UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Economía

"Contraste entre un portafolio de inversión basado en la Teoría de Portafolios de Markowitz y Algoritmos Genéticos. Caso: Emisoras que conforman el IPC de la BMV entre 2008 y 2012"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA

RAMOS ÁLVAREZ SAMUEL ALBERTO

ASESOR:

M. EN A. OSWALDO GARCÍA SALGADO

REVISORES:

DRA. EN E. REYNA VERGARA GONZÁLEZ

M. EN E. JUVENAL ROJAS MERCED

TOLUCA, MÉXICO, ABRIL 2014

Índice

Introducción

El presente trabajo tiene la intención de demostrar que los Algoritmos Genéticos generan un valor mayor al presentado por las metodologías tradicionales para la optimización de un portafolio de inversión. Se utilizará esta metodología debido a que en las últimas décadas se han utilizado éstos para la solución de problemas de optimización, así como los algoritmos basados en Redes Neuronales, debido a la facilidad que tienen para ser implementados, así como los alcances potenciales que presentan al optimizar en otras áreas.

Gauss fue uno de los matemáticos más brillantes de su tiempo, en palabras del historiador de las matemáticas E.T. Bell, que expresó en su libro, *Hombres de las Matemáticas*, en un capítulo llamado "El príncipe de los matemáticos":

"*Arquímedes, Newton y Gauss: estos tres están por sí mismos dentro la clase de los grandes matemáticos, y no es posible para los mortales ordinarios intentar igualarles en mérito, Los tres aportaron ideas relevantes tanto en la matemática pura como en la aplicada. Arquímedes estimó sus ideas matemáticas puras muy por encima de sus aplicaciones; Newton basó la importancia de sus ideas matemáticas en la utilidad científica que tenían; por su parte, Gauss declaró que para él trabajar en el campo puro o en el aplicado era todo lo mismo."* (Bell, 1937)

Durante años, se ha utilizado la estadística gaussiana para medir los cambios del desempeño de los activos financieros, se conoce como estadística gaussiana debido a que Gauss fue uno de los primeros en utilizar la distribución normal para obtener resultados, y esta estadística está basada fundamentalmente en el teorema del límite central, el cuál aproxima cualquier distribución a una distribución normal.

En los últimos años se ha observado que, si bien esta estadística presenta resultados o pronósticos muy cercanos a la realidad, no es suficiente, debido a la velocidad con que actualmente se tienen las bases de datos, así como también a los cambios económicos y financieros que se viven actualmente.

Por otro lado, la teoría del portafolio de Markowitz (1952) ha sido utilizada durante los últimos años para la elección de un portafolio de inversión, el cual toma en cuenta el rendimiento esperado y el riesgo del portafolio; el objetivo de la teoría del portafolio de Markowitz es maximizar el rendimiento esperado y minimizar el riesgo, lo que propone un problema de programación multiobjetivo, pero como se sabe, estos problemas no cuentan con metodologías determinísticas que los resuelvan y aún así, los métodos más comunes para resolver problemas de programación multiobjetivo utilizados son complicados. La manera más sencilla de resolver estos problemas es convirtiéndolos en problemas de programación no lineal de un objetivo, fijando un valor para el riesgo (varianza) y maximizando el rendimiento esperado o fijando el rendimiento esperado y minimizando el riesgo, los valores que se fijan en cada caso (varianza en el primer caso, y el rendimiento esperado en el segundo caso) se hacen dependiendo del nivel que se está dispuesto a ceder, pero esta metodología no brinda valores máximos de rendimiento esperado ni mínimos de riesgo en ambos casos, por lo que es necesario buscar metodologías que nos puedan brindar mejores soluciones al problema de programación multiobjetivo.

Por lo anterior, se han desarrollado metodologías basadas en modelos evolutivos, que son modelos iterativos, lo que permite ir evaluando las soluciones y, parar cuando se tenga una solución que satisfaga las necesidades que tenemos. Unos de los modelos evolutivos que se está aplicando en los últimos años son los Algoritmos Genéticos, los cuales están basados en la selección natural de las especies, y trabajan comparando dos soluciones factibles y proponiendo una solución mejor que las anteriores, esta metodología proporciona buenas soluciones al Modelo de Markowitz.

La primera vez que se mencionaron los Algoritmos Genéticos fue en una publicación de Bagley (1967); éste diseñó algoritmos genéticos para buscar conjuntos de parámetros en funciones de evaluación de juegos. Pero es a otro científico al que se le atribuye la creación de los Algoritmos Genéticos: John Holland, durante las décadas de 1960 y 1970, con sus alumnos y colegas. A diferencia de los programas evolutivos y las estrategias evolutivas, el objetivo original de Holland (1960) no era desarrollar algoritmos para resolver un problema en concreto, sino, estudiar de manera formal el fenómeno de adaptación tal y como ocurre en la naturaleza y extrapolarlos a los sistemas computacionales. La mayor innovación de Holland fue introducir un algoritmo basado en poblaciones con cruces, mutaciones e inversiones.

En los últimos años han interactuado varios investigadores de varios métodos de computación evolutiva, rompiendo barreras entre algoritmos genéticos, programas evolutivos y estrategias evolutivas. Por lo tanto, en la actualidad, los “algoritmos genéticos” se utilizan de una manera más amplia que la concebida por Holland.

Objetivo General

- Optimizar un portafolio de inversión utilizando Algoritmos Genéticos constituido por acciones que pertenecen a la Bolsa Mexicana de Valores y contrastarlo con la metodología tradicional utilizada para optimizar el Modelo de Markowitz.

Objetivo General Secundario

- Comparar y contrastar un portafolio de inversión construido mediante Algoritmos Genéticos y un portafolio de inversión construido mediante la Teoría de portafolios de Markowitz con acciones que pertenecen al Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

Objetivos específicos.

- Conocer cómo se construye el Modelo de Markowitz.
- Conocer cómo funcionan los Algoritmos Genéticos.
- Construir un portafolio de inversión basado en las emisoras de la BMV, aplicar los modelos a estudiar y comprar los resultados obtenidos en los modelos aplicados.

Justificación de la tesis

Debido a que los métodos heurísticos no proporcionan un óptimo global, sobre todo el que se utilizará en este trabajo, método del Gradiente Reducido Generalizado (usado en Solver), es necesario buscar metodologías vanguardistas que puedan mejorar el desempeño de medición para encontrar un método que encuentre un mejor valor al proporcionado por los métodos heurísticos. Una de las metodologías que ha tomado interés por los investigadores financieros son los modelos de Algoritmos Genéticos.

Hipótesis Principal

Es posible elegir un portafolio de inversión óptimo basado en Algoritmos Genéticos con acciones pertenecientes al Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.

Hipótesis Secundaria

Es posible comparar y contrastar un portafolio de inversión construido a partir de Algoritmos Genéticos y un portafolio de inversión construido utilizando la Teoría de Portafolios de Markowitz construidos con acciones pertenecientes al Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolza Mexicana de Valores.

El trabajo se estructuró de manera en la que queden claros los objetivos particulares del trabajo de tesis.

En el primer capítulo se describe el marco teórico, en el cual se señalan los fundamentos de la Teoría de portafolios, así como descripciones de los principales exponentes de esta teoría. También se hace una recopilación de diferentes estudios que involucran a los Algoritmos Genéticos. Estos trabajos implementan los Algoritmos Genéticos para resolver diferentes problemas, la mayoría de estos con temas financieros.

En el segundo capítulo se realiza una revisión a la Teoría de Portafolios. Desde un punto de vista teórico, se expone la manera en que se construye un portafolio de inversión mediante esta teoría, así como los conceptos que fundamentan dicha teoría. Es necesario mencionar que este capítulo es bastante teórico, se explican valores como esperanza matemática, varianza, tanto para una variable como para más de dos.

En el tercer capítulo de describe la teoría de Algoritmos Genéticos, esta teoría es nueva dentro de los estudios realizados anteriormente presentados dentro de la UAEM, por lo que se profundiza en la teoría y se explica de la manera más clara posible para su completo entendimiento. Este capítulo se basa en suficiente bibliografía para poder describir la teoría de la mejor manera posible, ya que, como no se ha estudiado este tema, es importante que se estudie de manera completa.

En el cuarto capítulo se aplica la metodología tradicional de optimización de un portafolio de inversión construido con la Teoría de Portafolios de Markowitz, así como con los Algoritmos Genéticos, para después comparar ambas metodologías y, de esta manera tener las bases para aprobar o rechazar la hipótesis en estudio.

Al final se presentan las conclusiones a las que se llegó al obtener los resultados de ambas metodologías, se describen algunos puntos importantes así como observaciones acerca de las áreas de oportunidad que presentan los Algoritmos Genéticos.

Por último, se agregan anexos que permiten presentar información complementaria que refuerza la comprensión de los temas tratados dentro de este trabajo de investigación. También se presentarán resultados que si bien son importantes, no se incluyeron en el capítulo IV, debido al tamaño de la base de datos, pero es importante mencionarla, ya que son resultados que deben ser descritos y observados.

Capítulo I. Marco Teórico

En este capítulo se realizará una descripción de los fundamentos que plantearon los principales desarrolladores de la Teoría de Portafolios de Inversión, entre los que destaca Markowitz (1952, 1956, 1959), Roy (1952) y otros exponentes que dieron forma a la teoría de portafolios, así como a los cambios que el mismo Markowitz hizo a su teoría con el paso de los años, para tener al final una teoría que es la que se ocupa en la mayoría de las empresas y los investigadores que resulta ser muy eficiente.

Además se hace una revisión a literatura, con el objetivo de conocer la frontera del conocimiento, realizando una breve descripción sobre los principales trabajos en los que se aplican los Algoritmos Genéticos para la optimización de portafolios de inversión y en otras áreas de las finanzas, así como en uno en el que aplicaron a la industria, solo para hacer énfasis en la metodología general que siguen los Algoritmos Genéticos. Ésta revisión se hizo dentro de los últimos cinco años, para comprobar que este tema es de interés para comunidad científica actualmente.

1.1 Marco Teórico Histórico

1.1.1 Portafolio de Inversión bajo un enfoque Histórico

Harry Markowitz, en un artículo publicado en 1999, menciona que diversificar las inversiones era una práctica que ya se hacía en 1941; los reportes anuales de A. Weisenberger en *Investment Companies* mostraban que estas empresas mantenían un gran número de títulos financieros. Pero éstas empresas no eran las únicas que proporcionaban diversificación a sus clientes, es más, el término no era utilizado en esa época, Markowitz hace referencia a William Shakespeare que en su libro *El mercader de Venecia* escribe:

> *"Mis empresas no están confiadas a una embarcación, ni a un lugar; ni corresponde todo mi caudal a la fortuna del presente año; por lo tanto, mi mercancía no me causa tristeza"* (Shakespeare, 1597)

En 1952, Harry Markowitz propuso su Teoría de Portafolios, la cual era adecuada para que en una inversión se cubriesen los efectos de la diversificación cuando los riesgos están correlacionados y que distinguiera entre los portafolios eficientes e ineficientes. En el artículo publicado por Markowitz (1952) también contribuyó A.D. Roy, quién trabajó junto con él en la Teoría de Portafolios.

En este artículo, Markowitz propuso que las medias, varianzas y covarianzas de los títulos financieros serían estimadas mediante un análisis estadístico y el juicio del analista de valores, obtener el conjunto eficiente de combinaciones media varianza para presentársela a los inversionistas y así seleccionar la combinación de Riesgo Rendimiento deseada. En particular, demostró que el conjunto de portafolios eficientes es de forma lineal, y que el conjunto de combinaciones eficientes media varianza es de forma parabólica. Mientras que Roy (1952) proponía que la elección se hiciera con base en la media y la varianza viéndolas como un todo, solo que Roy propuso una función objetivo diferente.

Las principales diferencias entre estos dos personajes fueron por otro lado que Markowitz proponía que las inversiones debían ser no negativas, mientras que Roy permitía que la inversión fuese negativa; por otro lado, la metodología propuesta por Markowitz estblecía un conjunto de soluciones eficientes, mientras que Roy, ofrecía una solución única.

Sin embargo, de estos dos, Markowitz fue el único que siguió trabajando con la teoría, y continuó presentando trabajos acerca de la Teoría de Portafolios, ya que él mismo encontró algunos inconvenientes dentro de su primer publicación, tales como: dos errores técnicos dentro del planteamiento de la Teoría y el uso de la varianza en lugar de la desviación estándar. Por lo que Markowitz volvió a publicar un artículo en 1959, en el que expresaba nuevos puntos de vista acerca de la teoría y exponía la razón por la cual se utilizó la media y la varianza.

El artículo publicado por Markowitz en 1959, escrito entre 1955 y 1956, se enfoca en explicar la Teoría de portafolios estableciendo la eficiencia que se tiene en conocer la media y varianza, y presentaba un análisis geométrico de los conjuntos eficientes, corrigiendo los errores mencionados en el artículo que había publicado anteriormente, los cuales eran referentes a la convexidad de la varianza y la forma de la frontera eficiente.

Markowitz (1999), continúa comentando que en su artículo de 1959, presentaba también alguna notación matricial e ilustraba el algoritmo de la línea crítica en términos de un ejemplo numérico. A diferencia de su artículo publicado en 1956, en el que hacía un supuesto suficiente para asegurar que un portafolio factible único minimizaría la varianza para un rendimiento dado, en su artículo de 1959, no había dicho supuesto y en su lugar demostró que el algoritmo de la línea crítica funcionaría para cualquier matriz de covarianzas. El artículo publicado en 1959, mostraba la posibilidad de un modelo más complejo que un modelo lineal, al involucrar más de un índice, un modelo no lineal o distribuciones que varían con el tiempo.

Tobin publicó en 1958 un artículo en el que explicaba que era diferente la demanda de dinero a otros activos monetarios y explicaba:

> "La teoría de la preferencia por liquidez toma como dadas las elecciones que determinan cuanto de la riqueza será invertida en activos monetarios y se ocupa de la asignación de estas cantidades entre el efectivo y los activos monetarios alternativos". (Tobin, 1958)

Tobin (1958) suponía que el inversionista está en busca de una combinación eficiente entre media y varianza para los activos monetarios. Las bases sobre las que justificaba el uso del rendimiento y la desviación estándar eran: las funciones de utilidad son cuadráticas o las distribuciones de probabilidad son de alguna familia biparamétrica de distribuciones de rendimientos. Tobin presentaba el Teorema de la Separación en el cual suponía un modelo de selección de portafolios con *n* activos de riesgo y un activo sin riesgo, el efectivo, y ya que éstos eran activos monetarios, presentaban un riesgo de mercado y no un riesgo de incumplimiento. Tobin suponía que la matriz de covarianzas de los activos de riesgo era no singular. Con esto, Tobin demostró que para un conjunto de medias, varianzas y covarianzas establecido entre los portafolios eficientes, que contuvieran algún efectivo en todos, las proporciones de las acciones riesgosas son siempre las mismas:

> "…la composición proporcional de los activos que no son efectivos es independiente de su participación agregada en el saldo de la inversión. Este hecho hace posible describir las decisiones del inversionista como si hubiera un único activo que no es efectivo, un compuesto formado al combinar la multitud de activos que no son efectivo en proporciones fijas". (Tobin, 1958)

Se puede decir que el artículo de Tobin presenta el primer modelo de valuación de activos de capital (CAPM), pero éste se reusó a este honor, por lo tanto, se le atribuye la implementación de este modelo a otros autores como: Sharpe (1964), John Linter (1965), Jan Mossin (1966) y otros.

Según el artículo que escribieron Eugenie F. Fama y Kenneth R. French en 2004 (French, 2004), el modelo de valuación de activos de capital (Capital Asset Pricing Model CAPM) es un modelo que sirve para determinar la tasa de retorno requerida para un cierto activo. En la Teoría de Portafolios, Markowitz exponía que mientras más diversificado estuviese un portafolio mejor preparado estaría para enfrentar los riesgos; en el modelo CAPM, los autores dieron un paso importante al buscar la maximización del retorno de cada acción y obtener con ello un portafolio aún más rentable. Este modelo ofrece una manera más sencilla para predecir el riesgo de un activo al separarlo en riesgo sistemático y riesgo no sistemático. El riesgo sistemático se refiere al riesgo que no podemos controlar, a la incertidumbre económica global, y el riesgo no sistemático se refiere a un riesgo específico de la empresa, a nuestro propio riesgo. Para encontrar una fórmula precisa, es necesario encontrar la relación lineal entre los retornos de una acción y el retorno que se habría obtenido si se hubiese invertido en el portafolio óptimo del mercado, por lo tanto, es necesario introducir un componente de riesgo de mercado (β).

Este modelo presenta poco poder explicativo al analizar la variación en los retornos, sobretodo cuando se aplica en mercados emergentes o cuando hay periodos de gran volatilidad. Cuando nos encontramos en estas situaciones pocas veces las acciones muestran en sus retornos distribuciones normales y ni siquiera son simétricas; estas dos características son asumidas en el CAPM. Harvey (1995) encontró que los mercados emergentes tienen β's bajas que producen retornos demasiado bajos, mientras estimaba el costo del capital con el modelo CAPM aplicado en estos mercados.

Algunos investigadores proponen modificaciones al CAPM, como Casparri y Moreno (Moreno, 2013), las cuales son:

- Agregar los efectos del factor tamaño y la razón del valor en libros de la empresa. Esta modificación fue propuesta por Fama y French. (French, 2004)
- Incluir los efectos del riesgo país. Propuesto por Harvey. (Harvey, 1995)
- El modelo *good beta-bad beta*, el cual propone un beta "buena" para los efectos de la tasa de descuento y un beta "malo" para incluir los efectos de la volatilidad del mercado. Este modelo fue propuesto por John Y. Campbell y Tuomo Vuolteenaho. (Vulteenaho, 2004)

1.1.2 Teoría de los Algoritmos Genéticos

Los primeros trabajos en donde se encuentran estudios sobre Algoritmos Genéticos (AG) aparecieron entre los años 1950 y 1960, éstos fueron programados por biólogos evolutivos que buscaban replicar la evolución natural. Uno de los pioneros de los AG y considerado padre de éstos fue John Holland (1975), (Mitchell, 1995), quien buscaba determinar un modelo que imitara cómo lograba la naturaleza crear seres cada vez más perfectos. Logró hacer lo anterior, haciendo pequeños modelos de la naturaleza, que tuvieran alguna de sus características, para observar cómo funcionaban y así llevar los resultados a una forma general.

Holland y sus alumnos desarrollaron los AG en la Universidad de Michigan, según el artículo de Mitchell (1995), su objetivo era entender la adaptación natural y poder desarrollar un modelo que pudiera importar a las computadoras. Por lo tanto, los objetivos de Holland para desarrollar los AG fueron:

- Imitar los procesos adaptativos de los sistemas naturales.
- Diseñar sistemas artificiales que retengan los mecanismos importantes de los sistemas naturales.

En 1962, investigadores como G. E. P. Box, G. J. Friedman, W. W. Bledsoe y H. J. Bremermann desarrollaron de manera independiente algoritmos inspirados en la evolución para optimizar funciones, pero no fueron tan significativos.

Más adelante, en 1965, Ingo Rechenberg suscrito a la Universidad Técnica de Berlin, introdujo una técnica llamada estrategia evolutiva, aunque esta técnica se parecía a otro método llamado “trepacolinas” que a los AG. Dentro de esta técnica no había cruzamiento ni población, lo que se hacía era mutar a los padres para producir dos descendientes, y se seleccionaba el mejor, el cual se convertía en padre para generar la siguiente ronda de mutación.

En 1966, en América, se desarrolló una técnica llamada programas evolutivos por los investigadores L.J. Fogel, A. J. Owens y M. J. Walsh, los cuales proponían que las soluciones candidatas para los problemas se representaran como máquinas de estado finito sencillas; este método funcionaba como el método de Rechenberg, mutando aleatoriamente una de las máquinas simuladas y conservando la mejor.

En 1985, David Goldberg, un ingeniero industrial alumno de Holland que trabajaba en diseño de pipelines, fue uno de los primeros en aplicar los AG a problemas industriales. Escribió un AG en un ordenador Apple II, para resolver un problema que decía Holland, era complicado.

Es importante destacar que, si bien la mayoría de las investigaciones acerca de lo AG se aplican a diversos problemas, siguen un patrón esencial, generar una población inicial, evaluarla, cruzarla y/o mutarla, y repetir los pasos hasta que se cumpla una función de ajuste o se tenga un número de repeticiones. Aún con esto, no existe un programa general que se aplique a todos los problemas, es decir, para cada problema que se quiera resolver se debe programar un AG que lo resuelva, por lo que los avances en cuanto a este tema van más enfocados a su aplicación y a las probabilidades de mutación o cruzamiento que se hagan que al mejoramiento de la metodología.

2.1 Revisión de la literatura

Para este apartado, se realizó un análisis de diferentes investigaciones científicas sobre la aplicación de los AG al mercado de valores. Este estudio permite tener una visión general de que se ha realizado sobre la temática de este trabajo.

Venugopal et al. (2009) en su artículo titulado *"Uso del Modelo de Algoritmos Genéticos para la selección de portafolios dinámicos"* utilizan el modelo de Markowitz modificado llamado Rendimiento riesgo-ajustado en el que aplican una función objetivo dada de la siguiente manera: RS = (Rendimiento el portafolio)-(Desviación Estándar)^2/(Tolerancia al riesgo), en donde la "Tolerancia al riesgo" se encuentra entre 0.0 y 1.0. Resuelven este problema utilizando AG, realizando un programa cuyo objetivo es generar un portafolio cercano al óptimo construido a partir de un gran número de títulos, utilizando el rendimiento diario y su varianza como las entradas del programa, y proponiendo tres niveles de tolerancia al riesgo: 0.9 (Alto riesgo), 0.5 (Medio riesgo) y 0.1 (Bajo riesgo).

Los resultados que se encontraron fueron: al nivel de riesgo de 0.1: Se obtuvo un rendimiento de RS. 81.55 y comparado con el Algoritmo Genético desarrollado por Sumanth Krishna et al; al nivel de riesgo de 0.5: También aquí se observa mayor nivel de riesgo que en el trabajo con el que se compara, se observó un Rs. 127.65 contra Rs. 49.14 y Al nivel de riesgo de 0.9: la tendencia a ser mayor se ve más pronunciada para este nivel de riesgo, ya que tenemos Rs. 231.20 contra Rs. 65.52 del Algoritmo genético propuesto por Sumanth Krishna et al.

Orito, (2010) en su artículo *"Optimización del índice de un fondo usando Algoritmos Genéticos y un heurístico de búsqueda local"* utilizó AG en conjunto con un método heurístico de búsqueda local. En éste artículo crea un fondo en el cual el comportamiento de los precios del fondo explica el comportamiento del índice bursátil, por esta razón considera una función objetivo que minimice la diferencia entre el índice bursátil y el precio del fondo. Sin embargo, estas dos cantidades tienen diferentes unidades, por lo que se toma la fluctuación del índice bursátil y la razón precio-beneficio del fondo. Utilizó el coeficiente de determinación como índice para representar la fuerza de cohesión entre las dos cantidades analizadas. El fondo considera N acciones, las cuales son elegidas por AG y el método de búsqueda. La fuerza de cohesión entre la tasa de fluctuación x = [x(1),x(2),...,x(T)] por el índice bursátil y la relación precio beneficio y(g̅;t) es expresado por el coeficiente de determinación:

$$R^2(\bar{g}) = \left(\frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}}\right)^2$$

El coeficiente de correlación que se obtiene al aplicar AG's y después un método heurístico es mayor que el que genera sólo aplicar un AG, y lo hace en menos tiempo, lo que supone que es bueno aplicar un método de búsqueda después de aplicar un AG.

Otro artículo en el que se han desarrollado y aplicado los AG's es el que escribió (Brandon, 2011) titulado *"Portafolios óptimos de cobertura bajo el riesgo de liquidación"* en el que se diseñó el AG para optimizar el portafolio utilizando tres tipos de restricciones. Las principales características del AG son:

1. La población inicial es uniformemente elegida con el fin de evitar sesgo.
2. La selección de la siguiente generación se basa en la selección por torneo.
3. Los operadores de cruzamiento y mutación fueron diseñados para preservar las características de los candidatos por el espacio de soluciones en el proceso de selección.

El resultado que obtuvieron es que, mientras más alta es la aversión al riesgo, mayor es la certeza de la equivalencia de los óptimos.

En otro artículo escrito por (Nair, 2011) que tiene por nombre *"Un árbol de decisión optimizado por Algoritmos Genéticos basado en un sistema de predicción de la tendencia del mercado bursátil"* en el que se realizó un sistema de predicción dinámico cuya clave es el uso de AG en árboles de decisión que predecía la tendencia para el siguiente día. Éste sistema híbrido que proponen los investigadores está dado en cuatro pasos: el primero consiste en capturar los datos históricos, el segundo en extraer los indicadores técnicos, el tercero consiste en realizar un vector con los datos seleccionados para predecir el precio del futuro y el último paso consiste en la optimización del árbol de decisión y el vector realizado anteriormente con AG para asegurar la mejor predicción.

La conclusión de este sistema fue que el sistema híbrido basado en AG's es superior en la predicción que el sistema bayesiano.

Un artículo en el que se utilizan los AG pero no aplicados al área de las finanzas es en el titulado *"Un enfoque de un portafolio de algoritmos para una planeación reconfigurable"*, (Prasoon, 2012), en el que aplican los AG en un factor de costos de maquinaria para minimizar los costos de producción. Se desarrollan varios algoritmos evolutivos, entre los que se encuentran: Algoritmos Genéticos, Algoritmos Genéticos sexuales, Algoritmos Genéticos con edad modificada y Algoritmos Genéticos con diferenciación de cromosomas.

El resultado que se obtuvo fue que la mejor combinación de portafolios es la de Algoritmos Genéticos con Algoritmo genético con diferenciación de cromosomas.

En el artículo escrito por (Toloie-Eshlaghy, 2012) *"Uso de Algoritmos Genéticos y de Enjambre de Partículas para seleccionar y optimizar portafolios de compañías admitidas en la bolsa de valores de Teherán"* se compararon dos metodologías que son recientes, basadas en la naturaleza: los AG's y los Algoritmos de Enjambre de Partículas; para optimizar un portafolio de inversión. En este trabajo se concluye que los Algoritmos de Enjambre de Partículas convergen más rápido y en menor número de repeticiones que los AG's, por lo que podemos decir que en este trabajo solo se estudiará uno de los métodos recientes, pero existen más metodologías que se pueden utilizar para el mismo fin.

Por último, en un artículo escrito por (Hosseini, 2012) cuyo título es *"Un nuevo método para la predicción del precio de los índices utilizando series temporales difusas"*, en él se tomó una gran cantidad de datos para demostrar la efectividad del modelo que propusieron estos investigadores, con el fin de indicar que la mejor manera de tener un menor error que con otros métodos es utilizando series temporales difusas combinadas con AG. Este modelo estima de mejor manera que otras series temporales.

En general, se puede observar que la optimización de portafolios de inversión es un tema importante que se utiliza en el ambiente laboral y por lo tanto, es esencial buscar mejorar las metodologías que ya existen, por lo que se encuentran varios trabajos de investigación relacionados a este tema. Otro punto importante que se debe tomar en cuenta es que, en la actualidad, con los avances tecnológicos y la velocidad con la que cambian, es necesario implementar nuevas metodologías con el fin de agilizar los procesos con los que se encuentran los valores, por lo tanto, se observa que últimamente se realizan muchas investigaciones referentes a nuevos temas como lo son los AG's.

Capítulo II. Teoría de Portafolio

En este capítulo se hará una revisión a los conceptos relacionados con la construcción de portafolios de inversión, así como una descripción de la teoría desarrollada por H. Markowitz. Sobre esta teoría se fundamenta el trabajo de investigación que se realiza, por lo tanto es importante hacer una revisión a este tema. Esta teoría se basa en el artículo escrito por Markowitz en 1952.

El principal problema al que se enfrenta un inversionista es elegir qué portafolio es el más adecuado, ya que en el mercado existe una amplia gama de instrumentos de inversión. El objetivo de esta elección es seleccionar los instrumentos financieros adecuados y, qué proporción de éstos se utilizarán en el portafolio de inversión, para obtener el máximo beneficio posible. Esto es, obtener los máximos rendimientos posibles mediante la combinación de instrumentos financieros; para esto se han creado varias metodologías que permiten tomar las mejores decisiones (Guzmán, 2013).

Una de las metodologías empleadas para la selección óptima de los instrumentos de inversión es el modelo de Markowitz que también se conoce con el nombre de "Teoría de portafolios Media-Varianza".

Es importante dar una revisión a la construcción de un portafolio de inversión antes de revisar los elementos básicos de la teoría de portafolios Media-Varianza.

2.1 Construcción de un portafolio de inversión

Para construir un portafolio de inversión es necesario seleccionar de manera adecuada los instrumentos de inversión que lo conformarán, así como la proporción con la que participarán dentro del portafolio.

En este trabajo, se construirá un portafolio de inversión solamente basado en el Mercado de capitales, es decir, en el mercado de acciones, por lo que la decisión será elegir en que acciones de invertirá y la proporción, con las que contarán dentro del portafolio.

2.1.1 Elementos de una inversión

El objetivo principal al construir un portafolio de inversión, son los beneficios que ofrece, y, por lo tanto, es importante tomar en cuenta las características que tiene cada uno de los instrumentos de inversión (en el caso del trabajo las acciones de las empresas emisoras) que se pretende que constituyan el portafolio de inversión.

Un aspecto importante que se debe tomar en cuenta en el análisis de portafolios es el impacto que tienen eventos económicos, sociales y políticos en el mercado de capitales, así como las decisiones que diariamente toman los accionistas y directivos de las empresas que emiten las acciones o los cambios climáticos que afectan a las materias primas que son utilizadas por las diferentes empresas emisoras. Estos factores proporcionan cierta incertidumbre al desempeño de las empresas y, por consiguiente, al capital social de éstas lo que impacta directamente al precio de las acciones que emiten, lo que conlleva cierto nivel de riesgo el realizar una inversión (Guzmán, 2013).

Es importante mencionar algunos conceptos que son importantes cuando se habla de inversión.

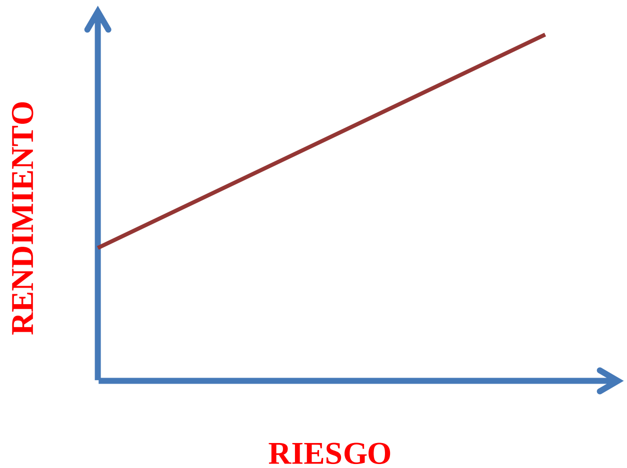
2.1.1.1 Riesgo

Es la probabilidad de que un evento desafortunado ocurra. En las finanzas se define como la probabilidad de que el rendimiento en una inversión sea menor al esperado o incluso sea negativo, es decir, que exista una pérdida en la inversión.

2.1.1.2 Rendimiento

Es la ganancia que se obtiene después de una inversión, es decir, la cantidad extra al capital inicial que se tiene después de realizada la inversión. Es importante mencionar que existe una relación positiva entre el riesgo y el rendimiento, es decir, a mayor rendimiento existe mayor riesgo y por el contrario, si queremos menor riesgo existe menor rendimiento, por lo que es importante para el inversionista tener en cuenta que no es recomendable aceptar demasiado riesgo, ya que, aun cuando el rendimiento parezca atractivo, la probabilidad de que la pérdida sea grande es mayor. Esto tampoco implica seleccionar un nivel de riesgo muy bajo porque tampoco se busca tener un rendimiento pequeño. Por lo que el objetivo principal de los inversionistas y administradores del riesgo se basa en maximizar el rendimiento minimizando el riesgo. La relación entre el riesgo y el rendimiento no es necesariamente lineal, pero para efectos de mostrar un ejemplo de la relación se presenta la Figura 2.1 a continuación.

Figura 2.1 Relación Riesgo Rendimiento



Fuente: Elaboración propia con base en Markowitz (1952).

2.1.1.3 Plazo

Es el periodo de tiempo que dura la inversión. Durante este periodo el inversionista no puede disponer de la inversión, hasta que la inversión llegue a su vencimiento.

2.1.1.4 Liquidez

Es la facilidad con la que el activo puede ser convertido en efectivo, es decir, que tan rápido puede ser vendido en caso de que se tenga la posesión de dicho activo.

2.1.1.5 Diversificación

Un concepto fundamental dentro de la construcción de un portafolio de inversión es la diversificación, que es la elección de diferentes activos. Es importante destacar que, para reducir el riesgo, es necesario que los activos tengan diferentes características. Como en este trabajo utilizaremos solamente acciones, las características que deben diferenciar preferentemente a las acciones es que éstas pertenezcan a diferentes sectores productivos. Esto se hace con el fin de equilibrar las pérdidas y ganancias del portafolio.

2.2 Teoría de Markowitz

El objetivo de la teoría de portafolios de Markowitz (teoría de Media-Varianza) es generar el conjunto de portafolios óptimos o eficientes de entre los cuales el inversionista pueda seleccionar el que satisfaga sus necesidades (Torres, 2010).

La teoría de portafolios de Markowitz plantea tres supuestos. El primero nos dice que los rendimientos de las series de las acciones son variables aleatorias que siguen una distribución normal. El segundo es que el inversionista es un decisor racional y además es adverso al riesgo, es decir, que no está dispuesto a aceptar cualquier juego actuarialmente justo (Garriga). El tercer supuesto es que la función de utilidad es cuadrática y cóncava.

Este modelo toma como base, para medir los rendimientos de las acciones y el riesgo de éstos, a la media y la varianza, respectivamente (ésta es la razón por la que también se le conoce como modelo de Media-Varianza). Por esta razón se hará una revisión de algunos conceptos básicos acerca de estos conceptos y, otros necesarios para la construcción del modelo.

2.2.1 Valor esperado

El valor esperado de una variable aleatoria es también conocido como promedio, y se calcula de la siguiente manera:

$$E[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (2.1)$$

Donde:

x_i : es el valor de la variable en el periodo i

N: es el número de observaciones.

Cuando la variable aleatoria está multiplicada por una constante se cumple lo siguiente:

$$E[aX] = aE[X] = \frac{a}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{2.2}$$

Donde:

a: es un número real

El valor esperado de una suma de variables aleatorias es la suma del valor esperado de cada una de las variables aleatorias, es decir

Si $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$E[Z] = E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] \tag{2.3}$$

Por lo tanto, combinando todas las fórmulas (2.2) y (2.3) que hemos visto, tenemos que:

Si $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$

$$E[Z] = E[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n]$$

$$E[Z] = a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \cdots a_nE[X_n] = \sum_{i=1}^{n} a_iE[X_i] \tag{2.4}$$

2.2.2 Varianza

La varianza (Var) es una medida de dispersión de una variable aleatoria cuya raíz cuadrada se llama desviación estándar. La varianza mide que tan cerca está probablemente una variable aleatoria de su valor esperado. Se calcula de la siguiente manera:

$$Var(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

$$= E\left[X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right]$$

$$= E[X^2] - 2\left(E(X)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2$$

$$= E[X^2] - \left(E(X)\right)^2 \qquad (2.5)$$

En caso de que la variable aleatoria esté multiplicada por una constante a entonces:

$$Var(aX) = E[a^2X^2] - \left(E(aX)\right)^2$$

$$= a^2E(X^2) - \left(aE(X)\right)^2$$

$$= a^2E(X^2) - a^2\left(E(X)\right)^2$$

$$= a^2Var(X) \qquad (2.6)$$

2.2.3 Covarianza

La covarianza en una medida de dispersión conjunta de dos variables estadísticas, la cual mide la extensión a la cual esas variables tienden a moverse juntas hacia arriba o hacia abajo. Se calcula de la siguiente manera:

$$Cov(X, Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]$$

$$= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) \qquad (2.7)$$

Además $Cov(X, X) = Var(X)$

Si *Cov(X,Y) > 0* se dice que existe una dependencia directa (positiva), es decir, a grandes valores de *X* corresponden grandes valores de *Y*.

Si *Cov(X,Y) = 0* se dice que no existe una relación lineal entre las dos variables estudiadas.

Si *Cov(X,Y) < 0* se dice que existe una dependencia inversa (negativa), es decir, a grandes valores de *X* corresponden pequeños valores de *Y*.

2.2.4 Coeficiente de correlación

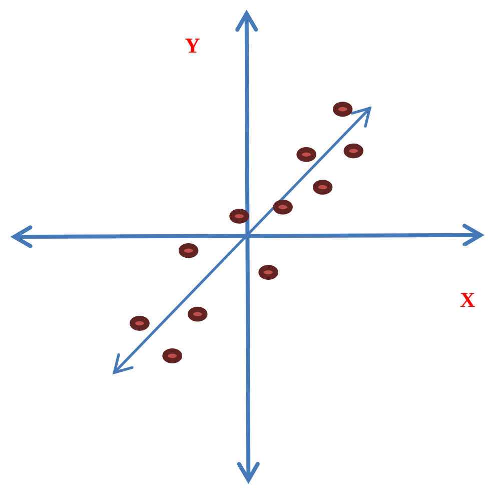
El coeficiente de correlación (ρ) es un índice estadístico que mide la relación lineal entre dos variables estadísticas. A diferencia de la covarianza, el coeficiente de correlación es independiente de la escala de medida de las variables. Este coeficiente nos permite revisar como varía el rendimiento de un instrumento mientras varía el rendimiento de otro instrumento. Se calcula de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \tag{2.8}$$

El valor del coeficiente de correlación se encuentra entre [-1, 1].

Hablando ya de acciones, que es el instrumento financiero que utilizaremos en el trabajo, cuando $\rho_{xy} = 1$ los rendimientos de dichos instrumentos financieros varía en forma directamente proporcional a través del tiempo, es decir, si uno aumenta el otro también aumenta y, si uno disminuye el otro también lo hará. Esto lo podemos ver en la Figura 2.2.

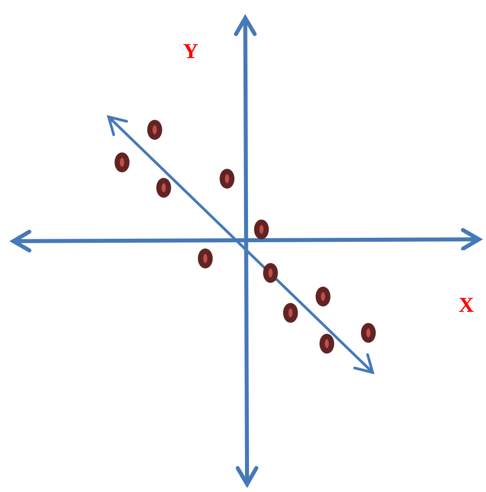
Figura 2.2 Coeficiente de correlación $\rho_{xy} = 1$



Fuente: Elaboración propia con base en Markowitz (1952).

Cuando $\rho_{xy} = -1$ los rendimientos varían en forma inversamente proporcional, si uno aumenta, el otro disminuye, y si uno disminuye, el otro aumenta. Esto se puede observar en la Figura 2.3.

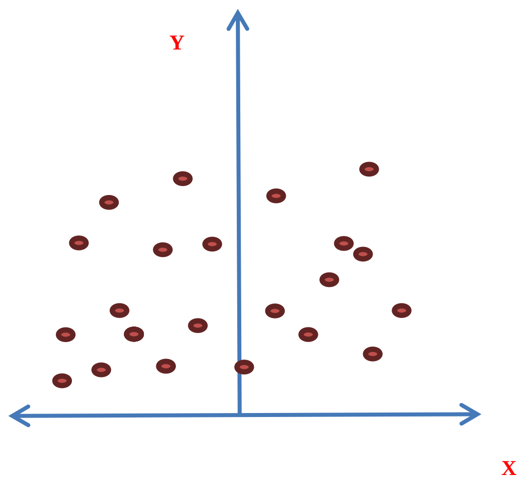
Figura 2.3 Coeficiente de correlación $\rho_{xy} = -1$



Fuente: Elaboración propia con base en Markowitz (1952).

Cuando $\rho_{xy} = 0$ nos dice que no existe correlación entre las variables estudiadas, es decir, un cambio en el rendimiento de una variable no afecta al rendimiento de la otra variable, por lo tanto varían de manera independiente. Esto se puede observar en la Figura 2.4.

Figura 2.4. Coeficiente de correlación $\rho_{xy}= 0$



Fuente: Elaboración propia con base en Markowitz (1952).

Lo que se busca es que el coeficiente de correlación sea igual a -1 o al menos que sea menor que 0. Lo cual implica que las disminuciones en los rendimientos de la acción X se ven compensadas por los aumentos en los rendimientos de la acción Y.

2.2.5 Varianza para más de una variable

El cálculo de la varianza para dos variables se realiza de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - E[(X+Y)]^2 \\
&= E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X] + E[Y])^2 \\
&= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - E[X]^2 - 2E[X]E[Y] \\
&- E[Y]^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2 + E[Y^2] - E[Y]^2 \\
&+ 2(E[XY] - E[X]E[Y]) \\
&= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Si se quiere calcular la varianza de dos variables que están multiplicadas por una constante, se realiza de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Var(aX+bY) &= E[(aX+bY)^2] - E[(aX+bY)]^2 \\
&= E[a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2] - (E[aX] + E[bY])^2 \\
&= E[a^2X^2] + 2abE[XY] + E[b^2Y^2] - E[aX]^2 - 2abE[X]E[Y] - E[bY]^2 \\
&= a^2E[X^2] - a^2E[X]^2 + b^2E[Y^2] - b^2E[Y]^2 + 2ab(E[XY] - E[X]E[Y]) \\
&= a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X,Y)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Cuando se tiene una suma de n variables aleatorias, la varianza se calcula de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&\qquad = E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2] - E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)]^2 \\
&\qquad = E[X_1X_1] - E[X_1]E[X_1] + E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] + \cdots \\
&\qquad + E[X_1X_n] - E[X_1]E[X_n] + E[X_2X_1] - E[X_2]E[X_1] \\
&\qquad + E[X_2X_2] - E[X_2]E[X_2] + \cdots + E[X_2X_n] - E[X_2]E[X_n] \\
&\qquad + \cdots + E[X_nX_1] - E[X_n]E[X_1] + E[X_nX_2] - E[X_n]E[X_2] \\
&\qquad + \cdots + E[X_nX_n] - E[X_n]E[X_n] \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] \\
&\qquad = Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n] + 2Cov[X_1, X_2] \\
&\qquad + 2Cov[X_1, X_3] + \cdots + 2Cov[X_1, X_n] + 2Cov[X_2, X_3] + \cdots \\
&\qquad + 2Cov[X_2, X_n] + \ etc.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Ya que

$$
E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \begin{cases} Var[X_i] \ \ \forall\, i = j \\ Cov(X_i, X_j) \ \ \forall\, i \neq j \\ Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i) \end{cases}
$$

Por lo tanto, si tenemos una suma finita de variables aleatorias

$$
\begin{aligned}
&Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)\\
&\qquad = E[(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)^2]\\
&\qquad - E[(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)]^2\\
&\qquad = a_1a_1E[X_1X_1] - a_1a_1E[X_1]E[X_1] + a_1a_2E[X_1X_2]\\
&\qquad - a_1a_2E[X_1]E[X_2] + \cdots + a_1a_nE[X_1X_n] - a_1a_nE[X_1]E[X_n]\\
&\qquad + a_2a_1E[X_2X_1] - a_2a_1E[X_2]E[X_1] + a_2a_2E[X_2X_2]\\
&\qquad - a_2a_2E[X_2]E[X_2] + \cdots + a_2a_nE[X_2X_n] - a_2a_nE[X_2]E[X_n]\\
&\qquad + \cdots + a_na_1E[X_nX_1] - a_na_1E[X_n]E[X_1] + a_na_2E[X_nX_2]\\
&\qquad - a_na_2E[X_n]E[X_2] + \cdots + a_na_nE[X_nX_n] - a_na_nE[X_n]E[X_n]\\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_jE\left[X_iX_j\right] - a_ia_jE[X_i]E\left[X_j\right]\\
&\qquad = a_1^2Var[X_1] + a_2^2Var[X_2] + \cdots + a_n^2Var[X_n]\\
&\qquad + 2a_1a_2Cov[X_1, X_2] + 2a_1a_3Cov[X_1, X_3] + \cdots\\
&\qquad + 2a_1a_nCov[X_1, X_n] + 2a_2a_3Cov[X_2, X_3] + \cdots\\
&\qquad + 2a_2a_nCov[X_2, X_n] + \ etc.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Ya que

$$
E\left[X_iX_j\right] - E[X_i]E\left[X_j\right] = \begin{cases} Var[X_i]\ \ \forall\ i = j \\ Cov\left(X_i, X_j\right)\ \ \forall\ i \neq j \\ Cov\left(X_i, X_j\right) = Cov\left(X_j, X_i\right) \end{cases}
$$

2.2.6 Construcción del portafolio de inversión

Un instrumento de inversión que puede ser comprado y en el futuro vendido se conoce como un activo. El activo puede ser una acción, un bono, una opción o un portafolio. Supóngase que se compra un activo al tiempo cero y se vende en un tiempo T > 0 establecido. Ahora se está interesado en un tiempo definido.

Sea X_0 el monto de dinero invertido en el tiempo 0, y sea X_T el dinero que se recibe al momento de vender el activo en el tiempo T. Entonces el retorno total, R, de la inversión está definido por:

$$R = \frac{X_T}{X_0} \tag{2.13}$$

La *Tasa de retorno*, r, está definida por:

$$r = \frac{X_T - X_0}{X_0} \tag{2.14}$$

Por lo tanto $R = 1 + r$. Obsérvese que para obtener una ganancia r debe ser mayor que cero.

Supóngase ahora que tenemos n diferentes activos, y a cada uno de ellos le corresponde un retorno total R_i, i = 1,…,n. Si se divide el dinero invertido en estos activos, se formará un *portafolio* (es llamado un portafolio aún si no invertimos dinero en todos los activos). Se selecciona un monto de dinero X_{oi} en el activo i tal que $\sum_{t=1}^{n} X_{oi} = X_0$, y se restringe $X_{oi} \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$. Para hacer más sencilla la notación anterior se introducirán *pesos* w_i, $i = 1,\ldots,n$ (usamos la letra w por su nombre en inglés *weigths*), tal que $X_{oi} = w_i X_0$. Claramente la suma sobre todos los pesos es igual a uno. Entonces el monto de dinero generado al tiempo T por el i-ésimo activo en $R_i w_i X_o$, por lo tanto, el retorno total R de un portafolio es:

$$R = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_i w_i X_0}{X_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(1 + r_i) w_i X_0}{X_0} = \sum_{t=1}^{n} w_i + \sum_{t=1}^{n} r_i w_i \tag{2.15}$$

Dado que la suma de todos los w_i es uno y $R = 1 + r$, tenemos:

$$r = \sum_{t=1}^{n} w_i r_i \tag{2.16}$$

Que se refiere a la tasa de retorno del portafolio de inversión, compuesta por la tasa de retorno de cada uno de los activos que lo conforman.

Ahora explicaremos el valor esperado y la varianza del rendimiento de un portafolio. Es necesario tomar en cuenta ambos valores, ya que, en ocasiones se encuentra que dos instrumentos tienen el mismo rendimiento, pero el riesgo es diferente, por lo que es recomendable tomar en cuenta ambos valores.

2.2.6.1 Valor esperado

El rendimiento que se obtiene cuando se vende un activo es incierto. Por lo tanto, *la tasa de retorno (r)* es una variable aleatoria. Supóngase que se conoce la media para cada uno de los n activos, a la cual llamaremos $\bar{r}_i$, $i = 1,\ldots,n$. Y llamemos a la varianza del activo i como σ_i^2, y a la covarianza entre cada activo i y j como σ_{ij}. Por lo tanto, si asumimos que la variable r tiene una distribución normal, el rendimiento esperado de un portafolio $\bar{r}$ es:

$$E[r] = \bar{r} = \sum_{i=1}^{n} w_i E[r_i] = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i \tag{2.17}$$

2.2.6.2 Estudio del riesgo de un portafolio

La manera de medir el riesgo dentro de un portafolio es mediante la desviación estándar de los activos que lo componen. La varianza de los rendimientos de los portafolios es el promedio ponderado de las covarianzas de todos los pares que se incluyen en el portafolio.

La varianza σ^2 del rendimiento del portafolio es:

$$\sigma^2 = E[(r-\bar{r})^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \bar{r}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \bar{r}_j)\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (2.18)$$

La varianza del portafolio se puede obtener de manera matricial de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \qquad (2.19)$$

Entonces la desviación estándar sería:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \qquad (2.20)$$

Tomando de la Ec. 2.8 y despejando la *Cov(X,Y)* tenemos:

$$Cov(X,Y) = \rho\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} \qquad (2.21)$$

Sustituyendo este resultado en la desviación estándar del portafolio para todos los activos tenemos:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho \sigma_i \sigma_j} \qquad (2.22)$$

Donde:

w_i *es el peso asignado a la acción i*

$Var(X_i)$ *es la varianza de la acción i*

ρ *es el coeficiente de correlación de las acciones i,j*

σ_i *es la desviación estándar de la acción i*

y para la segunda suma i ≠ j para todo i,j.

Si se pone atención en la Ec. 2.22, se puede observar que es deseable que el coeficiente de correlación sea negativo entre el rendimiento de las acciones, ya que de esta manera la varianza total del portafolio se reduce. Si el coeficiente de correlación es cero, se puede observar que la varianza sería la suma de las varianzas de las acciones individuales (Torres, 2010). Por lo tanto, si la mayoría de los coeficientes de correlación tienden a 1 entonces la varianza total del portafolio incrementaría.

Entonces, para un inversionista que acepta riesgo preferiría tener un portafolio con un coeficiente de correlación positiva entre sus acciones ya que, si sube una acción las demás subirían lo que generaría una ganancia sustancial, pero si por el contrario una acción baja, las demás bajarían lo que produciría una pérdida grande.

Por lo tanto, es importante diversificar el portafolio, esto es, elegir acciones de diferentes sectores productivos dentro del mercado accionario, ya que de esta manera se estaría asegurando hasta cierto punto, un coeficiente de correlación negativo o menor que 0, lo que nos permitiría tener un portafolio "seguro".

De manera analítica podemos ver esta diversificación a través de la varianza total del portafolio, suponiendo que se va a invertir la misma porción de las *n* acciones, es decir, *1/n*:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho \sigma_i \sigma_j \tag{2.23}$$

Si $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 1/n$ y sustituyendo en la ecuación 2.23 se tiene:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) \rho \sigma_i \sigma_j \tag{2.24}$$

Multiplicando por $\frac{n-1}{n-1}$ el segundo sumando, y sustituyendo la Ec. 2.8 se tiene:

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} \frac{Var(X_1)}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_{ij}}{n(n-1)};\ \forall\ i \neq j \tag{2.25}$$

Como se puede observar $\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)/n = \overline{Var(X)}$ es decir, el promedio de las varianzas, y $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}/n(n-1) = \overline{\sigma_{ij}}$ es decir, el promedio de las covarianzas.

Por lo tanto, si $n \rightarrow 0$:

$$\sigma^2 = \overline{\sigma_{ij}} \tag{2.26}$$

Lo que la Ec. 2.26 nos dice es que, si se toma un gran número de acciones para conformar el portafolio, y se le asigna el mismo peso a éstas, la varianza total del portafolio tiende al promedio de las covarianzas. Por lo tanto se puede decir que solo una parte del riesgo total se puede diversificar, pero no en su totalidad.

Al riesgo que se puede diversificar se le conoce como riesgo no sistemático y al riesgo que no se puede diversificar se le conoce como riesgo sistemático o riesgo de mercado (Torres, 2010).

2.2.6.3 Modelo de Markowitz

Ahora que hemos revisado los conceptos básicos, podemos revisar el modelo de Markowitz. El problema fundamental de un portafolio se puede formular de dos maneras, podemos buscar maximizar el rendimiento esperado fijando la varianza, o minimizar la varianza con respecto a un valor fijo al rendimiento esperado. A esto se le conoce como el *Modelo de Markowitz* (Markowitz, Portfolio selection, 1952). Expresando matemáticamente el problema:

Maximizar $\sum_{i,j=1}^{n} w_i \bar{r}_i$

Sujeto a

$$\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \sigma^2, \qquad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Minimizar $\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}, \qquad (2.28)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

2.2.6.4 La frontera eficiente y portafolio óptimo

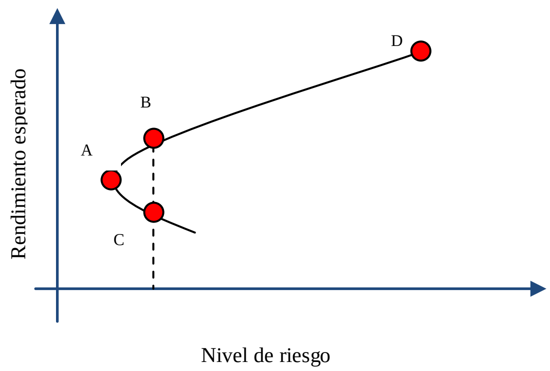
Existen diferentes combinaciones en la elección de las acciones que ofrecen diferentes portafolios, y pero para que uno de estos portafolios sea considerado como eficiente debe ser preferido a todos los demás.

Es considerado mejor portafolio aquel que ha obtenido mejor rentabilidad en un periodo. La distribución de probabilidad de la rentabilidad de los portafolios ayudará a tomar la decisión sobre cuál será el portafolio óptimo, así como el riesgo asociado y las necesidades del inversionista.

Es posible encontrar dos o más portafolios que tengan el mismo nivel de riesgo pero varían en el rendimiento esperado, lo que nos indicaría que sería preferible el portafolio que presente mayor rendimiento esperado. Por otro lado, también es posible que varios portafolios presenten el mismo nivel de rendimiento esperado y diferente riesgo, por lo cual se preferiría elegir a aquel portafolio que presenta menor riesgo. Sin embargo, en ocasiones al comparar a aquellos portafolios que presentan mayores rendimientos se puede observar que presentan riesgos distintos entre ellos, y en ocasiones el nivel de riesgo es muy alto, es decir, se tiene un gran número de combinaciones que nos brindan un gran número de portafolios. Por lo tanto, la selección del portafolio óptimo depende en gran medida de las necesidades del inversionista así como del perfil de riesgo de éste.

Entonces, para cada nivel de riesgo se puede encontrar un máximo rendimiento, y para cada nivel de rendimiento se puede encontrar un mínimo valor de riesgo. Estos valores se pueden graficar en la llamada frontera eficiente que se muestra en la Figura 2.5:

Figura 2.5 Frontera eficiente



Como se puede observar, para el portafolio B y el portafolio C se tiene el mismo nivel de riesgo, pero el portafolio B presenta mayor nivel de rendimiento, lo que hace preferir siempre al portafolio B. Por otro lado, el portafolio A tiene el menor nivel de riesgo posible, pero su rendimiento es menor que el portafolio B, y todos los portafolios que se encuentran por debajo de la curva pueden tener mejores rendimientos al mismo nivel de riesgo, por lo tanto los portafolios que se encuentran por debajo del portafolio A en la curva se consideran ineficientes.

Otro aspecto importante que se debe tomar en cuenta es que, el portafolio D presenta mejor rendimiento que todos los portafolios en la frontera eficiente, pero también presenta mayor riesgo, por lo que en ocasiones es preferible minimizar el riesgo aunque no se tengan grandes ganancias.

Por lo tanto, el portafolio óptimo se encuentra en la frontera eficiente y la decisión de la combinación entre rendimiento y riesgo depende del perfil de riesgo del inversionista así como de sus necesidades.

Capítulo III. Algoritmos Genéticos

En este capítulo se tratará la teoría que envuelve la construcción de los Algoritmos Genéticos (AG).

Antes de empezar con la explicación de la teoría se dará una breve historia de la genética dentro del área biológica en la que se fundamentan los AG, así como hacer una diferenciación entre los AG y otros algoritmos evolutivos que también tienen poco tiempo de empezar a utilizarse y que su utilización luce prometedora.

3.1 Historia de los Algoritmos Genéticos

En 1676 Nehmiah Grew informó que la reproducción de las especies es sexual mediante en polen de las células sexuales masculinas. A partir de la información anterior, una serie de botánicos empezaron a cruzar plantas creando híbridos, entre ellos se encuentran Joseph Gottlieb Kölreuter, que realizó varios cruzamientos y estudió el polen con el microscopio. Con eso observó que los híbridos eran un intermedio entre las variedades parentales.

Otro botánico que experimentó con plantas híbridas fue Gregor Mendel quién descubrió los principios básicos de la herencia y sentó la comprensión moderna de la herencia, gracias a esto Mendel es reconocido como el padre de la genética.

Charles Darwin, aplicó la teoría de la evolución mediante la selección natural y reconoció que la herencia es fundamental para la evolución.

Hacía 1885, todos los investigadores aceptaban que el núcleo de la célula contenía la información de la herencia.

En 1900, se retomó una publicación de Gregor Mendel de 1866 en donde explicaba sus experimentos con guisantes.

Los investigadores comenzaron a utilizar bacterias y virus en la década de 1940, ya que estos organismos tienen una rápida reproducción, por lo que permiten el estudio detallado de la organización y estructura de los genes, lo cual presentó evidencia de que el DNA almacena la información genética.

3.3 Diferencia entre algoritmos basados en la evolución genética.

La diferencia se explicará en el siguiente cuadro:

Tabla 3.1 Comparación de algoritmos basados en la evolución genética.

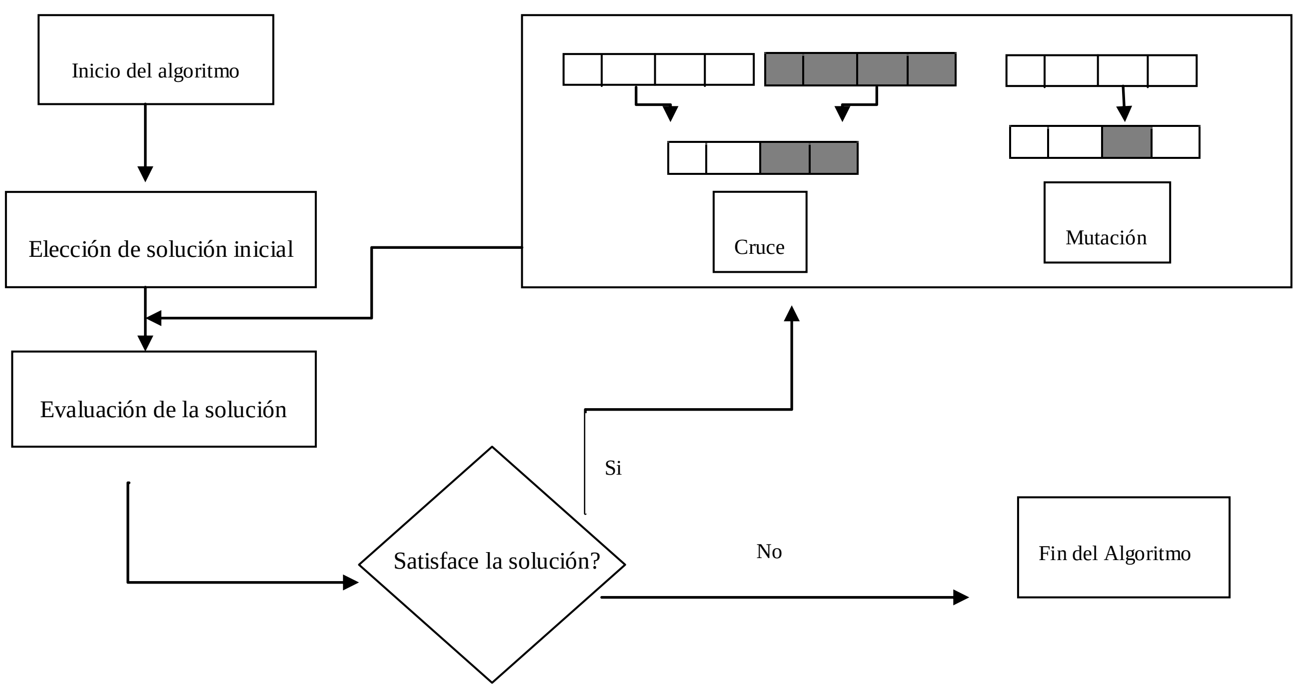
Algoritmo	**Codificación**	**Selección**	**Operadores**	**Reinserción**	**Parametrización**	**Aplicación original**
Algoritmo Genético	Binaria	Aleatoria, basado en la función de ajuste.	Aplicados según probabilidad: cruzamiento y mutación	Reemplazo de los padres por los hijos.	Fija	Optimización directa
Estrategia evolutiva	Discreta o continua	Aleatoria	De acuerdo al problema: recombinación y mutación	Mediante ranking de mejor descendencia	Autoadaptable	Optimización general
Programación evolutiva	Tripletas: El estado actual, un símbolo del alfabeto utilizado y el estado nuevo del sistema	Buscando el valor del símbolo actual	De acuerdo al problema: recombinación y mutación	Cambio al nuevo estado del sistema	Fija	Predicción
Programación genética	Árboles	Aleatoia	Sobrecruzamiento y mutación	Reemplazo de padres por los hijos	Fija	Evolución de programas
Algoritmo memético	Cualquiera	Aleatoria	Distintos operadores de búsqueda local	Aprendizaje lamarckiano	Formas no lineales	También llamado algoritmo lamarckiano, búsqueda local genética, algoritmo evolutivo híbrido o

						algoritmo evolutivo baldwiniano
Evolución diferencial	Continua	Aleatoria	Mutación y recombinación (el resultado del primero es operado con el segundo)	Comparando el resultado de los operadores y los individuos de la generación anterior	Fija, de dos parámetros que controlan la velocidad del cambio.	Optimización continua

Fuente: Elaboración propia basado en Bonifacio Martín del Brío (2002)

Los AG's fueron inspirados en la forma en que la naturaleza hace para evolucionar a los seres vivos, lo que les permite adaptarse a diferentes entornos o hábitats. La técnica que utiliza la naturaleza consiste en la codificación de las características de los seres vivos en el genoma, y la evolución a través de la reproducción sexual y las mutaciones. Esto es lo que motiva el uso de algoritmos como metodología general de optimización de sistemas. Una representación general de los AG se ve en la Figura 3.1.

Figura 3.1 Representación del flujo de un AG.



Fuente: Elaboración propia con base en Figura 9.2 de Bonifacio Martín del Brío (2002)

El objetivo general que tienen los AG es crear vida artificial, por lo tanto, se pretende utilizar las computadoras para modelar el cerebro, hacer una imitación del cerebro y hacer una simulación de la evolución biológica (Ricci, 2013). Esta analogía biológica toma en cuenta las siguientes definiciones:

- Célula. Es un conjunto de cromosomas, y en cada célula existe el mismo número de cromosomas.
- Cromosomas. Son cadenas de ADN, y cada uno de éstos está formado por genes.
- Gen. Codifica una característica en particular, cada uno de éstos tiene una posición en el cromosoma. Cada uno de los rasgos son caracterizados por los alelos.

La idea general del funcionamiento de los AG es la siguiente: funcionan con una población inicial, cada uno de éstos representa una solución factible al problema. A cada individuo se le asigna un valor que está dado por el ajuste que tiene dicha solución, esto equivale en la naturaleza a la eficacia con la que un organismo compite por los recursos. Si el individuo presenta mayor adaptabilidad al problema, mayor será la probabilidad de que se seleccione para reproducirse con otro individuo que sea seleccionado de la misma manera. Esta reproducción producirá individuos nuevos descendientes de los anteriores, los cuales comparten algunas características de los padres, propagando su material genético.

Así es como se produce una nueva población de posibles soluciones, la cual posee mejores características en comparación con la población anterior. Por lo tanto, si el AG está bien diseñado, la población convergerá a una solución óptima del problema (Galindo, 2011).

Una característica que tienen los AG's es que pueden tratar exitosamente una gran variedad de problemas, sin importar el área en que se encuentren, aun cuando éstos tengan cierta dificultad. Si bien es cierto que los AG pueden no encontrar la solución óptima del problema, se dice que existe información empírica de que la solución obtenida tiene un nivel aceptable, en un tiempo competitivo con el resto de algoritmos de optimización combinatoria. Los AG son utilizados con frecuencia en problemas en donde no existen técnicas especializadas.

3.3 Inicialización.

El primer paso para la optimización mediante AG's es la inicialización, que consiste en generar una población de individuos. Se entenderá por población como un conjunto de individuos, estos individuos suelen ser cadenas de ceros y unos generados de manera aleatoria, por lo tanto, se genera cada gen con una función que devuelve un cero o un uno, con la misma probabilidad (Ricci, 2013).

Si se conocen soluciones de las cuales se pretende partir la búsqueda, ésta debe ser introducida al inicio del problema, como una población inicial conocida (Galindo, 2011). Sin embargo, es mejor generar una población inicial, ya que es recomendable contar con suficiente variedad para la población, lo que nos garantizará una exploración de todas las zonas del espacio de búsqueda (Ricci, 2013).

3.3.1 Tamaño de la población.

Si se decide seleccionar una población pequeña, la convergencia del problema será a un máximo global. Si se decide tomar una población grande la convergencia será más tardada y, por lo tanto, se necesitarán muchos recursos computacionales. Lo más conveniente es elegir un tamaño de población fijo, y con un número lo suficientemente grande, lo que nos garantizará llegar a un valor óptimo sin necesidad de una carga computacional.

3.4 Evaluación.

La siguiente fase que siguen los AG es la evaluación, en ésta se permite a los individuos que hagan funcionar el sistema, generalmente se hace mediante una simulación, y estos controladores son evaluados mediante una función de ajuste o eficiencia (fitness). La forma en que la función de ajuste sea definida indicará el éxito que tenga el AG para la resolución de un problema dado, ya que ésta es la base para determinar qué soluciones tienen mayor y menor probabilidad de sobrevivir (Ricci, 2013).

Para que la función de ajuste nos brinde buenos resultados, es necesario establecer el objetivo que se desea alcanzar con el algoritmo. Existen dos casos que se ocupan la mayoría de las veces, dependiendo de si se dispone o no de un conjunto de pares entrada-salida de referencia que deba aproximar el controlador (que llamaremos patrones). Si disponemos de un fichero con pares (x_i, y_i) de referencia, la función de ajuste se calculará restando a un máximo que consideremos idóneo F_{max}, la suma de las distancias euclidianas entre las salidas deseadas y_i y las que proporciona el controlador y. El objetivo es maximizar la cantidad

$$F(y, y_i) = F_{max} - \sum_i \left(y_i - y(x_i)\right)^2 \tag{3.1}$$

A este tipo de optimización se le conoce como aprendizaje supervisado, ya que se conocen las acciones objetivo que el ordenador ha de tomar.

En general, los AG son más útiles en problemas con gran número de variables a optimizar, y en los que no conocemos las salidas concretas deseables para cada entrada.

3.5 Selección.

El siguiente paso del proceso que siguen los AG es el de la selección, en cuyo paso se simula el proceso de selección natural de los individuos en cada generación, es decir, se seleccionarán los individuos que pasaran su genoma a la siguiente generación. Según Ricci (2013), existen varias formas que se pueden implementar en el proceso de selección.

3.5.1 Selección elitista

La selección de los miembros más aptos de cada generación es garantizada. Algunos AG no utilizan al 100% este método, más bien utilizan una forma modificada de éste, es decir, el mejor individuo o los mejores, se copian a la siguiente generación, en caso de que no surja uno que sea mejor.

3.5.2 Selección proporcional a la aptitud

Los individuos más aptos tienen mayor probabilidad de ser seleccionados. Esto no garantiza que vayan a pasar.

3.5.3 Selección por ruleta

Este método de selección es una forma proporcional a la aptitud, en la que la probabilidad de que un individuo sea seleccionado, sea proporcional a la diferencia entre su aptitud y la de sus competidores.

3.5.4 Selección escalada

Cuando se incrementa la aptitud media de la población, la presión para la selección incrementa, por lo tanto, la función de ajuste (fitness) se hace más discriminadora. Esta forma de selección se puede utilizar cuando los individuos tengan un ajuste alto, por lo tanto, solo pequeñas diferencias en sus ajustes pueden distinguirlas.

3.5.5 Selección por torneo

Se seleccionan aleatoriamente de la población dos individuos, y se les asigna una probabilidad: p al más apto y una probabilidad de $(1\text{-}p)$ al otro. Solo se elige a un individuo de cada competencia.

3.5.6 Selección por rango

A cada individuo de la población se le asigna un rango numérico que se basa en el ajuste, y la selección estará basada en el rango en lugar de las diferencias absolutas del ajuste. Este método presenta la ventaja de que los individuos que presentan mejor ajuste no compiten necesariamente con los que presentan menor ajuste, lo que provoca que no haya una diversidad genética de la población.

3.5.7 Selección generacional

La descendencia de los individuos seleccionados en cada generación se convierte en toda la siguiente generación.

3.5.8 Selección por estado estacionario

La descendencia de los individuos seleccionados en cada generación se vuelven a evaluar con los individuos anteriores, por lo que reemplazan a los individuos menos aptos.

3.5.9 Selección jerárquica

Los individuos pasan por varias rondas de selección en cada generación. La evaluación que se les hace a los individuos de los primeros niveles es más rápida y menos discriminatoria, mientras que para los niveles más altos, la evaluación es más rigurosa. La ventaja que presenta este método es que se reduce el tiempo de cálculo, al hacer una evaluación más rápida y menos selectiva, para que los individuos que son menos prometedores sean eliminados, mientras que los individuos que sobreviven a esta prueba son evaluados de una forma más rigurosa.

3.6 Operadores Genéticos

La siguiente fase que sigue en el proceso, es la aplicación de una secuencia de operadores genéticos, éstos simulan el proceso de reproducción sexual de los seres vivos. Como se ha mencionado, cada nueva generación se crean nuevos individuos que no estaban presentes en la población anterior. Así el AG va accediendo a nuevas regiones en el espacio de búsqueda (Ricci, 2013). Los operadores genéticos tienen la función de generar a los nuevos individuos de la población. Los operadores genéticos más comunes son los de cruzamiento y los de mutación.

3.6.1 Cruzamiento

El cruzamiento consiste en seleccionar dos individuos después del proceso de selección, después se determina una posición de cruce de manera aleatoria y, se intercambian las cadenas entre la posición inicial y el punto de cruce y la posición final (Ricci, 2013). Este operador genético es considerado el principal operador genético, hasta el punto en el que, según Holland, no es un AG si no tiene este operador genético, sin embargo, esto no ocurre si no se tiene el operador de mutación.

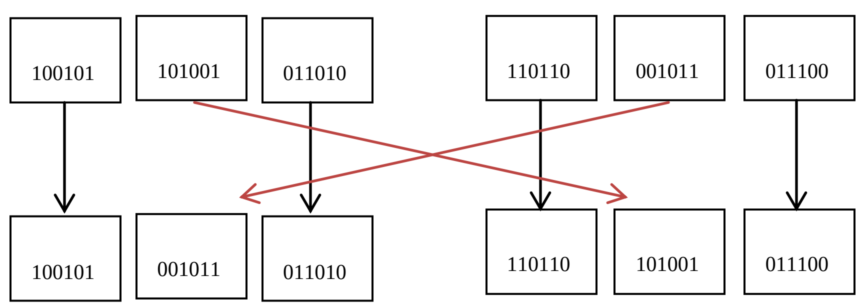
No existe ningún problema si se emparejan dos descendientes de los mismos padres, ya que con esto se garantiza la perpetuación de un individuo con buen ajuste. Sin embargo, no se recomienda exagerar este procedimiento porque se puede repetir una característica no deseada en toda la población. A esto se le llama *atranque en un mínimo local*, y es un problema recurrente en los usuarios de los AG (Galindo, 2011).

Según Ricci (2013) existen diferentes tipos de cruce:

3.6.1.1 Cruce de n-puntos

Los dos cromosomas se parten en *n* puntos y se intercambia el material genético que se encuentra entre estos puntos. Los más utilizados son el cruce de un punto y el cruce de dos puntos. En la figura 3.2 se muestra un ejemplo de cruce de dos puntos.

Figura 3.2. Cruce de dos puntos



Fuente: Elaboración propia basada en Galindo (2011).

3.6.1.2 Cruce uniforme

Para este tipo de cruce, el operador decide la probabilidad con la que se van a generar los descendientes, dependiendo del ajuste que presente cada uno de los padres, para intercambiar cada uno de los bits que integran a los padres. O también se genera un patrón aleatorio de ceros y unos y se intercambian los bits de los dos cromosomas que coincidan donde hay un uno en el patrón.

3.6.1.3 Cruces especializados

En ocasiones, cuando el cruce es aleatorio, se pueden producir soluciones que se encuentren fuera de la región factible. Por lo tanto, se debe aplicar un cruce en el que se garantice que la descendencia se encuentre en la región factible.

3.6.1.4 Cruce aritmético

Se combinan dos pares de cromosomas de la siguiente manera:

$$H_1 = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2 \tag{3.2}$$

$$H_2 = (1 - \alpha) P_1 + \alpha P_2 \tag{3.3}$$

Donde α es un factor aleatorio de peso.

3.6.1.5 Cruce heurístico

Se utiliza el valor de ajuste de dos cromosomas para poder elegir la dirección que seguirá la búsqueda. La descendencia será generada por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{gathered} H_1 = (Mejor\ padre) + r * (Mejor\ padre - Peor\ padre) \\ H_2 = Mejor\ padre \end{gathered} \tag{3.4}$$

Donde r se encuentra entre 0 y 1.

3.6.2 Mutación

Este operador genético es el segundo más utilizado. Permite introducir nueva información que no se encuentra presente en la población. Toma en cuenta a un individuo, busca una posición y la cambia dependiendo su probabilidad. Este operador nos permite salir de máximos globales.

Los principales tipos de mutación, según Ricci (2013), son:

3.6.2.1 Flip Bit

Este operador de mutación invierte los valores que se tienen, es decir, si es un cero se cambia por uno, si es uno se cambia por cero. Este operador se utiliza solamente si la codificación es binaria.

3.6.2.2 Límite

Este operador de mutación cambia aleatoriamente el valor del gen elegido por el límite superior para el gen. Este operador se utiliza en codificación entera o flotante.

3.6.2.3 No Uniforme

Este operador de mutación converge la probabilidad de mutación a cero mientras el número de generaciones se incrementa. Mediante esto, la población permanece estable en los primeros momentos de evolución para después poder evolucionar al estado final de la solución. Este operador se utiliza solo para codificación entera o flotante.

3.6.2.4 Uniforme

Este operador de mutación selecciona un gen y lo cambia de manera aleatoria uniforme entre los límites superior e inferior para el gen. Este operador se utiliza solo para codificación entera o flotante.

3.6.2.5 Gaussiana

Este operador de mutación agrega una unidad al gen elegido aleatoriamente mediante una distribución normal. Si el nuevo valor del gen se encuentra fuera del rango permitido para el gen, este valor se trunca. Este operador se utiliza solo para codificación entera o flotante.

3.6.3 Inversión

Otro operador que se llega a utilizar es la inversión, la cual incrementa la capacidad de exploración y permite generar cadenas que serían difíciles de obtener con los otros dos operadores. Este operador trabaja con un individuo, y parte la cadena del individuo para después invertir los valores de éste.

3.6.4 Elitismo

Este operador les brinda privilegios a los individuos que presentan mejor ajuste. Tiene una desventaja si se aplica en las primeras fases, ya que puede darse que una élite de superindividuos acabe con la densidad genética del problema.

Ya que tenemos el genoma final, se expresa un fenotipo, reconstruyendo cada uno de los controladores que forman la población y, se procede nuevamente a su evaluación. Este proceso se repite un determinado número de veces o bien las veces suficientes hasta que la evaluación se estabiliza.

3.7 Codificación

Como vimos anteriormente, es necesario codificar los genes para la implementación de los AG. Uno de los métodos más utilizados es el uso de una cadena de longitud y secuencias fijas. Los parámetros del controlador que se desean ajustar se almacenan en una cadena como secuencias fijas de números. Así, el número de genes o parámetros es fijo, y el valor de éstos se guarda siempre en la misma posición de la cadena.

Otro punto que se debe tomar en cuenta es la forma en que codificarán estos números; esto se hace con habituales codificaciones binarias de 8 y de 16 bits, otro método es el de hacer una codificación en coma fija o flotante. El tipo de codificación que elijamos para los genes influirá en cómo implementar los operadores.

Cuando se utiliza la codificación de la estructura de la base de reglas se utiliza una secuencia de índices a conjuntos borrosos de la partición de salida. En este caso, se refiere a asignar un número a cada una de las características que posee a lo que se llamará código de salida, y éstos se colocan de manera consecutiva en la cadena.

De esta manera, la posición que tienen los números mencionados anteriormente indican las premisas del genoma. Esta codificación resulta simple, con pocas entradas y una complejidad moderada en las particiones, aunque debe tomarse en cuenta que en el caso de un controlador con n entradas y p particiones hay un total de r reglas posibles, cantidad dada por la expresión

$$r = p^n \tag{3.5}$$

Lo que para un número grande de entradas provoca que el esquema no sea viable. Para un controlador de este nivel de complejidad es preferible utilizar reglas que incluyan en su premisa sólo una parte de las entradas, lo que permitirá crear una base de reglas más manejable. Si éste es el caso es necesario utilizar una codificación para las reglas de tipo variable, y se utilizan los algoritmos genéticos desordenados, los cuales no se utilizarán en esta investigación.

3.8 Finalización

Para poder finalizar el AG, en necesario establecer las condiciones en las que éste dejará de funcionar, y así presentar la mejor solución obtenida. Generalmente se determina mediante un número máximo determinado de generaciones o iteraciones. Otra condición que suele tomarse en cuenta es el estado de evolución de la población, éste puede ser, la pérdida de diversidad dentro de la población o por no observarse una mejora en un cierto número de iteraciones. Generalmente se utiliza una mezcla de criterios para la finalización del AG, es decir, limitar el tiempo de ejecución a un número de iteraciones y tener en cuenta algún indicador del estado de la población para asegurar la convergencia antes de alcanzar la limitación mencionada.

Capítulo IV. Comparación de los modelos

El objetivo de este capítulo es desarrollar los modelos que se van a comparar, el modelo de Markowitz, así como el modelo de Algoritmos Genéticos (AG), ambos aplicados para la optimización del mismo portafolio de inversión. También se presentarán los resultados que se obtuvieron al correr los modelos en estudio.

Se presentará primero una breve descripción acerca de la manera en que se construyó el portafolio de inversión que se va a estudiar, así como una justificación del porqué se eligieron las acciones que se utilizarán para el estudio. Después, se explicará cómo se aplicó la metodología con la que se resolvió el portafolio de Markowitz, y se presentarán los resultados que se obtuvieron mediante esta metodología.

Después, se explicará la metodología que se utilizó para aplicar los AG, que son el objeto de estudio de esta tesis, por lo que se dará un mayor énfasis en esta metodología. Y para finalizar este capítulo se presentarán los resultados obtenidos mediante los AG así como una comparación de las dos metodologías.

4.1 Construcción del portafolio de inversión

Para la elaboración del portafolio de inversión, se tomaron datos históricos a partir del 10 de marzo de 2008 y hasta el 31 de diciembre de 2012, debido a que este trabajo se empezó a mediados del año 2013, y se pretende tomar un periodo "estable" para realizar el estudio. Se tomaron en cuenta las acciones que forman parte del Índice de Precios al Consumidor (IPC) dentro de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), esto se hizo debido a que es común que se construyan portafolios de inversión indizados al IPC con el fin de reducir el riesgo, por lo que el rendimiento del portafolio se moverá de la misma manera en que lo haga el índice. Por otro lado, las acciones que conforman el IPC muestran un comportamiento con poca varianza y relativamente constante lo que asegura poca volatilidad en el precio de las acciones.

Ya que se identificaron las acciones se procedió a buscar los precios históricos de cada acción hasta donde se tuviera historia, que ocasionó un problema debido a que las empresas emisoras no empezaron a cotizar al mismo tiempo en la BMV, por lo que no se tenía el mismo número de precios históricos para todas las acciones, dado lo anterior se acotó el número de acciones a las acciones que tuvieran precios a partir de 2008, lo que redujo el número de acciones. En consecuencia, las acciones que se tomaron en cuenta para el estudio fueron las siguientes:

Cuadro 4.1. Acciones que conforman el Portafolio

n	Símbolo	Nombre	Sector
1	**AC.MX**	Arca Continental	Aún pertenece al IPC
2	**ALFAA.MX**	Alfa, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
3	**ALSEA.MX**	Alsea SAB de CV	Aún pertenece al IPC
4	**AMXL.MX**	America Movil, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
5	**ASURB.MX**	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
6	**BIMBOA.MX**	Grupo Bimbo SAB de CV	Aún pertenece al IPC
7	**CEMEXCPO.MX**	Cemex, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
8	**ELEKTRA.MX**	Grupo Elektra, S.A. de C.V.	Aún pertenece al IPC
9	**FEMSAUBD.MX**	Fomento Economico Mexicano SAB de CV	Aún pertenece al IPC
10	**GAPB.MX**	Grupo Aeroportuario del Pacifico SAB de CV	Aún pertenece al IPC
11	**GEOB.MX**	Corporacion Geo, S.A.B. de C.V.	Ya no pertenece al IPC
12	**GFINBURO.MX**	Grupo Financiero Inbursa, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
13	**GFNORTEO.MX**	Grupo Financiero Banorte SAB de CV	Aún pertenece al IPC
14	**GMEXICOB.MX**	Grupo Mexico, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
15	**GRUMAB.MX**	Gruma, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
16	**HOMEX.MX**	Desarrolladora Homex SAB de CV	Ya no pertenece al IPC
17	**ICA.MX**	Empresas ICA, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
18	**ICHB.MX**	Industrias Ch, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
19	**KIMBERA.MX**	Kimberly - Clark de Mexico S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
20	**KOFL.MX**	Coca-Cola Femsa, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
21	**LIVEPOLC-1.MX**	El Puerto de Liverpool, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
22	**MEXCHEM.MX**	Mexichem, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC
23	**SANMEXB.MX**	Grupo Financiero Santander Mexico SAB de CV	Aún pertenece al IPC
24	**TLEVISACPO.MX**	Grupo Televisa, S.A.B.	Aún pertenece al IPC
25	**URBI.MX**	Urbi Desarrollos Urbanos, S.A.B. de C.V.	Ya no pertenece al IPC
26	**WALMEXV.MX**	Wal - Mart de Mexico, S.A.B. de C.V.	Aún pertenece al IPC

Fuente: Elaboración propia con base en Yahoo <07 de enero de 2014>

El comportamiento de los precios de estas acciones se presenta en el Anexo A1.

A partir de la elección de las acciones con las que se conformaría el portafolio, y teniendo el mismo número de precios históricos, se calcularon los factores necesarios para la construcción del portafolio a partir de la teoría de Markowitz, la cual se describió en el capítulo 2. Por lo tanto, el portafolio quedó conformado como se muestra en el Cuadro 4.2.

Cuadro 4.2. Portafolio de inversión

n	Símbolo	Rendimiento
1	AC.MX	-0.000815936
2	ALFAA.MX	-0.000826674
3	ALSEA.MX	-0.000296801
4	AMXL.MX	0.000306178
5	ASURB.MX	-0.000559184
6	BIMBOA.MX	-0.000442891
7	CEMEXCPO.MX	0.001301585
8	ELEKTRA.MX	-0.000128777
9	FEMSAUBD.MX	-0.000715239
10	GAPB.MX	-0.000147038
11	GEOB.MX	0.001122292
12	GFINBURO.MX	-0.000564734
13	GFNORTEO.MX	-5.07099E-05
14	GMEXICOB.MX	-7.14707E-05
15	GRUMAB.MX	0.000634498
16	HOMEX.MX	0.001582701
17	ICA.MX	0.000955967
18	ICHB.MX	-0.000522564
19	KIMBERA.MX	-0.000472271
20	KOFL.MX	-0.000751964
21	LIVEPOLC-1.MX	-0.000226255
22	MEXCHEM.MX	-0.000791595
23	SANMEXB.MX	0.00157814
24	TLEVISACPO.MX	-0.000112117
25	URBI.MX	0.00173512
26	WALMEXV.MX	-0.000406059

Fuente: Elaboración propia

La distribución del rendimiento de cada una de las acciones se presenta en el Anexo A2.

Como se puede observar en el Cuadro 4.2, solo ocho acciones que se están analizando tienen un rendimiento promedio positivo. Esto se debe a que el periodo de estudio incluye los años de crisis mundial, así como el año en el que hubo crisis en México, esto generó que el precio de varias acciones disminuyera. Si bien es cierto que a partir del año 2010 empezó un periodo de crecimiento, este fue lento y no permitió que el precio de las acciones se recuperara.

La matriz de varianzas y covarianzas se puede ver en el Anexo A3.

Por lo tanto, ya se tiene conformado el portafolio de inversión con el que se trabajará, para encontrar un máximo rendimiento con un riesgo aceptable.

4.2 Optimización del portafolio de inversión mediante la teoría de portafolios de Markowitz.

Para la solución "tradicional" del portafolio de inversión, se utilizó la herramienta de MS Excel, "*Solver*", la cual utiliza la metodología del gradiente generalizado para la solución de problemas de optimización (Véase Anexo A4).

Por lo tanto, ya que el portafolio se construye, se procede a aplicar La Teoría de portafolios de Markowitz, y se utilizan las restricciones que se revisaron en el capítulo 2, es decir, las ecuaciones 2.7 y 2.8, para construir el modelo para darle solución al problema, dándole un peso igual a todas las acciones, es decir, todas las acciones empezaron con un valor de 1/26 de participación en el portafolio, dando los valores de rendimiento y riesgo mostrados en el Cuadro 4.3.

Cuadro 4.3

Rendimiento y riesgo de un portafolio de inversión con el mismo peso para cada una de las acciones que los conforman.

Rendimiento esperado del portafolio	**5.05462E-05**
Riesgo del portafolio	7.20821E-05

Fuente: Elaboración propia.

Lo que nos indica que asignando estos valores al portafolio tendríamos una pérdida esperada de aproximadamente 0.0051%, y en riesgo el 0.0072%.

Para resolver el portafolio, lo primero que se hizo fue maximizar el rendimiento esperado, por lo que la celda en donde se encontraba el rendimiento esperado fue la celda objetivo a maximizar, y se asignó un valor máximo de riesgo que se estaría dispuesto a tomar por los inversionistas del 1%.

Al correr el modelo se obtienen los siguientes valores para el portafolio:

Cuadro 4.4

Rendimiento y riesgo del portafolio de inversión al maximizar el rendimiento mediante La Teoría de portafolios de Markowitz

Rendimiento esperado del portafolio	**0.00173512**
Riesgo del portafolio	0.001060997

Fuente: Elaboración propia.

Lo que indicaría una ganancia esperada de aproximadamente 0.1735% que, si se considera una inversión de $1,000,000, la ganancia sería de $1,735.00. El riesgo sería de $1,060.00, considerando la misma inversión.

Por otro lado, al analizar el peso que se asignó a cada una de las acciones, se puede observar que este método le asigna todo el capital a Urbi Desarrollos Urbanos, S.A.B. de C.V., es decir, esta acción da el mayor rendimiento que cualquier otra combinación obtenida mediante la teoría de portafolios de Markowitz.

A partir de los valores obtenidos anteriormente, es decir, con uno en Urbi.Mx y cero en las demás acciones, se procedió minimizar el riesgo fijando ahora el rendimiento obtenido a partir de la corrida anterior, es decir, cambiando la restricción: riesgo <= 0.01 por la restricción de rendimiento = 0.00173512, y ahora cambiando el objetivo del modelo, minimizar el riesgo.

Los valores que se obtuvieron al correr la teoría de portafolios de Markowitz con los nuevos parámetros para el modelo son los siguientes:

Cuadro 4.5

Rendimiento y riesgo del portafolio de inversión al minimizar el riesgo mediante La Teoría de portafolios de Markowitz

Rendimiento esperado del portafolio	**0.00173512**
Riesgo del portafolio	0.001060997

Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que, al minimizar el riesgo, el valor obtenido no disminuye. Esto se debe a las limitaciones que presenta el modelo de solución heurístico con el que la teoría de portafolios de Markowitz fue programado, que no asegura obtener el máximo valor posible, pero si un valor aceptable para ser considerado como solución del problema, y debido a que se fijó el valor del rendimiento con el que se maximizó el valor del portafolio por lo que, al minimizar el riesgo (otra función objetivo), el valor del riesgo no se mueve.

Por lo tanto, se ha encontrado el valor óptimo del portafolio, que ofrece la teoría de portafolios de Markowitz, y de manera más específica el método del gradiente generalizado. Entonces, este portafolio quedó conformado invirtiendo en Urbi Desarrollos Urbanos,S.A.B. de C.V. todo el capital.

Entonces, si se invierte $1,000,000 en este portafolio, se invertiría el capital en la acción mencionada anteriormente.

Este portafolio nos daría una ganancia promedio de $1,735.00 con un margen de riesgo de $1,060.00. Sin duda, este portafolio muestra ser atractivo para invertir en él, debido a que el rendimiento es mayor al riesgo.

Ahora se realizará un estudio de los resultados obtenidos a partir de la solución del portafolio de Markowitz mediante AG.

4.3 Aplicación de los Algoritmos Genéticos

Ahora se estudiarán los resultados que genera la aplicación de los AG para la solución del modelo de Markowitz. Esta metodología se resolverá a partir de un software llamado Evolver, que es distribuido por una empresa llamada Palisade.

Este software funciona en Excel, por lo que hace que su implementación sea sencilla y permite construir el modelo a partir de una interfaz ya conocida y además sencilla de utilizar.

Para la búsqueda de los valores que ofrecen un portafolio óptimo, se siguió la misma metodología que se implementó para solución con la teoría de portafolios de Markowitz, primero se maximizará el rendimiento esperado y después, se minimizará el riesgo fijando el valor del rendimiento esperado antes obtenido.

La metodología que se siguió para la solución del modelo mediante AG se explicará a continuación.

4.3.1 Elección de la solución inicial.

Como se estudió en el capítulo de AG, la manera de empezar a trabajar con éstos es proponiendo una solución inicial, es decir, darle un valor inicial a cada una de las variables de decisión. Pero debido a que los AG utilizan un criterio de cruce y mutación a partir de la solución inicial para dar una solución al problema, es importante revisar que este valor sea adecuado para que el camino que sigue el modelo nos lleve a un valor mayor y de ser posible encontrar el valor óptimo para el problema.

Por lo anterior, para la implementación del problema, se buscó una metodología que permitiera elegir la solución inicial ideal, para que la solución de los AG sea mayor que la solución propuesta por la metodología que se utilizó anteriormente, incluso, para que la solución que se obtenga al utilizar esta solución inicial sea mejor que otras que se puedan proponer para resolver el problema mediante AG.

La metodología que se siguió para encontrar esta solución inicial fue la siguiente, buscar la menor diferencia que existe entre la media de cada acción con su desviación estándar, lo que nos daría mayor movilidad de estos parámetros, y se observó que esto ocurría al correr el modelo al menos al maximizar el rendimiento del portafolio. Por lo tanto, al seguir esta metodología y revisar las 26 acciones que se estaban considerando para la constitución del portafolio de inversión, se decidió tomar la siguiente combinación como solución inicial:

Cuadro 4.6

Solución inicial para la aplicación de los Algoritmos Genéticos.

Acción	w
AC.MX	1
ALFAA.MX	0
ALSEA.MX	0
AMXL.MX	0
ASURB.MX	0
BIMBOA.MX	0
CEMEXCPO.MX	0
ELEKTRA.MX	0
FEMSAUBD.MX	0
GAPB.MX	0
GEOB.MX	0
GFINBURO.MX	0
GFNORTEO.MX	0
GMEXICOB.MX	0
GRUMAB.MX	0
HOMEX.MX	0
ICA.MX	0
ICHB.MX	0
KIMBERA.MX	0
KOFL.MX	0
LIVEPOLC-1.MX	0
MEXCHEM.MX	0
SANMEXB.MX	0
TLEVISACPO.MX	0
URBI.MX	0
WALMEXV.MX	0

Fuente: Elaboración propia.

Se tomó la solución en la que se invierte todo en una sola acción la cual es Arca Continental. Esta solución inicial proporciona los siguientes valores de rendimiento esperado y riesgo para el portafolio:

Cuadro 4.7

Rendimiento y riesgo del portafolio con los valores iniciales para los AG

Rendimiento esperado del portafolio	-0.000815936
Riesgo del portafolio	0.000175915

Fuente: Elaboración propia

Se puede observar que el rendimiento del portafolio es muy pequeño (de hecho es negativo). Sin embargo, esto no es un impedimento para el programa y mucho menos por la metodología que se sigue, ya que en primer lugar se maximizará el rendimiento.

El riesgo que se tiene al invertir todo el dinero en Arca Continental es mayor al que observamos al invertir la misma cantidad en las 26 acciones, pero la diferencia es menor.

4.3.2 Definición del modelo

Una vez que se definió la solución inicial, se construyó el modelo para optimizar el portafolio de inversión. Se inició maximizando el rendimiento esperado del portafolio y dejando el valor del riesgo de éste a no más del 1%, como se hizo en la metodología anterior, ya que se estaban comparando ambas metodologías. Por lo tanto, la restricción quedó de la siguiente manera:

$$\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \leq 0.01$$

Con esta modificación se puede trabajar con el software sin ningún inconveniente.

Por lo tanto, el modelo se definió de la siguiente manera:

Maximizar $\sum_{i,j=1}^{n} w_i \bar{r}_i$

Sujeto a

$\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \leq 0.01,$ (4.1)

$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$

Después de obtener el valor máximo de rendimiento esperado, se minimizó el riesgo del portafolio, para valores de rendimiento, mayores o iguales al obtenido con el modelo anterior (4.1). Esto se realizó para obtener el valor máximo de rendimiento y buscar el valor mínimo que permite el portafolio.

Por lo tanto, el modelo con el que se minimizó el riesgo del portafolio, ya con un valor que al menos se permitiría para el rendimiento esperado (por razones similares por las que se modificó la restricción para el riesgo en la (4.1)) se definió de la siguiente manera:

Minimizar $\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \sigma^2$

Sujeto a

$$\sum_{i,j=1}^{n} w_i \bar{r}_i \geq \bar{r} \qquad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Sin embargo, debido a la naturaleza de los AG, que se basa en el cruce de las variables de decisión para resolver el problema, se observó que los valores arrojados al correr estos modelos no convergían al mismo valor, como ocurre con los métodos determinísticos e inclusive ocurre con los modelos heurísticos, por lo que se decidió correr este modelo un número suficiente de veces, que nos permitiera ajustar el comportamiento que siguen los valores obtenidos mediante la aplicación de los AG, y así, poder calcular el valor promedio de estos valores y un intervalo de confianza.

4.3.3 Resultados de los Algoritmos Genéticos

La idea inicial para el número de corridas que se consideraron suficientes para determinar el valor promedio del rendimiento fue de 100. Sin embargo, al correr 35 veces el modelo de Algoritmos Genéticos se observó que la diferencia entre el rendimiento esperado de cada una de las corridas no variaba mucho, y sobretodo que en la mayoría de los casos se llegaba al valor obtenido mediante la teoría de portafolios de Markowitz. Por lo tanto, se tomó la decisión de realizar el estudio con las 35 corridas que se tenían. Los resultados obtenidos para 35 corridas que se realizaron utilizando los modelos antes vistos resueltos con AG's se presentan en el Anexo A6. A continuación se presentan los valores de rendimiento esperado y riesgo obtenidos en cada una de las corridas:

Cuadro 4.8

Rendimiento y riesgo obtenido al correr 35 veces Algoritmos Genéticos

Rendimiento	Riesgo
0.001727734	0.00098956
0.001725158	0.00097615
0.001735116	0.001060976
0.001734445	0.001057498
0.001733496	0.001056533
0.001677108	0.000741231
0.00172377	0.00093396
0.001716048	0.000888949
0.001693592	0.000833782
0.001732513	0.001047489
0.001735098	0.001060953
0.001726324	0.001044413
0.001720346	0.00090724
0.001729751	0.001022228
0.001734521	0.001053974
0.001707687	0.000986378
0.00166465	0.000962537
0.001733749	0.001056526
0.001715211	0.001032532
0.001720986	0.000957291
0.001579202	0.000974447
0.001572577	0.000613818
0.001638338	0.00061359
0.001699296	0.001021205
0.001712735	0.00100793
0.001521559	0.000427812
0.001734947	0.001060702
0.001734825	0.001060358
0.001289219	0.000465247
0.001646623	0.000934671
0.001547728	0.004309636
0.001548143	0.004721795
0.001558274	0.000999611
0.001479574	0.000914491
0.001710691	0.000968897

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar, tanto el valor del rendimiento como el del riesgo no varían bastante. Por esta razón se decidió realizar un estudio para el mayor rendimiento obtenido a partir de las 35 corridas y con el menor riesgo observado. Al calcular el valor promedio, la varianza y la desviación estándar del rendimiento esperado y del riesgo los valores obtenidos son:

Cuadro 4.9

Promedio, varianza y desviación estándar del rendimiento esperado y riesgo obtenidos a partir de 35 corridas Algoritmos Genéticos.

	Rendimiento	Riesgo
Promedio	0.001667458	0.00113613
Varianza	9.81041E-09	7.4234E-07
Desviación estándar	9.90475E-05	0.00086159

Fuente: Elaboración propia.

Para el rendimiento, el intervalo de confianza quedó definido de la siguiente manera:

Cuadro 4.10

Intervalo de confianza de los valores obtenidos de rendimiento mediante Algoritmos Genéticos.

LS	0.001865553
LI	0.001469363

Fuente: Elaboración propia.

Para el riesgo, el intervalo de confianza quedó definido de la siguiente manera:

Cuadro 4.11

Intervalo de confianza de los valores obtenidos de riesgo mediante Algoritmos Genéticos.

LS	0.002859308
LI	-0.00058706

Fuente: Elaboración propia.

Es importante mencionar que estos valores se calcularon a partir de los valores obtenidos de rendimiento y riesgo después de correr 35 veces el programa AG's, no del rendimiento y riesgo calculados a partir de los pesos promedio que le corresponde a cada acción, por lo que el único valor que sería igual es el del rendimiento, ya que es un operador lineal. El riesgo (la varianza), no corresponde al valor promedio del riesgo obtenido de las 35 corridas.

Por otro lado, al observar los valores de los pesos en el Anexo A5, se observa que, a diferencia de los resultados obtenidos a partir de la teoría de portafolios de Markowitz, al optimizar el portafolio de inversión mediante AG's, se tienen valores para todas las acciones, aun cuando estos valores sean muy cercanos a cero. Esto genera un rendimiento máximo igual al obtenido al aplicar la teoría de portafolios de Markowitz para el portafolio aunque también para algunas corridas un riesgo menor.

Sin embargo, para estos valores cercanos a cero, es importante revisarlos con cuidado, ya que para que la mayoría de éstos sean significativos, es necesario que se invierta una cantidad muy grande, en la mayoría de éstos esa cantidad debe ser mayor a $100,000,000, por lo tanto, sería necesario conseguir un gran número de inversionistas o solicitar una gran suma para invertir en este portafolio.

Por lo tanto, para hacer un portafolio más pequeño y accesible para los inversionistas, se repartió el peso de las acciones que están muy cercanos a cero, a las acciones que tienen valores significativos de manera proporcional y se hizo un estudio de qué tanto cambia el valor del rendimiento y el riesgo al repartir estos valores. A continuación se presentarán los resultados obtenidos, así como el valor final que se le asignará al portafolio.

El procedimiento que se siguió para repartir en partes iguales el peso de las acciones que son muy cercanas a cero fue sumar el peso de las acciones que son mayores que el 0.1% dado que estos pesos resultarían significativos para una inversión no necesariamente grande.

Después se dividió el valor de cada una de las variables entre la suma de estos valores mayores al 0.1%. Este procedimiento se realizó para el valor promedio de las 35 corridas que se realizaron con AG's, así como para la combinación que proporcionaba el máximo rendimiento y la combinación que proporcionaba el mínimo riesgo. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Para el promedio de los pesos:

Cuadro 4.12

Los valores originales del promedio de las 35 corridas.

Acción	Promedio
AC.MX	0.00115495
ALFAA.MX	0.000396666
ALSEA.MX	0.000273372
AMXL.MX	0.000346008
ASURB.MX	0.000434269
BIMBOA.MX	0.000570113
CEMEXCPO.MX	0.012603319
ELEKTRA.MX	0.001235712
FEMSAUBD.MX	0.00035634
GAPB.MX	0.000254282
GEOB.MX	0.004711216
GFINBURO.MX	0.000144659
GFNORTEO.MX	0.000444833

Acción	Promedio
GMEXICOB.MX	0.000686645
GRUMAB.MX	0.001844257
HOMEX.MX	0.152547725
ICA.MX	0.001175785
ICHB.MX	0.00018481
KIMBERA.MX	0.000684272
KOFL.MX	0.001048319
LIVEPOLC-1.MX	0.000468834
MEXCHEM.MX	0.000229177
SANMEXB.MX	0.0686028
TLEVISACPO.MX	0.000915794
URBI.MX	0.748057212
WALMEXV.MX	0.000628631

Fuente: Elaboración propia.

Las cuales proporcionan un rendimiento esperado y un riesgo de:

Cuadro 4.13

Rendimiento y riesgo del valor promedio de las 35 corridas realizadas con Algoritmos Genéticos

Rendimiento esperado del portafolio	Riesgo del portafolio
0.00166746	0.00067333

Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, las acciones que se dejarían o se quitarían serían las siguientes:

Cuadro 4.14

Cuadro de acciones que se quedaron y que se eliminaron del portafolio de inversión promedio obtenido con Algoritmos Genéticos.

Acción	Estatus
AC.MX	Dejar
ALFAA.MX	Quitar
ALSEA.MX	Quitar
AMXL.MX	Quitar
ASURB.MX	Quitar
BIMBOA.MX	Quitar
CEMEXCPO.MX	Dejar
ELEKTRA.MX	Dejar
FEMSAUBD.MX	Quitar
GAPB.MX	Quitar
GEOB.MX	Dejar
GFINBURO.MX	Quitar
GFNORTEO.MX	Quitar
GMEXICOB.MX	Quitar
GRUMAB.MX	Dejar
HOMEX.MX	Dejar
ICA.MX	Dejar
ICHB.MX	Quitar
KIMBERA.MX	Quitar
KOFL.MX	Dejar
LIVEPOLC-1.MX	Quitar
MEXCHEM.MX	Quitar
SANMEXB.MX	Dejar
TLEVISACPO.MX	Quitar
URBI.MX	Dejar
WALMEXV.MX	Quitar

Fuente: Elaboración propia

Al aplicar la metodología antes descrita los nuevos valores fueron los siguientes:

Cuadro 4.15

Participación de las acciones en el portafolio de inversión.

Acción	Promedio
AC.MX	0.001163113
ALFAA.MX	0
ALSEA.MX	0
AMXL.MX	0
ASURB.MX	0
BIMBOA.MX	0
CEMEXCPO.MX	0.012692403
ELEKTRA.MX	0.001244446
FEMSAUBD.MX	0
GAPB.MX	0
GEOB.MX	0.004744517
GFINBURO.MX	0
GFNORTEO.MX	0
GMEXICOB.MX	0
GRUMAB.MX	0.001857293
HOMEX.MX	0.153625981
ICA.MX	0.001184096

ICHB.MX	0
KIMBERA.MX	0
KOFL.MX	0.001055729
LIVEPOLC-1.MX	0
MEXCHEM.MX	0
SANMEXB.MX	0.069087707
TLEVISACPO.MX	0
URBI.MX	0.753344716
WALMEXV.MX	0

Fuente: Elaboración propia

Se puede observar que Urbi Desarrollos Urbanos, S.A.B. de C.V., es de nuevo la acción que lleva mayor peso, se puede pensar que las razones antes mencionadas son ciertas y se cumplen sin importar cuál sea la metodología utilizada.

El rendimiento esperado y el riesgo del portafolio con las modificaciones hechas son las siguientes:

Cuadro 4.16

Rendimiento y riesgo del portafolio de inversión con el promedio de las 35 corridas mediante Algoritmos Genéticos.

Rendimiento esperado del portafolio	Riesgo del portafolio
0.00168157	0.00068227

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar, al realizar este procedimiento, el rendimiento esperado disminuye a aproximadamente 0.1682% en comparación con el resultado obtenido con la teoría de portafolios de Markowitz, y el riesgo del portafolio es de 0.0682%, que es un valor menor al promedio de las 35 corridas y, además significativamente menor al valor que se obtuvo al utilizar la teoría de portafolios de Markowitz (Método del gradiente generalizado). La diferencia que presenta el valor obtenido mediante los AG es de 0.00168157 - 0. 0.00173512 = -0.00005355 es decir, la diferencia es de casi -0.0054%, por lo que se puede concluir que los AG's brindan un menor rendimiento esperado para el portafolio, si se estudia el promedio de los valores obtenidos a partir de 35 corridas, sin embargo esta diferencia no es muy grande y al observar el riesgo con los valores asignados, se podría decir que es preferible porque otorga un riesgo significativamente menor, esto es: el riesgo mediante AG 0.0682% contra un riesgo obtenido mediante la teoría de portafolios de Markowitz de 0.1060% aproximadamente una diferencia del 0.0379%.

En conclusión, si se elige un portafolio de inversión con las características obtenidas a partir de los AG y se tiene una inversión de $1,000,000, el portafolio brindaría una ganancia esperada de $1,682 mientras que se esperaría una pérdida de $628.

Ahora se realizará el estudio para la combinación que proporciona el máximo rendimiento para el portafolio de inversión.

Cuadro 4.17

Valores originales para el portafolio que proporciona el mayor rendimiento dentro de las 35 corridas con Algoritmos Genéticos.

Acción	w
AC.MX	4.7007E-08
ALFAA.MX	7.174E-09
ALSEA.MX	7.2213E-08
AMXL.MX	1.1916E-08
ASURB.MX	7.6931E-08
BIMBOA.MX	1.5491E-08
CEMEXCPO.MX	1.2665E-06
ELEKTRA.MX	1.0606E-08
FEMSAUBD.MX	1.1762E-07
GAPB.MX	6.687E-08
GEOB.MX	1.6048E-09
GFINBURO.MX	1.2988E-07
GFNORTEO.MX	4.7796E-07

Acción	w
GMEXICOB.MX	3.7553E-08
GRUMAB.MX	1.1598E-07
HOMEX.MX	8.2728E-07
ICA.MX	1.6684E-08
ICHB.MX	2.0819E-08
KIMBERA.MX	5.5849E-08
KOFL.MX	9.9222E-09
LIVEPOLC-1.MX	1.7299E-08
MEXCHEM.MX	1.9785E-08
SANMEXB.MX	6.6101E-06
TLEVISACPO.MX	7.4282E-08
URBI.MX	0.99998987
WALMEXV.MX	2.2639E-08

Fuente: Elaboración propia

Cuyos valores proporcionan valores de rendimiento y riesgo:

Cuadro 4.18

Rendimiento y riesgo del portafolio de inversión con el máximo rendimiento dentro de las 35 corridas con Algoritmos Genéticos.

Rendimiento esperado del portafolio	Riesgo del portafolio
0.00173512	0.00106098

Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, las acciones que se dejarían o se quitarían serían las siguientes:

Cuadro 4.19

Cuadro de acciones que se quedaron y que se eliminaron del portafolio de inversión con el máximo rendimiento obtenido con Algoritmos Genéticos.

Acción	Estatus
AC.MX	Quitar
ALFAA.MX	Quitar
ALSEA.MX	Quitar
AMXL.MX	Quitar
ASURB.MX	Quitar
BIMBOA.MX	Quitar
CEMEXCPO.MX	Quitar
ELEKTRA.MX	Quitar
FEMSAUBD.MX	Quitar
GAPB.MX	Quitar
GEOB.MX	Quitar
GFINBURO.MX	Quitar
GFNORTEO.MX	Quitar
GMEXICOB.MX	Quitar
GRUMAB.MX	Quitar
HOMEX.MX	Quitar
ICA.MX	Quitar
ICHB.MX	Quitar
KIMBERA.MX	Quitar
KOFL.MX	Quitar
LIVEPOLC-1.MX	Quitar
MEXCHEM.MX	Quitar
SANMEXB.MX	Quitar
TLEVISACPO.MX	Quitar
URBI.MX	Dejar
WALMEXV.MX	Quitar

Fuente: Elaboración propia

Al aplicar la metodología para repartir el valor de las acciones cuyo peso está cercano a cero la solución se presenta de la siguiente manera:

Cuadro 4.20

Participación de las acciones en el portafolio de inversión.

Acción	w
AC.MX	0
ALFAA.MX	0
ALSEA.MX	0
AMXL.MX	0
ASURB.MX	0
BIMBOA.MX	0
CEMEXCPO.MX	0
ELEKTRA.MX	0
FEMSAUBD.MX	0
GAPB.MX	0
GEOB.MX	0
GFINBURO.MX	0
GFNORTEO.MX	0
GMEXICOB.MX	0
GRUMAB.MX	0
HOMEX.MX	0
ICA.MX	0
ICHB.MX	0
KIMBERA.MX	0
KOFL.MX	0
LIVEPOLC-1.MX	0
MEXCHEM.MX	0
SANMEXB.MX	0
TLEVISACPO.MX	0
URBI.MX	1
WALMEXV.MX	0

Fuente: Elaboración propia

El cual proporciona valores de rendimiento y riesgo de:

Cuadro 4.21

Rendimiento y riesgo del portafolio de inversión con el valor que proporciona el máximo rendimiento en las 35 corridas mediante Algoritmos Genéticos.

Rendimiento esperado del portafolio	Riesgo del portafolio
0.00173512	0.001061

Fuente: Elaboración propia

Se puede observar que el rendimiento, estudiando la combinación, para el portafolio de inversión que da mayor rendimiento es exactamente igual al que se obtuvo mediante la teoría de portafolios de Markowitz, es decir, es posible que se haya encontrado el máximo global para la función objetivo. Sin embargo, no se podría concluir que esto es cierto. Lo que es importante mencionar es que para el valor máximo del rendimiento del portafolio de inversión el valor que se obtiene de ambas corridas es el mismo, por lo tanto, no se puede probar que los AG brindan un valor mayor para la optimización de un portafolio de inversión.

Esto ocurre de la misma manera para el riesgo de portafolio de inversión.

Por último, se revisará que sucede si ponderamos los pesos de la combinación que otorga el menor riesgo en la inversión.

Los valores originales que generan el menor riesgo, dentro de las 35 corridas son:

Cuadro 4.22

Valores originales para el portafolio que proporciona el menor riesgo dentro de las 35 corridas con Algoritmos Genéticos.

Acción	w
AC.MX	0.01175775
ALFAA.MX	0.0004334
ALSEA.MX	0.00092213
AMXL.MX	3.3936E-06
ASURB.MX	0.00387222
BIMBOA.MX	0.00363277
CEMEXCPO.MX	0.1154713
ELEKTRA.MX	2.6003E-05
FEMSAUBD.MX	0.00721528
GAPB.MX	1.1729E-05
GEOB.MX	0.02494142
GFINBURO.MX	1.4407E-05
GFNORTEO.MX	0.00021915

Acción	W
GMEXICOB.MX	3.0275E-09
GRUMAB.MX	0.00177832
HOMEX.MX	0.31802368
ICA.MX	0.02749109
ICHB.MX	0.00071044
KIMBERA.MX	0.0002442
KOFL.MX	0.00058331
LIVEPOLC-1.MX	0.00041689
MEXCHEM.MX	0.00027667
SANMEXB.MX	0.00515468
TLEVISACPO.MX	0.00080038
URBI.MX	0.47552682
WALMEXV.MX	0.00047257

Fuente: Elaboración propia

Esta combinación genera un rendimiento y un riesgo de:

Cuadro 4.23

Rendimiento y riesgo del portafolio de inversión con el menor riesgo dentro de las 35 corridas con Algoritmos Genéticos.

Rendimiento esperado del portafolio	Riesgo del portafolio
0.00152156	0.00042781

Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, las acciones que se dejarían o se quitarían serían las siguientes:

Cuadro 4.24

Cuadro de acciones que se quedaron y que se eliminaron del portafolio de inversión con el menor riesgo obtenido con Algoritmos Genéticos.

Acción	Estatus
AC.MX	Dejar
ALFAA.MX	Quitar
ALSEA.MX	Quitar
AMXL.MX	Quitar
ASURB.MX	Dejar
BIMBOA.MX	Dejar
CEMEXCPO.MX	Dejar
ELEKTRA.MX	Quitar
FEMSAUBD.MX	Dejar
GAPB.MX	Quitar
GEOB.MX	Dejar
GFINBURO.MX	Quitar
GFNORTEO.MX	Quitar

Acción	Estatus
GMEXICOB.MX	Quitar
GRUMAB.MX	Dejar
HOMEX.MX	Dejar
ICA.MX	Dejar
ICHB.MX	Quitar
KIMBERA.MX	Quitar
KOFL.MX	Quitar
LIVEPOLC-1.MX	Quitar
MEXCHEM.MX	Quitar
SANMEXB.MX	Dejar
TLEVISACPO.MX	Quitar
URBI.MX	Dejar
WALMEXV.MX	Quitar

Fuente: Elaboración propia

Entonces, los valores que quedarían al aplicar la metodología propuesta para ponderar serían los siguientes:

Cuadro 4.25

Participación de las acciones en el portafolio de inversión.

Acción	w
AC.MX	0.01181843
ALFAA.MX	0
ALSEA.MX	0
AMXL.MX	0
ASURB.MX	0.0038922
BIMBOA.MX	0.00365152
CEMEXCPO.MX	0.11606727
ELEKTRA.MX	0
FEMSAUBD.MX	0.00725252
GAPB.MX	0
GEOB.MX	0.02507015
GFINBURO.MX	0
GFNORTEO.MX	0

Acción	W
GMEXICOB.MX	0
GRUMAB.MX	0.0017875
HOMEX.MX	0.31966505
ICA.MX	0.02763297
ICHB.MX	0
KIMBERA.MX	0
KOFL.MX	0
LIVEPOLC-1.MX	0
MEXCHEM.MX	0
SANMEXB.MX	0.00518128
TLEVISACPO.MX	0
URBI.MX	0.4779811
WALMEXV.MX	0

Fuente: Elaboración propia

Con estos valores, el valor del rendimiento y el riesgo serían los siguientes:

Cuadro 4.26

Rendimiento y riesgo del portafolio de inversión con el valor que proporciona el menor riesgo en las 35 corridas mediante Algoritmos Genéticos.

Rendimiento esperado del portafolio	Riesgo del portafolio
0.001531599	0.00043154

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar, el riesgo es menor al obtenido con las combinaciones anteriores, y el rendimiento no es mayor al observado anteriormente, de hecho, el riesgo es significativamente menor al obtenido tanto por la teoría de portafolios de Markowitz y por el obtenido mediante la combinación promedio de las 35 corridas, y el rendimiento esperado, aun cuando es menor que el obtenido a partir de los modelos anteriormente mencionados, no es significativamente menor, lo que haría también atractivo este portafolio, sobre todo para inversionistas con cierta aversión al riesgo.

Es decir, para esta combinación y con una inversión de $1,000,000.00 el riesgo sería de $432.00 y el rendimiento promedio sería de $1,532.00.

Por lo tanto, y para concluir este capítulo, podríamos decir que si observamos el rendimiento mayor seríamos indiferentes al portafolio obtenido a partir de la manera tradicional de resolver el portafolio de inversión o el resultado obtenido a partir de los AG, y esto sería invertir todo el capital en Urbi Desarrollos Urbanos, S.A.B. de C.V..

Para finalizar este capítulo se presentará un cuadro comparativo entre los resultados obtenidos mediante la teoría de portafolios de Markowitz y los resultados obtenidos mediante AG's.

Cuadro 4.27

Comparación de los resultados de la optimización

	Rendimiento	Riesgo	Acciones que conforman el portafolio
Markowitz	0.00173512	0.001061	100% URBI.MX
AG (promedio)	0.00168157	0.00068227	0.12% AC.MX, 1.27% CEMEXPO.MX, 0.12% ELEKTRA.MX, 0.47% GEOB.MX, 0.19% GRUMAB.MX, 15.36% HOMEX.MX, 0.12% ICA.MX, 0.11% KOFL.MX, 6.91% SANMEXB.MX, 75.33% URBI.MX
AG (Máx rendimiento)	0.00173512	0.001061	100% URBI.MX
AG (Mín riesgo)	0.001531599	0.00043154	1.18% AC.MX, 0.39% ASURB.MX, 0.37% BIMBOA.MX, 11.61% CEMEXCPO.MX, 0.73% FEMSAUBD.MX, 2.51% GEOB.MX, 0.18% GRUMAB.MX, 31.97% HOMEX.MX, 2.76% ICA.MX, 0.52% SANMEXB.MX, 47.80% URBI.MX

Fuente: Elaboración propia

No se podría ser indiferente a elegir un portafolio de inversión que minimiza el riesgo, debido a que ambos portafolios obtenidos mediante los AG se presenta un riesgo menor al que presenta un máximo rendimiento, y el rendimiento que se obtiene con ambos portafolios de inversión es aceptable. Es decir, ambos portafolios tienen una diferencia entre el rendimiento y el riesgo mayor a la diferencia que se tiene con el portafolio de inversión que maximiza el rendimiento.

Conclusiones

La hipótesis principal de esta investigación fue planteada como: es posible elegir un portafolio de inversión óptimo basado en Algoritmos Genéticos (AG) con acciones pertenecientes al Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV); Con lo que se puede afirmar que si es posible realizar un análisis de portafolios de inversión utilizando AG's.

Como hipótesis secundaria, se planteó la siguiente: se puede comparar y contrastar un portafolio de inversión construido a partir de AG's y un portafolio de inversión construido utilizando la teoría de portafolios de Markowitz construidos con acciones pertenecientes al IPC de la BMV; por lo que se puede concluir que es posible la comparación y el contraste de los resultados obtenidos mediante ambas metodologías.

Con los resultados obtenidos al correr ambas metodologías y realizar los ajustes necesarios para que se pudieran aplicar estas metodologías, y basados en la hipótesis que fundamenta el presente trabajo podemos concluir lo siguiente:

1. A partir de la hipótesis secundaria se muestra que la teoría de portafolios de Markowitz brinda un valor para el portafolio con un mayor rendimiento, con un riesgo de cierta manera mínimo, sin embargo, brinda un portafolio poco probable de suceder, debido a que la metodología utilizada solo brinda un valor fijo, y no revisa otros posibles valores para el portafolio. Por otro lado, los AG's buscan de manera continua varios valores que satisfacen las restricciones y la condición de optimización para el portafolio. Lo que genera valores con mayores probabilidades de ocurrencia. Como se pudo observar en los resultados, se obtuvo un valor promedio de las corridas con AG's, cuya combinación proporciona un rendimiento menor que el obtenido mediante la Teoría de portafolios de Markowitz, sin embargo, éste es menor, pero el riesgo de este portafolio es significativamente menor que el obtenido mediante la teoría de portafolios de Markowitz.
2. Los AG presentan mayor amplitud y manejo de la información al brindar la oportunidad de proponer diversas soluciones iniciales, que permiten que el modelo inicie desde diferentes puntos y así identificar diversos caminos para encontrar el

valor óptimo que se busca. Por lo tanto, es evidente que las soluciones que se encuentran, no se restringen a un máximo o mínimo local, sino que permiten evaluar diversos caminos en la búsqueda de un máximo global.

3. Los AG, para este ejercicio, no brindan una solución mayor a la propuesta por los métodos tradicionales utilizados en la optimización de portafolios de inversión, sin embargo, proporcionan varios escenarios, lo que lleva a una mejor distribución del riesgo y por lo tanto, a una mejor administración de éste, ya que, como se pudo observar en los resultados de estas metodologías, los AG nos dan una mayor brecha entre el rendimiento esperado del portafolio y el riesgo de éste, es decir, mayor valor en el rendimiento del portafolio a un menor valor en el riesgo.
4. Al optimizar un portafolio de inversión, es importante diversificar el riesgo de éste, por lo que, a mayor número de acciones consideradas para la integración del portafolio de inversión, y por lo tanto diferentes tipos de mercados, menor correlación existirá entre éstos, lo que permitirá diversificar el riesgo del portafolio minimizándolo.
5. Por otro lado, se pudo observar que la acciones tienen entre ellas covarianzas cercanas a 0, por lo que la relación que existe entre ellas no permite que al elegir diferentes valores para cruce dentro de los AG el rendimiento del portafolio cambie demasiado, por lo que el valor de éste tiende rápidamente al máximo global, mismo que se encontró mediante la Teoría de portafolios de Markowitz.
6. Aun cuando el rendimiento del portafolio de inversión fue igual al obtenido cuando se aplicó La Teoría de portafolios de Markowitz y cuando se aplicaron los AG al momento de maximizar el rendimiento, el riesgo de éste fue menor para otras corridas del portafolio mediante los AG, por lo que para inversionistas con un perfil más conservador, es probable que prefieran no arriesgar su capital, eligiendo el portafolio que contenga el mínimo riesgo sacrificando el mayor rendimiento, por lo que se puede decir que al final, el inversionista es el que tiene la decisión final del portafolio con el que quiere invertir.
7. La variación en las diferentes corridas mediante el AG, debida a la manera en que están estructurados éstos, provoca que sea necesario correr un número considerable de veces el algoritmo para encontrar un valor promedio y una distribución de los

valores generados por los AG, lo que al final del día provoca que sea necesario mayor tiempo para la toma de una decisión. Como sabemos, en la actualidad es importante, además de la optimización del portafolio de inversión, considerar la optimización del tiempo, debido a los constantes cambios en los mercados, por lo que es conveniente buscar procesos que agilicen la aplicación de los AG, esto es, procesos que realicen de manera veloz la corrida de los AG.

8. Como se pudo observar, en este trabajo se omitió la programación del AG, debido principalmente a la falta de tiempo, y a que es un tema que no se ve dentro de las diversas materias incluidas en el plan de estudios de la carrera de Actuaría. Esto no se utiliza como excusa para poder realizarlo, de hecho como autor de este trabajo, se reconoce que queda la intención de adentrarse en el tema y conseguir los conocimientos necesarios para la realización de un AG que genere mejores resultados.

Al evaluar las conclusiones de este trabajo, es importante hacer algunas observaciones.

En primer lugar se considera importante remarcar la idea de adentrarse en la programación de un algoritmo que agilice la utilización de los AG, ya que, como se mencionó en el punto 7, en el mundo actual, es necesario que los resultados tomen poco tiempo en generarse ya que es indispensable tomar decisiones en el momento que se requieren.

En cuanto al punto 7, en el que se menciona un área de oportunidad, solo se quiere hacer una propuesta a la Universidad Autónoma del Estado de México, Institución a la que se presenta este trabajo, de incluir al plan de estudios materias optativas que toquen temas, tanto teóricos como prácticos que permitan a los estudiantes adentrarse al estudio de estos temas.

Bibliografía

Bagley, J. D. (1967). *The behavior of adaptive systems which employ genetic and correlation algorithms.* Michigan: [PhD Thesis] University of Michigan.

Bell, E. T. (1937). *Los grandes matemáticos.* LOSADA.

Brandon, R. G. (2011). Portafolios óptimos de cobertura bajo el riesgo de liquidación. *Quantitative Finance* .

Calvo, M. G. (2012). *Teoría clásica de la gestión*. Recuperado el 7 de Julio de 2013, de http://web.usal.es/~emmam/Docencia/Modelizacion/Presentaciones%202012-2013/TEORIA%20CLASICA%20DE%20LA%20GESTION%20DE.pdf

French, E. F. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives* , *18* (3), 25-46.

Galindo, A. C. (2011). *Secuenciación de actividades en un taller con producción intermitente mediante Algoritmos Genéticos.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Garriga, C. (s.f.). *Teoría económica del capital y la renta*. Recuperado el 18 de Agosto de 2013, de http://pareto.uab.es/jconesa/libro/cap6.pdf

Goldberg, D. (1989). *Genetics Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning.* Adison Weasley.

Guzmán, V. M. (2013). *Los fondos indexados inversos como opción de inversión en mercados a la baja aplicando el Model de Markowitz.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Harvey, C. R. (1995). *Asset Pricing in Emerging Markets.* Durham, NC: Duke University.

Hosseini. (2012). Un nuevo método para la predicción del precio de los índices utilizando series temporales difusas. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* .

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journalof finance* , 77-91.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection. Efficient diversification of investments.* Nueva York: John Wiley & Sons.

Markowitz, H., & Traducido por Francisco López Herrera, i. d. (1999). La historia temprana de la teoría del portafolios: 1600-1960. *Contaduría y administración* (195), 13-30.

Martín del Brío, B. e. (2002). *Redes Neuronales y Sistemas Difusos* (2 ed.). Madrid: RA-MA.

Michalewicz, Z. (1996). *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs.* Berlin: Springer.

Mitchell, M. (1995). Genetic Algorithms: An Overview. *Complexity , 1* (1), 31-39.

Moreno, M. T. (2013). *Riesgo, retorno y semivarianza.* Recuperado el 18 de Julio de 2013, de www.econ.uba.ar

Nair, B. B. (2011). Un árbol de decisión optimizado por Algoritmos Genéticos basado en un sistema de predicción de la tendencia. *(IJCSE) International Journal on Computer Science and Engineering* , 2981-2988.

Orito. (2010). Optimización del índice de un fondo usando Algoritmos Genéticos y un heurístico de búsqueda local.

Prasoon. (2012). Un enfoque de un portafolio de algoritmos para una planeación reconfigurable.

Ricci, I. T. (2013). *Aplicación de Algoritmos Genéticos para el problema de asignación de horarios en la división de ingenierías civil y geomática.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Roy, A. D. (1952). *Safety first and the holding of assets.* Econometrica.

Shakespeare, W. (1597). *El mercader de Venecia*. Venecia: LOSADA.

Sharp, W. F. (1964). *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. Blackwell Publishing for the American Finance Association.

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior towards Risk. *Review of Economic Studies , 5* (1), 65-86.

Toloie-Eshlaghy, A. (2012). Uso de Algoritmos Genéticos y de Enjambre de Partículas para seleccionar y optimizar portafolios de compañías admitidas en la bolsa de valores de Teherán. *Research Journal of Internatıonal Studıes* .

Torres, C. S. (2010). *Una estrategia integral para seleccionar y administrar un portafolio de inversión en el mercado de capitales aplicando el modelo de Markowitz*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Venugopal, M. S. (2009). Uso del Modelo de Algoritmos Genéticos para la selección de portafolios dinámicos. *Journal of Financial Management and Analysis* , 45-53.

Vulteenaho, J. Y. (2004). Bad beta, Good Beta. *The American Economic Review , 94* (5), 1249-1275.

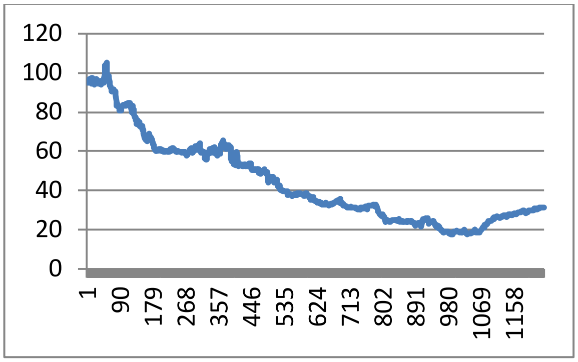
Xia Y, L. B. (2000). A model for portfolio selection with order of expected returns. *Computers & Operation Research* , 409-422.

Yahoo. (s.f.). *Yahoo.com*. Recuperado el 07 de 01 de 2014, de http://mx.finanzas.yahoo.com/q/cp?s=%5EMXX

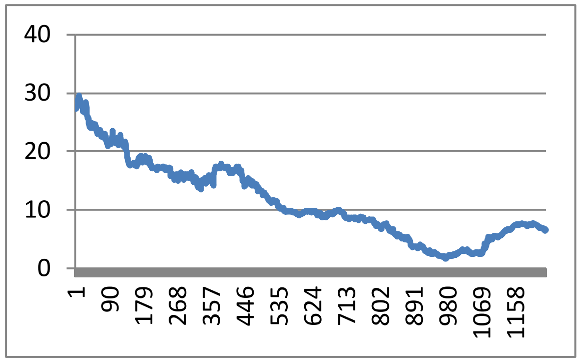
Anexo A1.

Comportamiento del precio de las acciones.

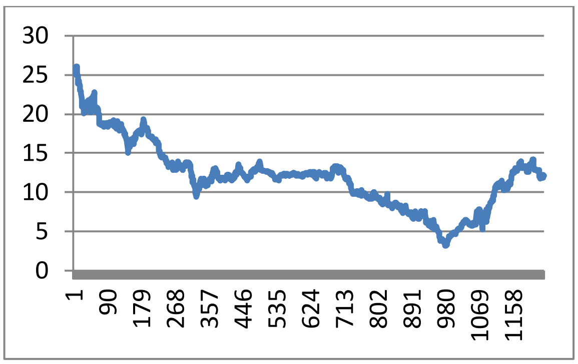
AC.MX



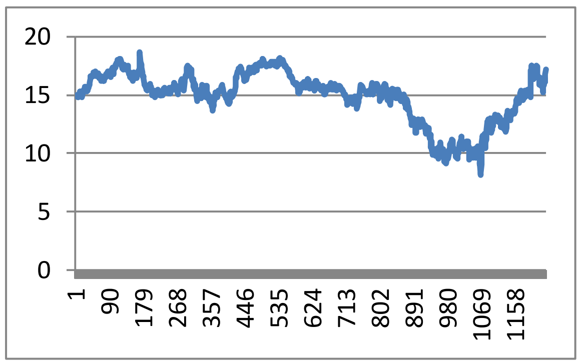
ALFAA.MX



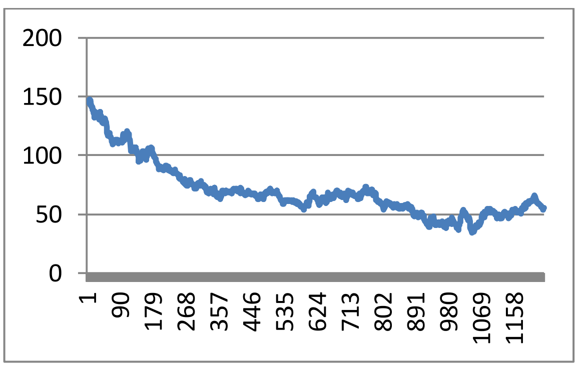
ALSEA.MX



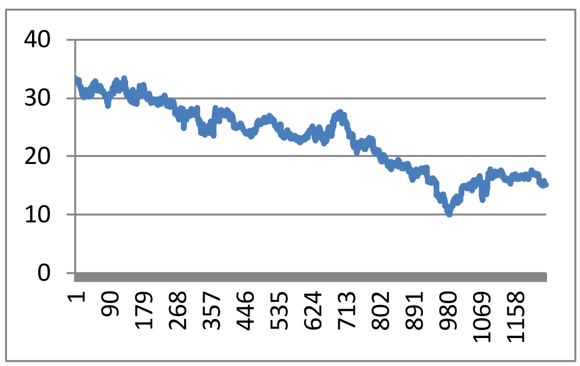
AMXL.MX



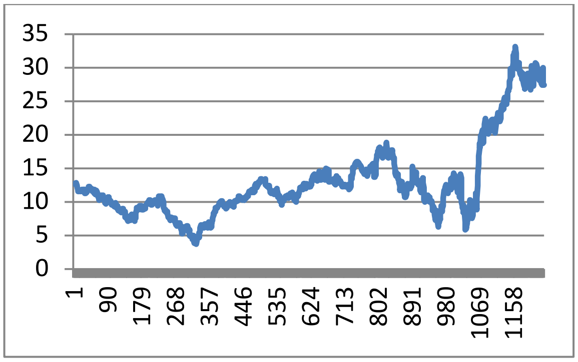
ASURB.MX



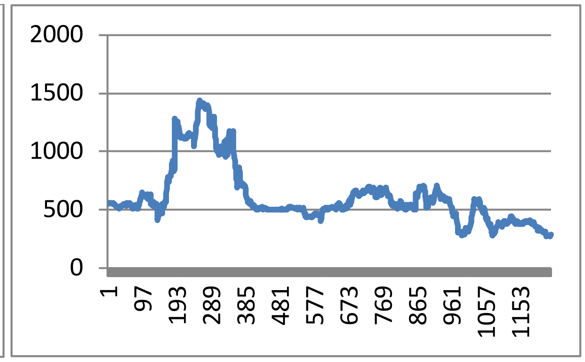
BIMBO.MX



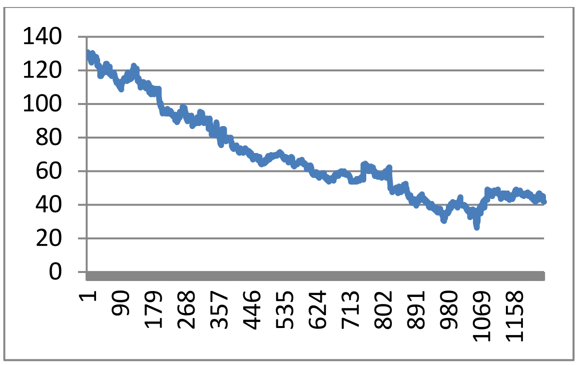
CEMEXCPO.MX



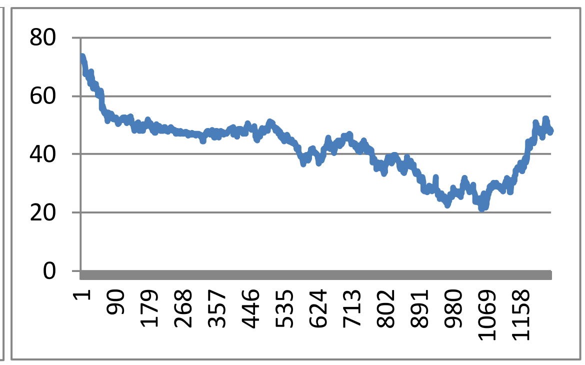
ELEKTRA.MX



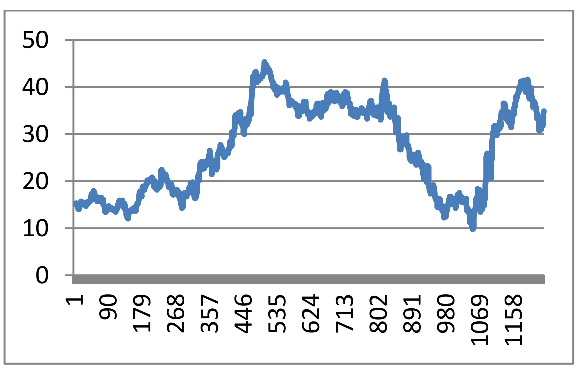
FEMSAUBD.MX



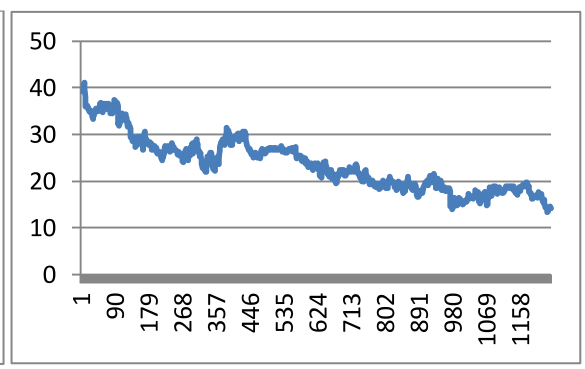
GAPB.MX



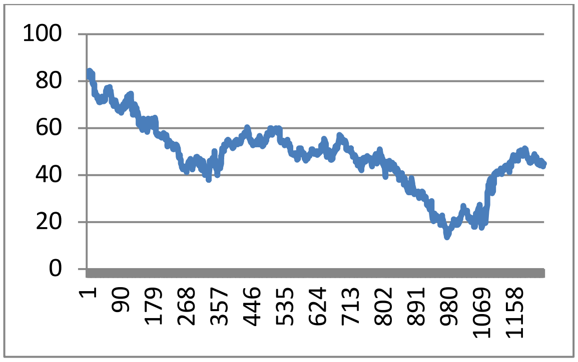
GEOB.MX



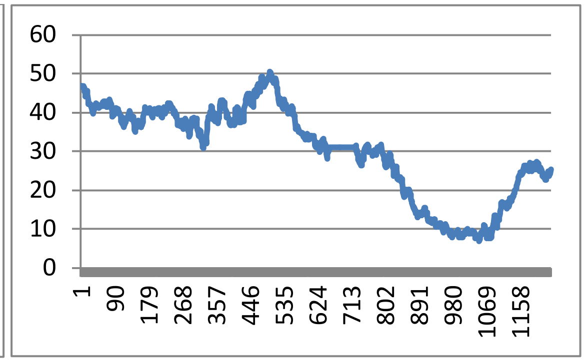
GFINBURO.MX



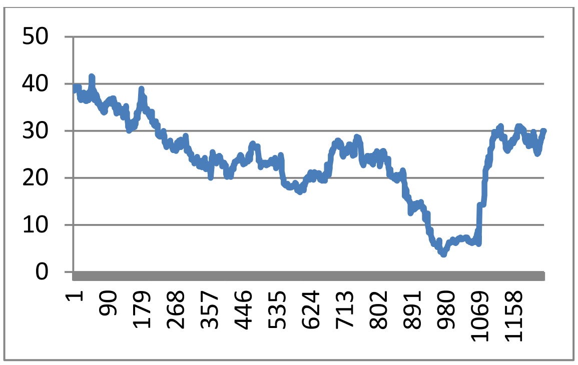
GFNORTEO.MX



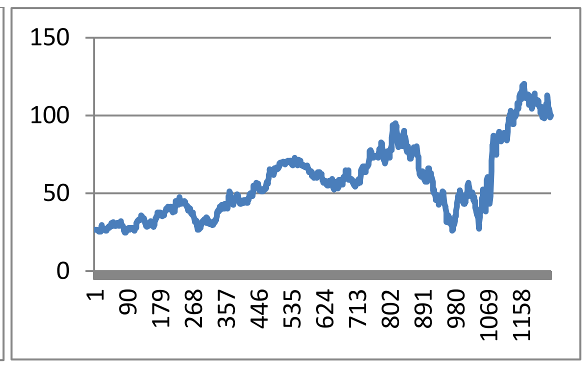
GMEXICOB.MX



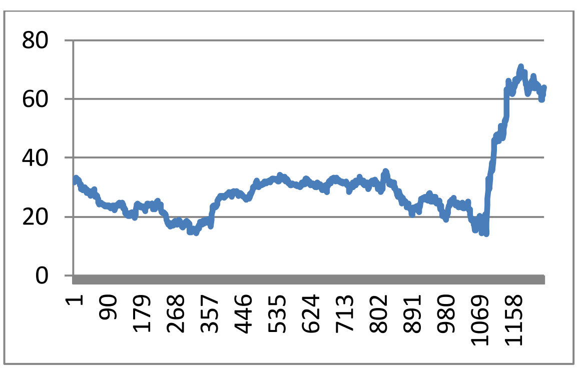
GRUMAB.MX



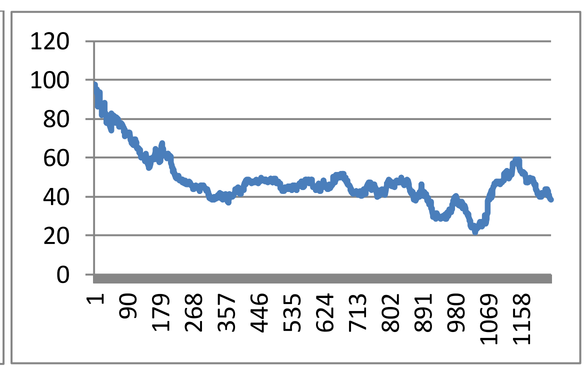
HOMEX.MX



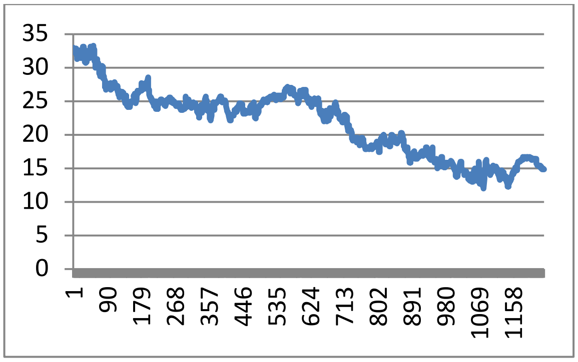
ICA.MX



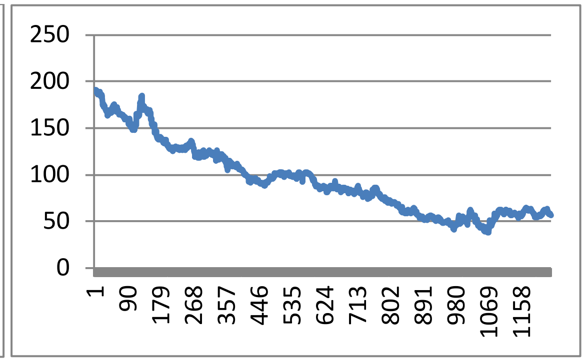
ICHB.MX



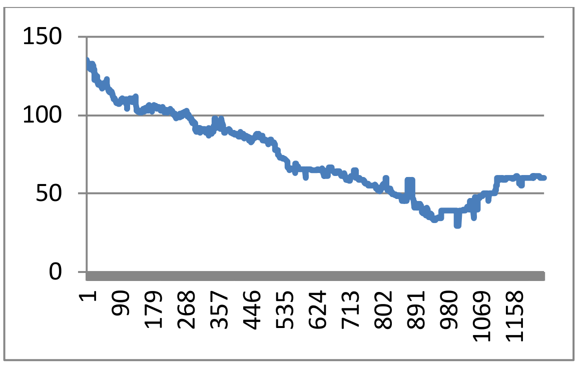
KIMBERA.MX



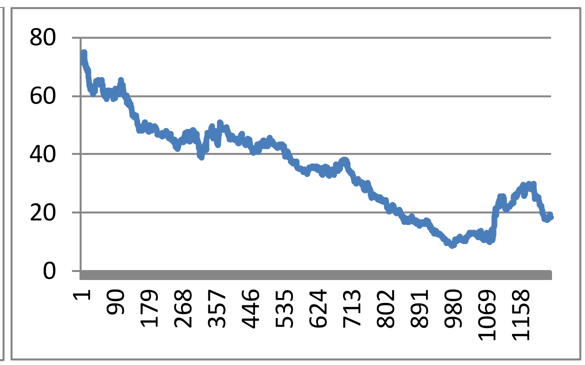
KOFL.MX



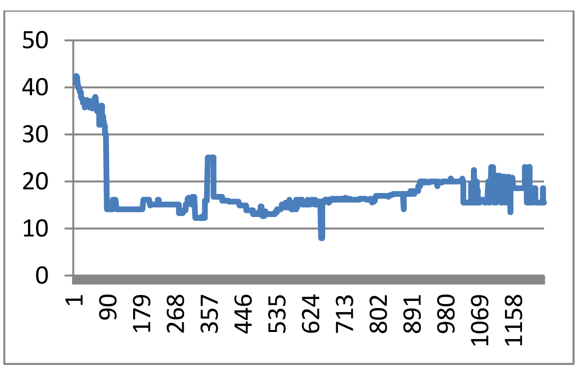
LIVEPOLC-1.MX



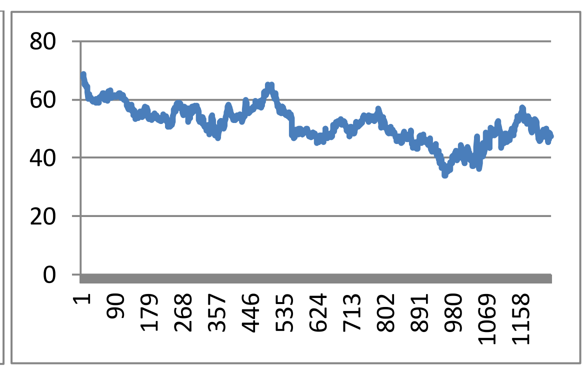
MEXCHEM.MX



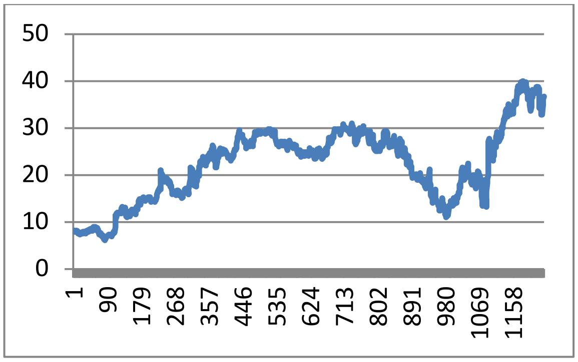
SANMEX.MX



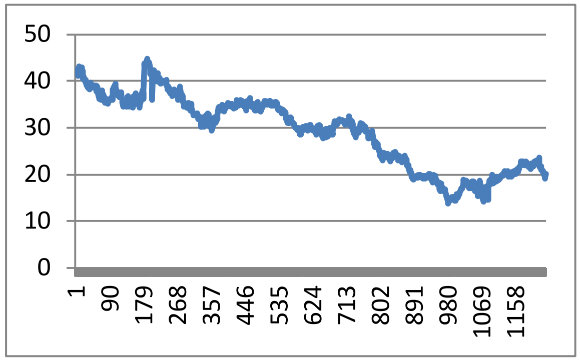
TLEVISACPO.MX



URBI.MX



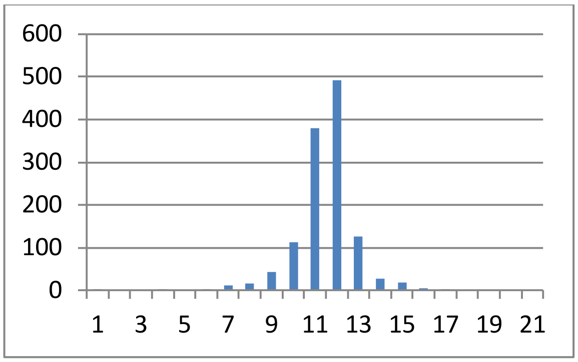
WALMEX.MX



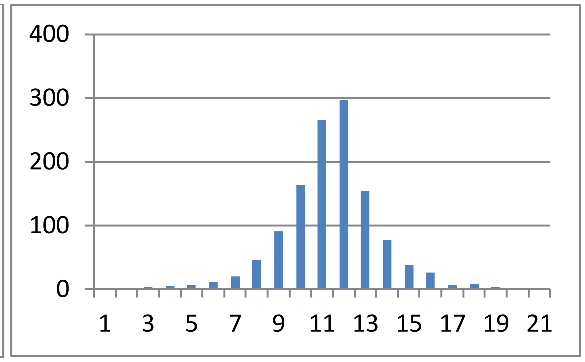
Anexo A2

Distribución del rendimiento de las acciones

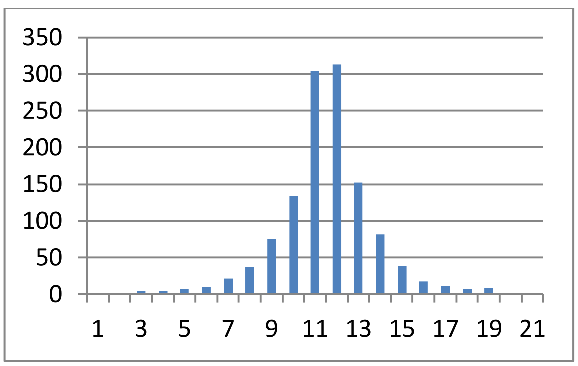
AC.MX



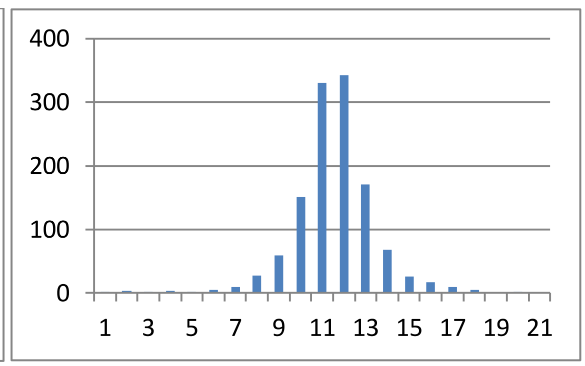
ALFAA.MX



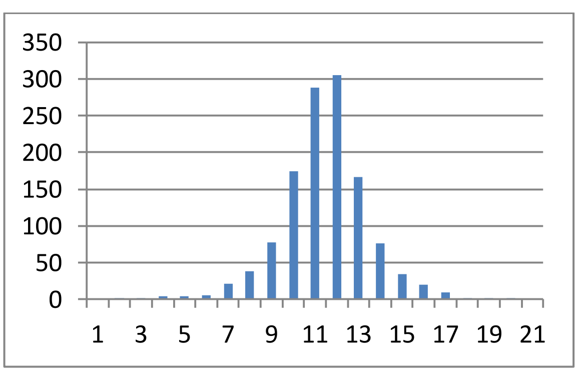
ALSEA.MX



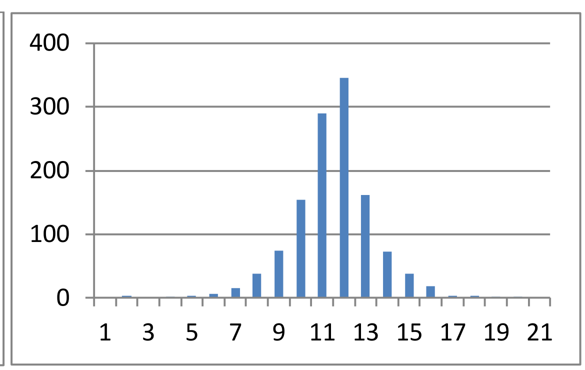
AMXL.MX



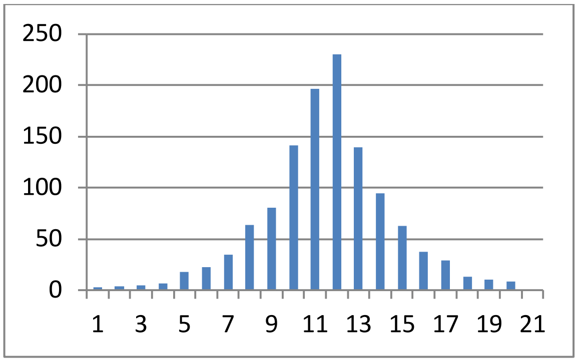
ASURB.MX



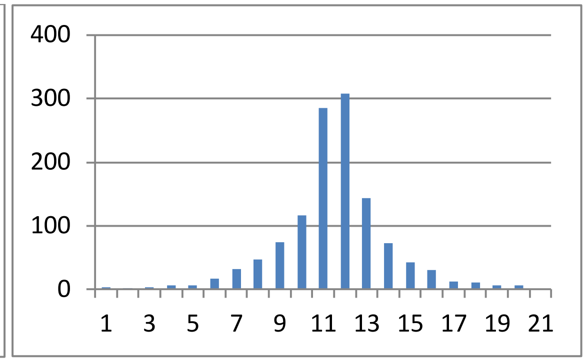
BIMBO.MX



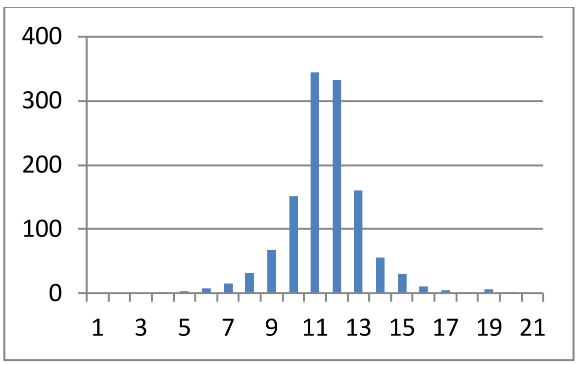
CEMEXCPO.MX



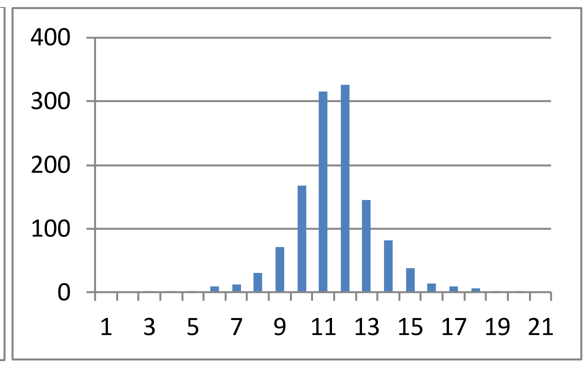
ELEKTRA.MX



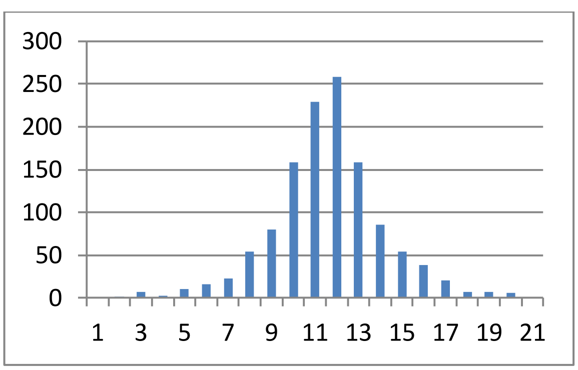
FEMSAUBD.MX



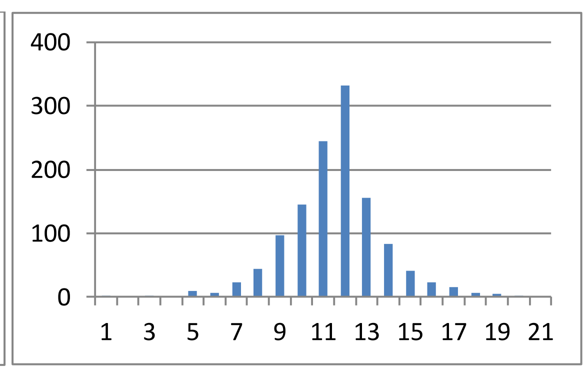
GAPB.MX



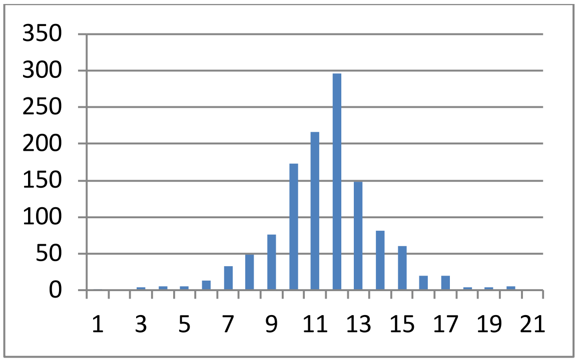
GEOB.MX



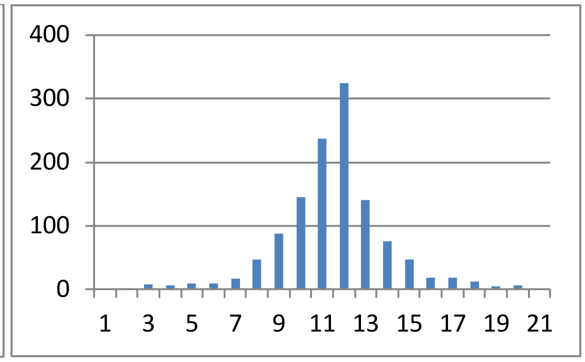
GFINBURO.MX



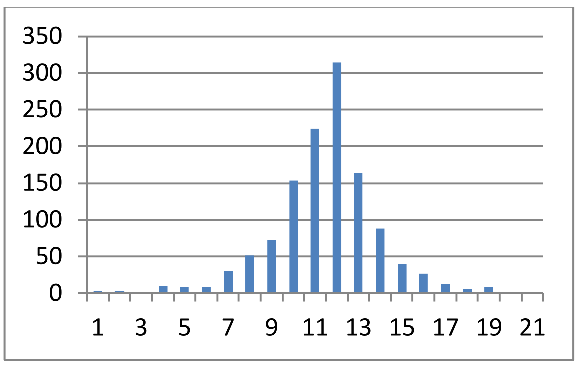
GFNORTEO.MX



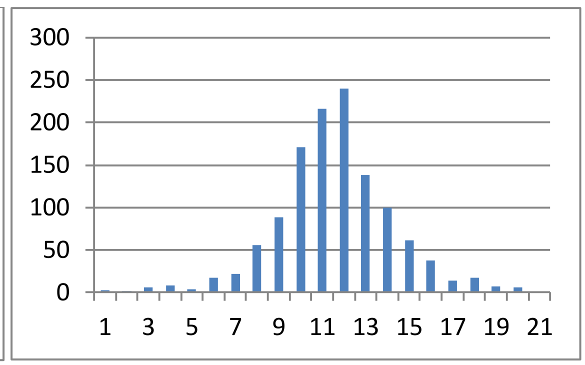
GMEXICOB.MX



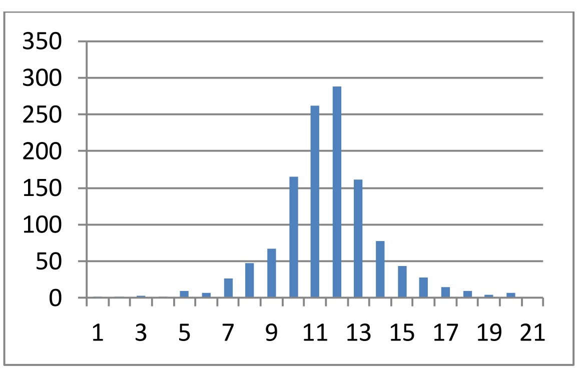
GRUMAB.MX



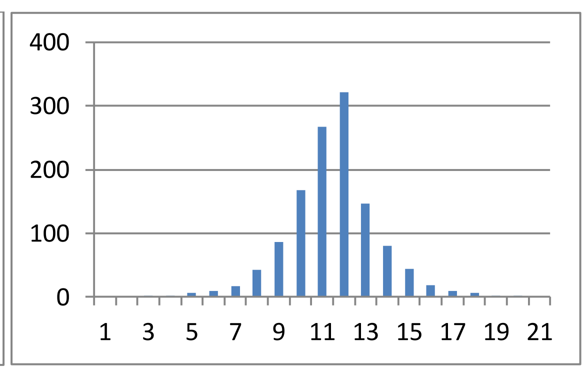
HOMEX.MX



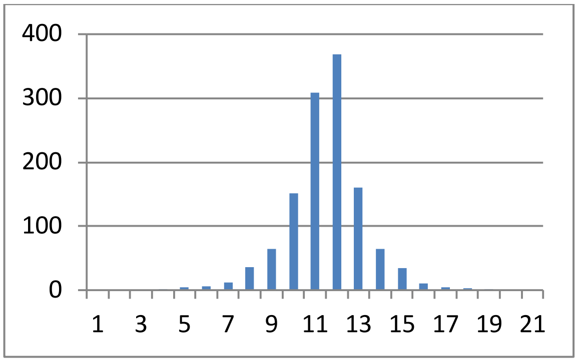
ICA.MX



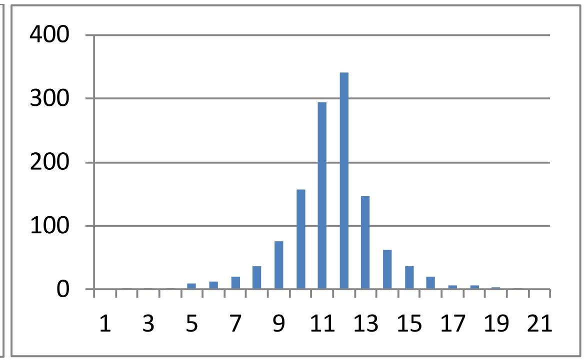
ICHB.MX



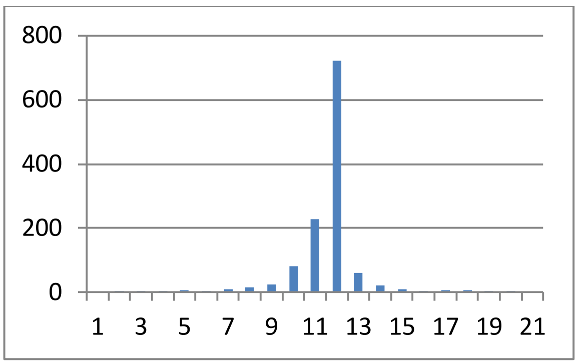
KIMBERA.MX



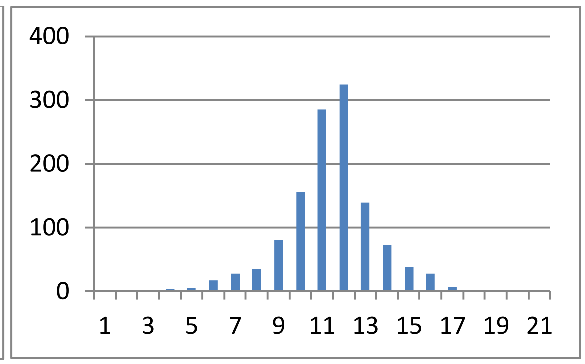
KOFL.MX



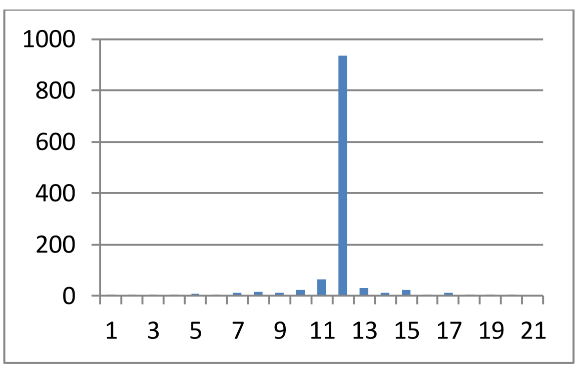
LIVEPOLC-1.MX



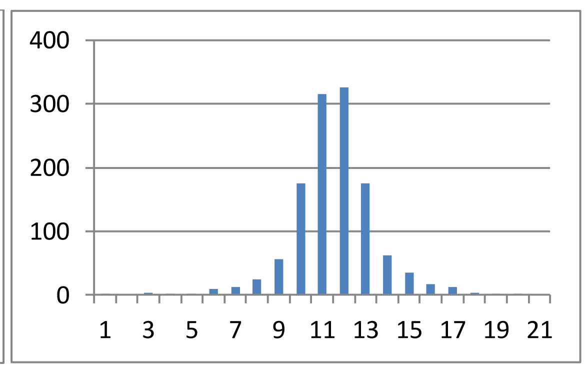
MEXCHEM.MX



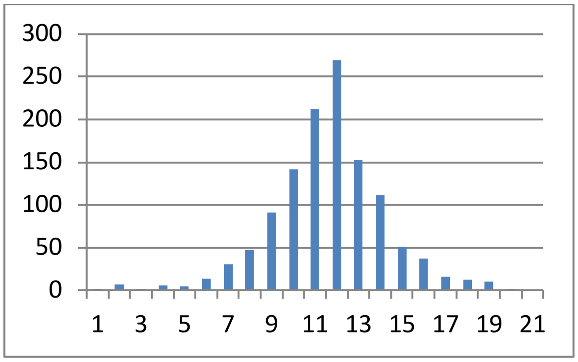
SANMEX.MX



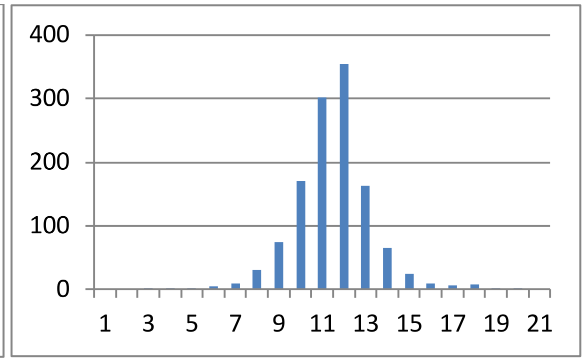
TLEVISACPO.MX



URBI.MX



WALMEX.MX



Anexo A3.

Matriz de Varianzas y covarianzas

Matriz	AC.MX	ALFAA.MX	ALSEA.MX	AMXL.MX	ASURB.MX	BIMBOA.MX
AC.MX	0.00017592	2.48168E-05	2.75783E-05	2.25037E-05	2.86748E-05	1.79915E-05
ALFAA.MX	2.4817E-05	0.00064545	5.1542E-05	1.13409E-05	3.22415E-05	5.4964E-05
ALSEA.MX	2.7578E-05	5.1542E-05	0.000614647	2.23466E-05	4.92055E-05	1.12603E-05
AMXL.MX	2.2504E-05	1.13409E-05	2.23466E-05	0.000384945	1.10913E-05	5.51836E-06
ASURB.MX	2.8675E-05	3.22415E-05	4.92055E-05	1.10913E-05	0.000444912	4.23583E-07
BIMBOA.MX	1.7992E-05	5.4964E-05	1.12603E-05	5.51836E-06	4.23583E-07	0.00039546
CEMEXCPO.MX	5.5937E-05	0.00010914	2.96473E-05	1.54871E-05	8.17667E-06	6.0658E-05
ELEKTRA.MX	3.0956E-05	2.63701E-05	4.31817E-05	1.20714E-05	3.11836E-05	8.18123E-06
FEMSAUBD.MX	3.4194E-05	5.83473E-05	5.60618E-05	1.12328E-05	3.11445E-05	3.6708E-05
GAPB.MX	7.9771E-06	-2.94355E-06	2.65821E-05	1.89988E-05	3.93209E-05	1.18017E-05
GEOB.MX	4.5233E-05	5.37515E-05	8.43608E-05	2.36351E-05	4.59273E-06	7.39004E-05
GFINBURO.MX	2.1319E-05	7.01975E-05	2.60417E-05	-1.1652E-05	-5.93977E-07	0.000155732
GFNORTEO.MX	1.6279E-05	0.000113276	3.86626E-05	3.18173E-05	1.1495E-06	0.000213622
GMEXICOB.MX	1.2483E-05	6.58279E-05	7.42212E-05	3.34234E-06	0.000159669	4.03475E-05
GRUMAB.MX	4.0947E-05	0.000202078	-3.6457E-06	0.000134108	4.51631E-05	1.48208E-06
HOMEX.MX	2.2153E-05	6.99812E-05	4.23941E-05	8.02603E-05	0.000120552	1.36941E-05
ICA.MX	5.5514E-05	2.76258E-05	0.000102292	6.36604E-05	2.58605E-05	1.60677E-05
ICHB.MX	-1.5258E-06	-2.08172E-05	3.46201E-06	5.80654E-07	2.40688E-05	7.35596E-06
KIMBERA.MX	1.0215E-05	0.000156345	2.56421E-05	-1.4013E-05	2.63575E-05	1.58179E-05
KOFL.MX	1.5227E-05	4.27188E-05	4.23266E-05	6.19285E-08	7.14387E-05	8.50617E-07
LIVEPOLC-1.MX	7.6014E-06	2.97469E-05	4.79207E-05	1.28183E-05	4.28123E-05	6.57132E-06
MEXCHEM.MX	3.3037E-05	4.77515E-05	4.87426E-05	4.53048E-05	-5.50694E-06	3.1754E-05
SANMEXB.MX	-1.7984E-05	-5.5281E-05	-5.5281E-05	-1.3631E-05	7.41813E-05	7.71742E-05
TLEVISACPO.MX	1.2957E-05	1.65342E-05	2.9526E-05	1.82939E-05	2.24365E-05	3.44521E-05
URBI.MX	2.0784E-05	6.92222E-06	0.000284019	4.11779E-05	4.47315E-05	-2.59785E-05
WALMEXV.MX	1.2821E-05	-3.99888E-05	3.1691E-05	3.62782E-05	-6.95965E-07	1.64126E-05

Matriz	CEMEXCPO.MX	ELEKTRA.MX	FEMSAUBD.MX	GAPB.MX	GEOB.MX
AC.MX	5.59368E-05	3.09565E-05	3.41942E-05	7.97707E-06	4.52325E-05
ALFAA.MX	0.00010914	2.63701E-05	5.83473E-05	-2.9436E-06	5.37515E-05
ALSEA.MX	2.96473E-05	4.31817E-05	5.60618E-05	2.65821E-05	8.43608E-05
AMXL.MX	1.54871E-05	1.20714E-05	1.12328E-05	1.89988E-05	2.36351E-05
ASURB.MX	8.17667E-06	3.11836E-05	3.11445E-05	3.93209E-05	4.59273E-06
BIMBOA.MX	6.0658E-05	8.18123E-06	3.6708E-05	1.18017E-05	7.39004E-05
CEMEXCPO.MX	0.001372109	-2.7543E-07	5.52693E-05	-1.3169E-05	0.000164572
ELEKTRA.MX	-2.7543E-07	0.000799582	1.45805E-05	1.84739E-06	5.02688E-05
FEMSAUBD.MX	5.52693E-05	1.45805E-05	0.000404343	0.000130876	5.81611E-05
GAPB.MX	-1.31693E-05	1.84739E-06	0.000130876	0.000395485	1.48289E-05
GEOB.MX	0.000164572	5.02688E-05	5.81611E-05	1.48289E-05	0.000905752
GFINBURO.MX	9.00027E-05	2.23461E-05	2.17886E-05	-5.9112E-06	7.24357E-05
GFNORTEO.MX	0.000126434	5.23147E-06	2.98651E-05	1.04591E-05	8.3737E-05
GMEXICOB.MX	8.7334E-05	9.24217E-05	4.19531E-05	1.71966E-05	4.86512E-05
GRUMAB.MX	0.000174924	0.000116679	0.000155397	0.000103839	7.88887E-05
HOMEX.MX	9.18469E-05	5.20593E-05	3.54501E-06	-6.9753E-06	0.000116482
ICA.MX	0.00014293	0.000214741	5.67889E-05	-4.5472E-06	8.69853E-05
ICHB.MX	0.000117004	4.79685E-06	8.80442E-06	1.5385E-05	3.75785E-05
KIMBERA.MX	7.47383E-05	3.24771E-05	3.85067E-06	-1.212E-05	2.72424E-05
KOFL.MX	5.57036E-05	2.20663E-05	6.1438E-05	2.79036E-05	-4.1216E-05
LIVEPOLC-1.MX	3.58494E-05	2.89545E-05	5.6254E-05	1.3223E-05	-5.9514E-05
MEXCHEM.MX	5.90099E-05	8.04845E-05	3.50074E-05	4.84035E-06	6.01088E-06
SANMEXB.MX	7.35014E-06	-1.98446E-05	-4.09729E-05	-4.1807E-06	-1.7428E-05
TLEVISACPO.MX	0.000105731	4.56321E-06	-2.50979E-06	1.05049E-05	4.95977E-05
URBI.MX	5.25101E-05	0.000124644	3.64786E-05	-2.2332E-06	0.000151671
WALMEXV.MX	8.71464E-06	2.59584E-05	1.91923E-05	1.09734E-05	0.000181985

Matriz	GFINBURO.MX	GFNORTEO.MX	GMEXICOB.MX	GRUMAB.MX	HOMEX.MX
AC.MX	2.13189E-05	1.6279E-05	1.24835E-05	4.09474E-05	2.21532E-05
ALFAA.MX	7.01975E-05	0.000113276	6.58279E-05	0.000202078	6.99812E-05
ALSEA.MX	2.60417E-05	3.86626E-05	7.42212E-05	-3.64571E-06	4.23941E-05
AMXL.MX	-1.16523E-05	3.18173E-05	3.34234E-06	0.000134108	8.02603E-05
ASURB.MX	-5.93977E-07	1.1495E-06	0.000159669	4.51631E-05	0.000120552
BIMBOA.MX	0.000155732	0.000213622	4.03475E-05	1.48208E-06	1.36941E-05
CEMEXCPO.MX	9.00027E-05	0.000126434	8.7334E-05	0.000174924	9.18469E-05
ELEKTRA.MX	2.23461E-05	5.23147E-06	9.24217E-05	0.000116679	5.20593E-05
FEMSAUBD.MX	2.17886E-05	2.98651E-05	4.19531E-05	0.000155397	3.54501E-06
GAPB.MX	-5.91124E-06	1.04591E-05	1.71966E-05	0.000103839	-6.9753E-06
GEOB.MX	7.24357E-05	8.3737E-05	4.86512E-05	7.88887E-05	0.000116482
GFINBURO.MX	0.000498888	0.000199833	4.32032E-05	3.00165E-05	4.22553E-05
GFNORTEO.MX	0.000199833	0.000906464	5.47794E-05	-4.41662E-05	7.84958E-05
GMEXICOB.MX	4.32032E-05	5.47794E-05	0.000850625	7.75426E-06	0.00016148
GRUMAB.MX	3.00165E-05	-4.41662E-05	7.75426E-06	0.00248571	-3.28568E-05
HOMEX.MX	4.22553E-05	7.84958E-05	0.00016148	-3.28568E-05	0.001047962
ICA.MX	2.51283E-05	6.35475E-05	0.000125745	0.000142899	0.000126447
ICHB.MX	2.40106E-05	1.60745E-05	1.94512E-05	2.26942E-05	3.08683E-05
KIMBERA.MX	2.34827E-05	5.25204E-05	4.06477E-05	-4.28709E-05	5.03287E-05
KOFL.MX	2.80657E-05	3.91118E-05	0.000135756	5.0414E-05	5.23614E-05
LIVEPOLC-1.MX	3.21503E-05	9.44466E-05	6.47761E-05	2.539E-05	9.10614E-05
MEXCHEM.MX	8.8678E-07	6.22414E-05	2.96276E-05	7.47339E-05	7.93985E-05
SANMEXB.MX	7.3632E-05	5.64564E-05	0.000111924	-1.86175E-05	-1.92981E-05
TLEVISACPO.MX	2.62113E-05	5.37377E-05	2.45108E-05	-2.20994E-05	4.44873E-05
URBI.MX	-1.67876E-05	-1.76307E-05	5.33782E-05	7.88666E-06	0.000109443
WALMEXV.MX	9.80396E-06	-4.57511E-07	1.03581E-05	4.61152E-05	3.16759E-05

Matriz	ICA.MX	ICHB.MX	KIMBERA.MX	KOFL.MX	LIVEPOLC-1.MX
AC.MX	5.5514E-05	-1.5258E-06	1.02154E-05	1.5227E-05	7.60143E-06
ALFAA.MX	2.7626E-05	-2.0817E-05	0.000156345	4.2719E-05	2.97469E-05
ALSEA.MX	0.00010229	3.462E-06	2.56421E-05	4.2327E-05	4.79207E-05
AMXL.MX	6.366E-05	5.8065E-07	-1.40132E-05	6.1929E-08	1.28183E-05
ASURB.MX	2.586E-05	2.4069E-05	2.63575E-05	7.1439E-05	4.28123E-05
BIMBOA.MX	1.6068E-05	7.356E-06	1.58179E-05	8.5062E-07	6.57132E-06
CEMEXCPO.MX	0.00014293	0.000117	7.47383E-05	5.5704E-05	3.58494E-05
ELEKTRA.MX	0.00021474	4.7969E-06	3.24771E-05	2.2066E-05	2.89545E-05
FEMSAUBD.MX	5.6789E-05	8.8044E-06	3.85067E-06	6.1438E-05	5.6254E-05
GAPB.MX	-4.5472E-06	1.5385E-05	-1.21197E-05	2.7904E-05	1.3223E-05
GEOB.MX	8.6985E-05	3.7579E-05	2.72424E-05	-4.1216E-05	-5.95145E-05
GFINBURO.MX	2.5128E-05	2.4011E-05	2.34827E-05	2.8066E-05	3.21503E-05
GFNORTEO.MX	6.3548E-05	1.6074E-05	5.25204E-05	3.9112E-05	9.44466E-05
GMEXICOB.MX	0.00012575	1.9451E-05	4.06477E-05	0.00013576	6.47761E-05
GRUMAB.MX	0.0001429	2.2694E-05	-4.28709E-05	5.0414E-05	2.539E-05
HOMEX.MX	0.00012645	3.0868E-05	5.03287E-05	5.2361E-05	9.10614E-05
ICA.MX	0.00081476	2.7064E-05	-9.77502E-06	4.5435E-05	6.48827E-05
ICHB.MX	2.7064E-05	0.00046726	-9.82444E-06	-1.499E-05	1.01749E-05
KIMBERA.MX	-9.775E-06	-9.8244E-06	0.00033601	3.9078E-05	1.35985E-05
KOFL.MX	4.5435E-05	-1.499E-05	3.90778E-05	0.00047844	1.54457E-05
LIVEPOLC-1.MX	6.4883E-05	1.0175E-05	1.35985E-05	1.5446E-05	0.000882316
MEXCHEM.MX	0.00011938	4.8086E-05	7.76671E-06	3.6153E-06	3.59234E-05
SANMEXB.MX	3.0447E-05	-2.0765E-05	-3.63752E-05	7.8369E-05	6.84974E-05
TLEVISACPO.MX	3.4098E-06	2.061E-05	3.32607E-05	3.4264E-05	-2.98736E-06
URBI.MX	0.00017754	1.8329E-05	1.69899E-05	3.8547E-05	6.98037E-05
WALMEXV.MX	9.879E-05	3.7899E-05	-8.83742E-06	-5.6308E-05	2.32202E-05

Matriz	MEXCHEM.MX	SANMEXB.MX	TLEVISACPO.MX	URBI.MX	WALMEXV.MX
AC.MX	3.30367E-05	-1.79844E-05	1.29567E-05	2.0784E-05	1.2821E-05
ALFAA.MX	4.77515E-05	-5.5281E-05	1.65342E-05	6.9222E-06	-3.99888E-05
ALSEA.MX	4.87426E-05	-5.5281E-05	2.9526E-05	0.00028402	3.1691E-05
AMXL.MX	4.53048E-05	-1.36307E-05	1.82939E-05	4.1178E-05	3.62782E-05
ASURB.MX	-5.50694E-06	7.41813E-05	2.24365E-05	4.4732E-05	-6.95965E-07
BIMBOA.MX	3.1754E-05	7.71742E-05	3.44521E-05	-2.5979E-05	1.64126E-05
CEMEXCPO.MX	5.90099E-05	7.35014E-06	0.000105731	5.251E-05	8.71464E-06
ELEKTRA.MX	8.04845E-05	-1.98446E-05	4.56321E-06	0.00012464	2.59584E-05
FEMSAUBD.MX	3.50074E-05	-4.09729E-05	-2.50979E-06	3.6479E-05	1.91923E-05
GAPB.MX	4.84035E-06	-4.18073E-06	1.05049E-05	-2.2332E-06	1.09734E-05
GEOB.MX	6.01088E-06	-1.74277E-05	4.95977E-05	0.00015167	0.000181985
GFINBURO.MX	8.8678E-07	7.3632E-05	2.62113E-05	-1.6788E-05	9.80396E-06
GFNORTEO.MX	6.22414E-05	5.64564E-05	5.37377E-05	-1.7631E-05	-4.57511E-07
GMEXICOB.MX	2.96276E-05	0.000111924	2.45108E-05	5.3378E-05	1.03581E-05
GRUMAB.MX	7.47339E-05	-1.86175E-05	-2.20994E-05	7.8867E-06	4.61152E-05
HOMEX.MX	7.93985E-05	-1.92981E-05	4.44873E-05	0.00010944	3.16759E-05
ICA.MX	0.000119383	3.04469E-05	3.40977E-06	0.00017754	9.87898E-05
ICHB.MX	4.80861E-05	-2.07655E-05	2.06096E-05	1.8329E-05	3.78994E-05
KIMBERA.MX	7.76671E-06	-3.63752E-05	3.32607E-05	1.699E-05	-8.83742E-06
KOFL.MX	3.61527E-06	7.83685E-05	3.42638E-05	3.8547E-05	-5.63075E-05
LIVEPOLC-1.MX	3.59234E-05	6.84974E-05	-2.98736E-06	6.9804E-05	2.32202E-05
MEXCHEM.MX	0.000619127	4.10924E-05	3.99785E-05	0.00011735	5.2287E-05
SANMEXB.MX	4.10924E-05	0.005125043	3.79932E-05	2.2544E-05	-5.64517E-05
TLEVISACPO.MX	3.99785E-05	3.79932E-05	0.000367801	3.0112E-05	1.98669E-05
URBI.MX	0.000117353	2.25438E-05	3.01118E-05	0.001061	7.68832E-05
WALMEXV.MX	5.2287E-05	-5.64517E-05	1.98669E-05	7.6883E-05	0.00039218

Anexo A4.

Gradiente Generalizado

Si cada optimización se realiza en dirección contraria al gradiente, los siguientes pasos del método son ortogonales uno con respecto al anterior. Lo anterior se cumple para una f(**x**) tal que su derivada a lo largo de la línea s(**λ**), es decir:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_i \frac{d}{d\lambda} x_i(\lambda) \frac{df}{dx_i} = \sum_i s_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = s^T \nabla f$$

Para el último paso buscaremos que $\frac{df}{dx_i} = 0$ y por consecuencia $s^T \nabla f(x^{k+1}) = 0$. Este proceso suele incrementar el número de iteraciones si se pretende ser muy específico.

El algoritmo sigue los siguientes pasos:

1. Seleccionar un valor inicial x^0.
2. Calcular

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \;\; j = 1,2, \dots, n$$

3. Calcular el vector de búsqueda

$$s = -\nabla f(x^k)$$

4. Utilizar $x^{k+1} = x^k + \lambda^k s^k$ para calcular el siguiente punto. λ^k puede ser un valor fijo o generado.
5. Establecer una tolerancia entre $f(x^k)$ y $f(x^{k+1})$. Si este criterio no se satisface regresar al paso 2.

Esta metodología brinda un máximo o mínimo local debido a que parte de un punto fijo.

Otro punto importante a considerar es que se deben probar las condiciones necesarias y suficientes. Es decir, que para asegurar que tipo de resultado se obtuvo, la matriz Hessiana debe ser positiva.

Como se mencionó anteriormente, esta metodología es muy sensible al escalado de f(**x**) lo que deriva en una convergencia lenta, lo que hace que la metodología sea poco efectiva.

Anexo A5

Resultados de las 35 corridas con Algoritmos Genéticos.

n	w	AC.MX	ALFAA.MX	ALSEA.MX	AMXL.MX	ASURB.MX	BIMBOA.MX	CEMEXCPO.MX
1	w	3.35817E-06	6.2379E-06	4.5984E-07	0.000353962	5.7898E-05	5.224E-05	8.1254E-06
2	w	1.8809E-05	3.6019E-06	6.3497E-06	2.76951E-05	1.6978E-05	5.7057E-05	0.002489396
3	w	4.70072E-08	7.174E-09	7.2213E-08	1.19158E-08	7.6931E-08	1.5491E-08	1.26647E-06
4	w	8.75733E-06	1.045E-05	4.3799E-07	1.04987E-05	1.2099E-05	2.8015E-07	3.58909E-05
5	w	1.69196E-05	2.4066E-07	3.4003E-06	3.67928E-06	1.0049E-05	1.4869E-05	0.000590888
6	w	6.6505E-05	5.6401E-05	0.00169165	0.001699917	7.4687E-05	0.00012665	0.003504612
7	w	1.28024E-08	3.6683E-05	1.7359E-06	5.72743E-05	4.2705E-06	3.9367E-05	5.96752E-07
8	w	1.05284E-06	4.7821E-05	4.1776E-08	0.000579184	1.6333E-05	1.2547E-06	0.000109524
9	w	0.000263854	0.00027225	0.00089078	1.59895E-05	2.535E-05	0.00056542	0.001254516
10	w	1.33305E-05	2.2991E-05	2.241E-05	4.07548E-05	9.0887E-06	1.4357E-05	0.000415011
11	w	1.74469E-08	3.3599E-07	4.2207E-07	7.5554E-09	5.7068E-08	5.3011E-07	3.05199E-06
12	w	0.000136048	0.00068977	8.5978E-05	0.000594104	5.7586E-05	5.2132E-05	0.00043265
13	w	6.12524E-05	2.2557E-05	9.8131E-09	1.02335E-07	1.9051E-07	3.1683E-06	7.92047E-06
14	w	5.07158E-06	0	0	0	0	0	0
15	w	2.03398E-06	8.3124E-07	1.5658E-09	6.13396E-07	6.5268E-07	7.3906E-12	3.3519E-06
16	w	0.000244057	3.6782E-05	2.0883E-06	0.000703432	0.00057072	1.2146E-08	0.015094364
17	w	0.002614037	0.00060331	0.00050778	9.63734E-05	3.7855E-05	0.00280206	0.013142489
18	w	6.42416E-07	7.3896E-06	1.6882E-05	4.66082E-05	1.0612E-05	6.0848E-09	1.1084E-08
19	w	0.00035853	3.0267E-07	1.6741E-05	0.000981035	4.661E-08	0.0047496	1.78847E-08
20	w	0.000216894	0	4.2002E-09	4.33606E-11	7.5646E-05	0.00119113	0.002301345
21	w	7.66316E-05	1.2767E-07	6.1856E-07	4.50881E-05	0	0	0.000109708
22	w	0.001319362	0.00092129	0.00044021	1.97666E-07	0.00417045	0.00069204	0.001254188
23	w	1.67575E-05	1.7091E-08	1.5295E-08	9.65388E-05	0	0	5.05842E-08
24	w	0.000480667	0	0	0.002362537	2.6433E-08	0.00017229	6.87979E-06
25	w	3.87005E-05	0.00011096	7.0955E-05	0.000744434	5.4568E-11	9.3622E-06	0.019556324
26	w	0.011757747	0.0004334	0.00092213	3.39357E-06	0.00387222	0.00363277	0.115471304
27	w	9.21256E-07	7.4802E-06	7.4813E-07	3.2643E-06	8.7004E-08	2.7273E-08	8.41215E-07
28	w	2.64389E-06	2.4251E-06	1.5577E-05	1.13191E-06	3.7086E-07	8.3598E-07	1.92079E-05
29	w	0.011241018	0.00625546	4.205E-07	0.003570078	0.00297958	6.8239E-06	0.210187741
30	w	0.003388755	0.0037365	0.00029699	4.15455E-05	0.00257144	2.8788E-05	5.71573E-07
31	w	0.000245023	0	0	0	0	6.1376E-08	0
32	w	0.003290875	2.7234E-06	1.817E-05	2.41031E-07	6.5361E-06	0.00129014	0.001233261
33	w	0.001312061	0	8.9026E-05	0	6.4615E-07	0	0
34	w	1.97456E-05	3.3058E-06	0.00354594	3.06008E-05	5.5911E-06	0.00245988	0.051829785
35	w	0.003201102	0.00059167	0.00091997	0	0.00061226	0.0019908	0.002051263

n	w	ELEKTRA.MX	FEMSAUBD.MX	GAPB.MX	GEOB.MX	GFINBURO.MX	GFNORTEO.MX	GMEXICOB.MX
1	w	2.5693E-05	1.2653E-07	0.00016655	8.4456E-07	1.2529E-05	1.8553E-06	1.0551E-05
2	w	0.00016862	1.3871E-06	1.9136E-05	8.1013E-05	4.4015E-05	0.00025582	4.0053E-05
3	w	1.0606E-08	1.1762E-07	6.687E-08	1.6048E-09	1.2988E-07	4.7796E-07	3.7553E-08
4	w	2.9376E-07	1.6904E-06	7.0955E-05	2.3722E-06	6.501E-06	7.1926E-06	2.3927E-06
5	w	2.8198E-06	4.6532E-05	7.5758E-05	1.0705E-05	8.7009E-05	8.5766E-05	9.6628E-05
6	w	0.00018329	4.6811E-05	0.00061943	0.00012198	0.00064295	0.00099076	0.00038252
7	w	9.6466E-10	8.2806E-12	2.3269E-07	1.4403E-05	5.344E-15	1.0163E-05	3.139E-07
8	w	8.9419E-06	3.7922E-05	3.7012E-05	0.00065545	9.6899E-07	0.0003269	2.046E-05
9	w	0.00028644	6.1761E-05	0.00011564	0.00066032	0.00019102	0.00012065	0.00019172
10	w	6.0467E-06	1.7071E-05	4.6971E-05	0.00078137	5.2282E-06	0.00018929	1.0873E-05
11	w	3.9485E-08	6.2608E-07	7.123E-07	1.0392E-06	1.3067E-06	3.9444E-06	3.2855E-08
12	w	0.00034034	1.592E-05	0.00043626	8.9626E-05	0.00014547	0.00046584	4.3754E-05
13	w	8.5291E-09	4.327E-05	7.9112E-06	8.5302E-05	9.6515E-05	4.9915E-05	8.1422E-05
14	w	0	0	8.9855E-17	0.00470424	0	0	0
15	w	5.7969E-15	1.066E-05	2.0028E-11	5.721E-06	8.038E-12	7.1084E-07	4.4729E-10
16	w	5.9644E-05	0.00043688	2.1946E-05	0.00015876	0.00030807	0.00076313	0.00013049
17	w	1.7292E-05	0.00083846	0.00165389	0.01036496	7.6733E-05	2.6972E-05	0.00014514
18	w	6.6568E-05	8.8764E-08	5.0631E-05	2.3042E-05	3.8219E-11	5.228E-09	6.3503E-05
19	w	7.4462E-08	6.4438E-05	1.3035E-07	0.00360064	0.00111537	4.8388E-10	8.9729E-09
20	w	1.6069E-11	0	0	4.4798E-06	0.00012262	4.2406E-07	5.2936E-07
21	w	2.9124E-08	8.3391E-06	1.8946E-07	0.00151126	0	0	0.0001335
22	w	0.00189374	8.0626E-06	0.00487554	0.00212088	0.00066535	0.00279209	1.9937E-05
23	w	2.7903E-09	1.5299E-05	8.7018E-08	0	8.5643E-11	4.5019E-13	0
24	w	0.00400128	7.0559E-09	0.00045661	3.5864E-09	9.5765E-08	0.00024479	0.00868444
25	w	9.7018E-09	0.00087542	1.5928E-06	0	0	0.00012719	3.2786E-06
26	w	2.6003E-05	0.00721528	1.1729E-05	0.02494142	1.4407E-05	0.00021915	3.0275E-09
27	w	2.4659E-06	5.5116E-06	4.5254E-07	1.3504E-06	3.5166E-06	3.8379E-07	6.6643E-07
28	w	2.5532E-06	1.706E-06	9.2607E-07	1.9565E-06	6.5926E-06	1.6494E-06	1.6045E-05
29	w	0.00157499	0.00051307	0.00013577	0.10222123	9.0983E-05	0.00399505	0.01324383
30	w	0.002861	1.4232E-07	8.6922E-05	0	0	1.063E-11	0.00057283
31	w	0.00044023	0.00010476	2.5683E-20	0	2.2702E-05	0	0
32	w	0.00136643	1.7428E-10	4.7001E-06	0.0066734	4.5786E-05	0.00113304	8.8869E-08
33	w	0	0.00202997	1.6524E-07	0.00603642	0	0	0
34	w	0.02991504	7.0547E-05	1.9512E-06	1.8373E-05	0.0013572	0.003756	0.00013753
35	w	0	0	0	0	0	0	0

n	w	GRUMAB.MX	HOMEX.MX	ICA.MX	ICHB.MX	KIMBERA.MX	KOFL.MX	LIVEPOLC-1.MX
1	w	0.00015489	0.00044803	1.0458E-05	6.6706E-06	4.2269E-06	6.3029E-07	4.8566E-06
2	w	0.00036884	0.02471548	3.3221E-05	1.9759E-05	3.2818E-05	0.00012495	9.2276E-06
3	w	1.1598E-07	8.2728E-07	1.6684E-08	2.0819E-08	5.5849E-08	9.9222E-09	1.7299E-08
4	w	6.0069E-05	0.00014123	3.2333E-08	9.1383E-06	4.4433E-07	1.4073E-06	5.3092E-07
5	w	6.6312E-05	2.1313E-05	9.8225E-06	3.6488E-06	2.8666E-06	9.5309E-06	3.2186E-05
6	w	0.00451108	0.15298023	0.0002847	0.00038962	0.00037588	5.9739E-06	6.7795E-05
7	w	2.564E-05	0.07151872	2.5484E-05	1.2953E-08	5.4068E-09	3.6745E-06	1.0329E-06
8	w	0.00029398	0.09453094	0.00084881	3.462E-05	4.6118E-06	1.9688E-05	9.2883E-05
9	w	0.00160775	0.0948915	4.2226E-05	0.00025321	0.00430129	1.4278E-05	0.00133529
10	w	1.0725E-06	0.00016399	2.7394E-06	2.2786E-05	1.4774E-05	1.5767E-06	4.7506E-05
11	w	1.0144E-07	3.1247E-06	6.3074E-07	4.1708E-10	6.6213E-07	2.1282E-08	5.3756E-08
12	w	0.00055697	0.00364832	1.6688E-06	0.00029165	0.00017027	3.7042E-05	4.8635E-05
13	w	3.9773E-05	0.08618543	4.5205E-06	5.1122E-05	1.9357E-06	0.00012098	2.2248E-06
14	w	0	0.0162246	0	0	0	0	0
15	w	0	0	6.1839E-09	9.8664E-07	7.8387E-06	9.1758E-13	3.3553E-11
16	w	0.00677676	3.8064E-05	1.9265E-06	3.3552E-05	0.00141382	7.1654E-05	2.3405E-05
17	w	0.00027793	0.00061589	0.00075436	6.6864E-05	0.00638863	0.00373796	0.00042199
18	w	0.00012239	0.00041139	0	3.4377E-05	2.2463E-05	3.8305E-05	7.5704E-05
19	w	1.1652E-07	0.00255961	0	0.00020656	0.00010337	0.00046177	2.0706E-05
20	w	5.0618E-13	0.05181873	0.00114268	9.6257E-09	2.2859E-06	0.00028335	8.2959E-07
21	w	0.00061924	0.96154353	0	0	0	0	0.00085211
22	w	3.1042E-05	0.67472984	0.00163923	4.6935E-05	0.00136195	1.3667E-05	0.00213651
23	w	4.8638E-05	0.63316615	0	3.1707E-08	7.2691E-07	2.5873E-07	0
24	w	6.4753E-05	0	0.00023872	0.00016756	4.2291E-08	7.737E-10	0
25	w	0.00056614	0.00061205	7.4708E-06	0.0022768	0.0008419	0	0
26	w	0.00177832	0.31802368	0.02749109	0.00071044	0.0002442	0.00058331	0.00041689
27	w	6.503E-05	1.3061E-07	8.8304E-07	1.153E-05	3.2429E-07	2.2316E-07	4.9513E-07
28	w	2.7216E-08	0.00016983	8.4499E-06	3.6053E-06	4.216E-06	8.8725E-08	3.4485E-06
29	w	0.01022948	0.5682066	0.00453236	0.00104232	0.00835469	0.00821142	0.00082356
30	w	0.01156569	0.00780852	0.00392223	1.731E-05	7.7277E-06	0.00127845	0.00995793
31	w	0	0.01273423	0	0	0	0.01603233	0
32	w	0.00974024	0.0015525	5.7444E-05	7.6518E-05	0	0.00013772	3.5935E-07
33	w	0.01441301	0.97611867	0	0	0	0	2.1157E-08
34	w	0.00053587	0.54326387	2.3353E-06	0.00069069	0.00028547	0.00550088	3.2996E-05
35	w	2.7705E-05	0.04032337	8.8959E-05	0	0	0	0

n	w	MEXCHEM.MX	SANMEXB.MX	TLEVISACPO.MX	URBI.MX	WALMEXV.MX
1	w	2.7774E-06	0.03721684	3.0076E-05	0.96141845	1.6656E-06
2	w	5.0264E-06	0.01610343	0.00020021	0.9551473	9.8033E-06
3	w	1.9785E-08	6.6101E-06	7.4282E-08	0.99998987	2.2639E-08
4	w	1.2888E-05	0.00128487	5.2536E-06	0.99829709	1.7234E-05
5	w	1.6462E-06	0.00091402	5.4214E-05	0.99782654	1.2633E-05
6	w	0.0007311	0.0235723	0.00079019	0.80287889	0.00320408
7	w	5.0947E-06	5.1803E-05	3.2887E-05	0.92816837	2.2229E-06
8	w	4.1875E-05	0.0014082	0.00041759	0.90045621	7.7157E-06
9	w	0.00020605	0.02280112	1.4132E-05	0.86911758	0.00049985
10	w	2.067E-06	0.00472932	0.00012246	0.99329458	2.3441E-06
11	w	8.8747E-08	4.8321E-06	5.84E-09	0.99997832	3.7192E-08
12	w	8.3347E-06	1.4557E-05	4.6473E-07	0.99163021	6.4095E-06
13	w	9.8193E-10	0.00125816	7.2699E-12	0.91182423	5.2083E-05
14	w	0	0	0	0.97906609	0
15	w	2.7364E-06	0.00338025	1.831E-07	0.99658343	6.5098E-18
16	w	1.6732E-05	0.00954871	0.00092838	0.96257768	3.8931E-05
17	w	0.00267858	0.00038545	0.00244067	0.94909025	0.00021405
18	w	3.934E-05	0.0011732	6.3649E-11	0.99778541	1.143E-05
19	w	1.1855E-08	0	3.1319E-08	0.98575667	4.2258E-06
20	w	2.8877E-06	0	1.4977E-10	0.94282613	1.002E-05
21	w	0	0.03509956	1.8986E-23	7.6249E-21	6.038E-08
22	w	0.00019627	0.00195374	0.0013973	0.29118663	0.00413354
23	w	1.1303E-07	7.6706E-07	3.3096E-07	0.36665421	9.3914E-09
24	w	0.00089522	0.0006454	0.00138534	0.97980022	0.0003931
25	w	0.00085672	0.00016017	1.8846E-06	0.97313862	0
26	w	0.00027667	0.00515468	0.00080038	0.47552682	0.00047257
27	w	3.0162E-06	3.1996E-05	8.9691E-07	0.99985776	2.9717E-09
28	w	6.148E-07	0	6.5146E-05	0.99967095	0
29	w	4.48E-06	0.00841279	0.01465198	0.00684191	0.01267237
30	w	5.5882E-05	0.00849337	0.00836623	0.93473006	0.00021114
31	w	1.1102E-16	0.91618237	0	0.05423829	0
32	w	0.00150662	0.95977966	0.00020581	0.01186254	1.5192E-05
33	w	0	0	0	0	0
34	w	0.00046833	0.34132985	0.00014068	0.01458891	8.632E-06
35	w	0	0	0	0.95019221	6.8949E-07