Gamma_7(6) R \Gamma_7(6) + 15\Gamma_7(7) R \Gamma_7(7)] \xi_7 \\
& = -[x(t) - x(t - \tau)]^T R [x(t) - x(t - \tau)] \\
& \quad - 3 \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 \right]^T R \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 \right] \\
& \quad - 5 \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 \right]^T R \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 \right] \\
& \quad - 7 \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 \right]^T R \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 \right] \\
& \quad - 9 \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 \right]^T R \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 \right] \\
& \quad - 11 \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 - \frac{18}{\tau} \Psi_4 \right]^T R \\
& \quad \quad \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 - \frac{18}{\tau} \Psi_4 \right] \\
& \quad - 13 \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 - \frac{22}{\tau} \Psi_5 \right]^T R \\
& \quad \quad \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 - \frac{22}{\tau} \Psi_5 \right] \\
& \quad - 15 \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 - \frac{18}{\tau} \Psi_4 - \frac{26}{\tau} \Psi_6 \right]^T R \\
& \quad \quad \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 - \frac{18}{\tau} \Psi_4 - \frac{26}{\tau} \Psi_6 \right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en la derivada de (3.21) y agrupando términos se obtiene:

$$\dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) \leq \eta^T \bar{W}_8 \eta$$

donde

$$\eta^T = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t - \tau) \quad \Psi_0^T \quad \Psi_1^T \quad \Psi_2^T \quad \Psi_3^T \quad \Psi_4^T \quad \Psi_5^T \quad \Psi_6^T]$$



$$\overline{W}_8 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} - 64R & \Phi_{12} & \Phi_{13} - 8R & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} & \Phi_{17} & \Phi_{18} & \Phi_{19} & \Phi_{1A} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} & \Phi_{36} & \Phi_{37} & \Phi_{38} & \Phi_{39} & \Phi_{3A} \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & \Phi_{46} & 0 & \Phi_{48} & 0 & \Phi_{4A} \\ * & * & * & * & \Phi_{55} & 0 & \Phi_{57} & 0 & \Phi_{59} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} & 0 & \Phi_{68} & 0 & \Phi_{6A} \\ * & * & * & * & * & * & \Phi_{77} & 0 & \Phi_{79} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Phi_{88} & 0 & \Phi_{8A} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Phi_{99} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Phi_{AA} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_0^T P_2 + P_2^T A_0 + S & \Phi_{12} &= P - P_2^T + A_0^T P_3 & \Phi_{13} &= P_2^T A_1 \\ \Phi_{14} &= \frac{72}{\tau} R & \Phi_{15} &= \frac{162}{\tau} R & \Phi_{16} &= \frac{330}{\tau} R \\ \Phi_{17} &= \frac{308}{\tau} R & \Phi_{18} &= \frac{468}{\tau} R & \Phi_{19} &= \frac{286}{\tau} R \\ \Phi_{1A} &= \frac{390}{\tau} R & \Phi_{22} &= -P_3 - P_3^T + \tau^2 R & \Phi_{23} &= P_3^T A_1 \\ \Phi_{33} &= -S - 64R & \Phi_{34} &= \frac{72}{\tau} R & \Phi_{35} &= -\frac{162}{\tau} R \\ \Phi_{36} &= \frac{330}{\tau} R & \Phi_{37} &= -\frac{308}{\tau} R & \Phi_{38} &= \frac{468}{\tau} R \\ \Phi_{39} &= -\frac{286}{\tau} R & \Phi_{3A} &= \frac{390}{\tau} R & \Phi_{44} &= -\frac{144}{\tau^2} R \\ \Phi_{46} &= -\frac{660}{\tau^2} R & \Phi_{48} &= -\frac{936}{\tau^2} R & \Phi_{4A} &= -\frac{780}{\tau^2} R \\ \Phi_{55} &= -\frac{972}{\tau^2} R & \Phi_{57} &= -\frac{1848}{\tau^2} R & \Phi_{59} &= -\frac{1716}{\tau^2} R \\ \Phi_{66} &= -\frac{3300}{\tau^2} R & \Phi_{68} &= -\frac{4680}{\tau^2} R & \Phi_{6A} &= -\frac{3900}{\tau^2} R \\ \Phi_{77} &= -\frac{4312}{\tau^2} R & \Phi_{79} &= -\frac{4004}{\tau^2} R & \Phi_{88} &= -\frac{8424}{\tau^2} R \\ \Phi_{8A} &= -\frac{7020}{\tau^2} R & \Phi_{99} &= -\frac{6292}{\tau^2} R & \Phi_{AA} &= -\frac{10140}{\tau^2} R \end{aligned}$$

Considerando el enfoque descriptor y la desigualdad de Bessel-Legendre para  $N_B = 7$ , las condiciones de estabilidad basadas en la funcional definida en (3.16) están dadas por:

$$W_8 = \{\overline{W}_8, P, R, S \mid \overline{W}_8 < 0, P > 0, R > 0, S > 0\} \quad (3.29)$$

**Funcional  $V_2$  más enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 8$**

Aplicando la desigualdad de Bessel-Legendre con  $N_B = 8$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\
& \leq -\xi_8^T [\Gamma_8(0) R \Gamma_8(0) + 3\Gamma_8(1) R \Gamma_8(1) + 5\Gamma_8(2) R \Gamma_8(2) + 7\Gamma_8(3) R \Gamma_8(3) \\
& \quad + 9\Gamma_8(4) R \Gamma_8(4) + 11\Gamma_8(5) R \Gamma_8(5) + 13\Gamma_8(6) R \Gamma_8(6) + 15\Gamma_8(7) R \Gamma_8(7) \\
& \quad + 17\Gamma_8(8) R \Gamma_8(8)] \xi_8 \\
& = -[x(t) - x(t - \tau)]^T R [x(t) - x(t - \tau)] \\
& \quad - 3 \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 \right]^T R \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 \right] \\
& \quad - 5 \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 \right]^T R \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 \right] \\
& \quad - 7 \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 \right]^T R \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 \right] \\
& \quad - 9 \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 \right]^T R \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 \right] \\
& \quad - 11 \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 - \frac{18}{\tau} \Psi_4 \right]^T R \\
& \quad \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 - \frac{18}{\tau} \Psi_4 \right] \\
& \quad - 13 \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 - \frac{22}{\tau} \Psi_5 \right]^T R \\
& \quad \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 - \frac{22}{\tau} \Psi_5 \right] \\
& \quad - 15 \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 - \frac{18}{\tau} \Psi_4 - \frac{26}{\tau} \Psi_6 \right]^T R \\
& \quad \left[ x(t) + x(t - \tau) - \frac{2}{\tau} \Psi_0 - \frac{10}{\tau} \Psi_2 - \frac{18}{\tau} \Psi_4 - \frac{26}{\tau} \Psi_6 \right] \\
& \quad - 17 \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 - \frac{22}{\tau} \Psi_5 - \frac{30}{\tau} \Psi_7 \right]^T R \\
& \quad \left[ x(t) - x(t - \tau) - \frac{6}{\tau} \Psi_1 - \frac{14}{\tau} \Psi_3 - \frac{22}{\tau} \Psi_5 - \frac{30}{\tau} \Psi_7 \right]
\end{aligned}$$

sustituir la desigualdad anterior en la ecuación (3.21) y agrupar términos permite obtener:

$$\dot{V}_2(x_t, \dot{x}_t) \leq \eta^T \bar{W}_9 \eta$$

donde

$$\eta^T = [x^T(t) \dot{x}^T(t) x^T(t - \tau) \Psi_0^T \Psi_1^T \Psi_2^T \Psi_3^T \Psi_4^T \Psi_5^T \Psi_6^T \Psi_7^T]$$

$$\bar{W}_9 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} - 81R & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} & \Phi_{17} & \Phi_{18} & \Phi_{19} & \Phi_{1A} & \Phi_{1B} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} & \Phi_{36} & \Phi_{37} & \Phi_{38} & \Phi_{39} & \Phi_{3A} & \Phi_{3B} \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & \Phi_{46} & 0 & \Phi_{48} & 0 & \Phi_{4A} & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55} & 0 & \Phi_{57} & 0 & \Phi_{59} & 0 & \Phi_{5B} \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} & 0 & \Phi_{68} & 0 & \Phi_{6A} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Phi_{77} & 0 & \Phi_{79} & 0 & \Phi_{7B} \\ * & * & * & * & * & * & * & \Phi_{88} & 0 & \Phi_{8A} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Phi_{99} & 0 & \Phi_{9B} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Phi_{AA} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Phi_{BB} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_0^T P_2 + P_2^T A_0 + S & \Phi_{12} &= P - P_2^T + A_0^T P_3 & \Phi_{13} &= P_2^T A_1 + 9R \\ \Phi_{14} &= \frac{72}{\tau} R & \Phi_{15} &= \frac{264}{\tau} R & \Phi_{16} &= \frac{330}{\tau} R \\ \Phi_{17} &= \frac{546}{\tau} R & \Phi_{18} &= \frac{468}{\tau} R & \Phi_{19} &= \frac{660}{\tau} R \\ \Phi_{1A} &= \frac{390}{\tau} R & \Phi_{22} &= -P_3 - P_3^T + \tau^2 R & \Phi_{1B} &= \frac{510}{\tau} R \\ \Phi_{23} &= P_3^T A_1 & \Phi_{33} &= -S - 81R & \Phi_{34} &= \frac{72}{\tau} R \\ \Phi_{35} &= -\frac{264}{\tau} R & \Phi_{36} &= \frac{330}{\tau} R & \Phi_{37} &= -\frac{546}{\tau} R \\ \Phi_{38} &= \frac{468}{\tau} R & \Phi_{39} &= -\frac{660}{\tau} R & \Phi_{3A} &= \frac{390}{\tau} R \\ \Phi_{3B} &= -\frac{510}{\tau} R & \Phi_{44} &= -\frac{144}{\tau^2} R & \Phi_{46} &= -\frac{660}{\tau^2} R \\ \Phi_{48} &= -\frac{936}{\tau^2} R & \Phi_{4A} &= -\frac{780}{\tau^2} R & \Phi_{55} &= -\frac{1584}{\tau^2} R \\ \Phi_{57} &= -\frac{3276}{\tau^2} R & \Phi_{59} &= -\frac{3960}{\tau^2} R & \Phi_{5B} &= -\frac{3060}{\tau^2} R \\ \Phi_{66} &= -\frac{3300}{\tau^2} R & \Phi_{68} &= -\frac{4680}{\tau^2} R & \Phi_{6A} &= -\frac{3900}{\tau^2} R \\ \Phi_{77} &= -\frac{7644}{\tau^2} R & \Phi_{79} &= -\frac{9240}{\tau^2} R & \Phi_{7B} &= -\frac{7140}{\tau^2} R \\ \Phi_{88} &= -\frac{8424}{\tau^2} R & \Phi_{8A} &= -\frac{7020}{\tau^2} R & \Phi_{99} &= -\frac{14520}{\tau^2} R \end{aligned}$$

$$\Phi_{9B} = -\frac{11220}{\tau^2}R \quad \Phi_{AA} = -\frac{10140}{\tau^2}R \quad \Phi_{BB} = -\frac{15300}{\tau^2}R$$

Al considerar el enfoque descriptor y la desigualdad de Bessel-Legendre para  $N_B = 8$ , las condiciones de estabilidad basadas en la funcional definida en (3.16) están definidas por el conjunto  $W_9$ .

$$W_9 = \{\overline{W}_9, P, R, S \mid \overline{W}_9 < 0, P > 0, R > 0, S > 0\} \quad (3.31)$$

En esta sección se presentó el análisis de estabilidad mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii que derivan en conjuntos LMI de condiciones de estabilidad y se resumen a continuación:

- Conjunto LMI  $W_1$  definido en (3.13) (funcional  $V_1$ )
- Conjunto LMI  $W_2$  definido en (3.15) (funcional  $V_1$ , enfoque descriptor)
- Conjunto LMI  $W_3$  definido en (3.18) (funcional  $V_2$ )
- Conjunto LMI  $W_4$  definido en (3.20) (funcional  $V_2$ , enfoque descriptor)
- Conjunto LMI  $W_5$  definido en (3.23) (funcional  $V_2$ , enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 1$ )
- Conjunto LMI  $W_6$  definido en (3.25) (funcional  $V_2$ , enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 2$ )
- Conjunto LMI  $W_7$  definido en (3.27) (funcional  $V_2$ , enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 3$ )
- Conjunto LMI  $W_8$  definido en (3.29) (funcional  $V_2$ , enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 7$ )
- Conjunto LMI  $W_9$  definido en (3.31) (funcional  $V_2$ , enfoque descriptor y considerando las desigualdades de Bessel-Legendre para  $N_B = 8$ )

### 3.2.2. Resultados numéricos

Con las LMI definidas en el apartado anterior se realizan análisis numéricos para determinar la estabilidad con base en el modelo de dos grados de libertad presentado en la Sección 2.2.1., y se obtienen gráficas en el espacio de parámetros en las que se ilustran las zonas de estabilidad del sistema que corresponden a las combinaciones de parámetros en las que se garantiza una operación de fresado libre de vibración.

Para analizar la estabilidad del proceso de fresado es necesario conocer los parámetros de la fresadora bajo estudio (la masa, el amortiguamiento, la rigidez) así como los coeficientes de corte ( $K_t$ ,  $K_r$ ), e introducirlos en el modelo (2.19) específicamente en  $A_0$  y  $A_1$ . El proceso propuesto para generar las gráficas en el espacio de

parámetros se realiza de la siguiente manera: se analiza numéricamente la factibilidad del conjunto LMI para una velocidad inicial de  $50rad/s$  (que se selecciona de manera arbitraria sin pérdida de generalidad) y una profundidad inicial de  $1\mu m$ , si es factible, se realiza un nuevo análisis con la misma velocidad ( $50rad/s$ ) pero con una profundidad de  $2\mu m$  (es decir, con un incremento de  $1\mu m$ ), esto se realiza hasta que el conjunto LMI no sea factible, cuando esto sucede, se guardan los datos y se analiza el conjunto LMI aumentando esta vez la velocidad a  $100rad/s$  (es decir se incrementa  $50rad/s$ ) con la profundidad inicial de  $1\mu m$ , esto se repite hasta analizar la velocidad de  $6000rad/s$ . Como resultado, los datos guardados permiten generar una gráfica en el espacio de parámetros de velocidad contra profundidad. Para lo anterior se utiliza el diagrama de flujo mostrado en la Figura 3.4.

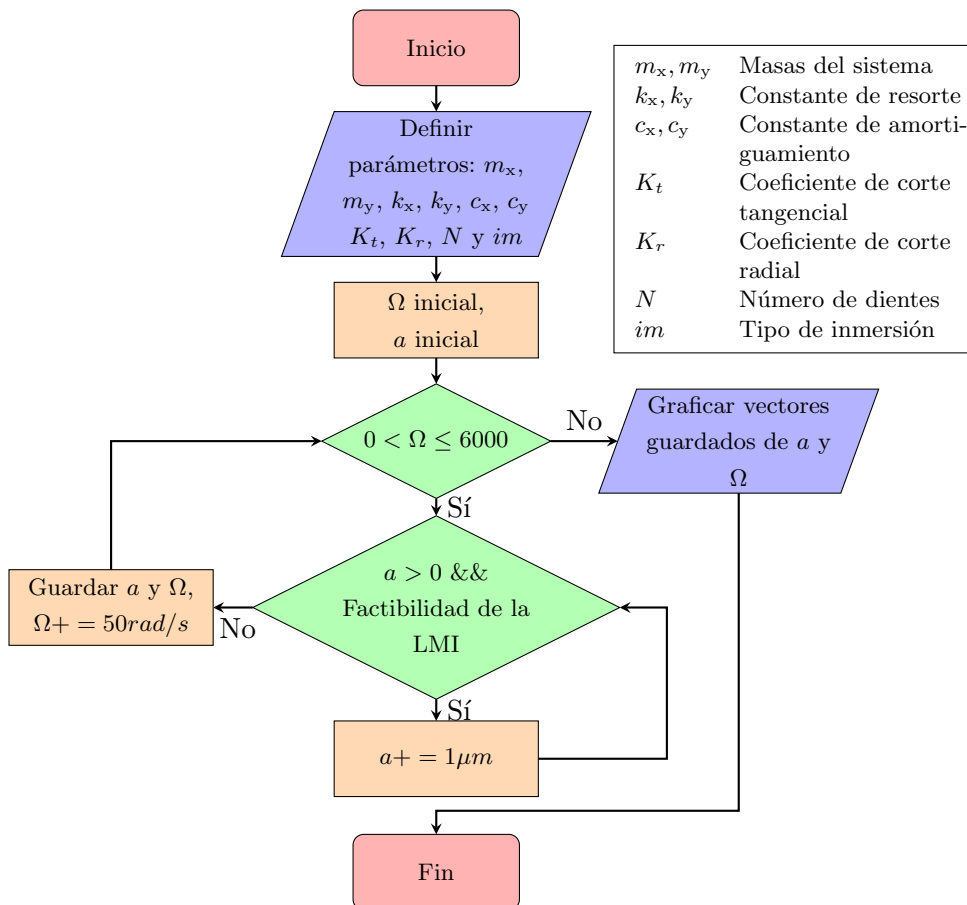


Figura 3.4: Diagrama de flujo para la determinación de las condiciones de estabilidad

Para este análisis se consideran tres diferentes fresadoras reportadas en la literatura y se consideran los tipos de inmersión descritos en la Sección 1.1. A continuación, se presentan los parámetros de las fresadoras, así como los resultados numéricos.

**Fresadora 1.** Eldon Graham en el 2013 realiza un análisis robusto de estabilidad en el fresado y utiliza una micro fresadora con las siguientes características [42]:

- Masas del sistema  $m_x = 0.1465Kg$ ,  $m_y = 0.1465Kg$
- Coeficiente de amortiguamiento  $c_x = 61.6522Ns/m$ ,  $c_y = 61.6522Ns/m$
- Coeficiente de rigidez  $k_x = k_y = 8.01 \times 10^7 N/m$
- Coeficiente de corte tangencial  $K_t = 4203N/mm^2$
- Coeficiente de corte radial  $K_r = 1482.5N/mm^2$
- Diámetro de la herramienta  $500\mu m$ , dos dientes, acabado plano
- Tipo de inmersión *slotting* (véase Sección 1.1.)

La Figura 3.5 muestra las zonas de estabilidad obtenidas a partir de las LMI dadas en (3.13), (3.15), (3.18) y (3.20).

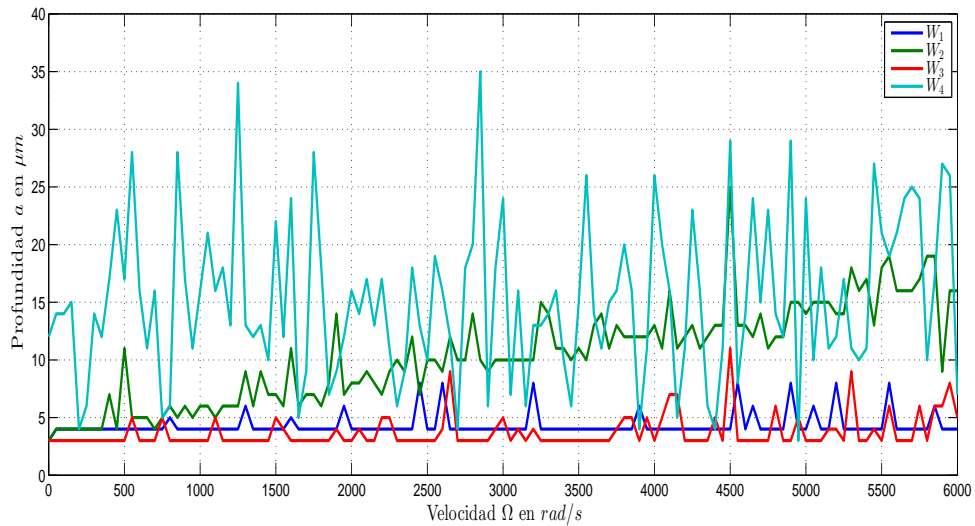


Figura 3.5: Regiones de estabilidad para la **Fresadora 1** generadas a partir de las condiciones sujetas a la desigualdad de Jensen definidas por los conjuntos LMI  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  y  $W_4$

La Figura 3.6 muestra las zonas de estabilidad obtenidas con las LMI dadas en (3.20), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29) y (3.31) donde se utilizan las desigualdades de Bessel-Legendre con  $N_B = 0, 1, 2, 3, 7, 8$  respectivamente.

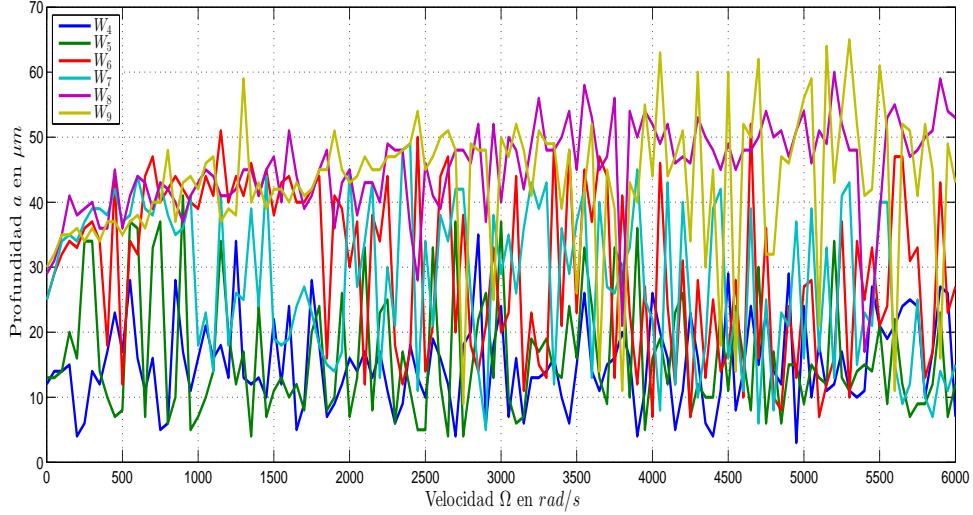


Figura 3.6: Regiones de estabilidad para la **Fresadora 1** generadas a partir de las condiciones sujetas a las desigualdades de Bessel-Legendre definidas por los conjuntos LMI  $W_4$ ,  $W_5$ ,  $W_6$ ,  $W_7$ ,  $W_8$  y  $W_9$

**Fresadora 2.** Yingchao Ma et al. en el 2016 analizan la influencia de la desviación generada por la rotación de la herramienta en la estabilidad del fresado y utiliza una fresadora con las siguientes características [52]:

- Masas del sistema  $m_x = 0.1066Kg$ ,  $m_y = 0.0707Kg$
- Coeficiente de amortiguamiento  $c_x = 23.5646Ns/m$ ,  $c_y = 33.7247Ns/m$
- Coeficiente de rigidez  $k_x = 2.9785N/\mu m$  y  $k_y = 2.0368N/\mu m$
- Coeficiente de corte tangencial  $K_t = 1026.6N/mm^2$
- Coeficiente de corte radial  $K_r = 463.63N/mm^2$
- Herramienta con 3 dientes, acabado plano
- Tipo de inmersión *half immersion down milling* (véase Sección 1.1.)

La Figura 3.7 muestra las zonas de estabilidad obtenidas a partir de las LMI dadas en (3.13), (3.15), (3.18) y (3.20), en las que se considera la desigualdad de Jensen.

La Figura 3.8 muestra las zonas de estabilidad obtenidas con las LMI dadas en (3.20), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29) y (3.31) donde se utilizan las desigualdades de Bessel-Legendre con  $N_B = 0, 1, 2, 3, 7, 8$  respectivamente.

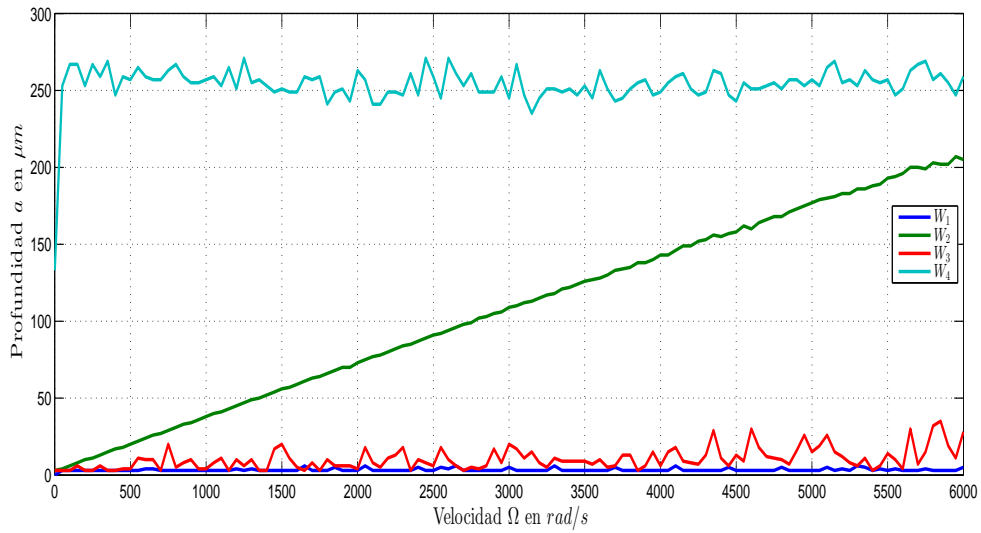


Figura 3.7: Regiones de estabilidad para la **Fresadora 2** generadas a partir de las condiciones sujetas a la desigualdad de Jensen definidas por los conjuntos LMI  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  y  $W_4$

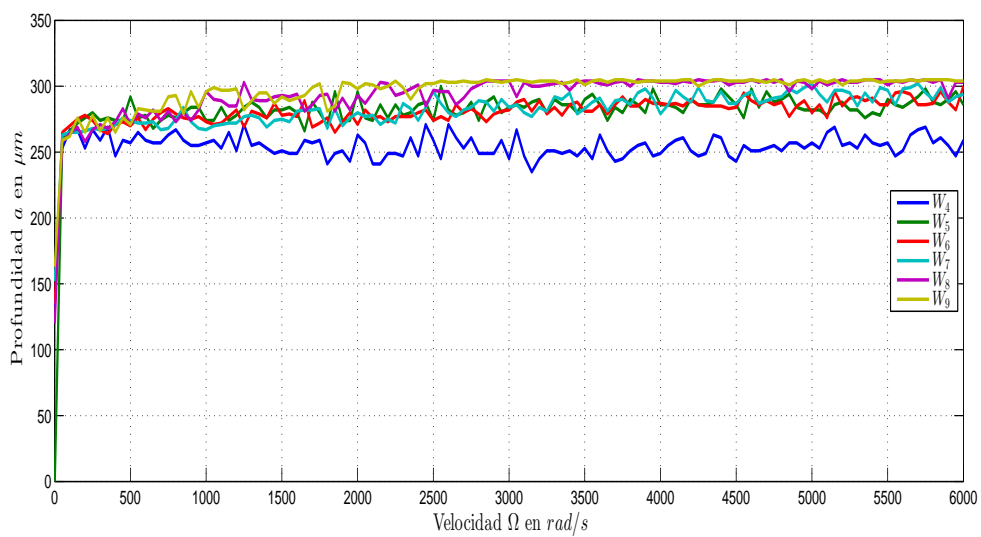


Figura 3.8: Regiones de estabilidad para la **Fresadora 2** generadas a partir de las condiciones sujetas a las desigualdades de Bessel-Legendre definidas por los conjuntos LMI  $W_4$ ,  $W_5$ ,  $W_6$ ,  $W_7$ ,  $W_8$  y  $W_9$



**Fresadora 3.** Y. Altintas y M. Weck en el 2004 realizan el modelado y análisis de estabilidad de procesos de corte de metal y esmerilado en el utiliza una fresadora con las siguientes características [27]:

- Masas del sistema  $m_x = 9.3637Kg$ ,  $m_y = 1.8706Kg$
- C. de amortiguamiento  $c_x = 2.4004 \times 10^3Ns/m$ ,  $c_y = 942.6259Ns/m$
- Coeficiente de rigidez  $k_x = 96.15 \times 10^6N/m$  y  $k_y = 47.5 \times 10^6N/m$
- Coeficiente de corte tangencial  $K_t = 900 \times 10^6N/m^2$
- Coeficiente de corte radial  $K_r = 3420 \times 10^6N/m^2$
- Diámetro de la herramienta  $19.5mm$ , dos dientes, con insertos
- Tipo de inmersión *slotting* (véase Sección 1.1.)

La Figura 3.9 muestra las zonas de estabilidad obtenidas a partir de las LMI dadas en (3.13), (3.15), (3.18) y (3.20), en las que se considera la desigualdad de Jensen.

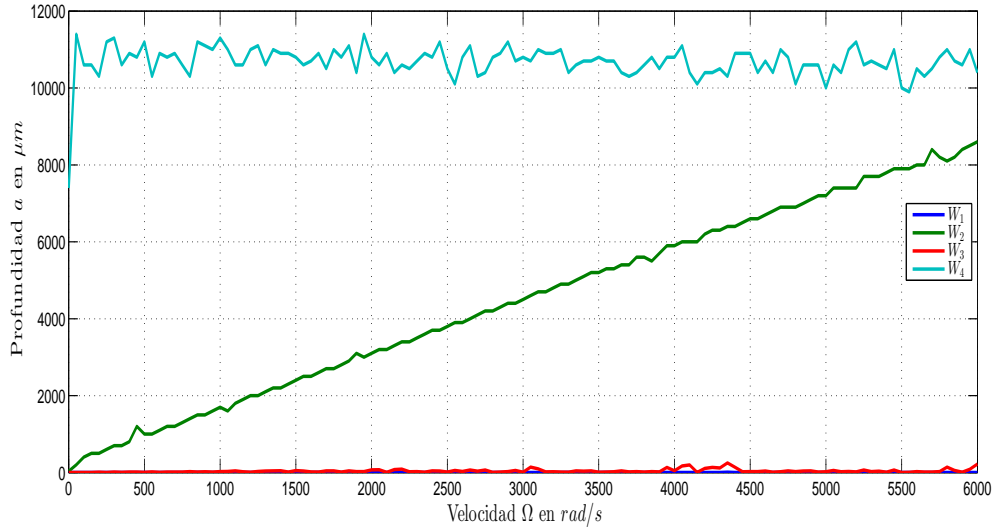


Figura 3.9: Regiones de estabilidad para la **Fresadora 3** generadas a partir de las condiciones sujetas a la desigualdad de Jensen definidas por los conjuntos LMI  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  y  $W_4$

La Figura 3.10 muestra las zonas de estabilidad obtenidas a partir de las LMI dadas en (3.20), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29) y (3.31) en las que se utilizan las desigualdades de Bessel-Legendre con  $N_B = 0, 1, 2, 3, 7, 8$  respectivamente.

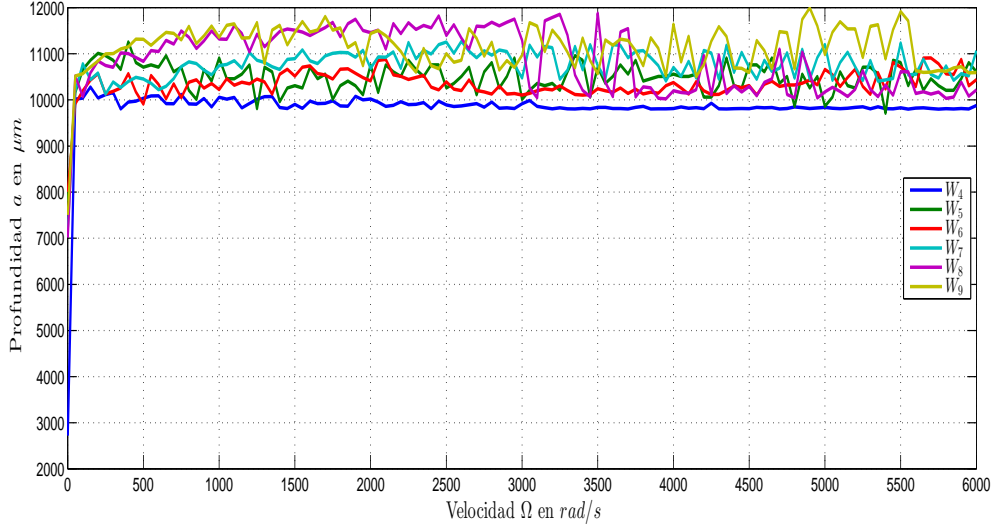


Figura 3.10: Regiones de estabilidad para la **Fresadora 3** generadas a partir de las condiciones sujetas a las desigualdades de Bessel-Legendre definidas por los conjuntos LMI  $W_4$ ,  $W_5$ ,  $W_6$ ,  $W_7$ ,  $W_8$  y  $W_9$

### 3.2.3. Discusión de resultados

Es posible visualizar en las gráficas anteriores las zonas de estabilidad para las diferentes fresadoras, las cuales son obtenidas mediante el método de Lyapunov-Krasovskii, a partir de las LMI definidas en (3.12), (3.14), (3.17), (3.19), (3.22), (3.24), (3.26), (3.28) y (3.30) representadas por  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $W_4$ ,  $W_5$ ,  $W_6$ ,  $W_7$ ,  $W_8$  y  $W_9$ , respectivamente.

Se observa que el comportamiento para  $W_1$  y  $W_3$  en las tres figuras es parecido y nos indica que el sistema es estable para profundidades bajas (de 5 a  $25\mu m$  para la Figura 3.5, de 5 a  $35\mu m$  para la Figura 3.7 y de 5 a  $35\mu m$  para la Figura 3.9, aproximadamente), lo cual hace notar el conservadurismo propio del método.

Para  $W_2$  se observa que para que el sistema sea estable a velocidades bajas, la profundidad de corte debe ser baja, sin embargo, a medida que aumenta la velocidad, el sistema es estable a profundidades cada vez más altas. Este comportamiento se presenta de forma similar en las tres figuras (Figura 3.5, Figura 3.7 y Figura 3.9). Para  $W_4$  en la Figura 3.5 se observan profundidades que varían desde 10 hasta  $150\mu m$ , en la Figura 3.7 se observan profundidades que varían desde 150 hasta  $280\mu m$  y en la Figura 3.9 se observan profundidades que varían desde 8000 hasta  $11500\mu m$ . Cabe destacar que  $W_2$  al igual que  $W_1$  es obtenida de la funcional  $V_1$  definida en (3.11) y  $W_4$  es obtenida de la funcional  $V_2$  definida en (3.16) al igual que  $W_3$ , pero para el caso de  $W_1$  y  $W_3$  se utiliza el enfoque descriptor.

Mediante la funcional  $V_2$ , el enfoque descriptor y las desigualdades de Bessel-Legendre con  $N_B = 0, 1, 2, 3, 7, 8$  se obtienen las LMI (3.19), (3.22), (3.24), (3.26), (3.28) y (3.30), con las cuales se mejoran los resultados. Para  $W_5$  la estabilidad del sistema está garantizada para una profundidad de corte mayor que la que se obtiene con  $W_4$ . Este comportamiento es evidente para las tres fresadoras. Sin embargo, note que para  $W_6$  el proceso de fresado estará libre de chatter considerando un aumento en la tasa de remoción solamente en algunos puntos. De igual forma para  $W_7$ ,  $W_8$  y  $W_9$  la profundidad de corte correspondiente a un proceso estable es mayor que la que se obtiene con  $W_6$ , pero solo en algunos puntos. En [53] se menciona que la mejora en los resultados disminuye conforme aumenta  $N_B$ , lo cual coincide con los resultados presentados en esta sección. Es importante mencionar que el enfoque descriptor aunado a las desigualdades de Bessel-Legendre permiten reducir el conservadurismo de los resultados.

#### 3.2.4. Análisis comparativo

En esta sección se realiza un análisis comparativo entre los resultados de las investigaciones [42], [52], [27] y los resultados obtenidos en este trabajo. Para realizar adecuadamente este análisis los resultados reportados en la sección anterior se adecuan al rango de velocidades y unidades correspondientes. En la Sección 3.2.2 se presentaron nueve zonas de estabilidad relativas a los diferentes conjuntos LMI, para facilitar la comparación de resultados, en esta sección se presenta una nueva zona de estabilidad obtenida a partir de las profundidades de corte más altas generadas con cada uno de los análisis realizados que garantizan la estabilidad del proceso .

**Fresadora 1.** Eldon Graham en el 2013 [42] analiza la estabilidad mediante un enfoque en el dominio de la frecuencia usando el teorema de Edge, con el cual es posible tomar en cuenta los parámetros invariantes en el tiempo directamente en la ecuación característica. En el mismo trabajo realiza un análisis en el dominio del tiempo usando la teoría de Lyapunov sujeta a desigualdades matriciales lineales, para ello aproxima el retardo mediante la aproximación de Pade; los análisis se desarrollan a partir del modelo planteado en [27].

Los resultados del trabajo de Graham se muestran en la Figura 3.11, la línea punteada roja corresponde a los resultados del análisis obtenidos mediante el teorema de Edge y la línea verde corresponde a los resultados obtenidos mediante técnicas LMI. Con ambos enfoques se encuentra que el proceso es estable para un rango de valores de velocidad de entre  $20$  y  $70\mu m$  para las velocidades que van de  $3300$  a  $5000 rev/min$ . En esta misma figura se muestra el resultado de análisis de estabilidad de Altintas et al. [27]. Para validar los resultados realiza pruebas experimentales y los reporta en la figura, con círculos azules marca puntos estables del proceso, con

una equis roja marca puntos inestables y con rombos verdes marca los puntos de incertidumbre. Existe una similitud entre estos resultados y los resultados obtenidos en este trabajo que son mostrados en la Figura 3.12, donde la línea mostrada representa los puntos más altos en el eje de de las abscisas de las Figuras 3.5 y 3.6, es decir, las mayores profundidades de corte obtenidas con los conjuntos LMI ( $W_i$   $i = 1, \dots, 9$ ). Es importante resaltar que los resultados obtenidos en este trabajo muestran una zona de estabilidad por debajo de los puntos inestables que se obtuvieron en las pruebas experimentales.

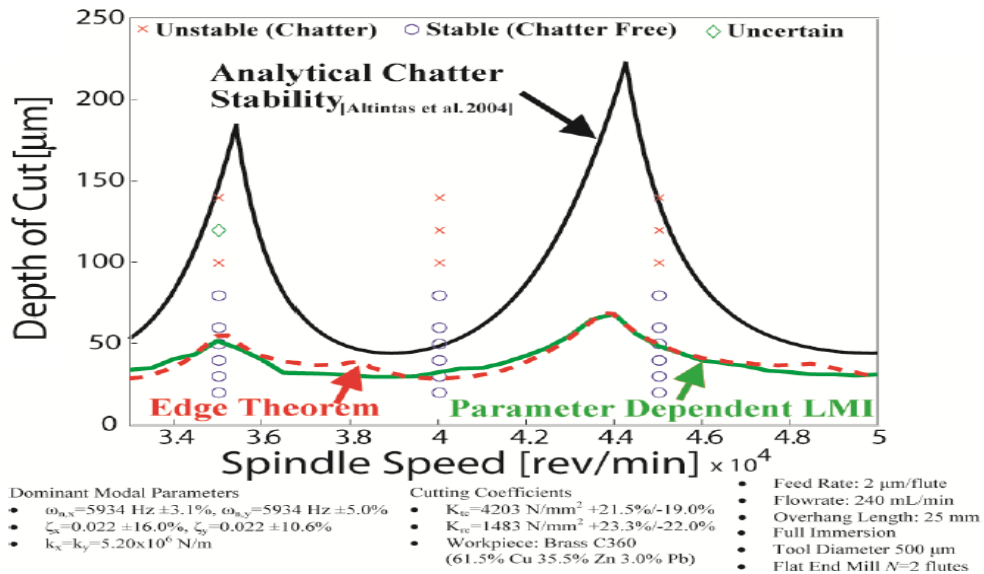


Figura 3.11: Regiones de estabilidad presentadas en [42]

**Fresadora 2.** Y. Ma et al. en el 2016 [52] analizan la influencia de la desviación generada por la rotación de la herramienta en la estabilidad del fresado cuando múltiples modos de vibración son tomados en cuenta por el análisis; la simulación es llevada a cabo con el método de semi-discretización y realiza pruebas experimentales para validar sus resultados, los cuales se muestran en la Figura 3.13.

En la gráfica se muestran, para un rango de velocidades de  $3900$  a  $6500 \text{ rev}/\text{min}$ , los resultados del análisis sin tomar en cuenta la desviación generada por la herramienta (línea negra) y tomando en cuenta la desviación de la herramienta (línea punteada roja) en las que la región estable comprende profundidades de corte máximas de entre  $0.39$  y  $1.4 \text{ mm}$ . En la Figura 3.13 se muestran también los resultados de pruebas experimentales que se utilizaron para validar el análisis; los asteriscos azules marcan las combinaciones de parámetros que son estables, los cuadros rojos representan puntos en los que se presenta la vibración, los rombos rosas los puntos

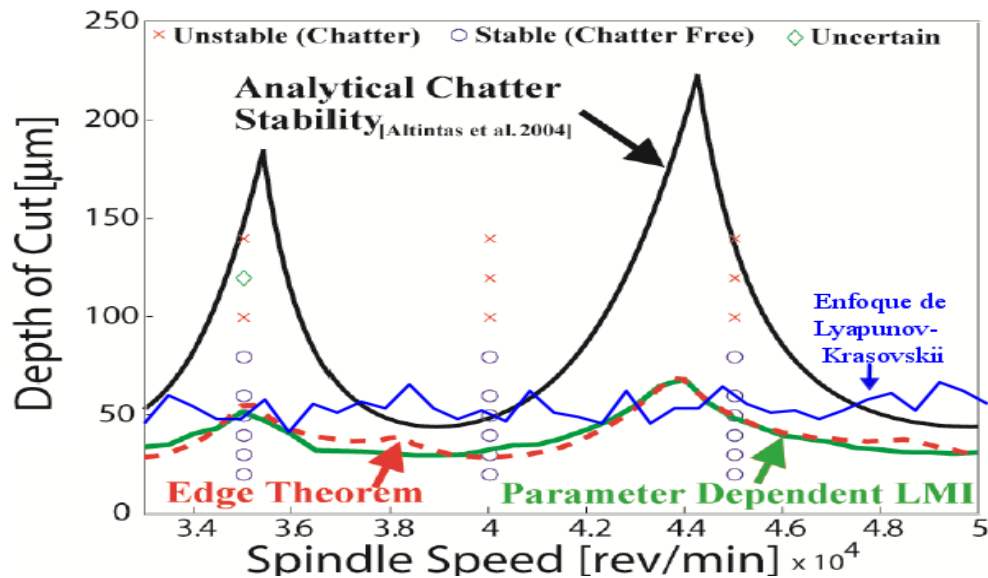


Figura 3.12: Zonas de estabilidad para la **Fresadora 1**. La línea azul delimita la zona estable obtenida mediante el enfoque propuesto; la línea negra, la que se obtiene con el análisis de estabilidad analítico de chatter propuesto en [27]; y la línea punteada roja, y la verde, las que se obtienen con los métodos propuestos en [42]: el Teorema de Edge, y el enfoque LMI dependiente de los parámetros, respectivamente

de incertidumbre. Es posible observar en la gráfica de la Figura 3.14 que los resultados derivados del análisis aquí propuesto (alrededor de 300 micrómetros) están por debajo de los mostrados en la Figura 3.13, sin embargo, el resultado también se encuentra por debajo de los puntos inestables.

**Fresadora 3.** Y. Altintas Y. y M. Weck en el 2004 [27] y Y. Altintas y E. Budak en 1995 [25] realizan el modelado y análisis de estabilidad de diferentes procesos de remoción de material, uno de ellos es el fresado, para el cual se establece un modelo en el que los coeficientes direccionales de corte dependen del tipo de inmersión utilizada. Los análisis de estabilidad se realizan mediante simulaciones en el dominio del tiempo, y los resultados se muestran en la Figura 3.15.

Los resultados de los análisis presentados por Y. Altintas et al. en [25] y [27] se muestran en la gráfica de la Figura 3.15 con una línea punteada y con una línea compuesta por guiones y puntos, respectivamente. El proceso se analiza para un rango de velocidad de 2000 a 20000rpm para el cual se obtiene una zona estable con valores máximos de profundidad de corte que oscilan entre 5 y 25mm. En esta misma figura se muestran las zonas de estabilidad derivadas de los métodos propuestos por Tlustý (línea continua) y Optiz (línea segmentada). Además, para validar

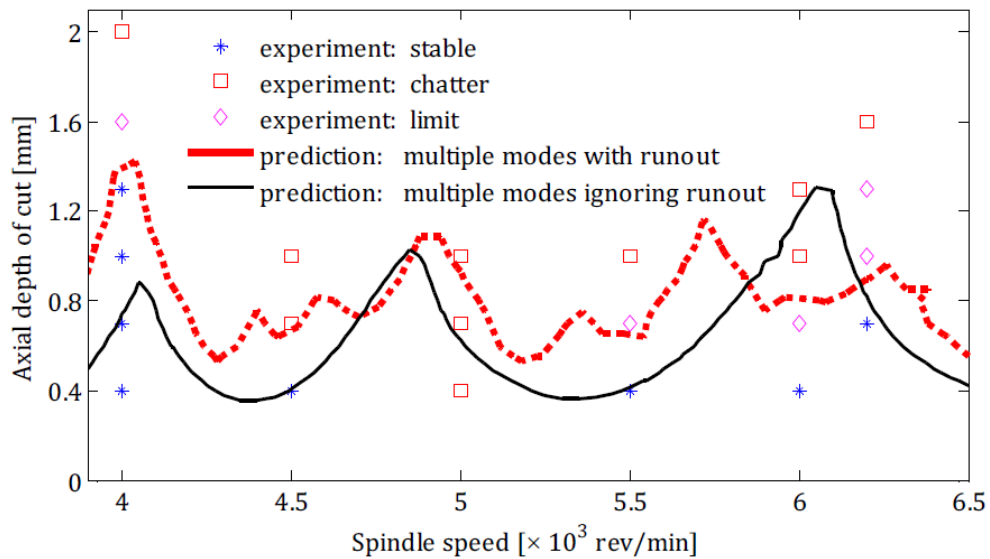


Figura 3.13: Regiones de estabilidad presentadas en [52]

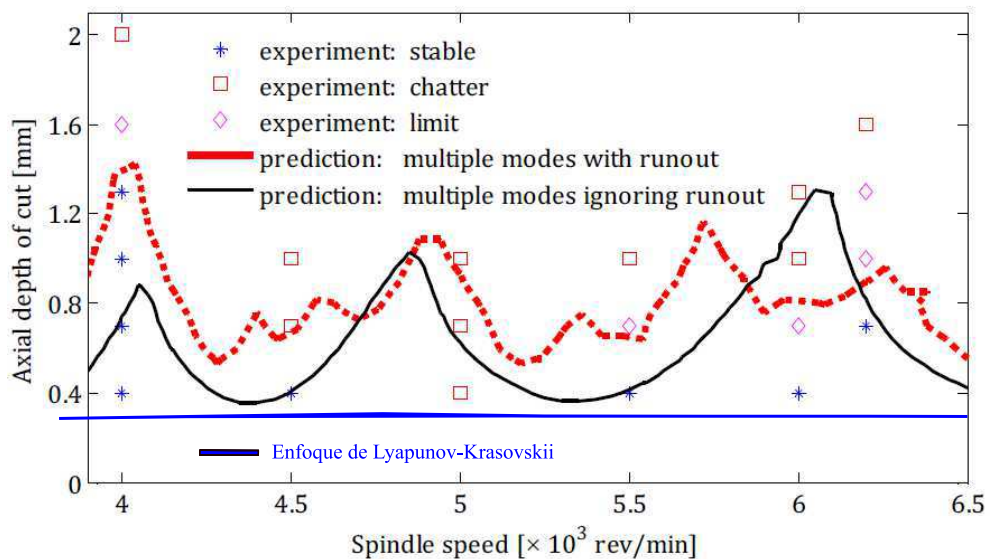


Figura 3.14: Zonas de estabilidad para la **Fresadora 2**. La línea azul delimita la zona estable obtenida mediante el enfoque propuesto; la línea negra, y la línea punteada roja, las que se obtiene con el análisis de estabilidad con múltiples modos de vibración [52]: sin tomar en cuenta la desviación de la herramienta y tomando en cuenta la desviación, respectivamente

el análisis presentado en [27], se realizan dos pruebas experimentales considerando una velocidad de  $7500\text{rpm}$ , una de las pruebas se realiza a  $30\text{mm}$  de profundidad de corte y la otra a  $20\text{mm}$ . En la primera se identificó la ocurrencia de chatter y en la segunda un proceso libre de vibración. De acuerdo con la gráfica, los resultados de [25] y [27] muestran una coherencia con los resultados experimentales, sin embargo, la región de estabilidad obtenida mediante el método de Tulsty marca como estables a ambos puntos analizados, y la región obtenida mediante el método de Optiz, indica inestabilidad en estos puntos.

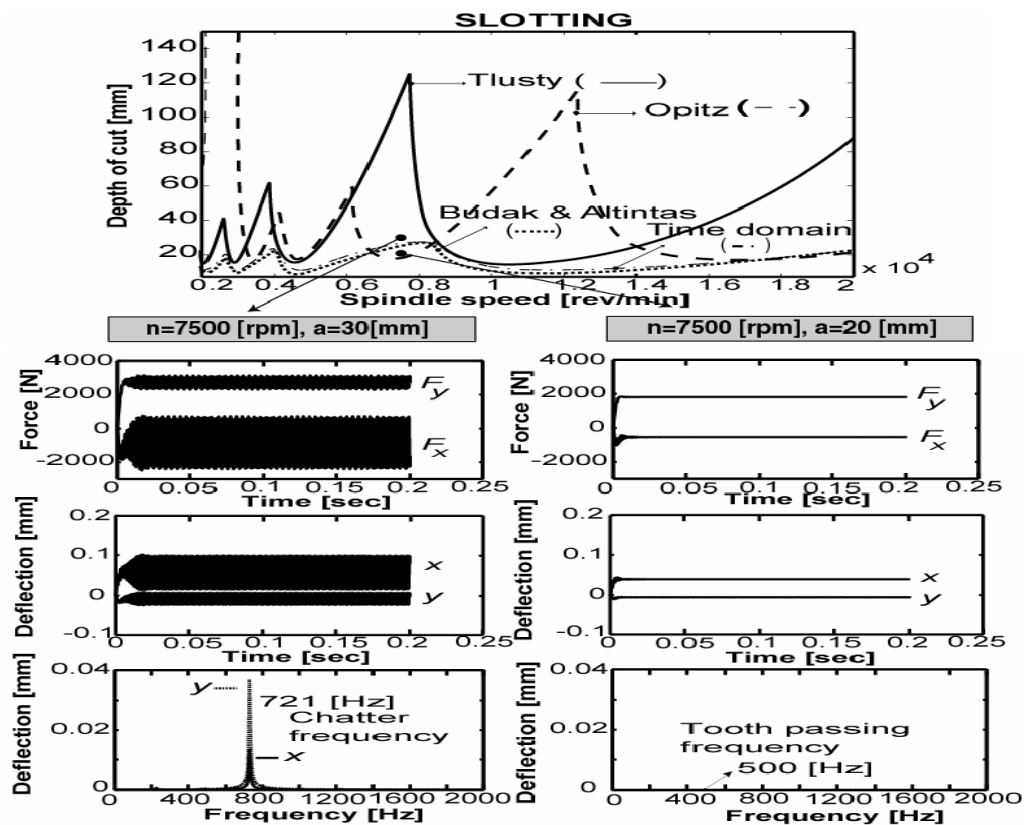


Figura 3.15: Resultados para la fresadora estudiada en [27]

El análisis desarrollado en este trabajo para el mismo rango de velocidad, (Figura 3.16), da lugar a una zona de estabilidad en la que los valores máximos de profundidad de corte que garantizan un proceso libre de chatter se encuentran al alrededor de los  $11.5\text{mm}$ , lo que representa una cercanía con los resultados de [25] y [27].

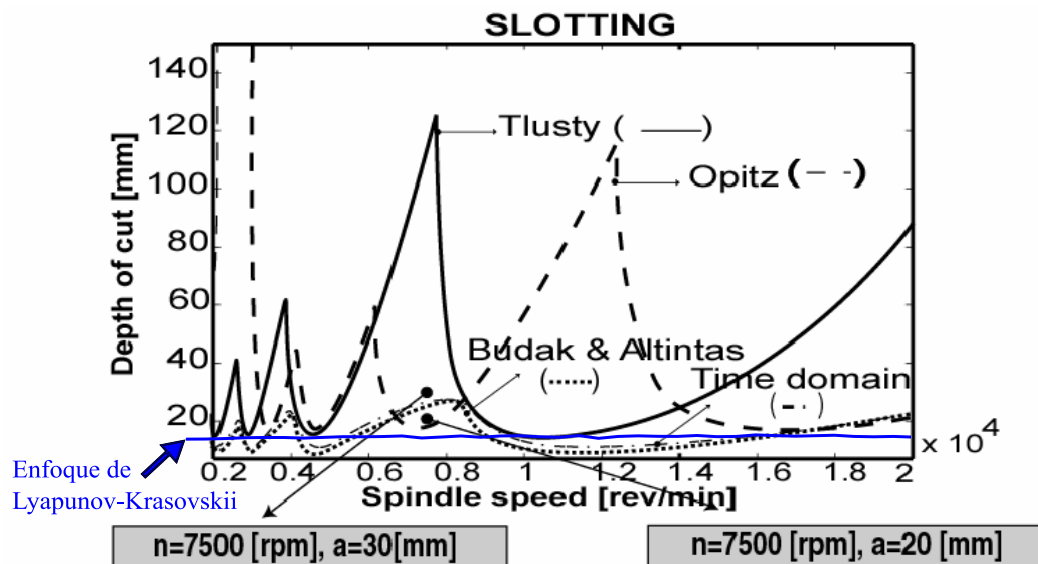


Figura 3.16: Zonas de estabilidad para la **Fresadora 3**. La línea azul delimita la zona estable obtenida mediante el enfoque propuesto; la línea continua negra, y la línea segmentada negra, las que se obtienen con el análisis de estabilidad propuestos en [37] y [34]; y la línea punteada negra, y la negra compuesta por guiones y puntos, las que se obtienen con los métodos propuestos en [25] y [27], respectivamente



## Capítulo 4

# Conclusiones

Para realizar el análisis de estabilidad del proceso de fresado se considera el modelo de dos grados de libertad propuesto en [27], ya que, su complejidad al analizarlo es menor al tratarse de una ecuación lineal con un retardo temporal constante y representa de forma precisa la dinámica del proceso.

Se analiza la estabilidad del proceso de fresado mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii que es una extensión de la teoría de Lyapunov para sistemas con retardos. Derivadas del análisis se obtienen nueve conjuntos de desigualdades matriciales lineales que constituyen las condiciones de estabilidad del sistema, con las cuales es posible analizar la dinámica del proceso y predecir las combinaciones de corte para las cuales el sistema es estable.

El resultado principal de este trabajo de investigación lo constituyen los conjuntos LMI  $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8$  y  $W_9$  dados por las ecuaciones (3.13), (3.15), (3.18), (3.20), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29) y (3.31), respectivamente, que proporcionan las condiciones que garantizan la estabilidad del proceso. El análisis de la estabilidad del proceso de fresado mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii no ha sido investigado previamente en este contexto. Para validar el análisis se verifica la factibilidad de los conjuntos LMI con la dinámica de tres fresadoras utilizadas en la literatura [27], [52] y [42] con lo que se obtiene las zonas de estabilidad para cada una.

El enfoque propuesto analiza de forma más precisa el modelo de las dinámicas del sistema puesto que considera el retardo temporal presente en el proceso, que es comúnmente omitido en muchos de los análisis reportados en la literatura. Por sí solo, el enfoque de Lyapunov-Krasovskii ofrece resultados conservadores (conjuntos LMI  $W_1$  y  $W_3$ ), pero esto se reduce con la implementación del enfoque descriptor (conjuntos LMI  $W_2$  y  $W_4$ ) y se reduce aún más con el uso de las desigualdades de Bessel-Legendre (conjuntos LMI  $W_5, W_6, W_7, W_8$  y  $W_9$ ).

En una comparación realizada entre las zonas de estabilidad que se presentan en este trabajo de investigación y las reportados en la literatura, se observa una congruencia, es decir, que se encuentran en el mismo rango de profundidades, aun cuando las zonas son obtenidas mediante otros métodos. Además cabe mencionar que las zonas de estabilidad obtenidas mediante el análisis desarrollado en este trabajo de investigación son consistentes con los resultados experimentales reportados en [27], [42] y [52], ya que ningún punto inestable se encuentra dentro alguna de las regiones estables obtenidas en este trabajo. Se concluye entonces que, a pesar del conservadurismo del enfoque de Lyapunov-Krasovskii, el método permite la selección de parámetros que garantizan una operación libre de vibración. La validación experimental de estos resultados es una etapa natural subsecuente.

Es importante recalcar que el método propuesto permite analizar la estabilidad del proceso independientemente de los parámetros considerados, es decir, permite analizar la estabilidad de cualquier tipo de fresadora (microfresadora, fresadora semi-industrial, fresadora industrial, etc.).

Derivado de este trabajo de investigación se redactó un artículo científico titulado “Lyapunov-Krasovskii approach to the stability analysis of the milling process” enviado al *IET Control Theory & Applications*.

# Bibliografía

- [1] M. Groover, A. Barrientos, J. León, y R. Reyes, *Fundamentos de manufactura moderna: Materiales, procesos y sistemas*. Tercera Edición, McGraw-Hill Interamericana, 2007.
- [2] J. A. Schey, *Introduction to manufacturing processes*. Third Edition, McGraw-hill Companies, 2000.
- [3] S. Kalpakjian y S. R. Schmid, *Manufactura, ingeniería y tecnología* . Cuarta Edición, Pearson Educación, 2002.
- [4] G. Quintana y J. Ciurana, “Chatter in machining processes: a review,” *Int. J. Mach. Tool Manu.*, 51:363–376, 2011.
- [5] J. Monnin, “Active structural methods for chatter mitigation in milling process,” PhD. thesis, Eth Zurich, Diss. ETH No. 21015, 2013.
- [6] J. Tlustý y M. Polacek, “The stability of machine tools against self-excited vibration in machining,” *ASME International Research in Production engineering*, 1:465–474, 1963.
- [7] K. Ogata, B. Fabián-Frankel y J. Aranda, *Ingeniería de control moderna*. Segunda Edición, Prentice Hall Hispanoamerica, 1993.
- [8] R. Sipahi, S. I. Niculescu, C. T. Abdallah, W. Michiels y K. Gu. “Stabilization of systems with time delay: limitations and opportunities” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31:38-65, 2012.
- [9] H. Toenshoff y B. Denkena *Basics of Cutting and Abrasive Processes*. Springer Science and Business Media, 2:15-19, 2013.
- [10] K. Grote y E. Antonsson, *Springer Handbook of Mechanical Engineering*. Springer Science and Business Media, 10:619-621, 2009.
- [11] R. King, *Handbook of high-speed machining technology* . Chapman and Hall Ltd, 1985.
- [12] S. Rao, *Vibraciones mecánicas*. Quinta edición, Editorial Pearson, 2012.

- [13] B. Balachandran y E. Magrab, *Vibrations*. Second Edition, Cengage Learning, 2009.
- [14] A. Dimarogonas, *Vibration for Engineers*. Second edition, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [15] Y. Altintas, *Manufacturing automation: Metal cutting mechanics, machine tools vibrations, and CNC design*. Segunda edición, Cambridge University Press, 2012.
- [16] S.A. Tobias y W. Fishwick, "Theory of regenerative machine tool chatter," *Engineering*, 205:199–203, 1958.
- [17] Izaro Manufacturing Technology, Tecnologías/ Metal Vibraciones en máquina-herramienta: un enemigo vencible. recuperado el 15 de marzo del 2016 en: <http://www.izaro.com/contenidos/ver.php=1424972271>
- [18] A. G. Sorribes, "Sistemas dinámicos con retardos temporales," Tesis doctoral, UPV, Valencia, España, Octubre 2011.
- [19] K. Gu, V. L. Kharitonov y J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems, Control Engineering*. Primera Edición, Springer Science+Business Media, 2003.
- [20] V. L. Kharitonov y J. Chen, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices, Control Engineering*. DOI 10.1007/978-0-8176-8367-2, Springer Science+Business Media, 2013.
- [21] T. Insperger, G. Stépán, "Semi-discretization for time delay systems", *Applied Mathematical Sciences, Springer*, 178, 2011.
- [22] T. Insperger y G. Stépán, "Updated semi-discretization method for periodic delay differential equations with discrete delay," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:117–141, 2004.
- [23] S. Seguy, G. Dessen, L. Arnaud y T. Insperger, "Control of chatter by spindle speed variation in high-speed milling," *Advanced Materials Research*, 112:179-186, ISSN 1022-6680, 2010.
- [24] D. Inman, *Vibration with Control*. John Wiley and Sons, Ltd., 2006.
- [25] Y. Altintas y E. Budak, "Analytical prediction of stability lobes in milling," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 44(1):357-362, 1995.
- [26] G. Quintana, "Lobes diagram identification and roughness monitoring in milling," PhD. thesis, Universitat de Girona, 2009.
- [27] Y. Altintas y M. Weck, "Chatter stability of metal cutting and grinding," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 53(2):619-642, 2004.

- [28] R. Sridhar, R.E. Hohn y G.W. Long, "A stability algorithm for general milling process," *Contribution to Machine Tool Chatter, Research Journal of Engineering for Industry, ASME*, 90: 330-334, 1968.
- [29] Manufacturing Automation Laboratories INC. recuperado el 20 de octubre del 2015 en: <http://malinc.com/products.html>.
- [30] BlueSwarf LLC. Harmonizer recuperado el 20 de octubre del 2015 en: <http://www.blueswarf.com/>.
- [31] J. Munoa, A. Zubiaurre, A. Iglesias, R. Lizarralde y J. Abete, "Simulación y contrastación experimental de la estabilidad dinámica en procesos de fresado mediante un modelo tridimensional," *XV Congreso de Máquinas-Herramienta y Tecnologías de fabricación*, 1087-1104, 2004.
- [32] T. Insperger, B. Mann, G. Stepan y P. Bayly, "Stability of up-milling and down-milling, part 1: alternative analytical methods," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43: 25-34, 2003.
- [33] T. Insperger, D. Lehotzky y G. Stepan, "Regenerative delay, parametric forcing and machine tool chatter: A review," *International federation of automatic control*, proceedings of the twelfth International Conference 322-327, 2015.
- [34] H. Opitz y F. Bernardi, "Investigation and calculation of chatter behaviour of lathes and milling machines," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 18, 1970.
- [35] E. Kuljanic, G.Totis y M. Sortino, "Vibrations and chatter in machining: state of the art and new approaches," *Advanced Manufacturing Systems and Technology*, proceedings of the eighth International Conference, Udine : International Centre for Mechanical Sciences , 2008.
- [36] Y.C. Shin y A.J. Waters, "Face milling process modelling with structural non-linearity," *Transactions of the North American Manufacturing Research Institution of SME*, 22: 157-164, 1994.
- [37] J. Tlustý y F. Ismail, "Basic nonlinearity in machining chatter," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 30(1):299-304, 1981.
- [38] P.V. Bayly, J.E. Halley, B.P. Mann y M.A. Davies, "Stability of interrupted cutting by temporal finite element analysis," *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Transactions of the ASME*, 125:220-225, 2002.
- [39] I. Minis y R. Yanushevski, "A new theoretical approach for the prediction of machine tool chatter in milling," *Journal of Engineering for Industry, ASME*, 115:1-8, 1993.

- [40] J.J. Wang, C. M. Zheng y C. Y. Huang, “The effect of harmonic force components on regenerative stability in end milling,” *ASME, International Mechanical Engineering Congress and Exposition Manufacturing*, Washington, D.C. November 15-21, 2003.
- [41] Y. Yang, J. Muñoa y Y. Altintas, “Optimization of multiple tuned mass dampers to suppress machine tool chatter,” *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 50: 834–842, 2010.
- [42] E. Graham, “Investigation of robust chatter stability in milling,” M. S. thesis, University of Calgary, Alberta, Canada, jul. 2013.
- [43] Y. Yang, D. Xu y Q. Liu, “Milling vibration attenuation by eddy current damping,” *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 81:445–454, London, 2015.
- [44] G. Totis, P. Albertelli, M. Sortino y M. Monnob, “Efficient evaluation of process stability in milling with spindle speed variation by using the Chebyshev collocation method,” *Journal of Sound and Vibration*, 333(3):646–668, 2014.
- [45] T. Molnár y T. Insperger, “On the effect of distributed regenerative delay on the stability lobe diagrams of milling processes,” *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 59(3):126-136, 2015.
- [46] M. Zhao y B. Balachandran, “Dynamics and stability of milling process”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 2001.
- [47] Y. Altintas, E. Shamoto, P. Lee y E. Budak, “Analytical Prediction of Stability Lobes in Ball End Milling,” *Transactions of ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 121:586-592, 1999.
- [48] T. Insperger y G. Stepan, “Stability of the milling process,” *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 44(1):47-57, 2000.
- [49] Y. I. Neimark, “Robust stability and DD-partitioning”, *Avtomat. i Telemekh.*, 53(7):10–18, 1992.
- [50] E. Fridman, *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Systems and control: Foundations and applications, Birkhauser, 2014.
- [51] E. Fridman, “New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems,” *Systems and Control Letters, Elsevier Science B.V.*, 2001.
- [52] Y. Ma, M. Wan y W. Zhang, “Effect of cutter runout on chatter stability of milling process,” *9th International conference on digital enterprise technology*, 56:115-118, 2016.

- [53] A. Seuret y F. Gouaisbaut, “Hierarchy of LMI conditions for the stability analysis of time delay systems,” *Systems and control letters, Elsevier science B.V.*, 81:1-7, 2015.

# Anexo 1: Programa para la obtención de los límites de estabilidad

A continuación se presenta el programa utilizado para la obtención de las regiones de estabilidad en el proyecto. Para obtener cada gráfica se varían los parámetros de la fresadora o el conjunto LMI.

```
%% Simulación de las condiciones de estabilidad sujetas a las LMI
clear
k=0; %inicio de contador
r=0; %inicio de contador

for Om=50:50:6000; %inicio de ciclo de velocidad
d=0; %inicio de contador
ai=1; %profundidad inicial

while (ai>0)&&(d==0); %ciclo para profundidad y condiciones de
    estabilidad
a=ai*10^-6; %Profundidad en micrometros

%%definición de parámetros de fresadora
N=2; %Se define el número de dientes
h=2*pi/(N*Om); %Se define el retardo
in=3; %Se define el tipo de inmersión 1, 2, 3
%angulos de entrada dependiendo del tipo de inmersión
if in=1 %si la inmersión es 1=Half Immersion Down Milling
    phiex=pi; %ángulo de salida para Half Immersion Down M.
    phist=pi/2; %ángulo de entrada para Half Immersion Down M.
elseif in=2 %si la inmersion es 2=Half Immersion Up Milling
    phiex=pi/2; %ángulo de salida para Half immersion up m.
    phist=0; %ángulo de entrada para Half immersion up m.
elseif in=3 %si la inmersion es 3=Slotting
```



```

phiex=pi; %ángulo de salida para slotting
phist=0; %ángulo de entrada para slotting
end
Kt=4203e6; %coeficiente de corte tangencial [N/mm2]
Krc=1482.5e+6; %coeficiente de corte radial [N/mm2]
Kr=Krc/Kt; %relación de coeficientes de corte radial y tangencial
kx=5.2e6;ky=5.2e6; %constante de rigidez N/m
zeta=0.022; %factor de amortiguamiento
frecnath=5934; %frecuencia natural Hz
wn=frecnath*2*pi; %frecuencia natural rad/s
mx=kx/wn2;my=ky/wn2; %masa modal
cx=2*zeta*m*wn;cy=2*zeta*m*wn; %constante de amortiguamiento

%calculo de los coeficientes direccionales dependientes del tipo de inmersión
alfaxx_ex = 1/2*(cos(2*phiex)-2*Kr*phiex+Kr*sin(2*phiex));
alfaxx_st = 1/2*(cos(2*phist)-2*Kr*phist+Kr*sin(2*phist));
alfaxx = alfaxx_ex-alfaxx_st; %\alpha_{xx}
alfaxy_ex = 1/2*(-sin(2*phiex)-2*phiex+Kr*cos(2*phiex));
alfaxy_st = 1/2*(-sin(2*phist)-2*phist+Kr*cos(2*phist));
alfaxy = alfaxy_ex-alfaxy_st;
alfayx_ex = 1/2*(-sin(2*phiex)+2*phiex+Kr*cos(2*phiex));
alfayx_st = 1/2*(-sin(2*phist)+2*phist+Kr*cos(2*phist));
alfayx = alfayx_ex-alfayx_st;
alfayy_ex = 1/2*(-cos(2*phiex)-2*Kr*phiex-Kr*sin(2*phiex));
alfayy_st = 1/2*(-cos(2*phist)-2*Kr*phist-Kr*sin(2*phist));
alfayy = alfayy_ex-alfayy_st;

%Trayectorias de sistema
A0=[0 1 0 0;
((a*Kt*N)/(4*pi*mx))*alfaxx-(kx/mx) -cx/mx ((a*Kt*N)/(4*pi*mx))*alfaxy 0;
0 0 0 1;
((a*Kt*N)/(4*pi*my))*alfayx 0 ((a*Kt*N)/(4*pi*my))*alfayy-(ky/my) -cy/my];

A1=[0 0 0 0;
-((a*Kt*N)/(4*pi*mx))*alfaxx 0 -((a*Kt*N)/(4*pi*mx))*alfaxy 0;
0 0 0 0;
-((a*Kt*N)/(4*pi*my))*alfayx 0 -((a*Kt*N)/(4*pi*my))*alfayy 0];

% Definición de Variables de Decisión
P=sdpvar(4,4,'symmetric'); %symmetric,diagonal,skew,full
S=sdpvar(4,4,'symmetric');
R=sdpvar(4,4,'symmetric'); % P>0, S>0 y R>0 son simétricas dimensión 4x4

```

```

P2=sdpvar(4,4,'full');
P3=sdpvar(4,4,'full'); % P2>0 y P3>0 tienen estructura cualquiera y
son de dimensión 4x4

% Restricciones para el caso de LMI W_4 ecuación (3.19)
w11=A0'*P2+P2'*A0+S-R;
w12=P-P2'+A0'*P3;
w13=P2'*A1+R;
w21=w12';
w22=-P3-P3'+(h^2)*R;
w23=P3'*A1;
w31=w13';
w32=w23';
w33=-S-R;

F1=set([w11,w12,w13;...
w21,w22,w23;...
w31,w32,w33]<0);
F=F1+set(P>0)+set(R>0)+set(S>0);

% Parámetros del Algoritmo
opciones=sdpsettings('solver','sedumi','verbose',0,'dimacs',1,...
'removeequalities',-1,'warning',0,'shift',1);
solucion=solvesdp(F,[],opciones);
[pres,dres]=checkset(F);
%
if solucion.problem==0
disp('Hay solucion');
end

% Verificacion
P=double(P);
P2=double(P2);
P3=double(P3);
R=double(R);
S=double(S);

w11=A0'*P2+P2'*A0+S-R;
w12=P-P2'+A0'*P3;
w13=P2'*A1+R;
w21=w12';
w22=-P3-P3'+(h^2)*R;

```

```

w23=P3'*A1;
w31=w13';
w32=w23';
w33=-S-R;

lmi=[w11,w12,w13;...
w21,w22,w23;...
w31,w32,w33];

lmi=double(lmi);
lmie=eig(lmi);
Re=eig(R);
Se=eig(S);
Pe=eig(P);
P2e=eig(P2);
P3e=eig(P3);

if all(lmie<0) && all (Re>0) && all (Se>0) && all (Pe>0);
%se evalua si los valores propios cumplen con las restricciones
i=1; %si cumple se le asigna a i el valor 1
else
i=0; %si no cumple se le asigna a i el valor 0
end

if i==1 %si cumple se le asigna a i el valor 1 y
r=0; %a el contador r se le asigna el valor 0
end
if i==0 %si no cumple se le asigna a i el valor 1 y
r=r+1; %se aumenta 1 unidad a el contador r
ai=ai+1; %se aumenta la profundidad en 1 unidad

%cuando se presentan 3 casos consecutivos de profundidades para las cuales
%la LMI no es factible entonces se suma 1 al contador d, con lo cual el
%ciclo while termina
if r==3
d=d+1;
k=k+1 %se aumenta en 1 unidad el contador k para generar
vel(k)=0m; %los vectores de velocidad "vel"
prof(k)=ai; % y profundidad "prof"
r=0; %se refresca el contador r
end

```

```
end
```

```
end %termina el ciclo de profundidad y restricciones LMI  
end %termina el ciclo de la velocidad
```

```
%Cuando se completa el rango de velocidad (6000rad/s) se obtienen dos  
%vectores resultantes que se grafican para obtener la representación  
%visual de lo obtenido  
plot(vel,prof)  
xlabel('velocidad \Omega en rad/s')  
ylabel('profundidad a en \mu m')  
grid
```