



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“CICLOS EN TORNEOS MULTIPARTITOS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMÁTICO

PRESENTA:

PEDRO ESSAÚ MUÑOZ NUÑEZ

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. BERTA ZAVALA SANTANA



TOLUCA, MÉXICO
MARZO 2017

Introducción

Una digráfica D consiste de un conjunto no vacío de objetos llamados vértices, denotado por $V(D)$, y un conjunto (posiblemente vacío) de pares ordenados de elementos de $V(D)$ al que llamaremos flechas, denotado por $F(D)$. Así una digráfica se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por flechas.

Un tema de estudio en las digráficas son los torneos, de las cuales muchas de sus propiedades fueron investigadas principalmente por Landau (1953) con el fin de modelar la relación de grupos de gallinas. El nombre de torneo se origina de la interpretación de un torneo (round robin) en donde cada jugador se enfrenta a cada uno de los otros jugadores una sola vez y sin que se de un empate. Un torneo T es una digráfica, donde entre cualesquiera dos vértices están unidos por una única flecha.

Los torneos y sus diferentes generalizaciones forman clases muy interesantes y útiles de digráficas y tienen una teoría rica que no tiene ninguna analogía con gráficas. En 1968, en la monografía de Moon "Topics in Tournament" [8], reunió prácticamente todos los resultados conocidos hasta ese momento y es una referencia muy importante cuando se estudian torneos. Este libro y los artículos de Beineke y Wilson [9] en 1975, Reid y Beineke [20] en 1978, Beineke [21] en 1981, y Bermond y Thomassen [22] en 1981 dieron la inspiración para muchos matemáticos en este campo.

Otro concepto importante que se ha estudiado es el de torneo n -partito o multipartito que es el resultado de orientar una gráfica n -partita completa. Algunas primeras observaciones de torneos n -partitos fueron encontradas en el libro de Moon [8], pág. 63. En 1976, Bondy [10] fue el primero en observar los ciclos en torneos multipartitos. En particular la Ph.D. tesis de Yeo [11] en 1998, Tewes [12] en 1999, y la tesis de Guo [13] en 1998 se dedicaron a este tema.

Un torneo n -partito puede ser usado para representar el resultado de com-

peticiones entre n equipos en el que cada jugador compite una vez con cada jugador de los restantes $n - 1$ equipos, eso da como resultado un torneo n -partito.

En mi trabajo de tesis presentaremos algunos resultados de torneos multipartitos, algunos son una generalización de los resultados que se tienen en torneos, mientras que otros son particularmente para torneos n -partitos. El trabajo está dividido en tres capítulos y gran parte de él se centrará en la búsqueda de ciclos en torneos n -partitos.

El primer capítulo aborda las definiciones básicas como son: camino dirigido, trayectoria dirigida, ciclo, digráfica, digráfica fuertemente conexa, entre otras. También se darán algunos resultados conocidos de digráficas.

En el segundo capítulo hablaremos de los torneos y algunas definiciones como: digráfica pancíclica, digráfica vértice-pancíclica y torneo bipartito. Se darán algunos resultados sobre torneos que nos serán de gran ayuda para el siguiente capítulo, pues en gran parte están relacionados y son casos particulares de torneos multipartitos.

En el último capítulo se centra el tema principal de la tesis que son los torneos n -partitos, digráficas cuyos vértices son divididos en n conjuntos ajenos, tales que entre cualesquiera dos vértices de distintos conjuntos exista una flecha y sólo una, además entre cualesquiera dos vértices en un mismo conjunto no existe flecha entre ellos. Se definirán algunos términos que nos facilitarán la comprensión de los resultados que se mostrarán como son: score, terna, terna transitiva, skipper, etc. La mayoría de los resultados que se darán abordan en gran parte la búsqueda de ciclos en torneos multipartitos, por ejemplo se demostrará que si v es un vértice que pertenece a un ciclo en un torneo multipartito, entonces v pertenece a un 3-ciclo o a un 4-ciclo, también se dará una fórmula para poder contar el número de 3-ciclos en un torneo multipartito. Se verán algunos resultados para torneos multipartitos fuertemente conexos, demostraremos que existe al menos un vértice en cada conjunto de la partición que pertenece a un 3-ciclo en un torneo multipartito fuertemente conexo, al igual que demostraremos que todo torneo n -partito fuertemente conexo, tiene al menos un vértice que pertenece a un ciclo de longitud $m \in \{3, 4, \dots, n\}$, entre otros resultados más para torneos multipartitos fuertemente conexos.

Índice general

1. Digráficas	1
2. Torneos	12
3. Torneos n -partitos	22

Capítulo 1

Digráficas

En este capítulo se darán conceptos básicos de la teoría de digráficas, como son: la definición de digráfica, exgrado, ingrado, subdigráfica inducida, exvecino, entre otras, así como teoremas o proposiciones muy conocidas en este tema que nos serán de ayuda para los siguientes capítulos. Empezaremos dando la definición de digráfica.

Definición 1.0.1. Una **digráfica** D consiste de un conjunto no vacío de objetos llamados *vértices*, denotado por $V(D)$, y un conjunto (posiblemente vacío) de pares ordenados de elementos de $V(D)$ al que llamaremos *flechas*, denotado por $F(D)$.

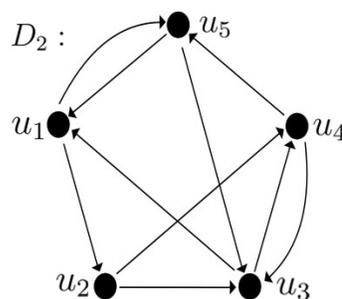
Ejemplo 1.0.1. Sean D_1 y D_2 digráficas, definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(D_1) &= \{v_1, v_2\} & V(D_2) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \\ F(D_1) &= \{(v_1, v_2)\} & F(D_2) &= \{(u_1, u_2), (u_1, u_5), (u_2, u_3), (u_2, u_4), \\ & & & (u_3, u_4), (u_3, u_1), (u_4, u_3), (u_4, u_5), (u_5, u_1), (u_5, u_3)\} \end{aligned}$$

$D_1 :$



$D_2 :$



El conjunto de vértices, $V(D)$, puede ser finito o infinito, así nuestras digráficas pueden ser finitas o infinitas, todo dependerá de la carnalidad de los conjuntos $V(D)$ y $F(D)$.

Nosotros sólo trabajaremos con digráficas finitas.

Definición 1.0.2. Si $(u, v) \in F(D)$ diremos que u es **adyacente hacia** v o v es **adyacente desde** u . Diremos que u y v son **adyacentes** si $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$.

Definición 1.0.3. Una flecha que une a un vértice consigo mismo es llamada un **lazo**. Si dos o más flechas unen a un mismo par de vértices en la misma dirección son llamadas **flechas múltiples**.

Ejemplo 1.0.2. En la digráfica D , (v_4, v_4) , (ver figura 1.1), es un lazo y (v_1, v_2) es una flecha múltiple pues se repite tres veces.

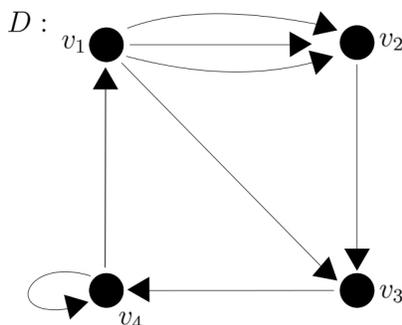


Figura 1.1.

Una digráfica que acepta lazos y flechas múltiples es llamada **multidigráfica**, las digráficas que no aceptan lazos ni flechas múltiples son llamadas digráficas **simples**.

Es importante aclarar que nosotros trabajaremos sólo con digráficas simples.

Definición 1.0.4. Sea D una digráfica, llamaremos **orden** a la cardinalidad del conjunto $V(D)$ y **tamaño** a la cardinalidad del conjunto $F(D)$, denotados por $p = |V(D)|$ y $q = |F(D)|$, respectivamente.

Definición 1.0.5. Sea D una digráfica. Para $u \in V(D)$, el **ingrado** o **grado interior** de u es el número de flechas adyacentes hacia u , denotado como $\delta_D^-(u)$.

Definición 1.0.6. Sea D una digráfica. Para $u \in V(D)$, el **exgrado** o **grado exterior** de u es el número de flechas adyacentes desde u , denotado como $\delta_D^+(u)$.

Definición 1.0.7. Sea D una digráfica, un **receptor** es un vértice de exgrado cero y un **transmisor** es un vértice de ingrado cero.

Definición 1.0.8. Definimos el **grado** de $u \in V(D)$, denotado por $\delta_D(u)$, como:

$$\delta_D(u) = \delta_D^+(u) + \delta_D^-(u).$$

Definición 1.0.9. Sea D una digráfica, denotamos por $\Delta^+(D)$ al exgrado máximo y $\Delta^-(D)$ al ingrado máximo de D , es decir,

$$\Delta^+(D) = \text{máx}\{\delta_D^+(u) \mid u \in V(D)\}$$

$$\Delta^-(D) = \text{máx}\{\delta_D^-(u) \mid u \in V(D)\}$$

Ejemplo 1.0.3. Para la digráfica D se tiene que su orden es $|V(D)| = 5$ y su tamaño es $|F(D)| = 8$.

El ingrado de cada vértice de la digráfica D es:

$$\delta_D^-(u_1) = 1, \quad \delta_D^-(u_2) = 1, \quad \delta_D^-(u_3) = 4, \quad \delta_D^-(u_4) = 1, \quad \delta_D^-(u_5) = 1.$$

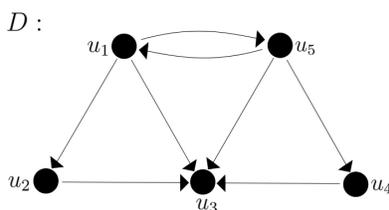
El exgrado de cada vértice de la digráfica D es:

$$\delta_D^+(u_1) = 3, \quad \delta_D^+(u_2) = 1, \quad \delta_D^+(u_3) = 0, \quad \delta_D^+(u_4) = 1, \quad \delta_D^+(u_5) = 3.$$

Así el grado de cada vértice de la digráfica D es:

$$\delta_D(u_1) = 4, \quad \delta_D(u_2) = 2, \quad \delta_D(u_3) = 4, \quad \delta_D(u_4) = 2, \quad \delta_D(u_5) = 4.$$

El exgrado máximo de D es $\Delta^+(D) = 3$ y el ingrado máximo de D es $\Delta^-(D) = 4$.



Definición 1.0.10. Sea D una digráfica. Para $U \subseteq V(D)$, definimos $\langle U \rangle$, la **subdigráfica inducida por U** , como $V(\langle U \rangle) = U$ y $F(\langle U \rangle) = \{(u, v) | (u, v) \in F(D) \text{ y } u, v \in U\}$

Ejemplo 1.0.4. Sea D la digráfica de la figura 1.2 y las digráficas $\langle W_0 \rangle$, (ver figura 1.3 (a)) y $\langle W_1 \rangle$, (ver figura 1.3 (b)) son digráficas inducidas por $W_0 = \{u, w, x\}$ y $W_1 = \{u, v, x, y\}$, subconjuntos de $V(D)$, respectivamente.

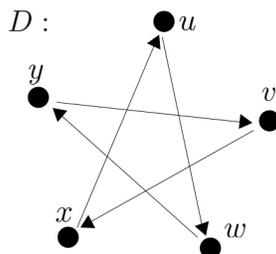


Figura 1.2.

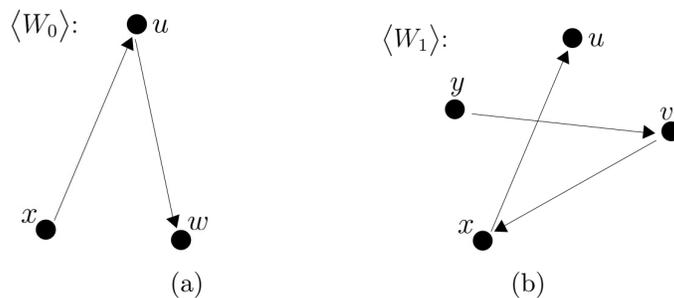


Figura 1.3.

Se pueden definir algunas operaciones en digráficas. Estas operaciones en ciertas ocasiones pueden servirnos de apoyo para realizar algunas demostraciones

Definición 1.0.11. Si D es una digráfica no trivial y $u \in V(D)$. $D - \{u\}$ es la digráfica cuyos vértices son $V(D - \{u\}) = V(D) - \{u\}$, y las flechas de $D - \{u\}$ son las flechas de D menos las flechas adyacentes desde u y hacia u .

Definición 1.0.12. Si $a = (u, v) \in F(D)$. $D - \{a\}$ es la digráfica con $V(D - \{a\}) = V(D)$ y $F(D - \{a\}) = F(D) - \{a\}$.

Definición 1.0.13. Sea D una digráfica. Decimos que D^{-1} es la **inversa** de D , si D^{-1} se obtuvo de invertir las flechas de D , es decir, $V(D^{-1}) = V(D)$ y $(v, u) \in F(D^{-1})$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$.

Ejemplo 1.0.5. Sea D la digráfica como en la figura 1.4,

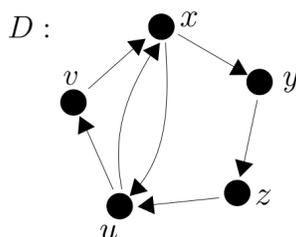
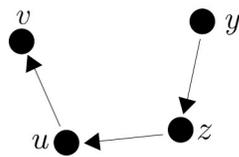


Figura 1.4.

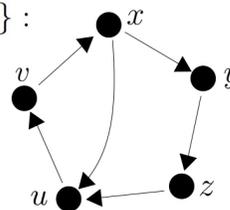
a la digráfica D le quitaremos el vértice x , (ver figura 1.5 (a)) y por otra parte a la digráfica D le quitaremos la flecha (u, x) , (ver figura 1.5 (b)).

$D - \{x\}$:



(a)

$D - \{(u, x)\}$:



(b)

Figura 1.5.

La digráfica D^{-1} es la inversa de la digráfica D , (ver figura 1.6).

Definición 1.0.14. Sea D una digráfica. Decimos que v es **exvecino** de u si $(u, v) \in F(D)$ y denotaremos por $N_D^+(u)$ al conjunto de exvecinos de u en D .

Definición 1.0.15. Sea D una digráfica. Decimos que v es **invecino** de u si $(v, u) \in F(D)$ y denotaremos por $N_D^-(u)$ al conjunto de invecinos de u en D .

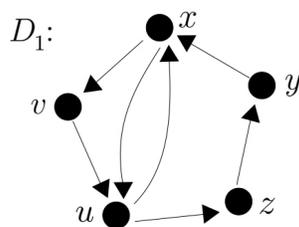


Figura 1.6.

Ejemplo 1.0.6. En la siguiente digráfica D (figura 1.7) tenemos los siguientes conjuntos de exvecinos:

$$N_D^+(u_1) = \emptyset, N_D^+(u_2) = \{u_1\}, N_D^+(u_3) = \{u_2, u_5\}, N_D^+(u_4) = \{u_3\}, N_D^+(u_5) = \{u_2\}.$$

y los siguientes conjuntos de invecinos:

$$N_D^-(u_1) = \{u_2\}, N_D^-(u_2) = \{u_3, u_5\}, N_D^-(u_3) = \{u_4\}, N_D^-(u_4) = \emptyset, N_D^-(u_5) = \{u_3\}.$$

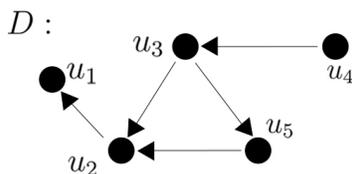


Figura 1.7.

Definición 1.0.16. Un **camino dirigido** W en una digráfica D es una sucesión de vértices (u_0, u_1, \dots, u_n) tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$, con $0 \leq i \leq n - 1$.

Definición 1.0.17. Sea D una digráfica. Llamaremos a W un **camino dirigido generador**, si W es un camino dirigido en D y $V(W) = V(D)$.

Definición 1.0.18. Un **paseo dirigido** P en una digráfica D es un camino dirigido en el que no se repiten flechas.

Definición 1.0.19. Una **trayectoria dirigida** T en una digráfica D es un camino dirigido en el cual no se repiten vértices.

Ejemplo 1.0.7. En la digráfica D (figura 1.8), $W = (u, v, x, u, v, w, z)$ es un uz -camino dirigido, $W' = (u, v, x, u, v, w, z, y, v)$ es un uv -camino dirigido generador, pues W' es un uv -camino dirigido en D y $V(W') = V(D)$. $P = (u, v, w, z, y, v, x)$ es un ux -paseo dirigido y $T = (v, w, z, y, x)$ es una vx -trayectoria dirigida.

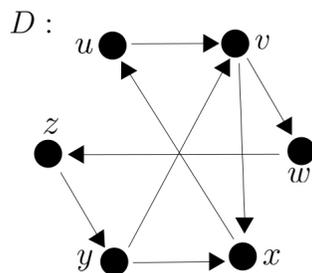


Figura 1.8.

Definición 1.0.20. Un **camino dirigido cerrado** en una digráfica D es un camino dirigido tal que el primer y último vértice son iguales.

Definición 1.0.21. Un **paseo dirigido cerrado** en una digráfica D es un paseo dirigido tal que el primer y último vértice son iguales. Un paseo dirigido cerrado también recibe el nombre de **circuito**.

Definición 1.0.22. Un **ciclo dirigido** en una digráfica D es un paseo dirigido en el cual sólo el primer y último vértice son iguales, si $V(C) = V(D)$, entonces C es un ciclo dirigido generador.

Ejemplo 1.0.8. Sea D la digráfica del ejemplo 1.0.7, (figura 1.8), entonces $W = (u, v, x, u, v, w, z, y, x, u)$ es un camino dirigido cerrado en D , $P = (v, x, u, v, w, z, y, v)$ es un paseo cerrado dirigido en D , $C = (u, v, x, u)$ es un ciclo dirigido y $C' = (u, v, w, z, y, x, u)$ es un ciclo dirigido generador.

En adelante siempre que se hable de un uv -camino, uv -paseo, uv -trayectoria o ciclo se entenderá que es un uv -camino dirigido, uv -paseo dirigido, uv -trayectoria dirigida o ciclo dirigido, respectivamente, a menos que se especifique lo contrario.

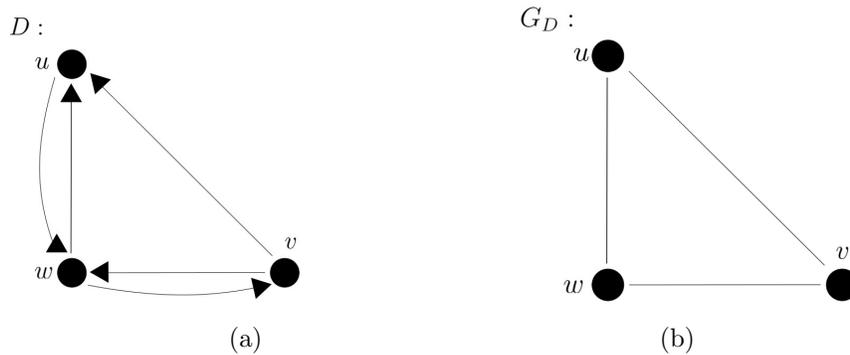
Teorema 1.0.23. Sea D una digráfica. Todo uv -camino contiene una uv -trayectoria.

Teorema 1.0.24. *Sea D una digráfica. Todo camino cerrado C en D contiene un ciclo.*

Definición 1.0.25. *Sea D una digráfica, la gráfica **subyacente** G_D es la gráfica definida de la siguiente manera:*

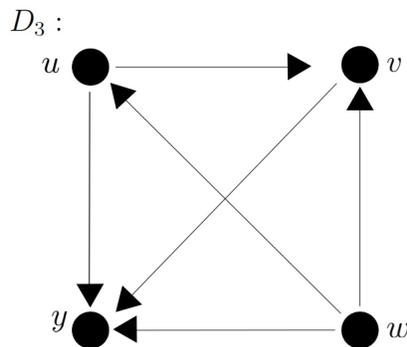
- $V(G_D) = V(D)$.
- u es adyacente a v en G_D si y sólo si $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$ o ambas.

Ejemplo 1.0.9. *La gráfica G_D , es la gráfica subyacente de la digráfica D .*



Definición 1.0.26. *Una digráfica D es **acíclica** si no contiene ciclos.*

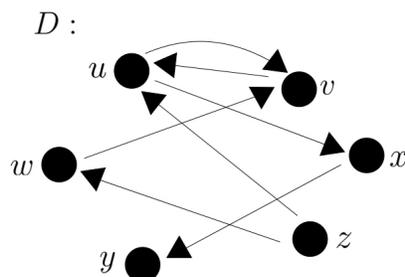
Ejemplo 1.0.10. *La digráfica D_3 , es acíclica pues no contiene ningún ciclo.*



Recordemos que si A es un conjunto, una **partición** de A es una familia de subconjuntos de A , $\{A_i\}_{i \in I}$, donde I es un conjunto de índices, que satisface que $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$ y $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Definición 1.0.27. Una digráfica D es una digráfica **bipartita** si existe una partición $\{U, W\}$ de los vértices de D , tal que cualquier flecha de D tiene un extremo en U y otro en W , en este caso diremos que $\{U, W\}$ es una bipartición.

Ejemplo 1.0.11. La digráfica D es bipartita ya que si $U = \{u, w, x\}$ y $W = \{v, y, z\}$, entonces tenemos que $\{U, W\}$ es una bipartición de los vértices de D y cada flecha de D tiene un extremo en U y otro en W .



Definición 1.0.28. Sea D una digráfica. Decimos que D es **fuertemente conexa (fuerte)** si para todo $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino y un vu -camino.

En la definición anterior podemos decir, por el teorema 1.0.23, que una digráfica D es fuerte, si para todo $u, v \in V(D)$ existe una uv -trayectoria y una vu -trayectoria.

Ejemplo 1.0.12. La digráfica D , (ver figura 1.9) es fuerte, pues para todo par de vértices $u, v \in V(D)$ existe una uv -trayectoria y existe una vu -trayectoria, para esto consideremos el ciclo $C = (u, v, x, y, x, u)$.

Teorema 1.0.29. Una digráfica D es fuertemente conexa si y sólo si existe un camino cerrado generador.

Corolario 1.0.30. Sea D una digráfica fuertemente conexa. Si $v \in V(D)$, entonces $\delta^+(v) > 0$ y $\delta^-(v) > 0$.

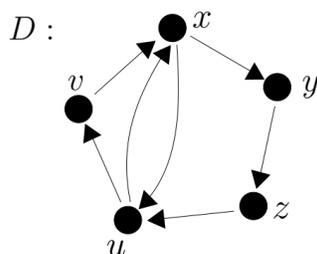
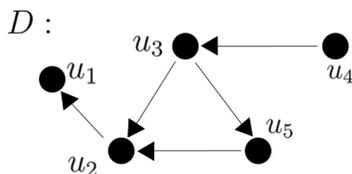


Figura 1.9.

Definición 1.0.31. Sea D una digráfica. Se dice que una trayectoria T es una trayectoria **hamiltoniana** si $V(T) = V(D)$.

Ejemplo 1.0.13. La siguiente digráfica D contiene la trayectoria hamiltoniana $T = (u_4, u_3, u_5, u_2, u_1)$.



Teorema 1.0.32. Sea D una digráfica. Si D es hamiltoniana, entonces D es fuertemente conexa.

Definición 1.0.33. Sea D una digráfica. Un ciclo C contenido en D es **hamiltoniano** si $V(C) = V(D)$.

Definición 1.0.34. Una digráfica D es **hamiltoniana** si contiene un ciclo hamiltoniano.

Ejemplo 1.0.14. La siguiente digráfica D , (ver figura 1.10) contiene el ciclo hamiltoniano $C = (u, v, w, y, u)$ y entonces D es hamiltoniana.

Definición 1.0.35. Sea D una digráfica y $u, v \in V(D)$. La **distancia** entre u y v , denotado por $d(u, v)$, está definida de la siguiente manera:

$$d(u, v) = \begin{cases} \text{mín}\{l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\} \\ \infty \text{ si no existe una } uv\text{-trayectoria} \end{cases}$$

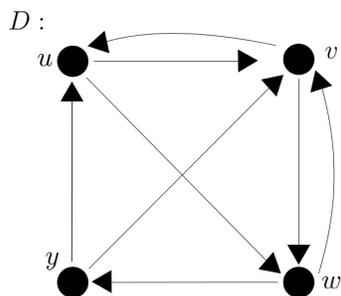
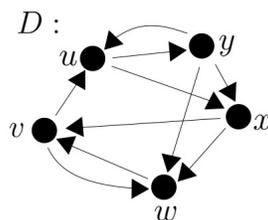


Figura 1.10.

Ejemplo 1.0.15. Calculemos $d(u, v)$. La digráfica D contiene las uv -trayectorias $T_1 = (u, y, x, v)$, $T_2 = (u, y, w, v)$, $T_3 = (u, y, x, w, v)$ y $T_4 = (u, x, v)$ y son todas. Ahora $l(T_1) = 3$, $l(T_2) = 3$, $l(T_3) = 4$ y $l(T_4) = 2$, entonces $d(u, v) = \min\{l(T_i)\} = 2$, con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.



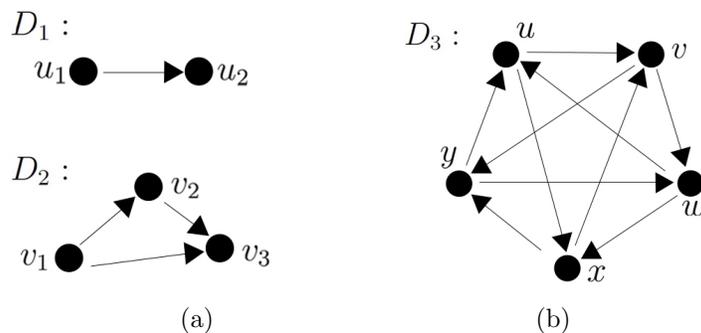
Capítulo 2

Torneos

En este capítulo hablaremos de un tipo particular de digráficas que pueden ser utilizadas para representar diversas situaciones, los torneos, llamados así por la relación que existe entre sus vértices, ya que para cualesquiera par de estos existe una y sólo una flecha entre ellos.

Definición 2.0.1. Un **torneo** T es una digráfica tal que para todo $u, v \in V(D)$ existe $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$, pero no ambas.

Ejemplo 2.0.1. Las siguientes digráficas D_1 , D_2 y D_3 son torneos pues son digráficas asimétricas completas.



Notemos que existe un único torneo de orden uno y consiste de un sólo vértice.

Definición 2.0.2. Sean T un torneo y $v \in V(T)$. Decimos que v es un vértice **transmisor** si $\delta_T^+(v) > 0$ y $\delta_T^-(v) = 0$.

Definición 2.0.3. Sean T un torneo y $v \in V(T)$. Decimos que v es un vértice **receptor** si $\delta_T^-(v) > 0$ y $\delta_T^+(v) = 0$.

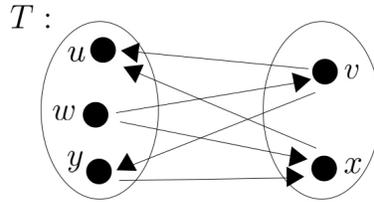
Ejemplo 2.0.2. En el ejemplo 2.0.1, $v_1 \in V(D_2)$ es un vértice transmisor, pues $\delta_{D_2}^+(v_1) = 2 > 0$ y $\delta_{D_2}^-(v_1) = 0$. Por otra parte, $v_3 \in V(D_2)$ es un vértice receptor, pues $\delta_{D_2}^-(v_3) = 2 > 0$ y $\delta_{D_2}^+(v_3) = 0$.

Definición 2.0.4. Una digráfica de orden $p \geq 3$ que contenga ciclos de longitud n , con $3 \leq n \leq p$, será llamada **pancíclica**.

Definición 2.0.5. Una digráfica es **vértice-pancíclica** si cada vértice está contenido en un ciclo de longitud n , con $3 \leq n \leq p$.

Definición 2.0.6. Un **torneo bipartito** es una digráfica D , donde existe $\{U, W\}$ una partición de $V(D)$ de tal manera que para todo $u_1, u_2 \in U$ y para todo $w_1, w_2 \in W$ no existe $(u_1, u_2) \in F(D)$ ni $(w_1, w_2) \in F(W)$, además para todo $u \in U$ y $w \in W$ se tiene que $(u, w) \in F(D)$ o $(w, u) \in F(D)$, pero no ambas.

Ejemplo 2.0.3. La digráfica T es un torneo bipartito ya que si $U = \{u, w, y\}$ y $W = \{v, x\}$, entonces tenemos que $\{U, W\}$ es una bipartición de los vértices de T y cada vértice de U es adyacente a cada vértice de W .



Como por definición un torneo es una digráfica, podemos pensar en las subdigráficas de un torneo. Es claro que cualquier subdigráfica de un torneo no es necesariamente un torneo ya que una subdigráfica podría ser un subconjunto de los vértices del torneo y no contener flechas. Sin embargo una subdigráfica inducida de un torneo será siempre un torneo.

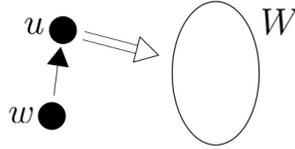
Proposición 2.0.7. Toda subdigráfica inducida de un torneo es un torneo.

En el capítulo anterior vimos la definición de distancia, observemos que en torneos para cualquier par de vértices u y v , se tiene que $d(u, v) = 1$ o bien $d(v, u) = 1$, pues siempre existe una flecha entre ellos. El siguiente teorema nos dice como es la distancia entre vértices de torneos con alguna condición.

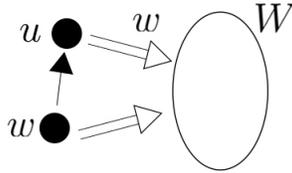
Teorema 2.0.8. *Sea T un torneo. Si u es un vértice de exgrado máximo en T , entonces $d(u, v) \leq 2$ para todo $v \in V(T)$.*

Demostración. Sean T un torneo y $u \in V(T)$ tal que u tiene exgrado máximo. Sean $V' = V(T) - \{u\}$ y $W = \{v \mid (u, v) \in F(T)\}$ los exvecinos de u .

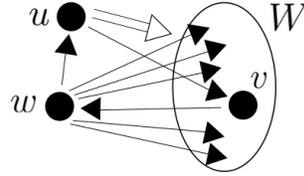
- Si $V' = W$, entonces tenemos que $d(u, v) = 1$ para todo $v \in W$, por definición de distancia, así $d(u, v) < 2$ para todo $v \in V' = V(T) - \{u\}$.
- Si $V' \neq W$, entonces existe $w \in V' - W$, como T es torneo $(u, w) \in F(T)$ o $(w, u) \in F(T)$, pero $w \notin W$ por lo que $(u, w) \notin F(T)$. Por lo tanto $(w, u) \in F(T)$.



Ahora, supongamos que $(w, v) \in F(T)$ para todo $v \in W$, entonces $\delta^+(w) \geq |W| + 1$ ya que $(w, u) \in F(T)$, pero $\delta^+(u) = |W|$ por lo que $\delta^+(w) > \delta^+(u)$ al menos en uno, lo que contradice que u es de exgrado máximo.



De lo anterior, $(v, w) \in F(T)$ para algún $v \in W$ por lo que tenemos una uw -trayectoria dirigida de la siguiente forma $T = (u, v, w)$ y $l(T) = 2$, además como $(u, w) \in F(T)$, podemos asegurar que $l(T)$ es mínima. Entonces, $d(u, w) = 2$ para todo $w \in V' - W$.



Por lo tanto, $d(u, v) \leq 2$ para todo $v \in V(T)$. □

Teorema 2.0.9. *Cada vértice de un torneo T fuertemente conexo con $p \geq 3$, pertenece a un ciclo de longitud 3.*

Demostración. Sea T un torneo fuertemente conexo y sea $v \in V(T)$, demostraremos que v pertenece a un ciclo de longitud 3.

Como T es fuertemente conexo tenemos que $\delta^+(u) > 0$ y $\delta^-(u) > 0$ para todo $u \in V(T)$, (Corolario 1.0.30), en particular para el vértice arbitrario v que se toma inicialmente. Para $v \in V(T)$ sean $N^+(v)$ y $N^-(v)$ los conjuntos de exvecinos e invecinos de v , respectivamente, (figura 2.1).

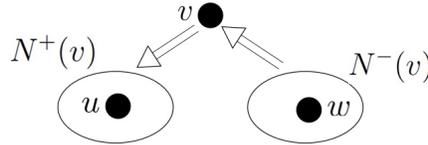


Figura 2.1.

Supongamos que $(w, u) \in F(T)$ para todo $u \in N^+(v)$ y $w \in N^-(v)$, (figura 2.2).

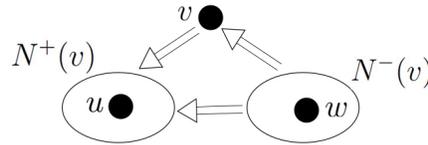


Figura 2.2.

Entonces existe un wu -camino, y no existe un uw -camino, lo que contradice que T es fuertemente conexo.

Por lo tanto, existe $u \in N^+(v)$ y $w \in N^-(v)$ tal que $(u, w) \in F(T)$.

Así, $C = (v, u, w, v)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 que contiene a v , (ver

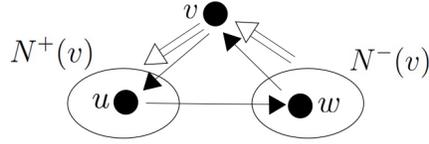


Figura 2.3.

figura 2.3).

Por lo tanto, cada vértice de un torneo T fuertemente conexo con $p \geq 3$ pertenece a un ciclo de longitud 3. \square

Teorema 2.0.10. *Si T es fuertemente conexo de orden $p \geq 3$, entonces cada vértice $v \in V(T)$ está contenido en un ciclo de longitud n , para cada $3 \leq n \leq p$.*

Demostración. Inducción sobre n .

Sea T un torneo fuertemente conexo de orden p y $v \in V(T)$.

Base de inducción.

Para $n = 3$ por el teorema 2.0.9 existe un ciclo de longitud 3 que contiene a v .

Hipótesis de inducción.

Sea T un torneo fuertemente conexo de orden $p \geq 3$, supongamos que todo $v \in V(T)$ pertenece a un ciclo de longitud k con $3 \leq k \leq n < p$.

Paso inductivo.

Por demostrar que v pertenece a un ciclo de longitud $n + 1$.

Por hipótesis de inducción existe $C = (v = v_1, v_2, \dots, v_n, v)$ un ciclo de longitud n que contiene a v . Para demostrar que existe un ciclo de longitud $n + 1$ que contiene a v consideremos dos casos.

- Supongamos que existe $u \in V(T) - V(C)$ tal que $(u, v_i), (v_j, u) \in F(T)$ para algunos $v_i, v_j \in V(C)$ con $i \neq j$. Ahora bien, sin pérdida de generalidad supongamos que $(v_1, u) \in F(T)$ y sea v_i el primer vértice de C tal que $(u, v_i) \in F(T)$ para algún $i \in \{2, \dots, n\}$, entonces $(v_{i-1}, u) \in F(T)$. Así $C' = (v = v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_i, \dots, v_n, v)$ es un ciclo de longitud $n + 1$ que contiene a v , (ver figura 2.4).
- Supongamos ahora que no existe $u \in V(T) - V(C)$ tal que $(u, v_i), (v_j, u) \in F(T)$ para algunos $v_i, v_j \in V(C)$ con $i \neq j$, entonces para todo $w \in V(T) - V(C)$ o bien $(w, v_i) \in F(T)$ o $(v_j, w) \in F(T)$ para toda

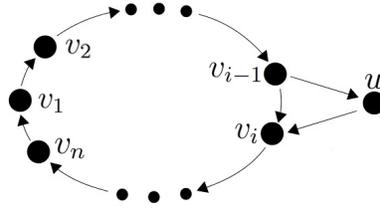


Figura 2.4.

$i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$, por lo que podemos hacer una partición en dos subconjuntos $U = \{u \in V(T) \mid (u, v_i) \in F(T) \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$ y $W = \{w \in V(T) \mid (v_i, w) \in F(T) \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Notemos que $U \neq \emptyset$ y $W \neq \emptyset$, pues de lo contrario supongamos sin perder generalidad que $U = \emptyset$ (en el otro caso consideremos la digráfica inversa), entonces para todo $w \in V(T) - V(C) \subseteq W$ tenemos que $(v_i, w) \in F(T)$ y $(w, v_i) \notin F(T)$, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, por lo que no existe una wv -trayectoria contenida en T , lo que contradice que T es fuertemente conexo.

Así, $U \neq \emptyset$ y $W \neq \emptyset$. Por otro lado notemos que existen $u \in U$ y $w \in W$ tales que $(w, u) \in F(T)$, pues de lo contrario si suponemos que no existe $u \in U$ y $w \in W$ tales que $(w, u) \in F(T)$, entonces $(u, w) \in F(T)$, para todo $u \in U$ y $w \in W$, es decir no existe wu -trayectoria contenida en T , (ver figura 2.5), lo cual es una contradicción, pues contradice el hecho de que T es fuertemente conexo.

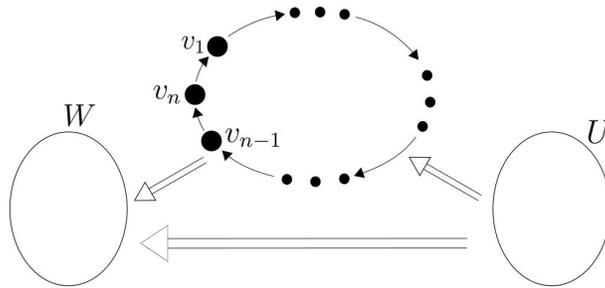


Figura 2.5.

Así existen $u \in U$ y $w \in W$ tales que $(w, u) \in F(T)$. Entonces $C' = (u, v = v_1, \dots, v_{n-1}, w, u)$ es un ciclo de longitud $n + 1$ que contiene a v , (ver figura 2.6).

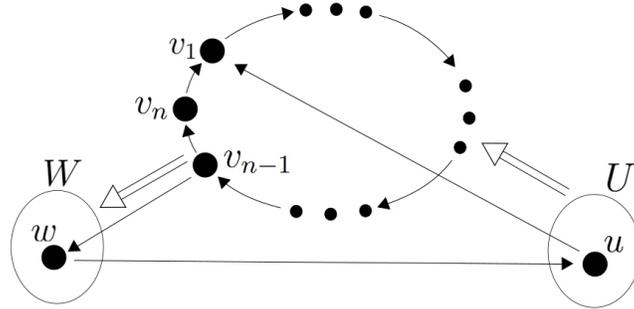


Figura 2.6.

Por lo tanto cada vértice de un torneo fuertemente conexo de orden $p \geq 3$ está contenido en un ciclo de longitud n . \square

Corolario 2.0.11. *Todo torneo T fuertemente conexo de orden $p \geq 3$, contiene un k -ciclo para todo k , con $3 \leq k \leq p$.*

Teorema 2.0.12. *Sea T un torneo con $p \geq 3$. T es fuertemente conexo si y sólo si T es hamiltoniano.*

Demostración. Si T es un torneo hamiltoniano, entonces T es fuertemente conexo por el teorema 1.0.32.

Por otro lado sea T un torneo con $p \geq 3$ tal que T es fuertemente conexo. Por el teorema 2.0.10 sabemos que T contiene un ciclo C de longitud p por lo que $V(C) = V(T)$, así dicho ciclo es generador. Por lo tanto T es hamiltoniano. \square

Proposición 2.0.13. *Todo torneo T contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Por inducción sobre el orden del torneo.

Base de inducción.

Si $p = 2$, tenemos al torneo T definido como $V(T) = \{v_1, v_2\}$ y $F(T) = \{(v_1, v_2)\}$, entonces T contiene la trayectoria hamiltoniana (v_1, v_2) .

Si $p = 3$, los únicos torneos de orden 3 son C_3 y T_3 , (ver figura 2.7).

Así, C_3 contiene la trayectoria hamiltoniana (u_1, u_2, u_3) y T_3 contiene a la trayectoria hamiltoniana (v_2, v_3, v_1) .

Hipótesis de inducción. Supongamos que todo torneo T de orden p , contiene una trayectoria hamiltoniana.

Paso inductivo.

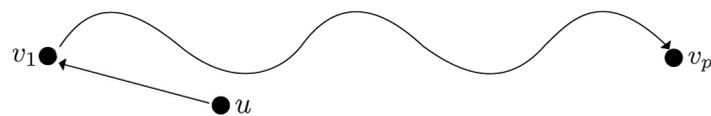


Figura 2.7.

Sea T un torneo de orden $p + 1$ y sea $u \in V(T)$, ahora bien $T - \{u\}$ es un torneo de orden p y por hipótesis de inducción contiene una trayectoria hamiltoniana. Sea $T_1 = (v_1, \dots, v_p)$ la trayectoria hamiltoniana contenida en $T - \{u\}$.



Como T es torneo entonces $(u, v_i) \in F(T)$ o $(v_i, u) \in F(T)$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. En particular para $v_1 \in V(T)$. Si $(u, v_1) \in F(T)$ entonces (u, v_1, \dots, v_p) es una trayectoria hamiltoniana contenida en T .



Ahora si $(v_1, u) \in F(T)$, fijémonos en el último vértice $v_i \in V(T - \{u\})$ tal que $(v_i, u) \in F(T)$, así tenemos los siguientes casos:

- Caso 1: Si $2 \leq i < p$, entonces $(u, v_{i+1}) \in F(T)$, por lo que $(v_1, \dots, v_i, u, v_{i+1}, \dots, v_p)$ es una trayectoria hamiltoniana contenida en T , (ver figura 2.8).
- Caso 2: Si $i = p$, entonces (v_1, \dots, v_p, u) es una trayectoria hamiltoniana contenida en T .

Por lo tanto todo torneo T contiene una trayectoria hamiltoniana. □

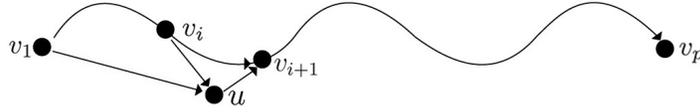


Figura 2.8.

Teorema 2.0.14. Si T es un torneo de orden p , entonces el número de 3-ciclos en T es

$$\frac{1}{6}p(p-1)(p-2) - \frac{1}{2} \sum_{v \in V(T)} \delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1).$$

Demostración. Primero calcularemos el número de conjuntos diferentes de tres vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ que se pueden formar con los vértices de T , este número es:

$$\binom{p}{3} = \frac{p!}{(p-3)!3!} = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)!}{6(p-3)!} = \frac{1}{6}p(p-1)(p-2).$$

Notemos que no todos los conjuntos de tres vértices de T forman un 3-ciclo, algunos pueden ser de la forma como la de la figura 2.9, entonces si $\{u, v, w\}$ es un conjunto de tres vértices de T que no forma un 3-ciclo, existe un vértice en ese conjunto que es adyacente hacia los otros dos vértices, en el caso del T_3 como el de la figura 2.9 dicho vértice es u .

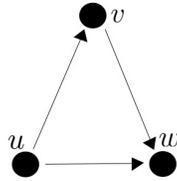


Figura 2.9.

Afirmamos que el número de conjuntos de tres vértices de T que no forman un 3-ciclo es:

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V(T)} \delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1).$$

Primero calcularemos el número de conjuntos diferentes de tres vértices de T en los cuales $v \in V(T)$ es adyacente hacia los otros dos vértices restantes,

empezando por considerar el número de exvecinos de v , es decir $|N_T^+(v)| = \delta_T^+(v)$, de los cuales escogeremos dos sin importarnos el orden y para esto tenemos que existen

$$\begin{aligned} \binom{\delta_T^+(v)}{2} &= \frac{\delta_T^+(v)!}{(\delta_T^+(v) - 2)!2!} = \frac{\delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1)(\delta_T^+(v) - 2)!}{(\delta_T^+(v) - 2)!2!} \\ &= \frac{1}{2}\delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1). \end{aligned}$$

formas de escogerlos, con esto se tiene que el número de conjuntos diferentes de tres vértices de T en los cuales $v \in V(T)$ es adyacente hacia los otros dos vértices restantes es $\frac{1}{2}\delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1)$.

Entonces para tener el número de conjuntos de tres vértices de T que no forman un 3-ciclo, tenemos que sumar todos los conjuntos diferentes de tres vértices de T en los cuales $v \in V(T)$ es adyacente hacia los otros dos vértices restantes, para todo $v \in V(T)$, es decir el número de conjuntos de tres vértices de T que no forman un 3-ciclo es:

$$\sum_{v \in V(T)} \frac{1}{2}\delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1).$$

Notemos que para $u, w \in V(T)$, si U contiene todos los conjuntos de tres vértices de T que no forman un 3-ciclo, en los cuales u es adyacente hacia los otros dos vértices restantes y si W contiene todos los conjuntos de tres vértices de T que no forman un 3-ciclo, en los cuales w es adyacente hacia los otros dos vértices restantes, entonces $U \cap W = \emptyset$, pues de lo contrario existiría un conjunto de tres vértices en U y W que contiene a u y a w , en el cual u es adyacente hacia u y w es adyacente hacia w , entonces (u, w) y $(w, u) \in F(T)$ lo cual es una contradicción pues T es un torneo. Con esto se garantiza que en la suma no se cuentan dos o más veces o más el mismo conjunto de tres vértices.

Entonces al restarle el número de conjuntos de tres vértices de T que no forman un 3-ciclo al número de conjuntos diferentes de tres vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ que se pueden formar con los vértices de T nos da como resultado el número de 3-ciclos que contiene T , así el número de 3-ciclos en T es:

$$\frac{1}{6}p(p-1)(p-2) - \frac{1}{2} \sum_{v \in V(T)} \delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1).$$

□

Capítulo 3

Torneos n -partitos

El presente capítulo es el tema principal de este trabajo y hablaremos de un tipo especial de digráficas, los torneos n -partitos. Gran parte de los resultados tratan de la existencia de ciclos con ciertas características, así, como de ciclos de una longitud determinada en los torneos n -partitos. Empezaremos con algunas definiciones.

Definición 3.0.1. *Un torneo 3-partito es una digráfica $T = (V(T), F(T))$, cuyos vértices se pueden partir en tres conjuntos V_0, V_1 y V_2 , tal que se cumple:*

$$(i) \quad V_0 \cup V_1 \cup V_2 = V(T).$$

$$(ii) \quad V_i \cap V_j = \emptyset ; \quad \text{para } 0 \leq i \neq j \leq 2.$$

de tal manera que para todo $u, v \in V_i$, con $0 \leq i \leq 2$, se tiene que $(u, v) \notin F(T)$ y $(v, u) \notin F(T)$, además para todo $u \in V_i$ y $v \in V_j$ con $0 \leq i \neq j \leq 2$, se tiene que $(u, v) \in F(T)$ o $(v, u) \in F(T)$, pero no ambas.

Definición 3.0.2. *Un torneo n -partito o torneo multipartito es una digráfica $T = (V(T), F(T))$, cuyos vértices se pueden partir en n conjuntos V_0, V_1, \dots, V_{n-1} , tal que se cumple :*

$$(i) \quad V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} = V(T).$$

$$(ii) \quad V_i \cap V_j = \emptyset ; \quad \text{para } 0 \leq i \neq j \leq n - 1.$$

de tal manera que para todo $u, v \in V_i$, con $0 \leq i \leq n - 1$, se tiene que $(u, v) \notin F(T)$ y $(v, u) \notin F(T)$, además para todo $u \in V_i$ y $v \in V_j$ con $0 \leq i \neq j \leq n - 1$, se tiene que $(u, v) \in F(T)$ o $(v, u) \in F(T)$, pero no ambas.

Ejemplo 3.0.1. Sea T_1 un torneo 3-partito definido como:

$V(T_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ con los conjuntos de la partición $V_0 = \{v_1\}$, $V_1 = \{v_2, v_3\}$ y $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$, $F(T_1) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_5, v_1), (v_5, v_3), (v_6, v_2), (v_6, v_3)\}$. (Figura 3.1)

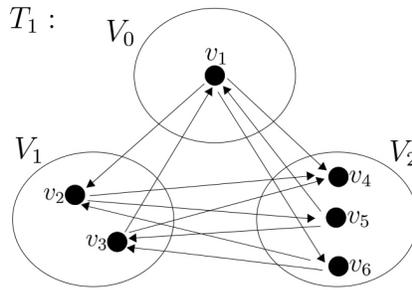


Figura 3.1.

Ejemplo 3.0.2. Sea T_2 un torneo 4-partito definido de la siguiente manera:

$V(T_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ con los conjuntos de la partición $V_0 = \{u_1\}$, $V_1 = \{u_2, u_3\}$, $V_2 = \{u_4, u_5\}$ y $V_3 = \{u_6\}$, $F(T_2) = \{(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_1, u_5), (u_2, u_5), (u_2, u_6), (u_3, u_4), (u_4, u_1), (u_4, u_2), (u_4, u_6), (u_5, u_3), (u_6, u_1), (u_6, u_3), (u_6, u_5)\}$. (Figura 3.2)

Definición 3.0.3. Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$. Se dice **score**, denotado por $\mathbf{s}(v)$, de un vértice v en T a su exgrado, es decir $s(v) = \delta_T^+(v)$.

En la siguiente definición $\langle V_k \cup V_j \rangle$ denota a la subdigráfica inducida por $V(V_k) \cup V(V_j)$.

Definición 3.0.4. Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$, con los conjuntos de la partición V_0, V_1, \dots, V_{n-1} y sea $v \in V_j$, con $0 \leq j \leq n - 1$, definimos $\mathbf{s}_k(v) = \delta_{T_{k,j}}^+(v)$ donde $T_{k,j} = \langle V_k \cup V_j \rangle$, con $0 \leq k \leq n - 1$.

Notemos que $s_j(v) = \delta_{T_{j,j}}^+(v) = 0$.

Definición 3.0.5. Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$, con los vértices $v_1, v_2, \dots, v_p \in V(T)$, llamamos **secuencia del score** a $s(v_1), s(v_2), \dots, s(v_p)$.

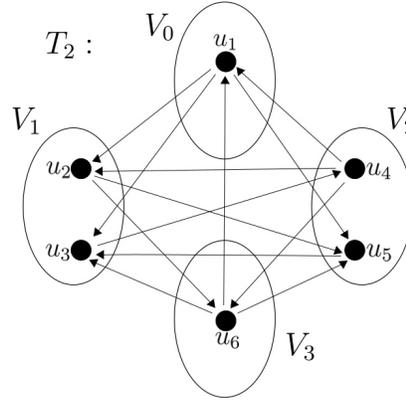


Figura 3.2.

Definición 3.0.6. Una **terna** en un torneo n -partito T , $n \geq 3$, es un conjunto de 3 vértices $\{u, v, w\}$ de T , tal que u, v y w pertenecen a distintos conjuntos de la partición.

Definición 3.0.7. Una **terna transitiva** en un torneo n -partito T , $n \geq 3$, es una terna de T que no induce un 3-ciclo, en cuyo caso induce un T_3 .

Ejemplo 3.0.3. En el torneo T_1 de la figura 3.3, tenemos lo siguiente:

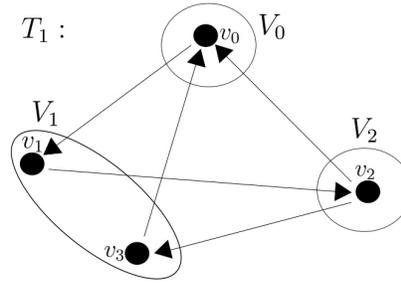


Figura 3.3.

- $v_1 \in V_1$ se tiene que $s_0(v_1) = \delta_{T_{0,1}}^+(v_1) = 0$ (ver figura 3.4 (a)), $s_1(v_1) = \delta_{T_{1,1}}^+(v_1) = 0$ (ver figura 3.4 (b)) y $s_2(v_1) = \delta_{T_{2,1}}^+(v_1) = 1$ (ver figura 3.4 (c)).
- Como $s(v_0) = 1, s(v_1) = 1, s(v_2) = 2$ y $s(v_3) = 1$, entonces la secuencia del score de T_1 es $1, 1, 2, 1$.

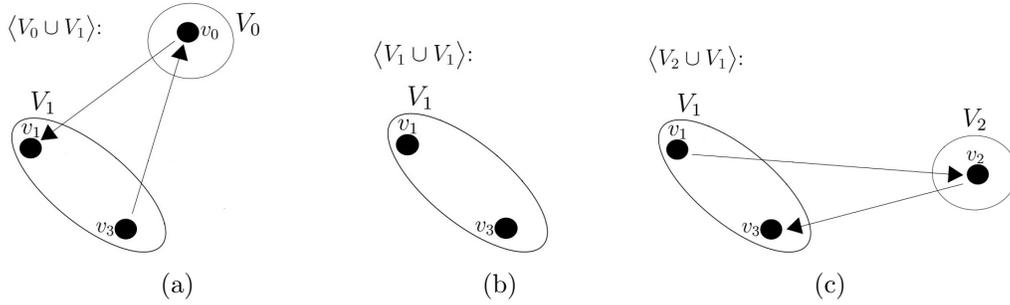


Figura 3.4.

- $\{v_0, v_1, v_3\}$ no es una terna, pero $\{v_0, v_2, v_3\}$ es una terna, además es una terna transitiva.

Definición 3.0.8. Si T es un torneo n -partito y $C = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1)$ es un n -ciclo en T , llamaremos **l -skipper** a la flecha $(v_i, v_{i+l+1}) \in F(T)$ para algún $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Ejemplo 3.0.4. Si C es un ciclo en un torneo n -partito T , como el de la figura 3.5, entonces C tiene un 1-skipper pues $(v_1, v_3) \in F(T)$, un 2-skipper pues $(v_1, v_4) \in F(T)$, un 3-skipper pues $(v_1, v_5) \in F(T)$ y un 4-skipper pues $(v_1, v_6) \in F(T)$.

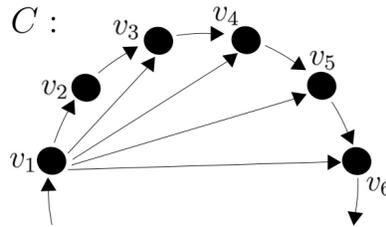


Figura 3.5.

Definición 3.0.9. Sean u y v vértices de un torneo n -partito T . Si en T existe una uv -trayectoria de longitud k , entonces decimos que u **derrota indirectamente** a v en a lo más k pasos. Si k es la longitud de una uv -trayectoria más corta, entonces decimos que u **derrota indirectamente** a v en k pasos y si $k = 1$, entonces decimos que u **derrota** a v .

Definición 3.0.10. La *excentricidad* de un vértice u es:

$$exc(u) = \text{máx}\{d(u, v) \mid v \in V(T)\}.$$

Ejemplo 3.0.5. Sea T el torneo 3-partito como en la figura 3.6, tenemos que T contiene cinco u_3u_1 -trayectorias, que son: (u_3, v_1, u_2, w, u_1) , $(u_3, v_1, u_2, v_2, u_1)$, $(u_3, v_1, u_2, v_2, w, u_1)$, (u_3, v_1, w, u_1) y (u_3, w, u_1) , pero la trayectoria de longitud más corta es (u_3, w, u_1) que es de longitud 2, entonces u_3 derrota indirectamente a u_1 en 2 pasos, por otro lado u_2, u_3, v_1 y v_2 derrotan a w . También tenemos que la excentricidad de w es 5, pues T contiene a $L = (w, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3)$ una wu_3 -trayectoria y es la más grande pues $V(L) = V(T)$.

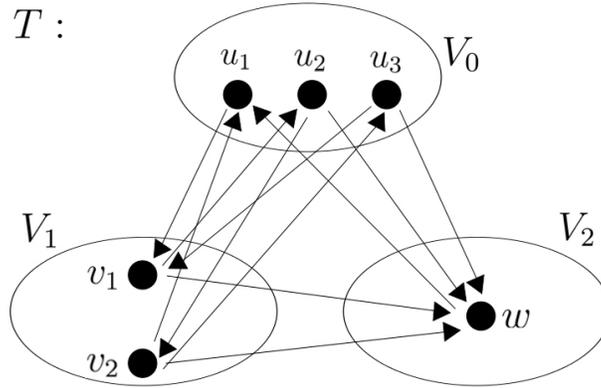


Figura 3.6.

Proposición 3.0.11. Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$ y C un ciclo en T que contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición, entonces existen tres vértices consecutivos en C que pertenecen a distintos conjuntos de la partición.

Demostración. Supongamos que no existen 3 vértices consecutivos en C que pertenezcan a distintos conjuntos de la partición. Sean $C = (x_1, x_2, \dots, x_l, x_1)$ un ciclo de longitud l , con $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 3$ y D_1, D_2 conjuntos de la partición, donde $x_1 \in D_1$ y $x_2 \in D_2$, como x_1, x_2 y x_3 son tres vértices consecutivos en C , entonces x_3 no puede pertenecer a otro conjunto distinto de la partición de D_1 y D_2 , además $(x_2, x_3) \in F(D)$, entonces $x_3 \in D_1$, de igual forma x_2, x_3

y x_4 son vértices consecutivos en C , entonces $x_4 \in D_2$, siguiendo este procedimiento se llega a la conclusión que si $x_i \in V(C)$ con $1 \leq i \leq l$, entonces $x_i \in D_1$ o $x_i \in D_2$, entonces C solo contiene vértices de dos conjuntos de la partición, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis C contiene tres vértices que pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Por lo tanto existen tres vértices consecutivos en C que pertenecen a distintos conjuntos de la partición. \square

La estructura de ciclos en torneos y torneos bipartitos se ha estudiado mucho en la literatura, por eso nos centraremos en la estructura de los ciclos en torneos multipartitos, empezando por la existencia de ciclos pequeños en torneos n -partitos, donde $n \geq 3$.

Teorema 3.0.12. *Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$. Entonces T contiene un 3-ciclo si y sólo si existe un ciclo en T que contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición.*

Demostración. Primero, supongamos que T contiene a C un 3-ciclo, entonces C tiene tres vértices, notemos que si al menos dos de ellos están en un mismo conjunto de la partición, entonces por definición de torneo n -partito (definición 3.0.2) se tiene que entre estos dos vértices no existe una flecha, lo cual es una contradicción pues en T existe una flecha entre estos vértices, entonces cada vértice pertenece a un conjunto distinto de la partición.

Ahora, supongamos que T contiene al menos un ciclo que tiene vértices de al menos tres conjuntos de la partición. Sea C un ciclo de longitud mínima en T que contiene vértices de al menos tres conjuntos de la partición. Notemos que si C es un 3-ciclo tenemos el resultado.

Ahora supongamos que C no es un 3-ciclo.

Por la proposición 3.0.11 se tiene que existen tres vértices consecutivos u, v, w en C que pertenecen a distintos conjuntos de la partición, supongamos que D_1, D_2 y D_3 son conjuntos de la partición tales que $u \in D_1, v \in D_2$ y $w \in D_3$. Como T es un torneo n -partito, entonces $(u, w) \in F(T)$ o $(w, u) \in F(T)$. Notemos que si $(w, u) \in F(T)$, entonces $C_1 = (u, v, w, u)$ es un 3-ciclo con tres vértices en distintos conjuntos de la partición de longitud más pequeña que C , lo cual es una contradicción (figura 3.7 (a)).

Así $(u, w) \in F(T)$. Sea $C_2 = (C - v) \cup (u, w)$, entonces C_2 es un ciclo de longitud más pequeña que C (figura 3.7 (b)).

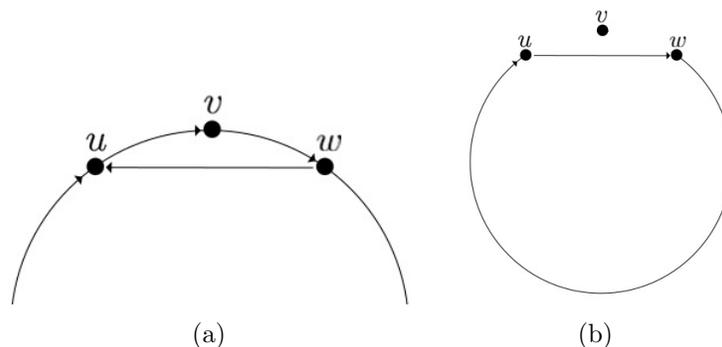


Figura 3.7.

Observemos que si C_2 tiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición llegaremos a una contradicción. Supongamos que C_2 solo contiene vértices de dos conjuntos de la partición, es decir de los conjuntos de D_1 y D_3 , sea x el sucesor de w en C_2 , entonces $x \in D_1$. Notemos que $(x, v) \notin F(T)$ (figura 3.8 (a)), pues $C_3 = (x, v, w, x)$ sería un 3-ciclo con vértices de al menos tres conjuntos de la partición de longitud más pequeño que C , lo cual contradice la elección de C . Por lo tanto $(v, x) \in F(T)$ (figura 3.8 (b)).

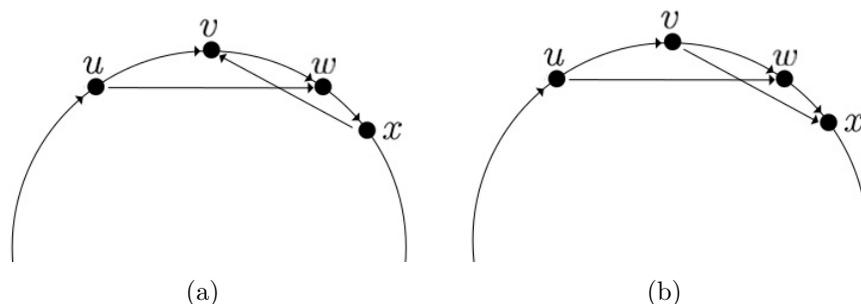


Figura 3.8.

Notemos que $|V(C_2)| \geq 4$, ya que si $|V(C_2)| = 3$, entonces el ciclo C_2 sería $C_2 = (u, w, x, u)$, es decir $(x, u) \in F(C_2)$, lo cual es una contradicción pues u y $x \in D_1$. Por lo tanto $|V(C_2)| \geq 4$, entonces existe un vértice $y \in C_2$ sucesor de x , donde $y \in D_3$ (figura 3.9 (a)).

Ahora sea $C_4 = (C - w) \cup (v, x)$, entonces C_4 es un ciclo de longitud más pequeña que la de C , además C_4 contiene vértices de tres conjuntos distintos

de la partición, pues u, v y $y \in C_4$ con $u \in D_1, v \in D_2$ y $y \in D_3$, lo cual es una contradicción, pues C es el ciclo de longitud más pequeña con tres vértices de distintos conjuntos de la partición (figura 3.9 (b)).

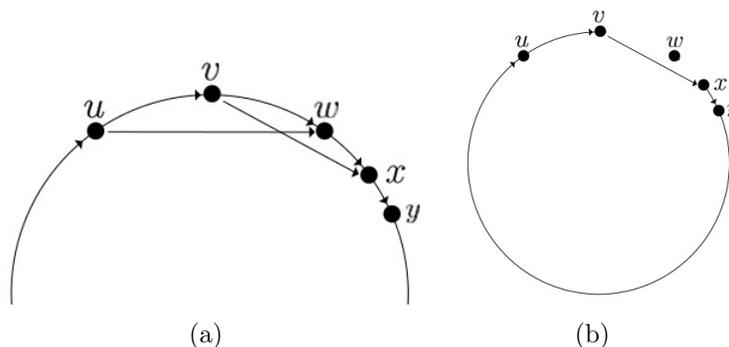


Figura 3.9.

Por lo tanto C debe ser un 3-ciclo. □

Se sabe que en un torneo n -partito el ciclo de longitud más pequeña que puede contener es un 3-ciclo. Por el teorema 3.0.12 si T es un torneo n -partito y T contiene un 3-ciclo, entonces existe un ciclo en T que contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición, entonces nos podemos preguntar, si T es un torneo n -partito y C es un k -ciclo, con $k \geq 4$, entonces ¿existe un ciclo en T que contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición?, la respuesta es no, pues si T es un torneo 3-partito, con $V(T) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y los conjuntos de la partición $V_0 = \{u_1, u_2\}$, $V_1 = \{u_3, u_4\}$, $V_2 = \{u_5\}$ y $F(T) = \{(u_1, u_4), (u_1, u_5), (u_2, u_3), (u_2, u_5), (u_3, u_1), (u_3, u_5), (u_4, u_2), (u_4, u_5)\}$ (ver figura 3.10), donde $C = (u_1, u_4, u_2, u_3, u_1)$ es un 4-ciclo en T , pero T no contiene un ciclo que contenga vértices de al menos tres conjuntos de la partición, pues el único ciclo que contiene T es C y C sólo contiene vértices de V_1 y V_2 .

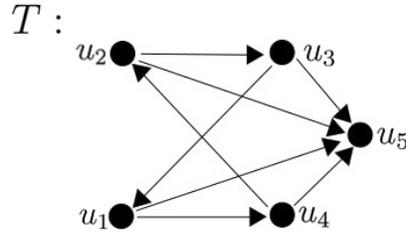


Figura 3.10.

Teorema 3.0.13. *Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$. Si u es un vértice de T que pertenece a un ciclo, entonces u pertenece a un 3-ciclo o a un 4-ciclo.*

Demostración. Sea C un ciclo de longitud mínima que contiene a u . Si C es un 3-ciclo o un 4-ciclo entonces tenemos el resultado.

Así supongamos que C no es un 4-ciclo, ni un 3-ciclo. Sean u, v, w, x vértices de una trayectoria de longitud 3 contenida en C que empieza en u , notemos que $(u, w) \notin F(T)$, pues $C_1 = (C - v) \cup (u, w)$ es un ciclo de longitud más pequeña que C (ver figura 3.11 (a)) y C_1 contiene a u , lo cual es una contradicción, con la elección de C , además $(w, u) \notin F(T)$, pues $C_2 = (u, v, w, u)$ es un 3-ciclo más pequeño que C y contiene a u (ver figura 3.11 (b)).

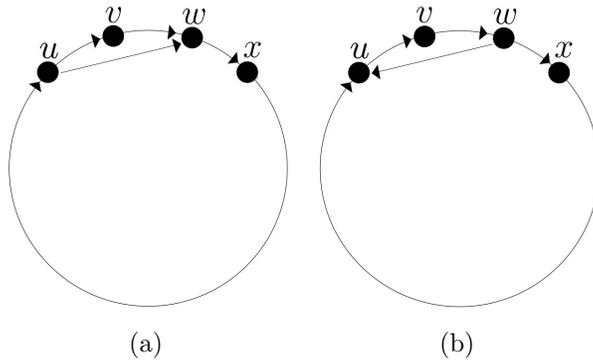


Figura 3.11.

Por lo tanto (w, u) y $(u, w) \notin F(T)$, entonces u y w pertenecen al mismo conjunto de la partición de T , pues T es un torneo n -partito. Por otro lado observemos que $(x, u) \notin F(T)$ pues $C_3 = (u, v, w, x, u)$ es un 4-ciclo más pequeño que C (ver figura 3.12 (a)), lo cual es una contradicción, también $(u, x) \notin F(T)$ ya que $C_4 = (C - \{v, w\}) \cup (u, x)$ es un ciclo más pequeño que

C y que contiene a u , lo cual es una contradicción (ver figura 3.12 (b)).

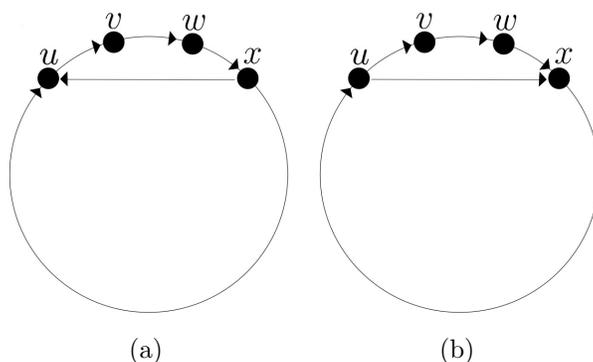


Figura 3.12.

Por lo que (u, x) y $(x, u) \notin F(T)$, entonces u y x pertenecen al mismo conjunto de la partición, lo cual es una contradicción, pues u y w pertenecen al mismo conjunto de la partición, así x y w pertenecen al mismo conjunto de la partición, lo cual es una contradicción, pues $(w, x) \in F(T)$.

Por lo tanto u pertenece a un 3-ciclo o a un 4-ciclo. \square

Proposición 3.0.14. *Sea T un torneo n -partito y sean $W = \{v_0, v_1, \dots, v_m\} \subseteq V(T)$, con $0 < m < n$, tal que entre cualesquiera dos vértices no pertenezcan a un mismo conjunto de la partición, entonces existe una trayectoria de longitud m en T que los contiene.*

Demostración. Sea $W = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ y sea $D = \langle W \rangle$, notemos que la digráfica inducida por el conjunto de vértices de W es un torneo pues si u y $v \in W$, entonces u y v están en distintos conjuntos de la partición de $V(T)$, entonces $(u, v) \in F(T)$ o $(v, u) \in F(T)$, pero no ambas, pues T es torneo n -partito. Así D es un torneo, entonces por la proposición 2.0.13, D contiene una trayectoria hamiltoniana, de donde D tiene una trayectoria de longitud m .

Por lo tanto existe una trayectoria de longitud m en T que contiene a los vértices de W . \square

Un resultado muy conocido para torneos es que todo torneo fuertemente conexo es hamiltoniano (teorema 2.0.12). En 1996 Harary y Moser extendieron ese resultado y mostraron que un torneo fuertemente conexo de orden

$p \geq 3$ contiene un k -ciclo para todo k , con $3 \leq k \leq p$ (Corolario 2.0.11), mientras que Moon mostró que los torneos fuertemente conexos son vértices-pancíclico (teorema 2.0.10), es decir cualquier vértice de un torneo fuertemente conexo se encuentra en un k -ciclo para cualquier k , con $3 \leq k \leq p$. Tal abundancia de ciclos no tienen porqué estar presentes en torneos 3-partitos fuertemente conexos que no son torneos. Por ejemplo, el torneo 3-partito T_1 de la figura 3.13 (a) es hamiltoniano pues $C = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ es un ciclo generador en T_1 , por lo tanto es fuertemente conexo, pero el vértice v_3 no pertenece a un 3-ciclo, ya que v_3 sólo es adyacente hacia v_0 y v_0 sólo es adyacente hacia v_1 , pero v_1 no es adyacente hacia v_3 . Por otro lado (v_2, v_3) , $(v_3, v_0) \in F(T)$, pero $(v_0, v_2) \notin F(T)$, por lo tanto v_3 no pertenece a un 3-ciclo. Ahora, el torneo 3-partito T_2 de la figura 3.13 (b), con los conjuntos de la partición $\{u_1, u_2\}$, $\{u_3, u_4\}$ y $\{u_5, u_6\}$ es también hamiltoniano, pues $C = (u_1, u_4, u_6, u_2, u_3, u_5, u_1)$ es un ciclo generador en T_2 , pero u_1 no pertenece a un 4-ciclo, para ver esto mostraremos todas las trayectorias de longitud tres que inician en u_1 , y veremos que el último vértice de dicha trayectoria no es adyacente hacia u_1 . Primero consideremos los exvecinos de u_1 que serían u_3 y u_4 , así tenemos lo siguientes:

- los exvecinos de u_3 son u_5 y u_6 , por un lado u_5 es adyacente hacia u_1 , u_2 y u_4 , entonces T_2 contiene a $L_1 = (u_1, u_3, u_5, u_2)$ y $L_2 = (u_1, u_3, u_5, u_4)$ trayectorias de longitud tres, con u_2 y u_4 vértices que no son adyacentes hacia u_1 .

Por otro lado los exvecinos de u_6 son u_1 y u_2 , entonces T_2 contiene a $L_3 = (u_1, u_3, u_6, u_2)$ una trayectoria de longitud tres, donde u_2 no es adyacente hacia u_1 .

- u_4 es adyacente hacia u_6 y los exvecinos de u_6 son u_1 y u_2 , entonces T_2 contiene a $L_4 = (u_1, u_4, u_6, u_2)$ una trayectoria de longitud tres, donde u_2 no es adyacentes hacia u_1 .

Por lo tanto u_1 no pertenece a un 4-ciclo.

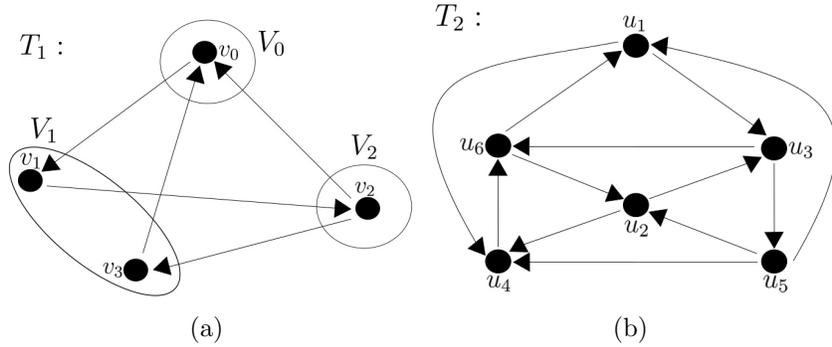


Figura 3.13.

Proposición 3.0.15. Sea T un torneo n -partito fuertemente conexo, $n \geq 3$, con los conjuntos de la partición V_0, V_1, \dots, V_{n-1} y donde $T_{i,j} = \langle V_i \cup V_j \rangle$, $0 \leq i < j \leq n - 1$. Entonces

- (i) Cualesquiera dos vértices de distintos conjuntos de la partición están en un ciclo en común.
- (ii) Si $T_{i,j}$ ($i < j$) no es fuertemente conexo, entonces hay un ciclo que contiene vértices de V_i, V_j y al menos otro conjunto de la partición.
- (iii) Si i, j y k son enteros $i < j < k$ tal que $T_{i,j}, T_{j,k}$ y $T_{i,k}$ son fuertemente conexos, entonces hay un ciclo que contiene vértices de V_i, V_j y V_k y no de otro conjunto de la partición.

Demostración. (i) Sean u y $v \in V(T)$ que pertenecen a distintos conjuntos de la partición, entonces por definición de torneo n -partito $(u, v) \in F(T)$ o $(v, u) \in F(T)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $(u, v) \in F(T)$. Ahora como T es fuertemente conexo, entonces existe L una vu -trayectoria, así sea $C = L \cup (u, v)$ un ciclo que contiene a u y a v (figura 3.14).

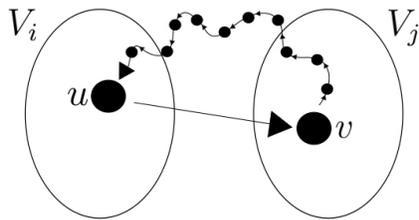


Figura 3.14.

(ii) La demostración la haremos por contrapositiva, es decir demostraremos que si no hay un ciclo que contiene vértices de V_i, V_j y al menos otro conjunto de la partición, entonces $T_{i,j}$ ($i < j$) es fuertemente conexo. Sean u y $v \in V(T_{i,j})$, afirmamos que existen una uv -trayectoria y una vu -trayectoria en $T_{i,j}$, como $u, v \in V(T_{i,j})$ entonces tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $u \in V_i$ y $v \in V_j$, tenemos que u y $v \in V(T)$ y sabemos que T es fuertemente conexo, entonces por el inciso (i) sabemos que entre cualesquiera dos vértices de distintos conjuntos de la partición están en un ciclo en común, así u y v pertenecen a un mismo ciclo C en T , pero por hipótesis tenemos que no hay un ciclo que contiene vértices de V_i, V_j y al menos otro conjunto de la partición, entonces C es un ciclo que sólo contiene vértices de V_i y V_j , entonces C es un ciclo en $T_{i,j}$, supongamos que $C = (u, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, v, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, u)$, entonces $L_1 = (u, x_1, x_2, \dots, v)$ es una uv -trayectoria en $T_{i,j}$ y $L_2 = (v, y_1, y_2, y_3, \dots, u)$ es una vu -trayectoria en $T_{i,j}$.

Caso 2: Si u y $v \in V_i$ o u y $v \in V_j$, sin pérdida de generalidad supongamos que u y $v \in V_i$, sea x un vértice de V_j entonces por el caso 1 para $u \in V_i$ y $x \in V_j$ existe una ux -trayectoria L_1 y una xu -trayectoria L_2 en $T_{i,j}$, de igual forma para $v \in V_i$ y $x \in V_j$ existe una vx -trayectoria L_3 y una xv -trayectoria L_4 en $T_{i,j}$, entonces $L_1 \cup L_4$ es un uv -camino en $T_{i,j}$ y $L_3 \cup L_2$ es un vu -camino en $T_{i,j}$, así existe en $T_{i,j}$ una uv -trayectoria y una vu -trayectoria, por el teorema 1.0.23.

Por lo tanto $T_{i,j}$ es fuertemente conexo.

(iii) Sean $u_1 \in V_i, u_2 \in V_j$ y $u_3 \in V_k$. Sabemos por la proposición 3.0.14 que existe una trayectoria L de longitud dos que contiene a u_1, u_2 y u_3 . Entonces alguna de la siguientes trayectorias pertenecen a T :

- (u_1, u_2, u_3) ,
- (u_1, u_3, u_2) ,
- (u_2, u_1, u_3) ,
- (u_2, u_3, u_1) ,

- (u_3, u_1, u_2) ,
- (u_3, u_2, u_1) .

Sin pérdida de generalidad supongamos que $L = (u_1, u_2, u_3)$ pertenece a T , como $T_{i,k}$ es fuertemente conexo entonces existe L_1 una u_3u_1 -trayectoria contenida en $T_{i,k}$ que no contiene a u_2 , entonces $C = L \cup L_1$ es un ciclo que contiene vértices de V_i, V_j y V_k y no de otro conjunto de la partición (figura 3.15).

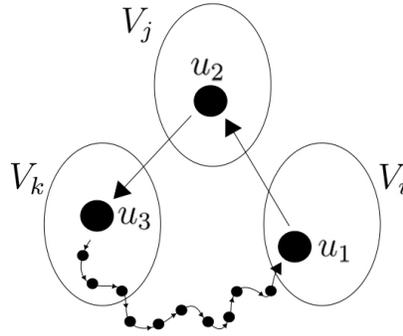


Figura 3.15.

□

Corolario 3.0.16. Si T es un torneo n -partito ($n \geq 3$) fuertemente conexo, entonces T contiene un 3-ciclo.

Demostración. Sea V_1, V_2 y V_3 conjuntos de la partición de T consideremos $T_{1,2} = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$, $T_{1,3} = \langle V_1 \cup V_3 \rangle$ y $T_{2,3} = \langle V_2 \cup V_3 \rangle$, entonces tenemos dos casos: si $T_{1,2}$, $T_{1,3}$ y $T_{2,3}$ son fuertemente conexos entonces por la proposición 3.0.15 inciso (iii) existe un ciclo que contiene vértices de V_1, V_2 y V_3 y no de otro conjunto, así por el teorema 3.0.12, se concluye que T tiene un 3-ciclo. Por otro lado si alguno de los tres $T_{1,2}$, $T_{1,3}$ y $T_{2,3}$ no es fuertemente conexo, sin pérdida de generalidad supongamos que $T_{1,2}$ no es fuertemente conexo, entonces por la proposición 3.0.15 inciso (ii) existe un ciclo que contiene vértices de V_1, V_2 y de al menos otro conjunto de la partición, así por el teorema 3.0.12 se concluye que T tiene un 3-ciclo. □

En el siguiente teorema se dará el número de 3-ciclos en torneos n -partitos ($n \geq 3$), pero antes recordemos que por el teorema 2.0.14 se tiene que el número de 3-ciclos en un torneo T de orden p es

$$\frac{1}{6}p(p-1)(p-2) - \frac{1}{2} \sum_{v \in V(T)} \delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1),$$

donde $\frac{1}{6}p(p-1)(p-2)$ es el número de ternas en T y $\frac{1}{2} \sum_{v \in V(T)} \delta_T^+(v)(\delta_T^+(v) - 1)$ es el número de ternas transitivas en T .

Ahora daremos una fórmula para el número de 3-ciclos en un torneo n -partito.

Teorema 3.0.17. *Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$, que tiene como conjuntos de la partición a V_0, V_1, \dots, V_{n-1} . Entonces el número de 3-ciclos en T está dado por*

$$\sum_{k=2}^{n-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i| - \sum_{v \in V(T)} \sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v).$$

Demostración. Primero calcularemos el número de ternas posibles que se pueden formar con los vértices de T . Para empezar contaremos todas las ternas de sólo tres conjuntos de la partición, que se obtiene de multiplicar la cardinalidad de estos tres conjuntos (ver figura 3.16). Ahora consideremos todas las combinaciones obtenidas de 3 conjuntos de la partición, esto para contar todas las ternas en T , afirmamos que este número es:

$$\sum_{k=2}^{n-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i|$$

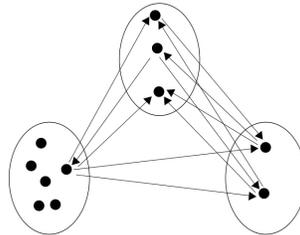


Figura 3.16.

Para demostrarlo lo haremos por inducción sobre n .

Base de inducción.

Si $n = 3$ entonces el número de ternas que se pueden formar en T es

$$|V_2||V_1||V_0| = \sum_{k=2}^{3-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i|.$$

Si $n = 4$, entonces las posibles combinaciones para poder elegir tres conjuntos de la partición es $\binom{4}{3} = 4$, que son las siguientes: $|V_2||V_1||V_0|$, $|V_3||V_1||V_0|$, $|V_3||V_2||V_0|$, $|V_3||V_2||V_1|$. Entonces la suma de todos ellos nos da como resultado el número de ternas posibles, que es

$$|V_2||V_1||V_0| + |V_3||V_1||V_0| + |V_3||V_2||V_0| + |V_3||V_2||V_1| = \sum_{k=2}^{4-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i|$$

Hipótesis de inducción. Supongamos que vale para n , es decir el número de ternas en T un torneo n -partito es: $\sum_{k=2}^{n-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i|$.

Paso inductivo.

Sea T un torneo $(n + 1)$ -partito, si consideramos la digráfica inducida por $D = \langle V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} \rangle$, entonces por la hipótesis de inducción tenemos que el número de ternas en D es $\sum_{k=2}^{n-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i|$.

Así para saber cuántas ternas tenemos en T , sólo falta considerar las combinaciones de tres conjuntos de la partición teniendo fijo V_n como uno de los tres conjuntos, que son $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, se enlistan a continuación: $|V_n||V_1||V_0|$, $|V_n||V_2||V_0|, \dots, |V_n||V_{n-1}||V_0|$, $|V_n||V_2||V_1|$, $|V_n||V_3||V_1|, \dots, |V_n||V_{n-1}||V_1|$, $|V_n||V_3||V_2|, \dots, |V_n||V_{n-1}||V_{n-2}|$. Entonces el número de ternas en T es:

$$\sum_{k=2}^{n-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i| + (|V_n||V_1||V_0| + |V_n||V_2||V_0| + \dots + |V_n||V_{n-1}||V_0| +$$

$$|V_n||V_2||V_1| + |V_n||V_3||V_1| + \dots + |V_n||V_{n-1}||V_1| + |V_n||V_3||V_2| + \dots +$$

$$\begin{aligned} |V_n||V_{n-1}||V_{n-2}| &= \sum_{k=2}^{n-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i| + |V_n| \sum_{j=1}^{n-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i| \\ &= \sum_{k=2}^n |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i| \end{aligned}$$

Por lo tanto si T es un torneo n -partito, entonces el número de ternas en T es

$$\sum_{k=2}^n |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i|$$

Notemos que no todas las ternas $\{u, v, w\}$ en T forman ciclos (ver figura 3.17), algunos son ternas transitivas, entonces si $\{u, v, w\}$ es una terna transitiva, este conjunto contiene exactamente un vértice que es adyacente hacia los otros dos vértices en la terna (ver figura 3.17 (b)).

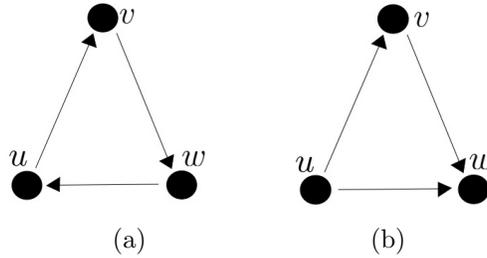


Figura 3.17.

Afirmamos que el número de ternas transitivas que contienen a $v \in V_n$, el cual es adyacente hacia los dos vértices restantes en la terna es

$$\sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v).$$

La demostración se hará por inducción sobre n .

Base de inducción.

Si $n = 2$, basta con considerar las parejas que podemos formar con los tres conjuntos de la partición que son $\binom{3}{2} = 3$, los cuales son: (V_1, V_0) , (V_2, V_0) y (V_2, V_1) , entonces el número de ternas transitivas que contienen a v es: $s_1(v)s_0(v) + s_2(v)s_0(v) + s_1(v)s_2(v) = \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v)$ (figura 3.18).

Si $n = 3$, entonces las posibles combinaciones de las parejas que podemos formar son $\binom{4}{2} = 6$, que son: (V_1, V_0) , (V_2, V_0) , (V_2, V_1) , (V_3, V_0) , (V_3, V_1) y (V_3, V_2) , entonces el número de ternas transitivas que contienen a v es:

$$\begin{aligned} & s_1(v)s_0(v) + s_2(v)s_0(v) + s_1(v)s_2(v) + s_3(v)s_0(v) + s_3(v)s_1(v) + s_3(v)s_2(v) \\ &= \sum_{j=1}^3 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v). \end{aligned}$$

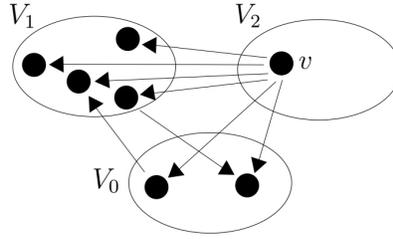


Figura 3.18.

Hipótesis de inducción. Supongamos que vale para n , es decir el número de ternas transitivas en T un torneo n -partito es: $\sum_{j=1}^n s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v)$.

Paso inductivo.

Sea T un torneo $(n + 1)$ -partito, consideremos la digráfica inducida por $D = \langle V_0, V_1, \dots, V_{n-1} \rangle$, así por la hipótesis de inducción tenemos que el número de ternas transitivas en D es: $\sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v)$.

Entonces para saber cuantas ternas transitivas tenemos en T , sólo falta considerar las combinaciones de dos conjuntos de la partición teniendo fijo a V_n como uno de los dos conjuntos, estas son: $(V_n, V_0), (V_n, V_1), \dots, (V_n, V_{n-1})$, entonces el número de ternas transitivas en T es:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) + s_n(v)s_0(v) + s_n(v)s_1(v) + \dots + s_n(v)s_{n-1}(v) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) + s_n(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) = \sum_{j=1}^n s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto si T es un torneo n -partito, el número de ternas transitivas que contienen a v es:

$$\sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v).$$

Para conocer el número de ternas transitivas que tiene T , tenemos que sumar todas las ternas transitivas que contienen a v , para todo v en $V(T)$, es decir el número de ternas transitivas en T es:

$$\sum_{v \in V(T)} \sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v).$$

Entonces al restarle el número de ternas transitivas al número de ternas en T nos da como resultado el número de 3-ciclos que contiene T , así el número de 3-ciclos en T es:

$$\sum_{k=2}^{n-1} |V_k| \sum_{j=1}^{k-1} |V_j| \sum_{i=0}^{j-1} |V_i| - \sum_{v \in V(T)} \sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v).$$

□

Corolario 3.0.18. *Sea T un torneo 3-partito con los conjuntos de la partición V_0, V_1, V_2 . Entonces*

(i) *El número de ternas transitivas de T está dado por*

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{v \in V_i} s_{i+1}(v) s_{i+2}(v),$$

donde el índice está expresado módulo 3.

(ii) *El número de 3-ciclos de T está dado por*

$$|V_0||V_1||V_2| - \sum_{i=0}^2 \sum_{v \in V_i} s_{i+1}(v) s_{i+2}(v).$$

Demostración. (i) Tenemos por el teorema 3.0.17 que si T es un torneo n -partito, entonces el número de ternas transitivas es

$$\sum_{v \in V(T)} \sum_{j=1}^{n-1} s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v),$$

para $n = 3$, se tiene que el número de ternas transitivas es

$$\sum_{v \in V(T)} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v).$$

Tenemos que $V(T) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$, entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V(T)} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) &= \sum_{v \in V_0 \cup V_1 \cup V_2} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) \\
 &= \sum_{v \in V_0} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) + \sum_{v \in V_1} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) \\
 &\quad + \sum_{v \in V_2} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) \\
 &= \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) \dots\dots\dots(*)
 \end{aligned}$$

Empecemos considerando a (*) y observemos que

$$\sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) = s_1(v)s_0(v) + s_2(v)s_0(v) + s_2(v)s_1(v),$$

entonces de (*) y considerando $v \in V_0$, se tiene que $s_0(v) = 0$, ya que $s_0(v) = \delta_{T_{0,0}}^+(v) = \delta_{\langle V_0 \cup V_0 \rangle}^+(v) = \delta_{\langle V_0 \rangle}^+(v)$. Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V_0} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) &= \sum_{v \in V_0} (s_1(v)s_0(v) + s_2(v)s_0(v) + s_2(v)s_1(v)) \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_2(v)s_1(v), \text{ pues } s_0(v) = 0, \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_1(v)s_2(v) \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_{0+1}(v)s_{0+2}(v) \quad \text{donde el índice está expresado módulo 3,}
 \end{aligned}$$

Ahora considerando $v \in V_1$, se tiene que $s_1(v) = 0$, ya que $s_1(v) = \delta_{T_{1,1}}^+(v) =$

$\delta_{\langle V_1 \cup V_1 \rangle}^+(v) = \delta_{\langle V_1 \rangle}^+(v)$. Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V_1} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) &= \sum_{v \in V_0} (s_1(v)s_0(v) + s_2(v)s_0(v) + s_2(v)s_1(v)) \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_2(v)s_0(v) \text{ pues } s_1(v) = 0, \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_0(v)s_2(v) \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_{1+1}(v)s_{1+2}(v) \quad \text{donde el índice está expresado módulo 3,}
 \end{aligned}$$

Por último considerando $v \in V_2$, se tiene que $s_2(v) = 0$, ya que $s_2(v) = \delta_{T_{2,2}}^+(v) = \delta_{\langle V_2 \cup V_2 \rangle}^+(v) = \delta_{\langle V_2 \rangle}^+(v)$. Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V_2} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) &= \sum_{v \in V_0} (s_1(v)s_0(v) + s_2(v)s_0(v) + s_2(v)s_1(v)) \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_1(v)s_0(v) \text{ pues } s_2(v) = 0, \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_0(v)s_1(v) \\
 &= \sum_{v \in V_0} s_{2+1}(v)s_{2+2}(v) \quad \text{donde el índice está expresado módulo 3,}
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{v \in V_k} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) = \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) \quad \text{para todo } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Así

$$\sum_{v \in V(T)} \sum_{j=1}^2 s_j(v) \sum_{i=0}^{j-1} s_i(v) = \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v).$$

(ii) De igual forma por el teorema 3.0.17 sabemos que el número de ternas que se forman en T es

$$|V_2||V_1||V_0|,$$

entonces el número de 3-ciclos en T es

$$|V_2||V_1||V_0| - \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) \quad \text{donde el índice está expresado módulo 3.}$$

□

Ahora nos centraremos en torneos 3-partitos fuertemente conexos y determinaremos, para estos torneos, el máximo número de 3-ciclos y ternas transitivas en los casos en que el torneo 3-partito es o no fuertemente conexo.

Sea T_2 un torneo 3-partito, como en la figura 3.19, con los conjuntos de la partición V_0, V_1 y V_2 , donde cada vértice de V_i es adyacente hacia cada vértice

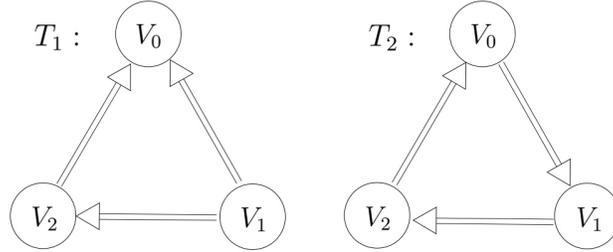


Figura 3.19.

de V_{i+1} para $i = 0, 1, 2$ (módulo 3), entonces T_2 no tiene ternas transitivas y tiene $|V_0||V_1||V_2|$ 3-ciclos. Por otro lado, T_1 el torneo 3-partito de la la figura 3.19, que tiene como conjuntos de la partición a V_0, V_1 y V_2 tal que cada vértice de V_1 es adyacente hacia cada vértice en $V_0 \cup V_2$ y cada vértice de V_2 es adyacente hacia cada vértice de V_0 , entonces T_1 no contiene 3-ciclos, es decir,

$$|V_2||V_1||V_0| - \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) = 0,$$

entonces

$$|V_2||V_1||V_0| = \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v).$$

por lo tanto tiene $|V_0||V_1||V_2|$ ternas transitivas.

Ahora sabemos por el Corolario 3.0.16 que todo torneo 3-partito fuertemente conexo, con los conjuntos de la partición V_0, V_1 y V_2 no pueden contener $|V_2||V_1||V_0|$ ternas transitivas. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.0.19. *Si T es un torneo 3-partito fuertemente conexo, con los conjuntos de la partición V_0, V_1 y V_2 , entonces el máximo número de ternas transitivas en T es $|V_2||V_1||V_0| - 1$ a no ser que $|V_0| = |V_1| = |V_2| = 2$, en este caso T tiene a lo más $|V_2||V_1||V_0| - 2 = 6$ ternas transitivas.*

Demostración. Sabemos por el Corolario 3.0.16 que todo torneo n -partito fuertemente conexo, $n \geq 3$, contiene al menos un 3-ciclo, es decir:

$$|V_2||V_1||V_0| - \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) \geq 1.$$

Entonces

$$|V_2||V_1||V_0| - 1 \geq \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v).$$

Así, un torneo 3-partito fuertemente conexo con los conjuntos de la partición V_0, V_1 y V_2 contiene a lo más $|V_0||V_1||V_2| - 1$ ternas transitivas.

Mostraremos ahora que si P_0, P_1 y P_2 son enteros positivos tal que $P_0 \leq P_1 \leq P_2$, entonces existe T un torneo 3-partito fuertemente conexo con los conjuntos de la partición V_0, V_1 y V_2 tal que $|V_i| = P_i$ ($i = 0, 1, 2$) y tal que T tiene $P_0P_1P_2 - 1$ ternas transitivas a no ser que $P_0 = P_1 = P_2 = 2$, en este caso T tiene $P_0P_1P_2 - 2 = 6$ ternas transitivas.

Supongamos primero que $P_2 \geq 3$, sean V_0, V_1 y V_2 conjuntos ajenos de vértices con $|V_i| = P_i$ ($i = 0, 1, 2$). Sea $x \in V_0, y \in V_1$ y $u, v, w \in V_2$. Sea T el torneo 3-partito con los conjuntos de la partición V_0, V_1 y V_2 en el cual cada vértice en V_0 es adyacente hacia cada vértice de $V_1 \cup V_2$ y cada vértice en V_2 es adyacente hacia cada vértice en V_1 con las siguientes excepciones:

1. y es adyacente hacia w y cada vértice de $V_1 - \{y\}$ es adyacente hacia v .
2. w es adyacente hacia x y u es adyacente hacia cada vértice $b \in V_0 - \{x\}$

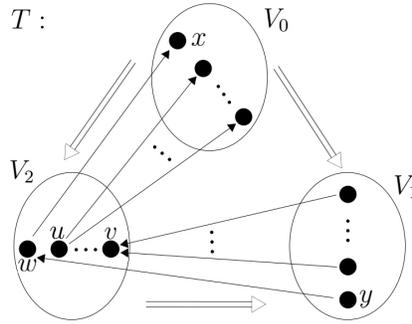


Figura 3.20.

Afirmación: T es fuertemente conexo. Sea $W = \{(a, b, c) \mid a \in V_0 \text{ con } a \neq x, b \in V_1 \text{ con } b \neq y \text{ y } c \in V_2 \text{ con } c \neq u, v, w\}$ un subconjunto de ternas que contiene T , donde $|W| = m < |V_0||V_1||V_2|$. Supongamos que $W = \{L_0, L_2, \dots, L_{m-1}\}$, donde $L_j = (a_j, b_j, c_j)$ con $0 \leq j \leq m-1$, sea $L_j \in W$, notemos que existe un camino cerrado que contiene a L_j , ya que existe $C_j = (x, c_j, b_j, v, y, w, x, u, a_j, w, x)$, esto pues :

- Como $x \in V_0$ es adyacente hacia todo vértice de $V_1 \cup (V_2 - \{w\})$, en particular es adyacente a $c_j \in V_2$, entonces $(x, c_j) \in F(T)$.
- c_j es adyacente hacia todo vértice de V_1 , en particular, es adyacente a b_j , es decir $(c_j, b_j) \in F(T)$.
- Como cada vértice de $V_1 - \{y\}$ es adyacente hacia v y $b_j \neq y$, entonces $(b_j, v) \in F(T)$.
- Como cada vértice de $V_1 - \{y\}$ es adyacente hacia v , entonces v es adyacente hacia y , es decir $(v, y) \in F(T)$.
- $(y, w) \in F(T)$ pues y es adyacente hacia w .
- $(w, x) \in F(T)$ ya que w es adyacente hacia x .
- Como $x \in V_0$ es adyacente hacia todo vértice de $V_1 \cup (V_2 - \{w\})$, en particular para $u \in V_1$, entonces $(x, u) \in F(T)$.
- u es adyacente hacia cada vértice $b \in V_0 - \{x\}$ y $a_j \neq x$, entonces $(u, a_j) \in F(T)$.

- Como $a_j \in V_0$ entonces es adyacente hacia todo vértice en $V_1 \cup (V_2 - \{u\})$, en particular es adyacente a w , es decir $(a_j, w) \in F(T)$.
- $(w, x) \in F(T)$ ya que w es adyacente hacia x (ver figura 3.21).

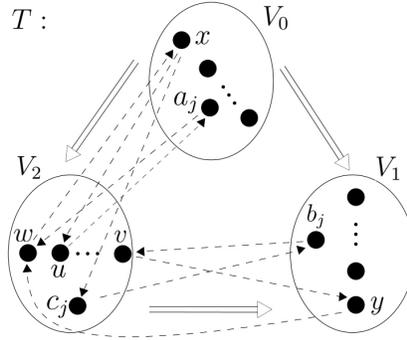


Figura 3.21.

Entonces para todo L_i ($0 \leq i \leq m-1$), existe $C_i = (x, c_i, b_i, v, y, w, x, u, a_i, w, x)$ un camino cerrado que contiene a la terna. Así $C_m = \bigcup_{i=0}^{m-1} C_i$ es un camino cerrado generador en T , entonces por el teorema 1.0.29 T es fuertemente conexo. Además afirmamos que T contiene exactamente un 3-ciclo, esto pues, sean $a \in V_0, b \in V_1$ y $c \in V_2$, como queremos formar un 3-ciclo en T entonces tenemos dos casos :

Caso 1: Si $C = (b, a, c, b)$ es un 3-ciclo en T , es decir que $(a, c), (c, b)$ y $(b, a) \in F(T)$, como $b \in V_1$, entonces como cada vértice de V_0 es adyacente hacia cada vértice de $V_1 \cup V_2$, entonces b no es adyacente hacia ningún vértice en V_0 , entonces $(b, a) \notin F(T)$, entonces C no es un 3-ciclo en T .

Caso 2: Si $C = (b, c, a, b)$ es un 3-ciclo en T , entonces $(a, b), (b, c)$ y $(c, a) \in F(T)$, como $b \in V_1$ y como cada vértice en V_2 es adyacente hacia cada vértice en V_1 con las excepciones que cada vértice en $V_1 - \{y\}$ es adyacente hacia $v \in V_2$ y que y es adyacente hacia w , entonces tenemos dos subcasos:

Subcaso 1: Si $b \neq y$, entonces $c = v$, además todo vértice de V_0 es adyacente hacia cada vértice en V_2 con las excepciones de que $u \in V_2$ es adyacente hacia cada vértice $b \in V_0 - \{x\}$ y w es adyacente hacia x , entonces v no es adyacente hacia ningún vértice en V_0 , así $(c, a) \notin F(T)$, entonces C no es un 3-ciclo en T .

Subcaso 2: Si $b = y$, entonces $c = w$, además todo vértice de V_0 es adyacente hacia cada vértice en V_2 con las excepciones de que $u \in V_2$ es adyacente hacia cada vértice $b \in V_0 - \{x\}$ y w es adyacente hacia x , entonces $a = x$. Así $C = (y, w, x, y)$ es un 3-ciclo en T .

Por lo tanto el único 3-ciclo en T es $C = (y, w, x, y)$. Así T tiene $|V_0||V_1||V_2| - 1$ ternas transitivas.

Supongamos ahora que $P_2 \leq 2$. Entonces los posibles valores que pueden tomar P_0, P_1, P_2 son los siguientes: (i) $P_0 = 1, P_1 = 1, P_2 = 1$, (ii) $P_0 = 1, P_1 = 1, P_2 = 2$, (iii) $P_0 = 1, P_1 = 2, P_2 = 2$ y (iv) $P_0 = 2, P_1 = 2, P_2 = 2$.

Caso 1: Si $P_0 = 1, P_1 = 1$ y $P_2 = 1$, sea T_1 un torneo 3-partito con $V_0 = \{w\}, V_1 = \{v\}$ y $V_2 = \{u\}$ como en la figura 3.22, entonces tenemos que T_1 es un torneo 3-partito fuertemente conexo, pues T_1 tiene a $C = (u, w, v, u)$ un camino cerrado generador, además T_1 sólo tiene $\{u, v, w\}$ una terna y no es una terna transitiva, entonces T_1 contiene $0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = P_0P_1P_2 - 1$ ternas transitivas.

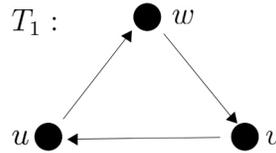


Figura 3.22.

Caso 2: Si $P_0 = 1, P_1 = 1$ y $P_2 = 2$, sea T_2 un torneo 3-partito con $V_0 = \{v\}, V_1 = \{x\}$ y $V_2 = \{u, w\}$ como en la figura 3.23, entonces tenemos que T_2 contiene a $C = (u, v, w, x, u)$ un camino cerrado generador, entonces T_2 es fuertemente conexo. Además T_2 tiene sólo dos ternas: $\{u, v, x\}$ y $\{u, w, x\}$, de las cuales sólo $\{u, v, x\}$ es una terna transitiva, entonces T_2 contiene $1 = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 = P_0P_1P_2 - 1$ ternas transitivas.

Caso 3: Si $P_0 = 1, P_1 = 2$ y $P_2 = 2$, sea T_3 un torneo 3-partito con $V_0 = \{y\}, V_1 = \{u, w\}$ y $V_2 = \{v, x\}$ como en la figura 3.24, entonces tenemos que T_3 contiene a $C = (y, w, x, u, v, y)$ un camino cerrado generador, entonces T_3 es un torneo 3-partito fuertemente conexo, además T_3 tiene cuatro ternas : $\{u, y, v\}, \{w, y, x\}, \{u, y, x\}$ y $\{w, y, v\}$, de las cuales $\{u, y, x\}, \{w, y, x\}$ y $\{w, y, v\}$ son ternas transitivas, entonces T_3 contiene $3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = P_0P_1P_2 - 1$ ternas transitivas.

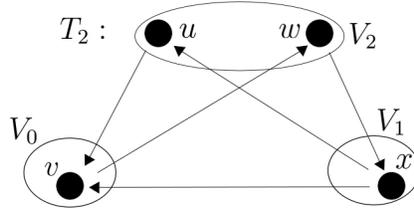


Figura 3.23.

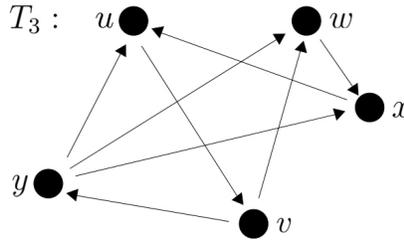


Figura 3.24.

Caso 4: Supongamos ahora que T es un torneo 3-partito fuertemente conexo que contiene el máximo número de ternas transitivas posibles y tiene a $G_T = K_{2,2,2}$ como su gráfica subyacente (Definición 1.0.25) y sea V_0, V_1 y V_2 los conjuntos de la partición de T .

Si T tiene 7 ternas transitivas, entonces $\sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) = 7$, si $v \in V_i$, $i = 0, 1, 2$, notemos que no existe $v \in V(T)$, tal que $s(v) = 0$ o $s(v) = 4$, pues T es fuertemente conexo, entonces se tiene que $1 \leq s(v) = s_{k+1}(v) + s_{k+2}(v) \leq 3$, además $0 \leq s_{k+1}(v) \leq 2$ y $0 \leq s_{k+2}(v) \leq 2$. Afirmamos que $s_{k+1}(v) + s_{k+2}(v) \geq s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 1$, pues $s(v) \neq 4$, entonces no puede pasar que $s_{k+1}(v) = 2$ y $s_{k+2}(v) = 2$, de igual forma como $s(v) \neq 0$, entonces no puede pasar que $s_{k+1}(v) = 0$ y $s_{k+2}(v) = 0$, entonces tenemos tres subcasos:

Subcaso 1: Si $s_{k+1}(v) = 1$ y $s_{k+2}(v) = 1$, entonces $s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 1 = 2 = s_{k+1}(v) + s_{k+2}(v)$.

Subcaso 2: Si $s_{k+1}(v) = 1$ y $s_{k+2}(v) = 2$ o $s_{k+1}(v) = 2$ y $s_{k+2}(v) = 1$, entonces $s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 1 = 3 = s_{k+1}(v) + s_{k+2}(v)$.

Subcaso 3: Si $s_{k+1}(v) = 0$ o $s_{k+2}(v) = 0$, entonces $s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 1 = 1 \leq s_{k+1}(v) + s_{k+2}(v)$.

Por lo tanto $s_{k+1}(v) + s_{k+2}(v) \geq s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 1$.
 Así que

$$\sum_{v \in V(T)} \delta_T^+(v) = \sum_{v \in V(T)} s(v) \geq \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} (s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 1).$$

Tenemos que $|V_k| = 2$, ($0 \leq k \leq 2$), entonces $\sum_{v \in V_k} (s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 1) = \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + \sum_{v \in V_k} 1 = \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 2$.
 Así

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 \sum_{v \in V_k} (s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 1) &= \sum_{k=0}^2 \left(\sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + 2 \right) \\ &= \sum_{v \in V_k} s_{k+1}(v)s_{k+2}(v) + \sum_{k=0}^2 2 \\ &= 7 + 6 = 13. \end{aligned}$$

Lo cual no puede pasar, pues $|F(T)| = 12$. De aquí T tiene a lo más 6 ternas transitivas.

□

Ejemplo 3.0.6. *El torneo 3-partito de la figura 3.25, donde $V_0 = \{u, x\}$, $V_1 = \{v, y\}$ y $V_2 = \{w, z\}$, contiene a $C = (u, v, w, x, y, z, u)$ un camino cerrado generador, entonces T es un torneo 3-partito fuertemente conexo, además tiene a $K_{2,2,2}$ como su gráfica subyacente y contiene 8 ternas, de las cuales sólo 2 no son transitivas $\{u, v, z\}$ y $\{v, x, z\}$. Entonces T contiene $6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = P_0 P_1 P_2 - 2$ ternas transitivas.*

Harary y Moser mostraron que cualquier torneo fuertemente conexo de orden $p \geq 3$ contiene al menos $p - 2$ 3-ciclos, también demostraron que esta cota es alcanzable. Con esto nos podemos plantear la siguiente pregunta ¿todo torneo n -partito fuertemente conexo, $n \geq 3$, tiene al menos $n - 2$ 3-ciclos? Si es así, ¿es esta cota la mejor posible para el número de 3-ciclos en un torneo n -partito fuertemente conexo, $n \geq 3$? Estas preguntas han sido contestadas afirmativamente en dos casos especiales, el caso en el que cada conjunto de la partición tiene exactamente un vértice, pues notemos que ese tipo de torneos n -partitos también son torneos de orden n , y el caso cuando $n = 3$, ya que

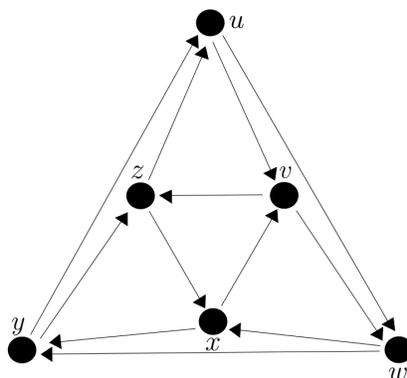


Figura 3.25.

por el teorema 3.0.19 sabemos que el máximo número de ternas transitivas en un torneo 3-partito fuertemente conexo son $|V_0||V_1||V_2| - 1$, es decir todo torneo 3-partito fuertemente conexo tiene al menos $1 = 3 - 2 = n - 2$ 3-ciclos, y en el caso que $|V_0| = |V_1| = |V_2| = 2$ entonces el torneo n -partito fuertemente conexo tiene al menos dos 3-ciclos.

Pasemos ahora al problema de determinar qué longitudes de ciclos están garantizados por la existencia de un k -ciclo en un torneo n -partito, si un torneo contiene un k -ciclo, entonces también contiene un t -ciclo para cada $t = 3, 4, \dots, k$, porque los vértices de un k -ciclo inducen un torneo fuertemente conexo de orden k el cual, como sabemos, es pancíclica (Corolario 2.0.11). En el caso de torneos bipartitos, un k -ciclo, no nos garantiza la existencia de un t -ciclo para cada $t = 3, 4, \dots, k$, ya que un torneo bipartito no contiene ciclos impares. Sin embargo, Beineke y Little mostraron que un k -ciclo en un torneo bipartito garantiza la existencia de todo ciclo de longitud par menor que k siempre que el k -ciclo no induzca una digráfica especial denotada por F_{4r} . La digráfica F_{4r} tiene los vértices v_1, v_2, \dots, v_{4r} y las flechas (v_i, v_j) para aquellos i y j que satisfagan $i - j \equiv 1 \pmod{4}$ (ver figura 3.26). Notemos, sin embargo, que F_{4r} contiene ciclos de longitudes $t = 4, 8, \dots, 4r = k$.

Si T es un torneo n -partito ($n \geq 3$) teniendo un k -ciclo que contiene vértices de exactamente dos conjuntos de la partición, entonces el problema de la determinación de las longitudes de los ciclos que están garantizados por la existencia de este k -ciclo fueron resueltas por Beineke y Little. Ahora pondremos nuestra atención en k -ciclos en torneos n -partitos ($n \geq 3$) que

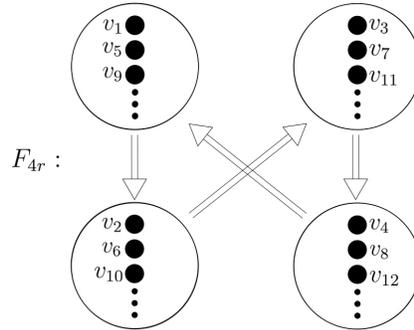


Figura 3.26.

contienen vértices de al menos tres conjuntos de la partición. Dado un ciclo de longitud k , vamos a suponer que sus vértices son v_0, v_1, \dots, v_{k-1} y sus flechas son (v_i, v_{i+1}) para $i = 0, 1, \dots, k-1$ (donde el índice es expresado módulo k).

Teorema 3.0.20. *Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$. Si T tiene un ciclo de longitud $k \geq 4$ que contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición, entonces T contiene un ciclo de longitud $k-1$, $k-2$ o $k-3$.*

Demostración. Sea C el ciclo de longitud k que contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición, si $k = 4, 5$ ó 6 , entonces por el teorema 3.0.12 existe un 3-ciclo en T , es decir T contiene un ciclo de longitud $k-1$, $k-2$ o $k-3$ respectivamente.

Supongamos entonces que $k \geq 7$. Si el ciclo tiene un 1-skipper, 2-skipper o 3-skipper, entonces T tiene un ciclo de longitud al menos $k-1$. Así supongamos que el ciclo no tiene i -skipper, para $i = 1, 2, 3$. Como el ciclo contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición, entonces por la proposición 3.0.11 existen tres vértices consecutivos en el ciclo que pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Podemos suponer que $v_j \in X$, $v_{j+1} \in Y$ y $v_{j+2} \in Z$, donde X, Y y Z son tres conjuntos de la partición de T .

Primero supongamos que C es un ciclo que sólo contiene vértices de tres conjuntos de la partición X, Y y Z , además supongamos que para cualesquiera tres vértices consecutivos en C , se tiene que los tres vértices pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Así podemos nombrar a los vértices del ciclo de tal forma que $v_j \in X$ para $j \equiv 0 \pmod{3}$, $v_j \in Y$ para $j \equiv 1 \pmod{3}$,

y $v_j \in Z$ para $j \equiv 2 \pmod{3}$, además si ocurre esto tenemos la siguiente afirmación: $k \equiv 0 \pmod{3}$.

- Supongamos que $k \not\equiv 0 \pmod{3}$, entonces $k \equiv 1 \pmod{3}$ o $k \equiv 2 \pmod{3}$,

Caso 1: Si $k \equiv 1 \pmod{3}$, entonces tenemos que $v_0 \in X, v_1 \in Y, v_2 \in Z, v_3 \in X, v_4 \in Y, v_5 \in Z, \dots, v_{k-4} \in X, v_{k-3} \in Y, v_{k-2} \in Z$ y $v_{k-1} \in X$, entonces $v_k \in Y$, pero $v_k = v_0$ y $v_0 \in X$ lo cual es una contradicción.

Caso 2: Si $k \equiv 2 \pmod{3}$, entonces tenemos que $v_0 \in X, v_1 \in Y, v_2 \in Z, v_3 \in X, v_4 \in Y, v_5 \in Z, \dots, v_{k-5} \in X, v_{k-4} \in Y, v_{k-3} \in Z, v_{k-2} \in X$ y $v_{k-1} \in Y$, entonces $v_k \in Z$, pero $v_k = v_0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $k \equiv 0 \pmod{3}$.

Además, como C no tiene i -skipper, para $i = 1, 2, 3$, entonces $(v_j, v_{j-2}) \in F(T)$ para $0 \leq j \leq k$, pues por como está definido C es un ciclo, se tiene que v_j y v_{j-2} pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Así $L_1 = (v_0, v_{k-2}, v_{k-1}, v_{k-3}, v_{k-5}, v_{k-4}, v_{k-6}, \dots, v_6)$ es una trayectoria de longitud $k - 6$ y $L_2 = (v_6, v_4, v_2, v_0)$ es una trayectoria de longitud 3, entonces $L_1 \cup L_2$ es un ciclo de longitud $k - 3$, (ver la figura 3.27).

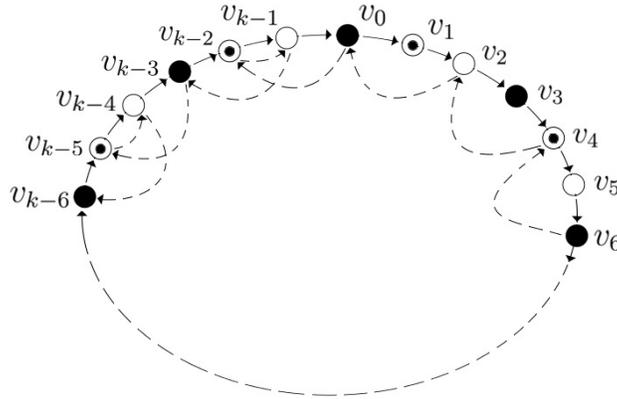


Figura 3.27.

Supongamos ahora que existen 4 vértices consecutivos en el ciclo, v_j, v_{j+1}, v_{j+2} y v_{j+3} tal que $v_j \in X, v_{j+1} \in Y, v_{j+2} \in Z$ y $v_{j+3} \notin X$. Supongamos que $j = 0$, empezaremos por construir una v_0v_h -trayectoria, llamaremos P en T , donde

$2 \leq h \leq 6$ y $V(P) = \{v_0 = v_k, v_{k-1}, v_{k-2}, v_{k-3}, \dots, v_h\}$.

Se construirá a P uniendo $v_r v_{r-j}$ -trayectorias, donde $j = 3, 4$ o 5 , dependiendo de cual de los siguientes tres casos describa la $v_{r-j} v_r$ -trayectoria en C . Supongamos que $v_{r-5} \in A$, $v_{r-4} \in B$, $v_{r-3} \in C$, $v_{r-2} \in D$, $v_{r-1} \in E$ y $v_r \in F$, donde A, B, C, D, E y F son conjuntos de la partición en T (no necesariamente distintos). Así tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Supongamos que $C = F$.

Entonces $C \neq E$ y $D \neq F$, por lo que $v_r \in F$ y $v_{r-2} \in D$, así $(v_r, v_{r-2}) \in F(T)$ o $(v_{r-2}, v_r) \in F(T)$, de igual forma $(v_{r-1}, v_{r-3}) \in F(T)$ o $(v_{r-3}, v_{r-1}) \in F(T)$, pues $v_{r-3} \in C$ y $v_{r-1} \in E$, pero el ciclo C no contiene 1-skipper, entonces $(v_r, v_{r-2}) \in F(T)$ y $(v_{r-1}, v_{r-3}) \in F(T)$. En este caso $j = 3$ y la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-3})$ (ver figura 3.28).

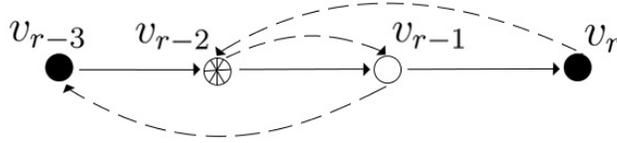


Figura 3.28.

Caso 2: Supongamos $C \neq F$ y $B \neq E$.

En este caso $j = 4$, además como $v_r \in F$ y $v_{r-3} \in C$, entonces $(v_r, v_{r-3}) \in F(T)$ o $(v_{r-3}, v_r) \in F(T)$, de igual forma como $v_{r-1} \in E$ y $v_{r-4} \in B$, entonces $(v_{r-1}, v_{r-4}) \in F(T)$ o $(v_{r-4}, v_{r-1}) \in F(T)$, pero el ciclo C no contiene 2-skipper, es decir $(v_r, v_{r-3}) \in F(T)$ y $(v_{r-1}, v_{r-4}) \in F(T)$, así la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-3}, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-4})$, (ver figura 3.29 (a)).

Caso 3: Supongamos que $C \neq F$ y $B = E$.

Entonces necesariamente $A \neq E$ y $B \neq F$, además notemos que $(v_r, v_{r-4}) \in F(T)$ o $(v_{r-4}, v_r) \in F(T)$, pues $v_r \in F$ y $v_{r-4} \in B$, de igual forma como $v_{r-1} \in E$ y $v_{r-5} \in A$, entonces $(v_{r-1}, v_{r-5}) \in F(T)$ o $(v_{r-5}, v_{r-1}) \in F(T)$, pero el ciclo C no contiene 3-skipper, es decir $(v_r, v_{r-4}) \in F(T)$ y $(v_{r-1}, v_{r-5}) \in F(T)$, en este caso $j = 5$ y la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-4}, v_{r-3}, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-5})$, (ver figura 3.29 (b)).

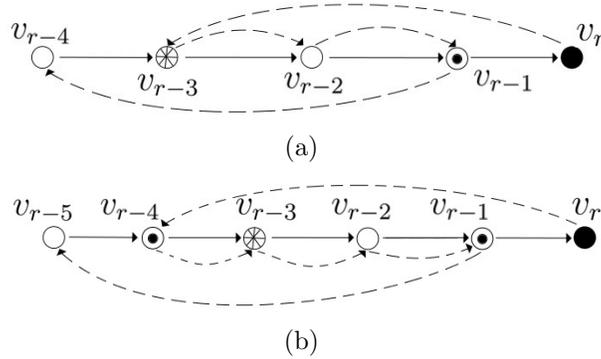


Figura 3.29.

Supongamos que P es la v_0v_h -trayectoria que se ha construido, uniendo las trayectorias de los casos anteriores, donde $2 \leq h \leq 6$, así $l(P) = k - h$.

1. Si $h = 2$ o 3 , entonces $l(P) = k - 2$ o $l(P) = k - 3$ respectivamente, entonces $P \cup (v_2, v_0)$ o $P \cup (v_3, v_0)$ respectivamente forma un ciclo de longitud $k - 1$ o $k - 2$, de modo que para $h = 2$ o 3 se cumple el teorema.
2. Si $h = 4$, entonces $l(P) = k - 4$, y si $v_4 \notin X$, entonces $(v_4, v_0) \in F(T)$ así $P \cup (v_4, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$. Si $h = 4$ y $v_4 \in X$, se tiene que $(v_4, v_2) \in F(T)$ pues $v_2 \in Z$, por otro lado $(v_2, v_0) \in F(T)$ pues $v_0 \in X$ y $v_2 \in Z$, entonces $P \cup (v_4, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 2$ (figura 3.30).

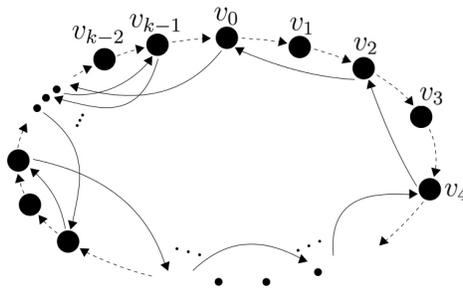


Figura 3.30.

3. Si $h = 5$, entonces $l(P) = k - 5$, notemos que v_5 es adyacente hacia cualquiera de los dos vértices v_2 o v_3 , esto pues si v_3 y v_5 pertenecen al

mismo conjunto de la partición, entonces existe $(v_5, v_2) \in F(T)$, pues v_3 es adyacente a v_2 , por otro lado si v_3 y v_5 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_5, v_3) \in F(T)$. Así $P \cup (v_5, v_2, v_0)$ o $P \cup (v_5, v_3, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$.

4. Por último si $h = 6$, entonces $l(P) = k - 6$, así tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $v_6 \notin Z$, entonces $(v_6, v_2) \in F(T)$ pues $v_2 \in Z$, también $(v_3, v_0) \in F(T)$ ya que $v_3 \notin X$ y $v_0 \in X$, así $P \cup (v_6, v_2, v_3, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$ (figura 3.31 (a)).

Caso 2: Si $v_6 \in Z$ y $v_4 \notin X$, entonces como v_2 es adyacente a v_3 , entonces $v_3 \notin Z$, así $(v_6, v_3) \in F(T)$, de igual forma $(v_4, v_0) \in F(T)$ ya que $v_0 \in X$, así $P \cup (v_6, v_3, v_4, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$.

Caso 3: Si $v_6 \in Z$ y $v_4 \in X$, entonces $(v_6, v_3) \in F(T)$ pues $v_3 \in Z$, también $(v_3, v_0) \in F(T)$ pues $v_3 \notin X$ y $v_0 \in X$, entonces $P \cup (v_6, v_3, v_4, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 2$ (figura 3.31 (b)).

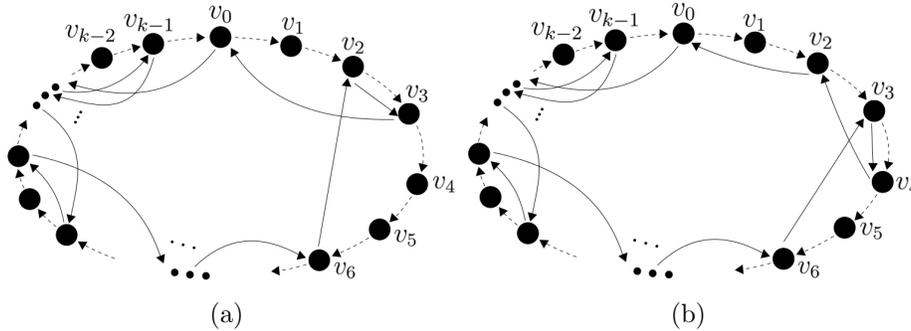


Figura 3.31.

□

Con argumentos similares a los empleados en la prueba del teorema 3.0.20, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.0.21. *Sea T un torneo n -partito, $n \geq 3$. Supongamos que T tiene un k -ciclo, $k \geq 5$, que contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición. Entonces T contiene un ciclo de longitud $k - 2$ o $k - 3$.*

Demostración. Sea C un ciclo de longitud k que contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición, si $k = 5$ o 6 , entonces por el teorema 3.0.12 existe un 3-ciclo en T , es decir, T contiene un ciclo de longitud $k - 2$ o $k - 3$ respectivamente. Supongamos entonces que $k \geq 7$. Si el ciclo tiene un 2-skipper o 3-skipper, entonces T tiene un ciclo de longitud al menos $k - 2$. Así supongamos que C no contiene i -skipper, con $i = 2, 3$. Sea w el número de 1-skipper que tiene C , entonces tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $w = 0$, entonces C no tiene 1-skipper ni 2-skipper ni 3-skipper.

Como el ciclo contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición, entonces por la proposición 3.0.11 existen tres vértices consecutivos en el ciclo que pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Podemos suponer que $v_j \in X$, $v_{j+1} \in Y$ y $v_{j+2} \in Z$, donde X, Y y Z son tres conjuntos de la partición de T .

Primero supongamos que C es un ciclo que sólo contiene vértices de tres conjuntos de la partición X, Y y Z , además supongamos que para cualesquiera tres vértices consecutivos en C , se tiene que los tres vértices pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Así podemos nombrar a los vértices del ciclo de tal forma que $v_j \in X$ para $j \equiv 0 \pmod{3}$, $v_j \in Y$ para $j \equiv 1 \pmod{3}$, y $v_j \in Z$ para $j \equiv 2 \pmod{3}$, si ocurre esto, $k \equiv 0 \pmod{3}$, pues de lo contrario si suponemos que $k \not\equiv 0 \pmod{3}$, entonces $k \equiv 1 \pmod{3}$ o $k \equiv 2 \pmod{3}$. Si $k \equiv 1 \pmod{3}$, entonces tenemos que $v_0 \in X, v_1 \in Y, v_2 \in Z, v_3 \in X, v_4 \in Y, v_5 \in Z, \dots, v_{k-4} \in X, v_{k-3} \in Y, v_{k-2} \in Z$ y $v_{k-1} \in X$, entonces $v_k \in Y$, pero $v_k = v_0$ y $v_0 \in X$ lo cual es una contradicción, análogamente si $k \equiv 2 \pmod{3}$, entonces tenemos que $v_0 \in X, v_1 \in Y, v_2 \in Z, v_3 \in X, v_4 \in Y, v_5 \in Z, \dots, v_{k-5} \in X, v_{k-4} \in Y, v_{k-3} \in Z, v_{k-2} \in X$ y $v_{k-1} \in Y$, entonces $v_k \in Z$, pero $v_k = v_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $k \equiv 0 \pmod{3}$.

Ahora como C no tiene i -skipper, para $i = 1, 2, 3$, entonces $(v_j, v_{j-2}) \in F(T)$ para $0 \leq j \leq k$, se tiene que v_j y v_{j-2} pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Así $L_1 = (v_0, v_{k-2}, v_{k-1}, v_{k-3}, v_{k-5}, v_{k-6}, \dots, v_6)$ es

una trayectoria de longitud $k - 6$ y $L_2 = (v_6, v_4, v_2, v_0)$ es una trayectoria de longitud 3, entonces $L_1 \cup L_2$ es un ciclo de longitud $k - 3$ (ver figura 3.32).

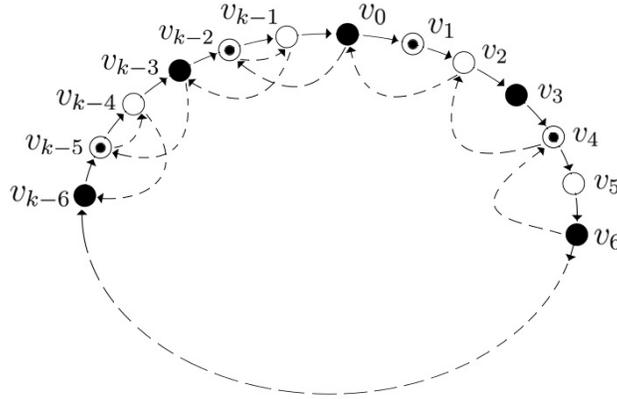


Figura 3.32.

Supongamos ahora que existen 4 vértices consecutivos en el ciclo, v_j, v_{j+1}, v_{j+2} y v_{j+3} tal que $v_j \in X, v_{j+1} \in Y, v_{j+2} \in Z$ y $v_{j+3} \notin X$. Supongamos que $j = 0$, empezaremos por construir una $v_0 v_h$ -trayectoria que llamaremos P en T , donde $3 \leq h \leq 7$ y $V(P) = \{v_0 = v_k, v_{k-1}, v_{k-2}, v_{k-3}, \dots, v_h\}$.

Se construirá a P uniendo $v_r v_{r-j}$ -trayectorias, donde $j = 3, 4$ ó 5 , dependiendo de cual de los siguientes tres casos describa la $v_{r-j} v_r$ -trayectoria en C . Supongamos que $v_{r-5} \in A, v_{r-4} \in B, v_{r-3} \in C, v_{r-2} \in D, v_{r-1} \in E$ y $v_r \in F$, donde A, B, C, D, E y F son conjuntos de la partición en T (no necesariamente distintos). Así tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1: Supongamos que $C = F$.

Entonces $C \neq E$ y $D \neq F$, por lo que $v_r \in F$ y $v_{r-2} \in D$, así $(v_r, v_{r-2}) \in F(T)$ o $(v_{r-2}, v_r) \in F(T)$, de igual forma $(v_{r-1}, v_{r-3}) \in F(T)$ o $(v_{r-3}, v_{r-1}) \in F(T)$, pues $v_{r-3} \in C$ y $v_{r-1} \in E$, pero el ciclo C no contiene 1-skipper, entonces $(v_r, v_{r-2}) \in F(T)$ y $(v_{r-1}, v_{r-3}) \in F(T)$. En este caso $j = 3$ y la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-3})$ (ver figura 3.33).

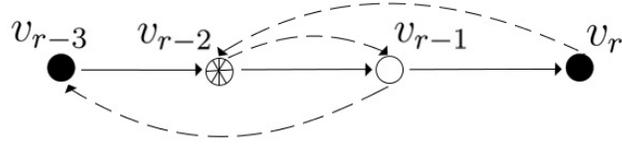


Figura 3.33.

Subcaso 2: Supongamos $C \neq F$ y $B \neq E$.

En este caso $j = 4$, además como $v_r \in F$ y $v_{r-3} \in C$, entonces $(v_r, v_{r-3}) \in F(T)$ o $(v_{r-3}, v_r) \in F(T)$, de igual forma como $v_{r-1} \in E$ y $v_{r-4} \in B$, entonces $(v_{r-1}, v_{r-4}) \in F(T)$ o $(v_{r-4}, v_{r-1}) \in F(T)$, pero el ciclo C no contiene 2-skipper, es decir $(v_r, v_{r-3}) \in F(T)$ y $(v_{r-1}, v_{r-4}) \in F(T)$, así la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-3}, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-4})$ (ver figura 3.34 (a)).

Subcaso 3: Supongamos que $C \neq F$ y $B = E$.

Entonces necesariamente $A \neq E$ y $B \neq F$, además notemos que $(v_r, v_{r-4}) \in F(T)$ o $(v_{r-4}, v_r) \in F(T)$, pues $v_r \in F$ y $v_{r-4} \in B$, de igual forma como $v_{r-1} \in E$ y $v_{r-5} \in A$, entonces $(v_{r-1}, v_{r-5}) \in F(T)$ o $(v_{r-5}, v_{r-1}) \in F(T)$, pero el ciclo C no contiene 3-skipper, es decir $(v_r, v_{r-4}) \in F(T)$ y $(v_{r-1}, v_{r-5}) \in F(T)$, en este caso $j = 5$ y la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-4}, v_{r-3}, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-5})$ (ver figura 3.34 (b)).

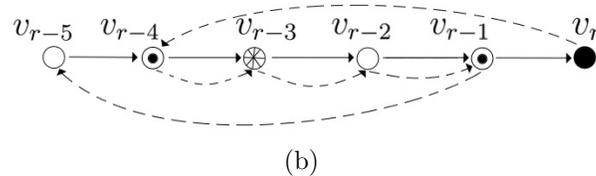
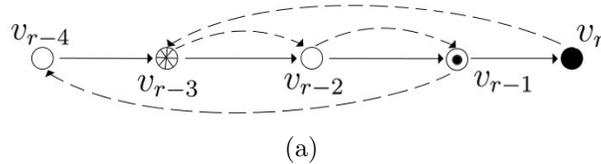


Figura 3.34.

Supongamos que P es la $v_0 v_h$ -trayectoria que se ha construido uniendo las trayectorias de los subcasos anteriores y $3 \leq h \leq 7$ y $l(P) = k - h$.

- Si $h = 3$, entonces $l(P) = k - 3$, entonces $P \cup (v_3, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 2$, de modo que para $h = 3$ se cumple el teorema.
- Si $h = 4$, $l(P) = k - 4$, y si $v_4 \notin X$, entonces $(v_4, v_0) \in F(T)$ así $P \cup (v_4, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$. Si $h = 4$ y $v_4 \in X$, tenemos que $(v_4, v_2) \in F(T)$, pues $v_2 \in Z$. Por otro lado $(v_2, v_0) \in F(T)$ pues $v_0 \in X$ y $v_2 \in Z$, entonces $P \cup (v_4, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 2$.
- Si $h = 5$, entonces $l(P) = k - 5$, notemos que v_5 es adyacente hacia cualquiera de los dos vértices v_2 ó v_3 , esto pues si v_3 y v_5 pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces existe $(v_5, v_2) \in F(T)$, pues v_3 es adyacente a v_2 . Por otro lado si v_3 y v_5 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_5, v_3) \in F(T)$. Así $P \cup (v_5, v_2, v_0)$ (ver figura 3.35 (a)) o $P \cup (v_5, v_3, v_0)$ (ver figura 3.35 (b)) forma un ciclo de longitud $k - 3$.

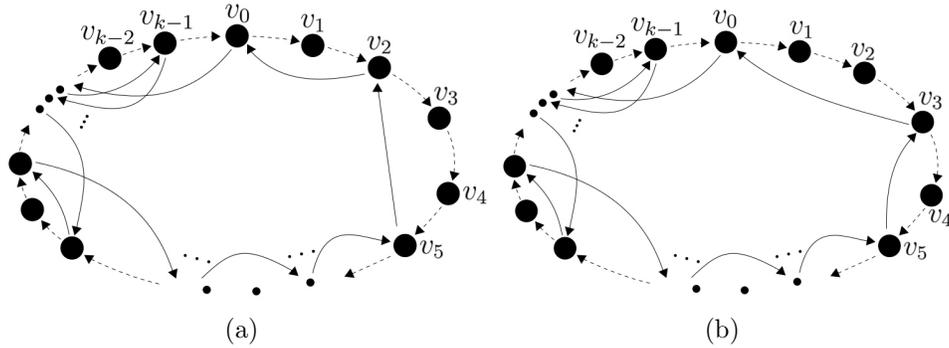


Figura 3.35.

- Si $h = 6$, $l(P) = k - 6$, entonces tenemos los siguientes subcasos:
 - Subcaso 1: Si $v_6 \notin Z$, entonces $(v_6, v_2) \in F(T)$ pues $v_2 \in Z$ y $(v_3, v_0) \in F(T)$ pues $v_3 \notin X$ y $v_0 \in X$, entonces $P \cup (v_6, v_2, v_3, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$ (figura 3.36 (a)).
 - Subcaso 2: Si $v_6 \in Z$ y $v_4 \notin X$, entonces como v_2 es adyacente a v_3 , entonces $v_3 \notin Z$, entonces $(v_6, v_3) \in F(T)$, de igual forma (v_4, v_0) pues $v_0 \in X$, así $P \cup (v_6, v_3, v_4, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$.

Subcaso 3: Si $v_6 \in Z$ y $v_4 \in X$, entonces $(v_6, v_3) \in F(T)$ pues $v_3 \in Z$, también $(v_3, v_0) \in F(T)$ pues $v_3 \notin X$ y $v_0 \in X$, entonces $P \cup (v_6, v_3, v_4, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 2$, (figura 3.36 (b)).

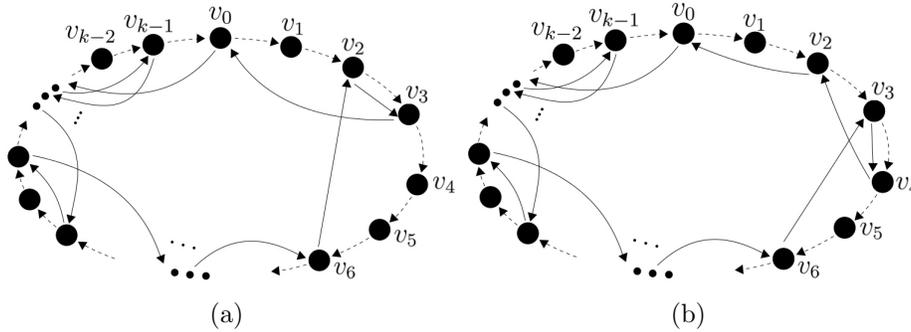


Figura 3.36.

- Si $h = 7$, donde $l(p) = k - 7$, entonces tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1: Si v_7 y v_4 pertenecen al mismo conjunto de la partición, y como v_3 es adyacente a v_4 , entonces v_3 no pertenece al mismo conjunto que v_4 y v_7 , por lo que $(v_7, v_3) \in F(T)$.

I) Si $v_4 \in Y$, entonces v_4 y v_2 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, así $(v_4, v_2) \in F(T)$, además $(v_2, v_0) \in F(T)$, de donde $P \cup (v_7, v_3, v_4, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$ en T .

II) Si $v_4 \notin Y$, entonces $(v_4, v_1) \in F(T)$, además $(v_2, v_0) \in F(T)$, así $P \cup (v_7, v_3, v_4, v_1, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 2$ en T (figura 3.37) (a).

Subcaso 2 : Si v_7 y v_4 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_7, v_4) \in F(T)$.

I) Si $v_5 \in Y$, entonces v_5 y v_2 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, de donde $(v_5, v_2) \in F(T)$, entonces $P \cup (v_7, v_4, v_5, v_2, v_0)$ es un ciclo de longitud $k - 3$ en T .

II) Si $v_5 \notin Y$, entonces $(v_5, v_1) \in F(T)$, además $(v_2, v_0) \in F(T)$, entonces $P \cup (v_7, v_4, v_5, v_1, v_2, v_0)$ es un ciclo de longitud $k - 2$ en T (figura 3.37) (b)).

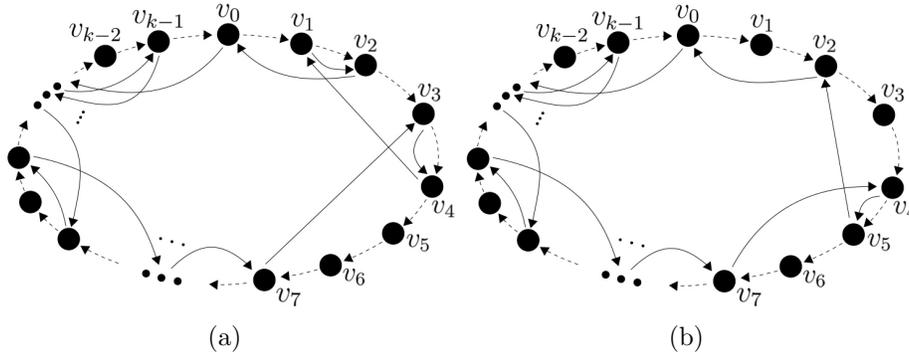


Figura 3.37.

Así para el caso cuando C no tiene 1-skipper ni 2-skipper o 3-skipper, se tiene que T tiene un ciclo de longitud $k - 2$ o $k - 3$.

Caso 2: Si $w = 1$, entonces C tiene un 1-skipper, sabemos que C tiene al menos tres vértices que pertenecen a distintos conjuntos de la partición, si (v_j, v_{j+2}) es el 1-skipper, entonces $C_1 = (C - \{v_{j+1}\}) \cup (v_i, v_{j+2})$ es un ciclo de longitud $k - 1$, sin pSupongamos que $v_0 \in X$, $v_1 \in Z$ y $v_2 \in Y$ son los tres vértices que pertenecen a distintos conjuntos de la partición, en este caso, en particular, el 1-skipper es $(v_0, v_2) \in F(T)$, entonces podemos nombrar a los vértices de C de tal forma que $v_0 \in X$, $v_1 \in Z$ y $v_2 \in Y$, $v_j \in X$ para $j \equiv 1 \pmod{2}$, con $3 \leq j \leq k - 1$ y $v_j \in Y$ para $j \equiv 0 \pmod{2}$ con $3 \leq j \leq k - 1$. Además como C no tiene i -skipper, para $i = 2, 3$, entonces $(v_j, v_{j-2}) \in F(T)$ para $0 \leq i \leq k - 1$ y $j \neq 2, 3$, pues por como está definido C , se tiene que v_j y v_{j-2} pertenecen a distintos conjuntos de la partición.

Notemos que $l(C) \neq 7$ pues si $l(C) = 7$, entonces como C no tiene 2-skipper, así $(v_1, v_4) \notin F(T)$, es decir $(v_4, v_1) \in F(T)$, pero $(v_4, v_1) = (v_4, v_8)$ que resulta ser un 3-skipper, lo cual es una contradicción, por lo tanto $k \geq 7$ (figura 3.38).

Sean $v_{(k-6)-4e}, v_{(k-5)-4e}, v_{(k-4)-4e}, v_{(k-3)-4e}, v_{(k-2)-4e}$ cinco vértices consecutivos en C para algún entero e , con $0 \leq e \leq d - 2$, notemos que $k - 2 - 4e \equiv 1 \pmod{2}$, $k - 4 - 4e \equiv 1 \pmod{2}$ y $k - 6 - 4e \equiv 1 \pmod{2}$, además $k - 2 - 4e, k - 4 - 4e, k - 6 - 4e \neq 1$, para $0 \leq e \leq d - 2$, pues para que se diera la igualdad e tendría que tomar el valor $d - \frac{1}{2}$, $d - 1$ y $d - \frac{3}{2}$ respectivamente, entonces $v_{(k-2)-4e}, v_{(k-4)-4e}$ y $v_{(k-6)-4e} \in X$, por otro lado $k - 3 - 4e \equiv 0 \pmod{2}$ y $k - 5 - 4e \equiv 0 \pmod{2}$, donde

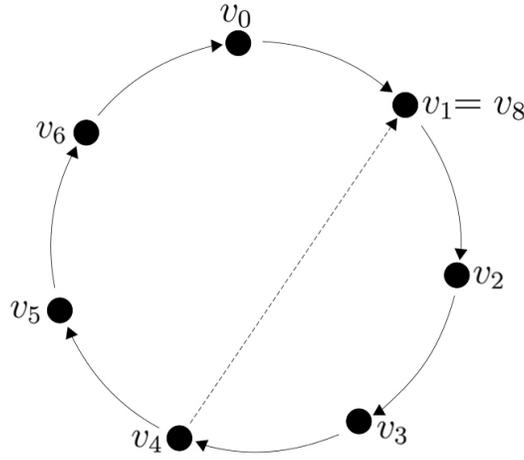


Figura 3.38.

$k - 3 - 4e, k - 5 - 4e \neq 0$, para $0 \leq e \leq d - 2$, pues para que se diera la igualdad e tendría que tomar el valor $d - \frac{1}{2}$ y $d - 1$ respectivamente, entonces $v_{(k-3)-4e}$ y $v_{(k-5)-4e} \in Y$, esto por definición de C .

Entonces $(v_{(k-2)-4e}, v_{(k-5)-4e}), (v_{(k-5)-4e}, v_{(k-4)-4e}), (v_{(k-4)-4e}, v_{(k-3)-4e})$ y $(v_{(k-3)-4e}, v_{(k-6)-4e}) \in F(T)$, así $L_e = (v_{(k-2)-4e}, v_{(k-5)-4e}, v_{(k-4)-4e}, v_{(k-3)-4e}, v_{(k-6)-4e})$ es una $v_{(k-2)-4e}v_{(k-6)-4e}$ -trayectoria en T , donde $l(L_e) = 4$ y $V(L_e) = \{v_{(k-6)-4e}, v_{(k-5)-4e}, v_{(k-4)-4e}, v_{(k-3)-4e}, v_{(k-2)-4e}\}$ (ver figura 3.39).

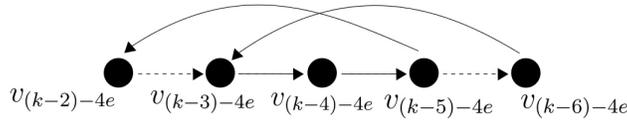


Figura 3.39.

Debido a que la longitud es impar tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1: Si $k = 4d + 1$, con $d \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Afirmamos que T contiene a L una $v_{k-2}v_3$ -trayectoria, donde $V(L) = \{v_3, v_4, v_5, \dots, v_{k-2}\}$, para esto consideremos a $L_e = (v_{(k-2)-4e}, v_{(k-5)-4e}, v_{(k-4)-4e}, v_{(k-3)-4e}, v_{(k-6)-4e})$, notemos que para todo entero e_1 , con $0 \leq e_1 \leq d - 3$, se tiene que existe un entero e , con $1 \leq e \leq d - 2$, tal que $v_{(k-6)-4e_1} = v_{(k-2)-4e}$, pues si $k - 6 - 4e = (k - 2) -$

$4(e_1+1)$, entonces si $e = e_1+1$ se da la igualdad, así podemos considerar a $L = \bigcup_{e=0}^{d-2} L_e = (v_{k-2}, v_{k-5}, v_{k-4}, v_{k-3}, v_{k-2}, v_{k-6}, \dots, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3)$ un $v_{k-2}v_3$ -camino, como L es la unión de $v_{(k-2)-4e}v_{(k-6)-4e}$ -trayectorias y por como están construidas estas trayectorias se tiene que L no repite vértices, con esto podemos concluir que L es una trayectoria en T (ver figura 3.40), donde $V(L) = \{v_3, v_4, v_5, \dots, v_{k-2}\}$ y $l(L) = (k-2) - 3 = k-5$.

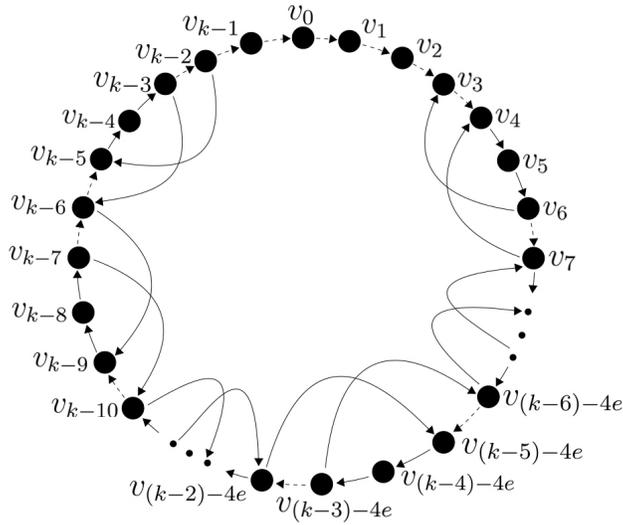


Figura 3.40.

Notemos que v_3 y $v_{k-2} \in X$, entonces (v_3, v_1) y $(v_1, v_{k-2}) \in F(T)$, pues $v_1 \in Z$, entonces $L_1 \cup (v_3, v_1, v_{k-2})$ es un ciclo de longitud $k-2$ en T .

Subcaso 2: Si $k = 4d + 3$, con $d \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Afirmamos que T contiene a L una $v_{k-2}v_5$ -trayectoria, donde $V(L) = \{v_3, v_4, v_5, \dots, v_{k-2}\}$, para esto consideremos a $L_e = (v_{(k-2)-4e}, v_{(k-5)-4e}, v_{(k-4)-4e}, v_{(k-3)-4e}, v_{(k-6)-4e})$, notemos que para todo entero e_1 , con $0 \leq e_1 \leq d-3$, se tiene que existe un entero e , con $1 \leq e \leq d-2$, tal que $v_{(k-6)-4e_1} = v_{(k-2)-4e}$, pues si $k-6-4e_1 = (k-2)-4(e_1+1)$, entonces si $e = e_1+1$ se da la igualdad, así podemos considerar a $L = \bigcup_{e=0}^{d-2} L_e = (v_{k-2}, v_{k-5}, v_{k-4}, v_{k-3}, v_{k-2}, v_{k-6}, \dots, v_9, v_6, v_7, v_8, v_5)$ un $v_{k-2}v_5$ -camino, como L es la unión de $v_{(k-2)-4e}v_{(k-6)-4e}$ -trayectorias y por como están construidas estas trayectorias se

tiene que L no repite vértices, con esto podemos concluir que L es una trayectoria en T , donde $V(L) = \{v_5, v_6, v_7, \dots, v_{k-2}\}$ y $l(L) = (k - 2) - 5 = k - 7$.

Notemos que v_{k-2} y $v_5 \in X$, además v_2 y $v_4 \in Y$, entonces (v_5, v_2) y $((v_4, v_1) \in F(T)$, por otro lado como $v_1 \in Z$, entonces $(v_1, v_{k-2}) \in F(T)$. Así $L' = (v_5, v_2, v_3, v_4, v_1, v_{k-2})$ es una $v_5 v_{k-2}$ -trayectoria en T de longitud 5, entonces $L \cup L'$ es un ciclo en T , con $l(L \cup L') = k - 7 + 5 = k - 2$ (ver figura 3.41).

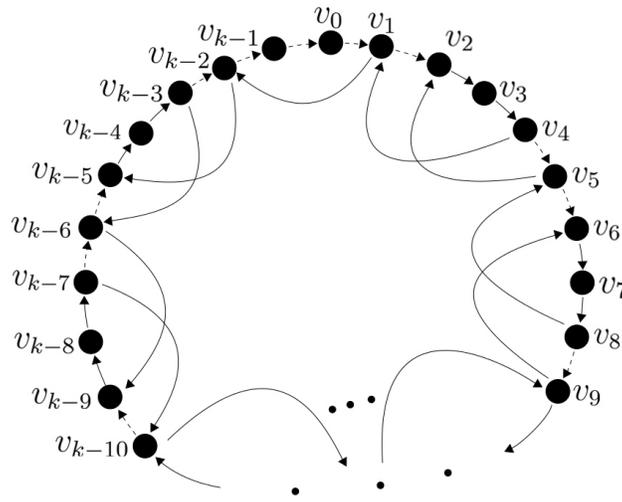


Figura 3.41.

Por lo tanto si C es de está forma entonces T tiene un ciclo de longitud $k - 2$ o $k - 3$.

Ahora supongamos que C_1 tiene al menos tres vértices de distintos conjuntos de la partición, con $l(C_1) = k - 1$, y $C_1 = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-2}, v_{k-1})$ no tiene i -skipper, para $i = 1, 2, 3$. Como C_1 contiene vértices de al menos tres conjuntos distintos de la partición, entonces por la proposición 3.0.11 existen tres vértices consecutivos en C_1 que pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Podemos suponer que $v_j \in X$, $v_{j+1} \in Y$ y $v_{j+2} \in Z$, donde X, Y y Z son tres conjuntos de la partición de T . Primero supongamos que C_1 es un ciclo que sólo contiene vértices de tres conjuntos de la partición X, Y y Z , además supongamos que para cualesquiera tres vértices consecutivos en C_1 , se tiene que los tres vértices pertenecen a distintos conjuntos de la partición. Así podemos nombrar

a los vértices del ciclo de tal forma que $v_j \in X$ para $j \equiv 0 \pmod{3}$, $v_j \in Y$ para $j \equiv 1 \pmod{3}$, y $v_j \in Z$ para $j \equiv 2 \pmod{3}$, además si ocurre esto, se tiene que $k \equiv 0 \pmod{3}$, pues de lo contrario si suponemos que $k \not\equiv 0 \pmod{3}$, entonces o $k \equiv 1 \pmod{3}$ o $k \equiv 2 \pmod{3}$, si $k \equiv 1 \pmod{3}$, entonces tenemos que $v_0 \in X, v_1 \in Y, v_2 \in Z, v_3 \in X, v_4 \in Y, v_5 \in Z, \dots, v_{k-4} \in X, v_{k-3} \in Y, v_{k-2} \in Z$ y $v_{k-1} \in X$, de donde $v_k \in Y$, pero $v_k = v_0$ y $v_0 \in X$ lo cual es una contradicción, de igual forma si $k \equiv 2 \pmod{3}$, entonces tenemos que $v_0 \in X, v_1 \in Y, v_2 \in Z, v_3 \in X, v_4 \in Y, v_5 \in Z, \dots, v_{k-5} \in X, v_{k-4} \in Y, v_{k-3} \in Z, v_{k-2} \in X$ y $v_{k-1} \in Y$, por lo que $v_k \in Z$, pero $v_k = v_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $k \equiv 0 \pmod{3}$.

Además como C_1 no tiene i -skipper para $i = 1, 2, 3$, entonces $(v_j, v_{j-2}) \in F(T)$ para $0 \leq j \leq k$, por como está definido C_1 , se tiene que v_j y v_{j-2} pertenecen a distintos conjuntos de la partición.

Así $L_1 = (v_0, v_{k-3}, v_{k-2}, v_{k-4}, v_{k-6}, v_{k-7}, \dots, v_5)$ es una trayectoria de longitud $k - 7$ y $L_2 = (v_5, v_3, v_4, v_2, v_0)$ es una trayectoria de longitud 4, entonces $L_1 \cup L_2$ es un ciclo de longitud $k - 3$ en T (ver figura 3.42).

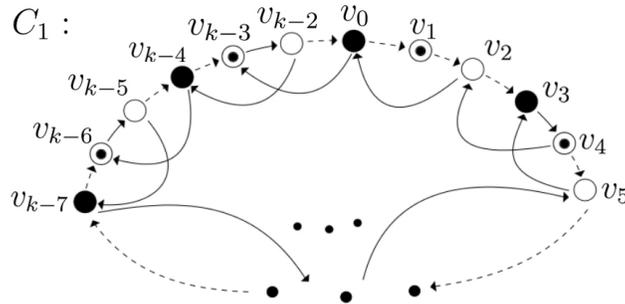


Figura 3.42.

Supongamos ahora que existen cuatro vértices consecutivos v_j, v_{j+1}, v_{j+2} y v_{j+3} en C_1 , tal que $v_j \in X, v_{j+1} \in Y, v_{j+2} \in Z$ y $v_{j+3} \notin X$. Supongamos que $j = 0$, empezaremos por construir una $v_0 v_h$ -trayectoria que llamaremos P en T , donde $2 \leq h \leq 6$ y $V(P) = \{v_0 = v_{k-1}, v_{k-2}, v_{k-3}, v_{k-4}, \dots, v_h\}$.

Se construirá a P uniendo $v_r v_{r-j}$ -trayectorias, donde $j = 3, 4$ o 5 , dependiendo de en cual de los siguientes tres casos describa la $v_{r-j} v_r$ -trayectoria en C . Supongamos que $v_{r-5} \in A, v_{r-4} \in B, v_{r-3} \in C, v_{r-2} \in D, v_{r-1} \in E$ y $v_r \in F$, donde A, B, C, D, E y F son conjun-

tos de la partición en T (no necesariamente distintos). Así tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1: Supongamos que $C = F$.

Entonces $C \neq E$ y $D \neq F$. Ahora como $v_r \in F$ y $v_{r-2} \in D$, se tiene que $(v_r, v_{r-2}) \in F(T)$, de igual forma $(v_{r-1}, v_{r-3}) \in F(T)$, pues $v_{r-3} \in C$ y $v_{r-1} \in E$. En este caso $j = 3$ y la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-3})$ (ver figura 3.43).

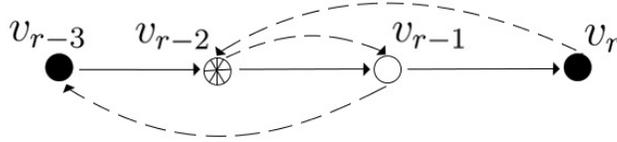


Figura 3.43.

Subcaso 2: Supongamos $C \neq F$ y $B \neq E$.

En este caso $j = 4$, además como $v_r \in F$ y $v_{r-3} \in C$, entonces $(v_r, v_{r-3}) \in F(T)$, de igual forma como $v_{r-1} \in E$ y $v_{r-4} \in B$, se tiene que $(v_{r-1}, v_{r-4}) \in F(T)$, así la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-3}, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-4})$ (ver figura 3.44 (a)).

Subcaso 3: Supongamos que $C \neq F$ y $B = E$.

Entonces necesariamente $A \neq E$ y $B \neq F$, además notemos que $(v_r, v_{r-4}) \in F(T)$, pues $v_r \in F$ y $v_{r-4} \in B$, de igual forma como $v_{r-1} \in E$ y $v_{r-5} \in A$, entonces $(v_{r-1}, v_{r-5}) \in F(T)$, en este caso $j = 5$ y la $v_r v_{r-j}$ -trayectoria que se añadirá para construir a P , es $(v_r, v_{r-4}, v_{r-3}, v_{r-2}, v_{r-1}, v_{r-5})$ (ver figura 3.44 (b)).

Sea P la $v_0 v_h$ -trayectoria que se ha construido, uniendo las trayectorias de los subcasos anteriores, donde $2 \leq h \leq 6$, y $l(P) = (k - 1) - h$.

- Si $h = 2$ o 3 , entonces $l(P) = k - 3$ o $l(P) = k - 4$ respectivamente, entonces $P \cup (v_2, v_0)$ o $P \cup (v_3, v_0)$ respectivamente forma un ciclo de longitud $k - 2$ o $k - 3$, de modo que para $h = 2$ o 3 se cumple el teorema.

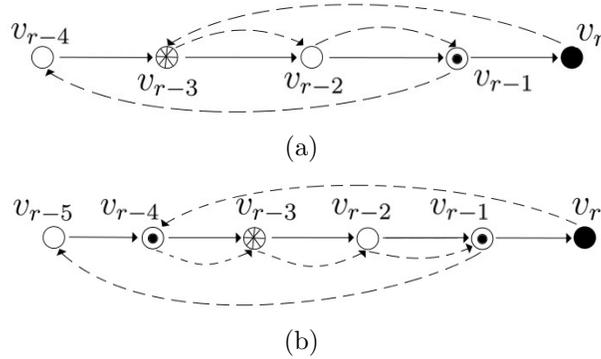


Figura 3.44.

- Si $h = 4$, donde $l(P) = k - 5$, y si $v_4 \notin Y$, entonces $(v_4, v_1) \in F(T)$ pues $v_1 \in Y$, además $v_2 \in Z$, entonces $(v_2, v_0) \in F(T)$, así $P \cup (v_4, v_1, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 2$. Si $h = 4$ y $v_4 \in Y$, entonces $(v_4, v_2) \in F(T)$, pues $v_2 \in Z$, por otro lado $(v_2, v_0) \in F(T)$ pues $v_0 \in X$ y $v_2 \in Z$, entonces $P \cup (v_4, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$.
- Si $h = 5$, entonces $l(P) = k - 6$, notemos que v_5 es adyacente hacia cualquiera de los dos vértices v_1 o v_2 , esto pues si v_1 y v_5 pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces existe $(v_5, v_2) \in F(T)$, pues v_1 es adyacente a v_2 . Por otro lado si v_1 y v_5 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_5, v_1) \in F(T)$. Así $P \cup (v_5, v_2, v_3, v_0)$ (ver figura 3.45 (a)) o $P \cup (v_5, v_1, v_2, v_0)$ (ver figura 3.45 (b)) forma un ciclo de longitud $k - 3$.

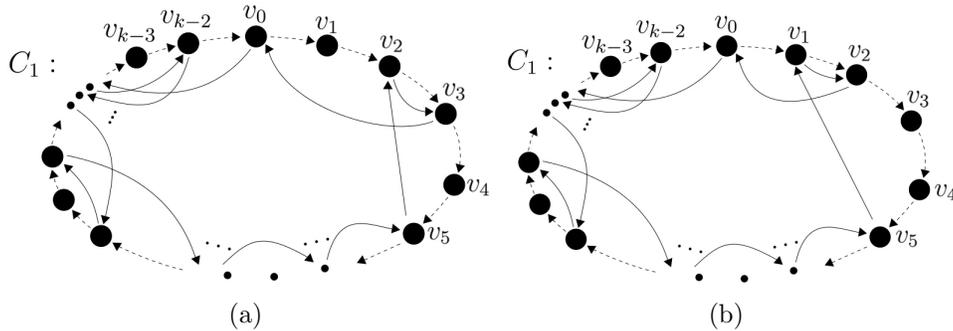


Figura 3.45.

- Por último si $h = 6$, donde $l(P) = k - 7$, entonces tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1: Si v_6 y v_3 pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_6, v_4) \in F(T)$, pues v_4 y v_3 no pertenecen al mismo conjunto de la partición. Si $v_4 \in Y$, entonces $(v_4, v_2) \in F(T)$, pues $v_2 \in Z$, entonces $P \cup (v_6, v_4, v_2, v_3, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$. Si $v_4 \notin Y$, entonces $(v_4, v_1) \in F(T)$, y $P \cup (v_6, v_4, v_1, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$.

Subcaso 2: Si v_6 y v_3 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_6, v_3) \in F(T)$. Si $v_4 \in Z$, entonces $(v_5, v_2) \in F(T)$, pues v_4 y v_5 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $P \cup (v_6, v_3, v_4, v_5, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 2$ (ver figura 3.46 (a)). Si $v_4 \notin Z$, entonces $(v_4, v_2) \in F(T)$, y $P \cup (v_6, v_3, v_4, v_2, v_0)$ forma un ciclo de longitud $k - 3$ (ver figura 3.46 (b)).

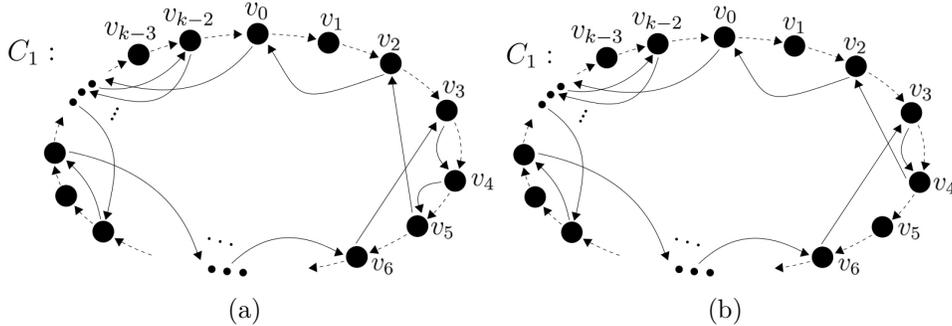


Figura 3.46.

Caso 3: Si $w = 2$, es decir si C tiene dos 1-skipper, entonces tenemos dos subcasos:

Subcaso 1: Si (v_j, v_{j+2}) y (v_{j+1}, v_{j+3}) son los dos 1-skipper, así si $C_1 = (C - \{v_{j+1}\}) \cup (v_j, v_{j+2})$ (ver figura 3.47 (b)) o $C_1 = (C - \{v_{j+2}\}) \cup (v_{j+1}, v_{j+3})$ (ver figura 3.47 (c)), entonces en cualquiera de los dos casos C_1 no tiene i -skipper, con $i = 1, 2, 3$, la demostración es la misma que en el caso 1, pues en él, C_1 no tiene i -skipper, con $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto C tiene un ciclo de longitud $k - 2$ o $k - 3$.

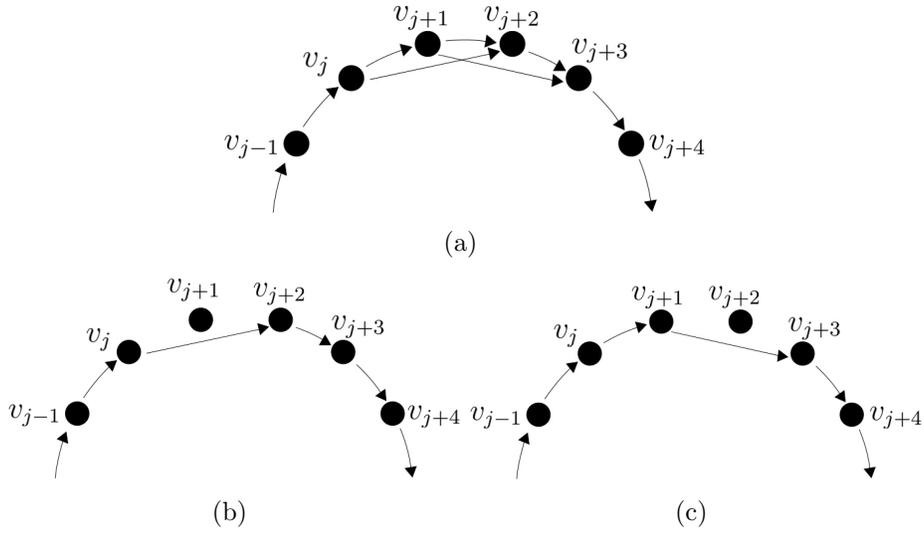


Figura 3.47.

Subcaso 2: Si (v_j, v_{j+2}) y (v_{j+g}, v_{j+g+2}) con $v_{j+g} \neq v_{j+1}$, entonces $C_1 = (C - \{v_{j+1}, v_{j+g+1}\}) \cup \{(v_j, v_{j+2}), (v_{j+g}, v_{j+g+2})\}$ (ver figura 3.48 (b)) es un ciclo de longitud $k - 2$.

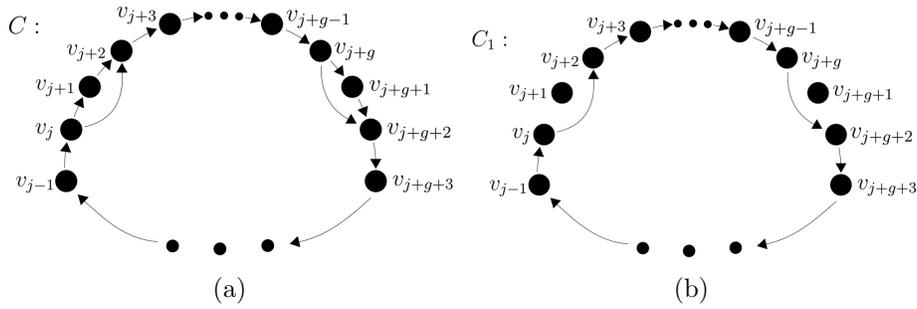


Figura 3.48.

Caso 4: Si $w \geq 3$, entonces C tiene al menos tres 1-skipper, entonces T contiene un ciclo de longitud al menos $k - 2$.

Por los cuatro casos se puede concluir que si T tiene un ciclo de longitud k , con $k \geq 5$ que tenga al menos tres vértices de distintos conjuntos, entonces T contiene un ciclo de longitud $k - 2$ o $k - 3$. \square

Ahora mostraremos que el resultado del teorema 3.0.21 es el mejor posible, pues si $k = 3s$, para algún entero $s \geq 1$, existe un torneo n -partito que tiene un ciclo de longitud k y $k - 3$, pero no un ciclo de longitud $k - 2$. Además, para cada número entero impar $k \geq 7$, existe un torneo n -partito que tiene ciclos de longitud k y $k - 2$, pero no ciclos de longitud $k - 3$. Supongamos primero que $k = 3s$, para algún entero $s \geq 1$.

Sean $V_0, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ conjuntos no vacíos ajenos en vértices, donde $|V_0| = |V_1| = |V_2| = s$. Sea T el torneo n -partito obtenido de la siguiente forma, los vértices de V_0 son adyacentes hacia los vértices de V_1 , los vértices de V_1 son adyacentes hacia los vértices de V_2 y los vértices de V_2 son adyacentes hacia los vértices de V_0 , cada vértice de $V_0 \cup V_1 \cup V_2$ es adyacente hacia cada vértice de $V_3 \cup V_4 \cup \dots \cup V_{n-1}$, y finalmente, para $j = 3, 4, \dots, n - 2$, todos los vértices de V_j son adyacentes hacia todos los vértices de V_m , donde $m = j + 1, j + 2, \dots, n - 1$ (figura 3.49).

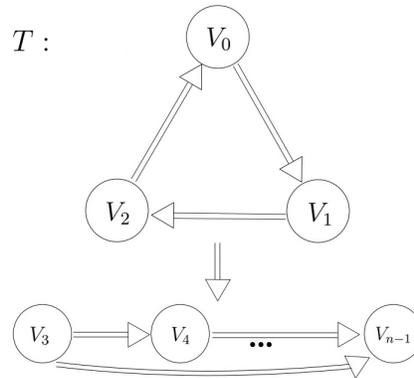


Figura 3.49.

Supongamos que $V_0 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_s\}$, $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_s\}$ y $V_2 = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_s\}$. Entonces T tiene a $C = (v_1, u_1, w_1, v_2, u_2, w_2, \dots, v_s, u_s, w_s, v_1)$ un $3s$ -ciclo y a $C_1 = (v_1, u_1, w_1, v_2, u_2, w_2, \dots, v_{s-1}, u_{s-1}, w_{s-1}, v_1)$ un $(k - 3)$ -ciclo.

Ahora notemos que T no puede tener un $(k - 2)$ -ciclo, pues de lo contrario existiría un ciclo C_2 con $k - 2$ vértices, notemos que C_2 no puede tener vértices de V_{n-1} , pues todo vértice en V_{n-1} es un receptor, también C_2 no puede tener vértices de V_j para $j = 3, 4, \dots, n - 2$, pues si tiene un vértice $v \in V_j$, entonces el vértice sucesor de v en C_2 forzosamente debe de estar en V_f con $j + 1 \leq f \leq n - 1$ y el vértice sucesor de este vértice en C_2 debe de estar

en C_{f_1} , para $f + 1 \leq f_1 \leq n - 1$ y así sucesivamente hasta llegar a que C_2 tiene un vértice en V_{n-1} , lo cual no puede ocurrir pues todo vértice en V_{n-1} es un receptor y los ciclos no contienen receptores, por lo tanto C_2 sólo tiene vértices de V_0, V_1 y V_2 , entonces por como está definido T se tiene que C_2 sólo puede ser un ciclo de longitud $3t$, para algún entero $1 \leq t \leq s$, lo cual es una contradicción pues C_2 es de longitud $k - 2$ y el cual no es múltiplo de 3. Por lo tanto T no tiene $k - 2$ -ciclos.

Ahora supongamos $k = 2r + 1$ para $r \geq 3$. Sean $V_0, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ conjuntos no vacíos ajenos en vértices tal que $|V_0| = 1$ y $|V_1| = |V_2| = r$. Supongamos que v_1, v_2, \dots, v_r son los vértices de V_1 y que u_1, u_2, \dots, u_r , son los vértices de V_2 , además $V_0 = \{v\}$. Supongamos que cada vértice de V_1 es adyacente hacia v y que v es adyacente hacia todo vértice de V_2 . Para $i = 1, 2, \dots, r$ se tiene que u_i es adyacente hacia v_j , para $j \geq i$, para $j = 1, 2, \dots, r - 1$ se tiene que v_j es adyacente hacia u_i , para $i > j$. Finalmente, cada vértice de $V_0 \cup V_1 \cup V_2$ es adyacente hacia cada vértice de $V_3 \cup V_4 \cup \dots \cup V_{n-1}$ y para $j = 3, 4, \dots, n - 2$, todo vértice de V_j es adyacente hacia todo vértice de V_m , donde $m = j + 1, j + 2, \dots, n - 1$ (figura 3.50).

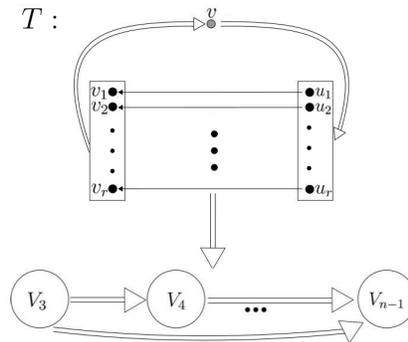


Figura 3.50.

Entonces T el torneo n -partito resultante tiene a $C_1 = (v, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_r, v_r, v)$ un k -ciclo y tiene a $C_2 = (v, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{r-1}, v_{r-1}, v)$ un $(k - 2)$ -ciclo.

Ahora notemos que T no puede tener un $(k - 3)$ -ciclo, pues de lo contrario existiría un ciclo C_2 con $k - 3$ vértices, por los mismo argumentos que en el ejemplo anterior C_2 no puede tener vértices de V_j , para $j = 3, 4, \dots, n - 1$, entonces C_2 sólo contiene vértices de V_0, V_1 y V_2 , por otro lado tenemos que $v \in V(C_2)$, pues de lo contrario, si suponemos que $v \notin V(C_2)$, entonces C_2

solo tiene vértices de V_1 y V_2 , además $|V_1 \cup V_2| = 2r = k - 1$, es decir C_2 contiene casi todos los vértices de $V_1 \cup V_2$ a excepción de dos vértices, notemos que $T_1 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ es un torneo bipartito que contiene a C_2 (figura 3.51).

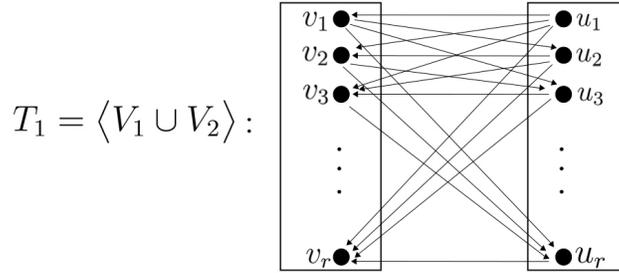


Figura 3.51.

Por definición de T se tiene que T_1 contiene a v_r un receptor, es decir $v_r \notin C_2$, así sea $T_2 = \langle (V_1 \cup V_2) - \{v_r\} \rangle$ es un torneo bipartito que contiene a C_2 (figura 3.52 (a)). Análogamente por como está definido T tenemos que T_2 contiene a u_r un receptor, por lo que $u_r \notin C_2$, así $V(C_2) = (V_1 \cup V_2) - \{v_r, u_r\}$, es decir C_2 está contenido en $T_3 = \langle (V_1 \cup V_2) - \{v_r, u_r\} \rangle$ (figura 3.52 (b)), pero por como está definido T se tiene que v_{r-1} es un receptor en T_3 y $v_{r-1} \in V(C_2)$ lo cual es una contradicción, pues C_2 no puede contener receptores, por lo tanto $v \in C_2$.

Sean $X = \{v \in V(V_1) \mid v \in V(C_2)\}$ y $Y = \{v \in V(V_2) \mid v \in V(C_2)\}$, notemos, por como definimos a T , que C_2 debe de ser de la forma $C_2 = (v, u_{j_0}, v_{i_0}, u_{j_1}, v_{i_1}, u_{j_2}, v_{i_2}, \dots, u_{j_{r-1}}, v_{i_{r-1}}, v)$, para $v_{j_x} \in V_0$ y $u_{i_x} \in V_2$, con $0 \leq x \leq r - 1$, entonces $|X| = |Y|$, es decir C_2 contiene el mismo número de vértices de V_1 y V_2 . Por otro lado tenemos que $|V_0 \cup V_1 \cup V_2| = 2r + 1 = k$, es decir C_2 contiene casi todos los vértices de $V_0 \cup V_1 \cup V_2$ a excepción de tres vértices distintos de v , entonces las únicas formas que puede tener C_2 son:

- Caso 1: Que los tres vértices que no están en C_2 sean de V_1 o V_2 , entonces $|X| = r - 3$ y $|Y| = r$ o $|X| = r$ y $|Y| = r - 3$ respectivamente, pero esto no puede ocurrir pues $|X| = |Y|$.
- Caso 2: Que dos vértices que no están en C_2 sean de V_1 o V_2 , entonces $|X| = r - 2$ y $|Y| = r - 1$ o $|X| = r - 1$ y $|Y| = r - 2$ respectivamente, pero esto no puede ocurrir pues $|X| = |Y|$.

En ambos casos no es posible obtener a C_2 , por lo que se concluye que T no puede tener un $(k - 3)$ -ciclo.

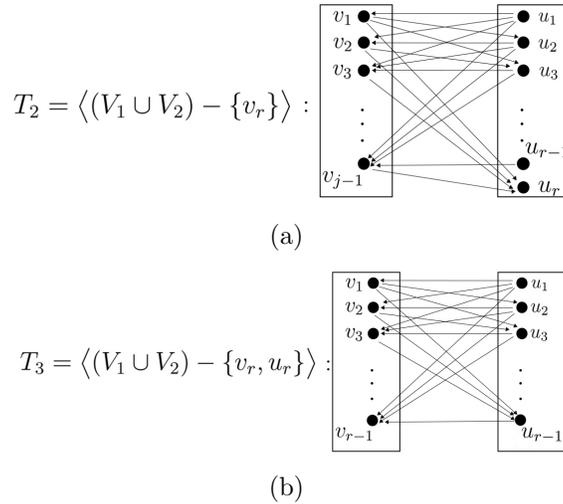


Figura 3.52.

Es bien sabido que un vértice de exgrado máximo en un torneo derrota indirectamente a cualquier vértice en a lo más dos pasos (teorema 2.0.8). Notemos que en un torneo n -partito los vértices que pertenecen a un mismo conjunto de la partición se pueden etiquetar de mayor a menor de acuerdo con su exgrado, donde un vértice de exgrado máximo recibe el lugar más alto, entonces tal vértice se clasifica en primer lugar y un vértice de mínimo exgrado se etiqueta en último lugar. Por supuesto, los empates son posibles. Presentaremos varios resultados para torneos n -partitos que extienden el resultado antes mencionado sobre torneos. Se establece el siguiente teorema.

Teorema 3.0.22. Sean u y v vértices que pertenecen al mismo conjunto de la partición de un torneo n -partito, $n \geq 2$, tal que $s(u) \geq s(v)$. Entonces o bien u derrota indirectamente a v en dos pasos, o $s(u) = s(v)$ y u y v derrotan los mismos vértices.

Demostración. Sean $W_0 = \{x \in V(T) \mid (u, x) \in F(T)\}$ y $W_1 = \{x \in V(T) \mid (v, x) \in F(T)\}$, entonces tenemos dos casos:

Caso 1: Si $W_0 \cap W_1 = W_0$, entonces $W_0 \subseteq W_1$, así $|W_0| \leq |W_1|$, pero $s(u) = |W_0|$ y $s(v) = |W_1|$, por lo que $s(u) \leq s(v)$, pero por hipótesis se tiene que

$s(u) \geq s(v)$, entonces $s(u) = s(v)$, además como $W_0 \cap W_1 = W_0$, se tiene que u y v derrotan a los mismos vértices.

Caso 2: Si $W_0 \cap W_1 \neq W_0$, entonces existe un $z \in W_0$, tal que $z \notin W_1$, como $z \in W_0$, así $(u, z) \in F(T)$, además z no pertenece al mismo conjunto de la partición que u , entonces z no pertenece al mismo conjunto de la partición que v . Como T es torneo $(z, v) \in F(T)$ o $(v, z) \in F(T)$, pero como $z \notin W_1$, entonces $(z, v) \in F(T)$, así (u, z, v) es una uv -trayectoria de longitud 2, es decir u derrota indirectamente a v en dos pasos (figura 3.53).

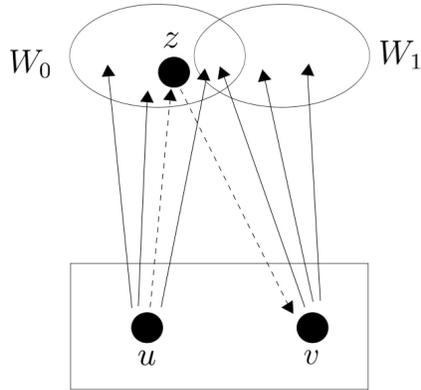


Figura 3.53.

Por lo tanto si $s(u) \geq s(v)$. Entonces o bien u derrota indirectamente a v en dos pasos, o $s(u) = s(v)$ y u y v derrotan a los mismos vértices. \square

Cuando u tiene el exgrado máximo, se puede decir más en torneos bipartitos.

Teorema 3.0.23. *Sea T un torneo bipartito sin transmisores, si u es un vértice de exgrado máximo entre los vértices de un conjunto de la partición de T , entonces u derrota indirectamente a cualquier otro vértice de T en a lo más cuatro pasos.*

Demostración. Sean U y W los conjuntos de la partición de T y supongamos que $u \in U$. Sea $V_1 = \{x \in V(W) \mid (u, x) \in F(T)\}$ el subconjunto de los vértices de W a los que u es adyacente. Consideremos un vértice $v \in W$. Si

$v \in V_1$, entonces u derrota a v . Por otro lado, si $v \in W \setminus V_1$, entonces existe $u_1 \in U$ tal que $(u_1, v) \in F(T)$ y u_1 existe pues T no tiene transmisores. Como u tiene el exgrado máximo en U , es decir $s(u) \geq s(y)$ para todo $y \in V(U)$, en particular $s(u) \geq s(u_1)$, entonces por el teorema 3.0.22 se tiene que u derrota indirectamente a u_1 en dos pasos o $s(u) = s(u_1)$ y u y u_1 derrotan a los mismos vértices, pero como u no derrota a v y u_1 derrota a v , entonces u derrota indirectamente a u_1 en dos pasos, así existe algún $v_1 \in V_1$ adyacente a u_1 y así (u, v_1, u_1, v) es una uv -trayectoria de longitud 3. Por lo tanto, si $v \in W$, entonces u derrota indirectamente a v en a lo más tres pasos (figura 3.54).

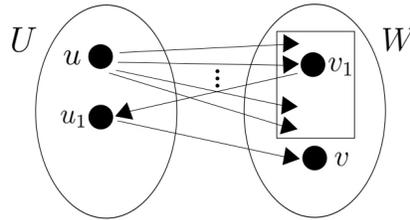


Figura 3.54.

Supongamos ahora que $v \in U - \{u\}$ (figura 3.55 (a)). Entonces v debe ser derrotado por algún vértice $z \in W$, pues T no tiene transmisores, Pero u derrota a z en a lo más tres pasos, de aquí se tiene que u derrota indirectamente a v en a lo más cuatro pasos (figura 3.55 (b)). \square

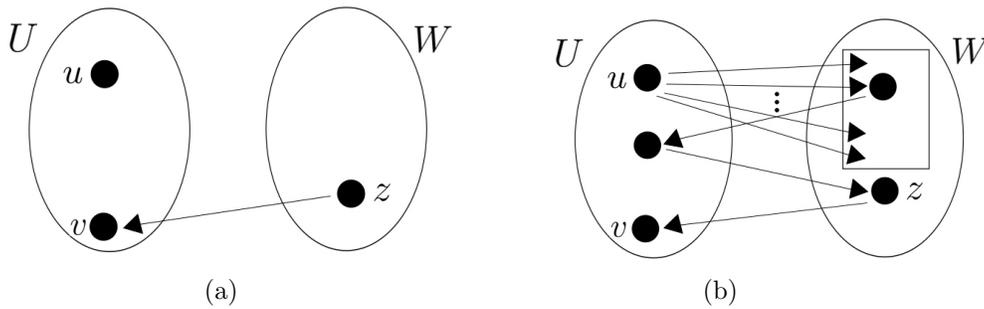


Figura 3.55.

Ahora mostraremos que para cualquier número entero $p \geq 4$, existe T un torneo bipartito fuertemente conexo de orden p tal que la distancia entre al menos un par de vértices de T es $p - 1$. Supongamos que $p = 2m$. Sea T un torneo bipartito de orden p teniendo como conjuntos de la partición a $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ y $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, además $F(T) = \{(u_i, w_i) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{(u_i, w_j) \mid 1 \leq i \leq m \text{ y } j = i + 2, i + 3, \dots, m\} \cup \{(w_i, u_j) \mid 1 \leq i \leq m \text{ y } j = i + 1, i + 2, \dots, m\} \cup \{(w_i, u_{i-1}) \mid 2 \leq i \leq m\}$ (figura 3.56).

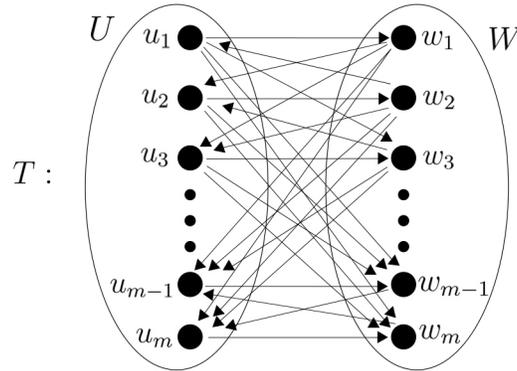


Figura 3.56.

Observemos que $C = (u_m, w_m, u_{m-1}, w_{m-1}, \dots, u_2, w_2, u_1, w_1, u_m)$ es un ciclo hamiltoniano de T (figura 3.57), eso implica que T es fuertemente conexo. Además, $C - (w_1, u_m)$ es una $u_m w_1$ -trayectoria mínima de longitud $p - 1$. Este ejemplo sirve para ilustrar que mientras la excentricidad de un vértice de exgrado máximo (en una partición dada de los conjuntos de un torneo bipartito fuertemente conexo y por lo tanto un torneo bipartito sin transmisores o receptores) es al menos 4, la excentricidad de un vértice que tiene exgrado máximo puede ser $p - 1$, donde p es el orden de el torneo.

En el caso de un torneo n -partito ($n \geq 3$) sin transmisores, no hay analogía como en el teorema 3.0.23. De hecho, el torneo 3-partito definido de la siguiente manera: $V(T) = \{v, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, con los conjuntos de la partición $V_1 = \{v\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $V_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, donde $N_T^+(v) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$, $N_T^-(v) = \{u_3, u_4, v_3, v_4\}$, $N_T^+(u_1) = \{v_1\}$, $N_T^-(u_1) = \{v, v_2, v_3, v_4\}$, $N_T^+(u_2) = \{v_2\}$, $N_T^-(u_2) = \{v, v_1, v_3, v_4\}$, $N_T^+(u_3) = \{v, v_1, v_2, v_3\}$, $N_T^-(u_3) = \{v_4\}$, $N_T^+(u_4) = \{v, v_1, v_2, v_4\}$ y $N_T^-(u_4) = \{v_3\}$, (ver figura 3.58), muestra que no tiene porqué haber una trayectoria de un vértice de exgrado máximo a todos los otros vértices de el torneo. En este ejemplo no hay tra-

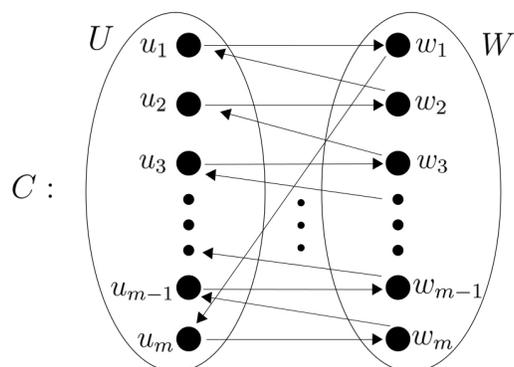


Figura 3.57.

yectorias de v hacia u_i o desde v hacia v_i para $i = 3, 4$.

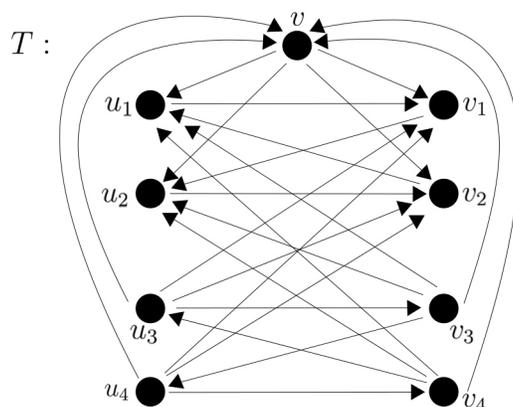


Figura 3.58.

En el siguiente resultado se muestra que la excentricidad de un vértice de exgrado máximo en un torneo 3-partito fuertemente conexo es acotado por una expresión que implica el orden de el torneo.

Teorema 3.0.24. *Sea T un torneo 3-partito fuertemente conexo de orden $p \geq 8$. Si v es un vértice de exgrado máximo en T , entonces la excentricidad de v es a lo más $\lceil p/2 \rceil$.*

Demostración. Sea $u \in V(T)$ tal que $exc(v) = d(v, u) = l$ y sea $P = (v = v_0, v_1, \dots, v_l = u)$ una vu -trayectoria de longitud mínima. Supongamos que

X, Y y Z son los conjuntos de la partición de T , y supongamos que $v_0 \in X$. Notemos que si v_j y $v_k \in V(P)$, con $0 \leq j < k \leq l$, $k \neq j + 1$ y no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_k, v_j) \in F(T)$, ya que si $(v_j, v_k) \in F(T)$, entonces existe $P' = (v_0, v_1, \dots, v_j, v_k, v_{k+1}, \dots, v_l)$ una vu -trayectoria con $l(P') < l(P)$, lo que contradice que P es de longitud mínima.

Sea $Y' = \{y \in V(Y - \{v_1\}) \mid (v_0, y) \in F(T)\}$ y $Z' = \{z \in V(Z - \{v_1\}) \mid (v_0, z) \in F(T)\}$. Entonces $s(v) = s(v_0) = |Y'| + |Z'| + 1$, pues v es adyacente hacia todos los vértices de $Y' \cup Z'$ y hacia v_1 (ver figura 3.59).

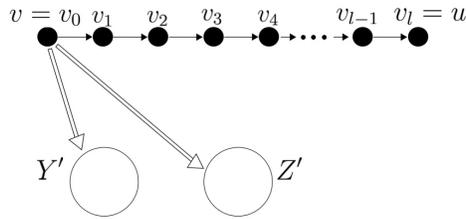


Figura 3.59.

Notemos que para $i \geq 3$ se tienen los siguientes casos:

Caso 1: $v_i \in Z$ y v_i es adyacente hacia todos los vértices de Y' , pues si suponemos que v_i no es adyacente hacia todos los vértices de Y' , entonces existe un vértice $y \in Y'$ tal que $(y, v_i) \in F(T)$, entonces $P_1 = (v_0 = v, y, v_i, v_{i+1}, \dots, v_l = u)$ es una vu -trayectoria de longitud más pequeña que P , lo cual no puede ocurrir por la elección de P , (figura 3.60).

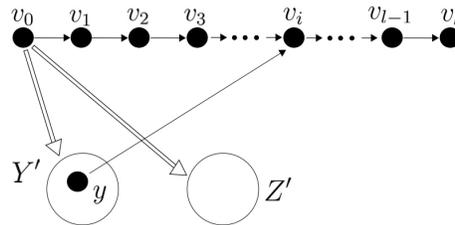


Figura 3.60.

Caso 2: $v_i \in Y$ y v_i es adyacente hacia todos los vértices de Z' , si suponemos que v_i no es adyacente hacia todos los vértices de Z' , entonces existe un vértice $z \in Z'$ tal que $(z, v_i) \in F(T)$, entonces $P_1 = (v_0 =$

$v, z, v_i, v_{i+1}, \dots, v_l = u$) es una vu -trayectoria de longitud más pequeña que P , lo cual no puede ocurrir por la elección de P .

Caso 3: $v_i \in X$ y v_i es adyacente hacia todos los vértices de $Y' \cup Z'$. Si suponemos que v_i no es adyacente hacia todos los vértices de Y' y Z' , entonces existe un vértice $u_1 \in Y' \cup Z'$ tal que $(u_1, v_i) \in F(T)$, entonces $P_1 = (v_0 = v, u_1, v_i, v_{i+1}, \dots, v_l = u)$ es una vu -trayectoria de longitud menor que P , lo cual no puede ocurrir pues P es la más pequeña.

Si $l \leq 4$, entonces el teorema está resuelto, pues $p \geq 8$ y

$$\lceil p/2 \rceil \geq \lceil 8/2 \rceil = 4 \geq l.$$

Supongamos que $l \geq 5$.

Afirmación: Si $i \geq 3$, entonces $v_i \notin X$.

- Supongamos que $v_i \in X$, donde $i \geq 3$ e i es la más pequeña posible.
 - 1) Si $i < l$, entonces v_i es adyacente hacia v_{i+1} y a todo vértice en $Y' \cup Z'$ y es adyacente hacia v_1 , pues $(v, v_1) \in F(T)$, entonces $v_1 \notin X$, entonces $(v_i, v_1) \in F(T)$ (ver figura 3.61), así $s(v_i) \geq |Y'| + |Z'| + 2$.

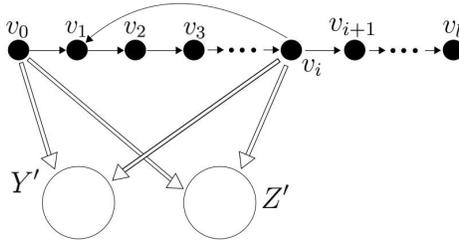


Figura 3.61.

- 2) Si $i = l$, entonces v_l es adyacente hacia al menos dos vértices v_j , donde $j < l$.

Tenemos que $v_l \in X$ y $(v, v_1) \in F(T)$, entonces $v_1 \notin X$, entonces $(v_l, v_1) \in F(T)$, además como $l \geq 5$, entonces $|V(P)| \geq 6$, sin pérdida de generalidad supongamos que $v_1 \in Y$, como $(v_1, v_2) \in F(T)$, entonces $v_2 \notin Y$, entonces $v_2 \in Z$ o $v_2 \in X$,

si $v_2 \in Z$, entonces $(v_l, v_2) \in F(T)$, así v_l es adyacente hacia al menos dos vértices v_j , donde $j < l$.

Si $v_2 \in X$, entonces como $(v_2, v_3) \in F(T)$, entonces $v_3 \notin X$, entonces $(v_l, v_3) \in F(T)$ (ver figura 3.62), así v_l es adyacente hacia al menos dos vértices v_j , donde $j < l$.

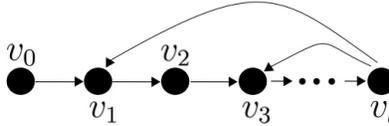


Figura 3.62.

Por lo tanto v_l es adyacente hacia al menos dos vértices v_j , donde $j < l$ y hacia todo vértice en $Y' \cup Z'$, es decir $s(v_l) = s(v_i) \geq |Y'| + |Z'| + 2$ (ver figura 3.63).

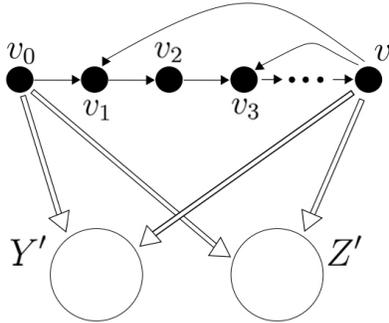


Figura 3.63.

Así, en cualquier caso, $s(v_i) > s(v)$, lo que no es posible, pues v es un vértice de exgrado máximo.

Por lo tanto si $i \geq 3$, entonces $v_i \notin X$.

Así $v_i \in Y$ o $v_i \in Z$, para $i \geq 3$. Por lo tanto, $v_l \in Y$ o $v_l \in Z$, supongamos que $v_l \in Y$, entonces $v_{l-1} \in Z$. Observemos que cada vértice de $Y' \cup Z'$ y cada vértice de P excepto v_{l-2} y v_{l-1} es adyacente desde al menos uno de los vértices v_{l-1} o v_l . Además, $v = v_0$ es adyacente desde v_{l-1} y v_l . De aquí

$$s(v_{l-1}) + s(v_l) \geq l + |Y'| + |Z'|.$$

Pero

$$2(|Y'| + |Z'| + 1) = 2s(v) \geq s(v_{l-1}) + s(v_l) \geq l + |Y'| + |Z'|,$$

entonces

$$2|Y'| + 2|Z'| + 2 \geq l + |Y'| + |Z'|.$$

de modo que $|Y'| + |Z'| + 2 \geq l$. Dado que $p \geq |Y'| + |Z'| + l + 1$, entonces $p + 1 \geq (|Y'| + |Z'| + 2) + l \geq l + l$, se sigue que $p + 1 \geq 2l$ o equivalentemente, que $l \leq \lceil p/2 \rceil$, es decir la excentricidad de v es a lo más $\lceil p/2 \rceil$. \square

Por otra parte, tenemos un resultado ligeramente más general.

Teorema 3.0.25. *Sea T un torneo 3-partito fuertemente conexo de orden p y supongamos que v es un vértice de exgrado máximo que pertenece a un conjunto de la partición de cardinalidad p_1 . Si $p - p_1 \geq 7$, entonces la excentricidad de v es a lo más $(p - p_1 + 2)/2$.*

Demostración. Notemos que si $p - p_1 \geq 7$, entonces $p \geq 8$.

Supongamos que u es un vértice cuya distancia desde v es máxima.

Sea $P = (v = v_0, v_1, \dots, v_l = u)$ una vu -trayectoria de longitud mínima, es decir la excentricidad de v es l . Supongamos que X, Y y Z son los conjuntos de la partición de T , y supongamos que $v_0 \in X$, con $|X| = p_1$. Notemos que si v_j y $v_k \in V(P)$, con $0 \leq j < k \leq l$, $k \neq j + 1$ y no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_k, v_j) \in F(T)$, ya que si suponemos $(v_j, v_k) \in F(T)$, entonces $P' = (v_0, v_1, \dots, v_j, v_k, v_{k+1}, \dots, v_l = u)$ es una vu -trayectoria de longitud menor que la de P , lo cual no puede ocurrir por la elección de P .

Sea $Y' = \{y \in V(Y - \{v_1\}) \mid (v_0, y) \in F(T)\}$ y $Z' = \{z \in V(Z - \{v_1\}) \mid (v_0, z) \in F(T)\}$ (figura 3.64). Entonces $s(v) = s(v_0) = |Y'| + |Z'| + 1$, pues v es adyacente hacia todos los vértices de $Y' \cup Z'$ y adyacente hacia v_1 .

Notemos que para $i \geq 3$ se tienen los siguientes casos:

- Caso 1: $v_i \in Z$ y v_i es adyacente hacia todos los vértices de Y' , pues si suponemos que v_i no es adyacente hacia todos los vértices de Y' , entonces existe un vértice $y \in Y'$ tal que $(y, v_i) \in F(T)$, entonces $P_1 = (v_0 = v, y, v_i, v_{i+1}, \dots, v_l = u)$ es una vu -trayectoria de longitud más pequeña que la de P , lo cual no puede ocurrir pues $l(P)$ es mínima.

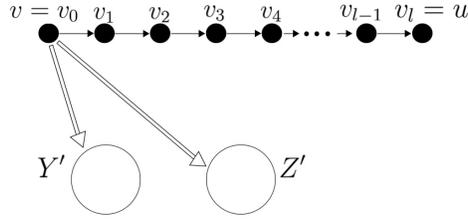


Figura 3.64.

Caso 2: $v_i \in Y$ y v_i es adyacente hacia todos los vértices de Z' . Análogo al caso 1 (ver figura 3.65).

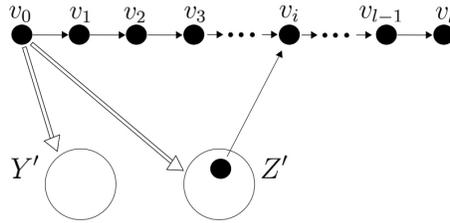


Figura 3.65.

Caso 3: $v_i \in X$ y v_i es adyacente hacia todos los vértices de $Y' \cup Z'$. Supongamos que v_i no es adyacente hacia todos los vértices de Y' y Z' , entonces existe un vértice $u_1 \in Y' \cup Z'$ tal que $(u_1, v_i) \in F(T)$, entonces para $P_1 = (v_0 = v, u_1, v_i, v_{i+1}, \dots, v_l = u)$ se tiene que $l(P_1) < l(P)$, lo cual no puede ocurrir pues P es la trayectoria de longitud mínima.

Si $l \leq 4$, entonces el teorema se satisface, pues

$$\begin{aligned} p - p_1 \geq 7, \quad \text{entonces} \quad p - p_1 + 2 &\geq 9, \\ \text{entonces} \quad \frac{p - p_1 + 2}{2} &\geq \frac{9}{2} \geq l. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $l \geq 5$.

Afirmación: Si $i \geq 3$, entonces $v_i \notin X$.

- Para ver esto, supongamos que $v_i \in X$, donde $i \geq 3$ e i es la más pequeña posible.

- 1) Si $i < l$, entonces v_i es adyacente hacia v_{i+1} y a todo vértice en $Y' \cup Z'$ y es adyacente hacia v_1 , pues $(v, v_1) \in F(T)$, entonces $v_1 \notin X$, así $(v_i, v_1) \in F(T)$, de donde $s(v_i) \geq |Y'| + |Z'| + 2$.
- 2) Si $i = l$.
 v_l es adyacente hacia al menos dos vértices v_j , donde $j < l$.

Tenemos que $v_l \in X$ y $(v, v_1) \in F(T)$, así $v_1 \notin X$, entonces $(v_l, v_1) \in F(T)$, además como $l \geq 5$, tenemos que $|V(P)| \geq 6$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $v_1 \in Y$, como $(v_1, v_2) \in F(T)$, tenemos que $v_2 \notin Y$, entonces $v_2 \in Z$ o $v_2 \in X$, si $v_2 \in Z$ entonces $(v_l, v_2) \in F(T)$ (ver figura 3.66). Así v_l es adyacente hacia al menos dos vértices v_j , donde $j < l$. Si $v_2 \in X$, entonces como $(v_2, v_3) \in F(T)$ tenemos que $v_3 \notin X$, así $(v_l, v_3) \in F(T)$, así v_l es adyacente hacia al menos dos vértices v_j , donde $j < l$.

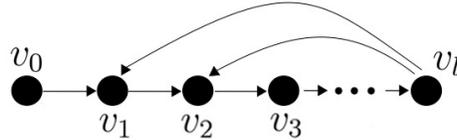


Figura 3.66.

Por lo tanto v_l es adyacente hacia al menos dos vértices v_j , donde $j < l$ y hacia todo vértice en $Y' \cup Z'$, es decir $s(v_l) = s(v_i) \geq |Y'| + |Z'| + 2$ (ver figura 3.67).

Así, en cualquier caso, $s(v_i) > s(v)$ lo que no es posible, pues v es un vértice de exgrado máximo.

Por lo tanto si $i \geq 3$, entonces $v_i \notin X$.

Así $v_i \in Y$ o $v_i \in Z$, para $i \geq 3$. Por lo tanto, $v_l \in Y$ o $v_l \in Z$. Supongamos que $v_l \in Y$, entonces $v_{l-1} \in Z$. Notemos que si $v_i \in V(P)$, con $i \geq 3$, tenemos que $v_i \notin X$, además $v_1 \notin X$, por lo que $v_2 \in X$ o $v_2 \notin X$, entonces tenemos los siguientes casos:

- Caso 1: Si $v_2 \in X$, observemos que cada vértice de $Y' \cup Z'$ y cada vértice de P excepto v_{l-2} y v_{l-1} es adyacente desde al menos uno de los vértices

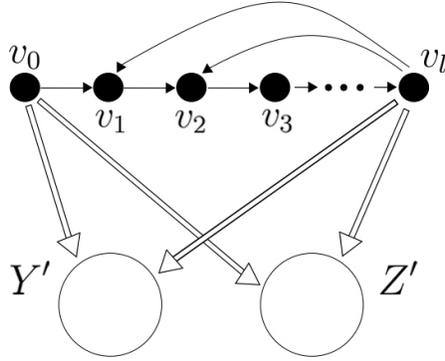


Figura 3.67.

v_{l-1} o v_l . Además, $v = v_0$ y v_2 es adyacente desde v_{l-1} y v_l . De aquí

$$s(v_{l-1}) + s(v_l) \geq l + 1 + |Y'| + |Z'|.$$

Pero

$$2(|Y'| + |Z'| + 1) = 2s(v) \geq s(v_{l-1}) + s(v_l) \geq l + 1 + |Y'| + |Z'|,$$

entonces

$$2|Y'| + 2|Z'| + 1 \geq l + |Y'| + |Z'|.$$

de modo que $|Y'| + |Z'| + 1 \geq l$.

Por otra parte $V(P) \cap V(X) = \{v_0, v_2\}$, entonces

$$\begin{aligned} p &\geq |Y'| + |Z'| + |V(P)| + |X - \{v_0, v_2\}| = |Y'| + |Z'| + (l + 1) + (p_1 - 2) \\ &= |Y'| + |Z'| + l + p_1 - 1, \end{aligned}$$

de aquí se tiene que $p \geq |Y'| + |Z'| + l + p_1 - 1$, entonces

$$p + 2 \geq (|Y'| + |Z'| + 1) + l + p_1 \geq l + l + p_1 = 2l + p_1,$$

entonces $p + 2 - p_1 \geq 2l$ equivalentemente $l \leq (p - p_1 + 2)/2$.

Caso 2: Si $v_2 \in X$, observemos que cada vértice de $Y' \cup Z'$ y cada vértice de P excepto v_{l-2} y v_{l-1} es adyacente desde al menos uno de los vértices v_{l-1} o v_l . Además, $v = v_0$ es adyacente desde v_{l-1} y v_l . De aquí

$$s(v_{l-1}) + s(v_l) \geq l + |Y'| + |Z'|.$$

Pero

$$2(|Y'| + |Z'| + 1) = 2s(v) \geq s(v_{l-1}) + s(v_l) \geq l + |Y'| + |Z'|,$$

entonces

$$2|Y'| + 2|Z'| + 2 \geq l + |Y'| + |Z'|.$$

de modo que $|Y'| + |Z'| + 2 \geq l$.

Por otra parte $V(P) \cap V(X) = \{v_0\}$, entonces

$$\begin{aligned} p &\geq |Y'| + |Z'| + |V(P)| + |X - \{v_0\}| \geq |Y'| + |Z'| + (l + 1) + (p_1 - 1) \\ &= |Y'| + |Z'| + l + p_1, \end{aligned}$$

de aquí se tiene que $p \geq |Y'| + |Z'| + l + p_1$, entonces

$$p + 2 \geq (|Y'| + |Z'| + 2) + l + p_1 \geq l + l + p_1 = 2l + p_1$$

entonces $p + 2 - p_1 \geq 2l$ equivalentemente $l \leq (p - p_1 + 2)/2$.

Por lo tanto $l \leq (p - p_1 + 2)/2$, es decir la excentricidad de v es a lo más $(p - p_1 + 2)/2$. \square

En el teorema 3.0.24 y 3.0.25, se mostró que la excentricidad de un vértice de exgrado máximo en T un torneo 3-partito fuertemente conexo, está acotada por una expresión que involucra el orden de T . Ahora tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.0.26. *Sea T un torneo n -partito fuertemente conexo ($n \geq 3$) y sea v un vértice de exgrado máximo entre todos los vértices de algún conjunto de la partición. Entonces v derrota indirectamente a todo vértice en el mismo conjunto de la partición que v en a lo más cuatro pasos.*

Demostración. Supongamos que $v \in X$ y que existe un vértice $u \in X$ tal que v derrota indirectamente a u en al menos cinco pasos. Sea $P = (v = v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 = u)$ una vu -trayectoria de longitud mínima en T . Sea $W = \{w \in V(T) \mid (v, w) \in F(T)\}$, entonces $s(v) = |W|$, notemos que u es adyacente hacia todo vértice en W , pues de lo contrario si u no es adyacente a un vértice $w \in W$, entonces $(w, u) \in F(T)$, pero entonces existe $P_1 = (v, w, u)$ una vu -trayectoria en T de longitud más pequeña que P , lo cual no puede ocurrir pues P es una trayectoria de longitud mínima. Así u es

adyacente hacia todos los vértices de W (ver figura 3.68), notemos que $v_1 \in W$, además v_2, v_3 y $v_4 \notin W$, pues si suponemos que $v_j \in W$, para algún $j = 2, 3, 4$, entonces $P_2 = (v, v_j, v_{j+1}, \dots, u)$ es una vu -trayectoria de longitud a lo más cuatro, más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Entonces v_2, v_3 y $v_4 \notin W$.

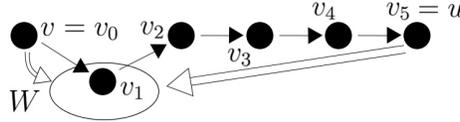


Figura 3.68.

Por otro lado tenemos que $v_2 \in X$ o $v_2 \notin X$,

Caso 1: Si $v_2 \in X$, como $(v_2, v_3) \in F(T)$, entonces $v_3 \notin X$, entonces $(v_3, u) \in F(T)$ ó $(u, v_3) \in X$, pero si $(v_3, u) \in F(T)$, entonces existe $P' = (v, v_1, v_2, v_3, u)$ una vu -trayectoria de longitud 4, más pequeña que P , lo cual es una contradicción, así $(u, v_3) \in F(T)$, entonces $s(u) \geq |W| + 1$.

Caso 2: Si $v_2 \notin X$, entonces $(v_2, u) \in F(T)$ o $(u, v_2) \in F(T)$, pero si $(v_2, u) \in F(T)$, entonces existe $P' = (v, v_1, v_2, u)$ una vu -trayectoria de longitud 3, más pequeña que P , lo cual es una contradicción, así $(u, v_2) \in F(T)$ (ver figura 3.69), entonces $s(u) \geq |W| + 1$.

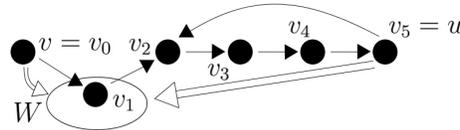


Figura 3.69.

En ambos casos se tiene que $s(u) \geq |W| + 1$, es decir $s(u) \geq s(v)$, lo cual es una contradicción pues v es un vértice de exgrado máximo. Por lo tanto v derrota indirectamente a todo vértice en el mismo conjunto de la partición que v en a lo más cuatro pasos.

□

Es claro que se requieren al menos dos pasos para que un vértice de exgrado máximo, en algún conjunto de la partición de un torneo n -partito

fuertemente conexo ($n \geq 3$), pueda derrotar a otro vértice en el mismo conjunto de la partición, lo que implica que tal vértice derrota indirectamente a todo vértice de su mismo conjunto de la partición en dos, tres o cuatro pasos.

Teorema 3.0.27. *Sea T un torneo n -partito fuertemente conexo ($n \geq 3$), tal que un conjunto de la partición, consiste de un sólo vértice v . Entonces para cada $m \in \{3, 4, 5, \dots, n\}$, existe un m -ciclo en T que contiene a v .*

Demostración. Sean $V_1 = \{v\}$, V_2, V_3, \dots, V_n los conjuntos de la partición de T . Probaremos el teorema por inducción sobre m .

Primero demostraremos que v pertenece a un 3-ciclo. Consideremos $A = \{w \in V(T) \mid (v, w) \in F(T)\}$, el conjunto de los exvecinos de v , y $B = \{w \in V(T) \mid (w, v) \in F(T)\}$, el conjunto de los invecinos de v . Notemos que $A \cup B = V(T) - \{v\}$, es decir $A \cup B \cup \{v\} = V(T)$, además $A, B \neq \emptyset$, pues T es fuertemente conexo, y $\delta_T^+(v) > 0$ y $\delta_T^-(v) > 0$ (Corolario 1.0.30), entonces existe al menos un vértice $u \in A$ y un vértice $w \in B$, como T es fuerte existe una uw -trayectoria, sea $P = (x_1 = u, x_2, x_3, \dots, x_l = w)$ dicha trayectoria (ver figura 3.70).

Afirmación: Existe al menos un vértice en $V(P) \cap A$, que es adyacente hacia un vértice en $V(P) \cap B$:

- Como $x_l = b \in B$, consideremos el valor mínimo s , para el cual $x_s \in B$, notemos que $s > 1$, pues $x_1 \in A$, entonces $x_{s-1} \in A$. Además $(x_{s-1}, x_s) \in F(T)$.

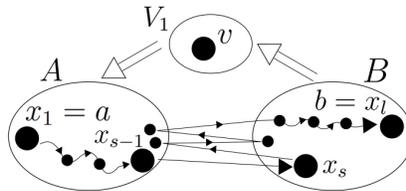


Figura 3.70.

Entonces existe al menos un vértice $a \in A$ que es adyacente hacia un vértice $b \in B$ y como a es un exvecino de v y b es un invecino de v , entonces (v, a) y $(b, v) \in F(T)$, así existe $C = (v, a, b, v)$ un 3-ciclo que contiene a v .

Supongamos ahora que v es un vértice que está contenido en un t -ciclo para $t = 3, 4, 5, \dots, k$, donde $k < n$. Mostraremos ahora que v también está en un $(k + 1)$ -ciclo.

Sea $C = (v_1 = v, v_2, v_3, \dots, v_k, v_1)$ un k -ciclo, que contiene a v . Como $k < n$, entonces C no contiene los vértices de V_r , para algún r en $2 \leq r \leq k$. Sea $u_1 \in V_r$, entonces u_1 es adyacente a todo vértice de C , pues ningún vértice de C pertenece a V_r , entonces $(u_1, v_i) \in F(T)$ o $(v_i, u_1) \in F(T)$, para $1 \leq i \leq k$. Si u_1 es invecino y exvecino de $V(C)$, entonces existe $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ tal que (v_i, u_1) y $(u_1, v_{i+1}) \in F(T)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(v_1, u_1) \in F(T)$, además como u_1 es invecino de $V(C)$, podemos escoger el valor mínimo de s , para el cual $(u_1, v_s) \in F(T)$, con $v_s \in V(C)$, entonces para $v_{s-1} \in V(C)$ se tiene que $(v_{s-1}, u_1) \in F(T)$. Así $C_1 = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, u_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k, v_1)$ es un $(k + 1)$ -ciclo en T que contiene a v_1 (figura 3.71).

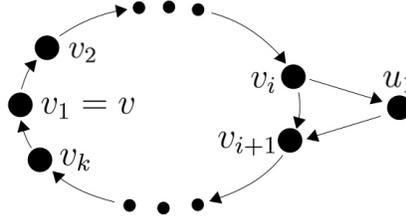


Figura 3.71.

Ahora supongamos que u_1 no es invecino de $V(C)$ o u_1 no es exvecino de $V(C)$. Sin perder generalidad supongamos que u_1 es exvecino de $V(C)$ (en el otro caso consideremos la digráfica inversa), entonces $(v_i, u_1) \in F(T)$ para todo $1 \leq i \leq k$, como T es fuerte, consideremos $P = (x_1 = u_1, x_2, x_3, \dots, x_q)$ una trayectoria mínima de u_1 a algún vértice de C , es decir $x_q = v_r$ para algún r , con $1 \leq r \leq k$, donde $q \geq 3$, pues si $q = 2$, entonces $P = (x_1 = u_1, x_2)$, entonces u_1 es un invecino de C lo que contradice la hipótesis, entonces $q \geq 3$. Así tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $x_q \neq v_1$.

Supongamos primero que $q \geq r$, como $x_i \notin V_1$ para $1 \leq i \leq q - 2$, pues si $x_i \in V_1$, con $1 \leq i \leq q - 2$, por lo que $x_i = v$ y además $P_1 = (x_1 = u_1, x_2, x_3, \dots, x_i)$ sería una trayectoria de longitud más pequeña de u_1 a los vértices de C , lo cual contradice la hipótesis, por lo que $x_i \notin V_1$, para $1 \leq i \leq q - 2$, entonces $(v_1, x_i) \in F(T)$ o $(x_i, v_1) \in F(T)$, pues $v_1 \in V_1$. Si $(x_i, v_1) \in F(T)$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, v_1)$ es una trayectoria de u_1 a C de longitud más pequeña que P , lo que es una contradicción. Así $(v_1, x_i) \in F(T)$, para $1 \leq i \leq q - 2$, en particular

$(v_1, x_{q-(r-1)}) \in F(T)$, entonces existe

$$C_1 = (v_1, x_{q-(r-1)}, x_{q-(r-1)+1}, x_{q-(r-1)+2}, \dots, x_q = v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_k, v_1)$$

un $(k + 1)$ -ciclo, que contiene a v_1 (figura 3.72).

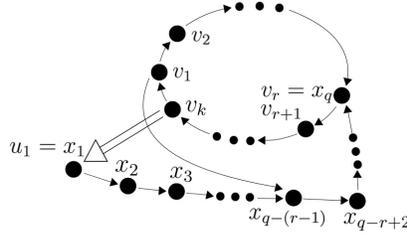


Figura 3.72.

Ahora supongamos que $q < r$, recordemos que $(v_{r-q+1}, x_1 = u_1) \in F(T)$, pues u_1 es exvecino de $V(C)$, entonces existe $C = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{r-q+1}, x_1, x_2, x_3, \dots, x_q = v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_k, v_1)$ un $(k + 1)$ -ciclo que contiene a v_1 (figura 3.73).

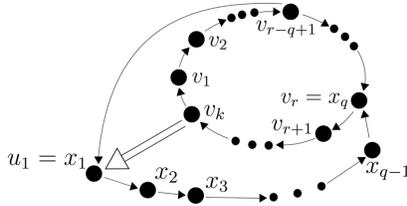


Figura 3.73.

Caso 2: Si $x_q = v_1$.

Supongamos primero que $q > k$, como $x_{q-k} \notin V_1$, entonces $(v_1, x_{q-k}) \in F(T)$ o $(x_{q-k}, v_1) \in F(T)$, pero si $(x_{q-k}, v_1) \in F(T)$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{q-k}, v_1)$ es una trayectoria de u_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, así $(v_1, x_{q-k}) \in F(T)$, entonces $C_1 = (x_{q-k}, x_{q-k+1}, x_{q-k+2}, \dots, x_q = v_1, x_{q-k})$ un $(k + 1)$ -ciclo, que contiene a v_1 (figura 3.74).

Ahora supongamos que $q \leq k$, recordemos que $(v_{k+2-q}, x_1 = u_1) \in F(T)$, pues u_1 es exvecino de $V(C)$, entonces $C = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q = v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k+2-q}, x_1)$ un $(k + 1)$ -ciclo, que contiene a v_1 .

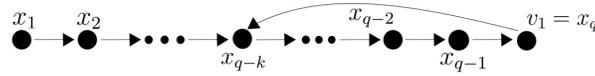


Figura 3.74.

Así v_1 pertenece a un $(k + 1)$ -ciclo. Por lo tanto v_1 pertenece a un m -ciclo en T para $m \in \{3, 4, 5, \dots, n\}$. \square

Teorema 3.0.28. *Sea T un torneo n -partito fuertemente conexo, con $n \geq 3$, entonces en cada conjunto de la partición existe al menos un vértice que pertenece a un 3-ciclo.*

Demostración. Sean V_1, V_2, \dots, V_n los conjuntos de la partición en T . Mostraremos sin pérdida de generalidad, que V_1 tiene al menos un vértice que está contenido en un 3-ciclo.

Sea $v \in V_1$. Como T es fuertemente conexo y por la proposición 3.0.15 (i) sabemos que para cualesquiera dos vértices de distintos conjuntos de la partición pertenecen a un ciclo en común, entonces podemos concluir que v pertenece a un ciclo en T y por el teorema 3.0.13 tenemos que v pertenece a un 3-ciclo o a un 4-ciclo.

Si v está en un 3-ciclo, entonces la demostración está terminada, pero si v pertenece a un 3-ciclo, entonces pertenece a $C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ un 4-ciclo, con $v = v_1$, entonces tenemos la siguiente afirmación:

Afirmación: $v_3 \in V_1$.

- Supongamos que $v_3 \notin V_1$ entonces o $(v_1, v_3) \in F(T)$ y (v_1, v_3, v_4, v_1) es un 3-ciclo en T que contiene a v_1 (figura 3.75 (a)) o $(v_3, v_1) \in F(T)$ y (v_1, v_2, v_3, v_1) es un 3-ciclo en T que contiene a v_1 (figura 3.75 (b)), en ambos casos llegamos a una contradicción, pues v no pertenece a un 3-ciclo.

Por lo tanto $v_3 \in V_1$.

Ahora tenemos los siguientes casos:

- Caso 1: Si v_2 y v_4 pertenecen a distintos conjuntos de la partición, entonces $(v_4, v_2) \in F(T)$ o $(v_2, v_4) \in F(T)$. Si $(v_2, v_4) \in F(T)$, entonces (v_1, v_2, v_4, v_1) es un 3-ciclo que contiene a v_1 (figura 3.76 (a)), lo cual es una contradicción, así $(v_4, v_2) \in F(T)$ y en este caso (v_2, v_3, v_4, v_2) es un 3-ciclo que contiene a $v_3 \in V_1$ (figura 3.76 (b)) y termina la demostración.

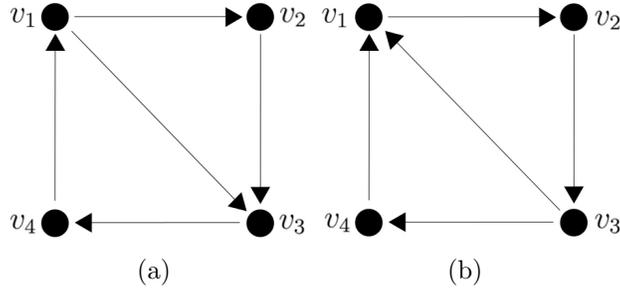


Figura 3.75.

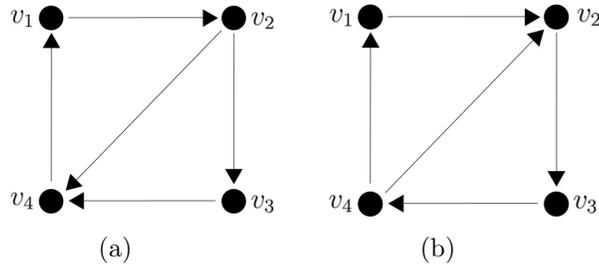


Figura 3.76.

Caso 2: Si v_2 y v_4 pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que v_2 y $v_4 \in V_2$. Si existe un vértice $x \in V_i$, para $3 \leq i \leq n$, que es exvecino e invecino de $V(C_1)$, entonces afirmamos que alguno de los dos vértices v_1 o v_3 está en un 3-ciclo.

- Notemos que x es adyacente a todos los vértices de C_1 , pues $x \in V_i$ con $i \neq 1, 2$, además es exvecino e invecino de $V(C_1)$, entonces afirmamos que existen dos vértices consecutivos v_j y v_{j+1} en C_1 , para algún $j = 1, 2, 3, 4$ y $j + 1$ módulo 4, en C_1 tal que (x, v_j) y $(v_{j+1}, x) \in F(T)$. Así existe (x, v_j, v_{j+1}, x) un 3-ciclo en T (figura 3.77), con v_j o $v_{j+1} \in V_1$, entonces C_1 tiene a v_1 y v_3 vértices que pertenecen a V_1 y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, así v_1 o v_3 están en un 3-ciclo, pero como v_1 no puede pertenecer a un 3-ciclo, entonces v_3 pertenece a un 3-ciclo y se termina la demostración.

De lo contrario supongamos que no existe un vértice $x \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, tal que es exvecino e invecino de C_1 , entonces $V(T) - (V_1 \cup V_2)$ se

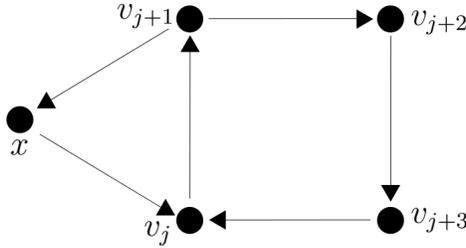


Figura 3.77.

puede partir en dos conjuntos S_1 y S_2 tal que $S_1 = \{x \in V(T) - (V_1 \cup V_2) \mid (v_i, x) \in F(T) \text{ para todo } i = 1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de exvecinos de C_1 y $S_2 = \{x \in V(T) - (V_1 \cup V_2) \mid (x, v_i) \in F(T) \text{ para todo } i = 1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de invecinos de C_1 (figura 3.78), donde $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

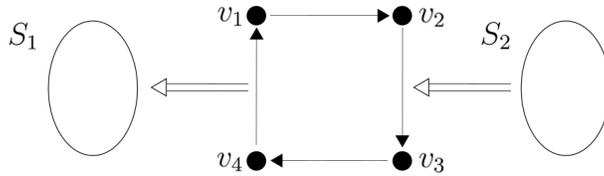


Figura 3.78.

Como $n \geq 3$, entonces al menos uno de los dos conjuntos S_1 o S_2 es no vacío. Supongamos que $S_1 \neq \emptyset$. Como T es fuerte, entonces existe una trayectoria de cada vértice de S_1 a cada vértice de C_1 . Sea $P = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q)$ una trayectoria mínima de los vértices de S_1 a los vértices de C_1 (figura 3.79), notemos que $q \geq 3$, pues de lo contrario si $q = 2$, entonces $P = (x_1, x_2)$, es decir x_1 es exvecino e invecino de C_1 , lo cual es una contradicción, pues no existe un vértice $x \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, tal que $x \in S_1 \cap S_2$. Por lo tanto $q \geq 3$.

Notemos que $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$, pues de lo contrario si hay un vértice $x_i \in S_1$, con $2 \leq i \leq q$, entonces $P_1 = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_q)$ sería una trayectoria de S_1 a C_1 de longitud más pequeña que P , lo que es una contradicción. Por lo tanto $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$.

Si $V(P) \cap S_2 = \emptyset$, entonces $V(P - \{x_1\}) \subseteq V_1 \cup V_2$, pues $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$ y $V(P - \{x_1\}) \cap S_2 = \emptyset$, así podemos concluir que x_2 o x_3 pertenece a V_1 , como $x_3 \in V_1 \cup V_2$ y $x_1 \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, entonces $(x_1, x_3) \in F(T)$ o $(x_3, x_1) \in F(T)$. Si $(x_1, x_3) \in F(T)$, entonces $P_2 =$

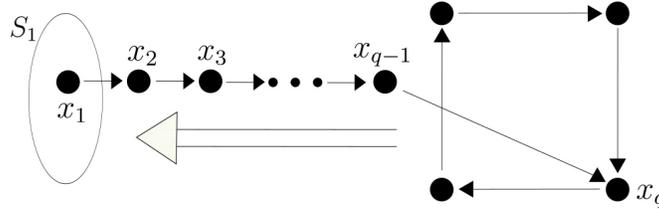


Figura 3.79.

$(x_1, x_3, x_4, \dots, x_q)$ es una trayectoria de longitud más pequeña que P lo cual es una contradicción. Así $(x_3, x_1) \in F(T)$, entonces (x_1, x_2, x_3, x_1) es un 3-ciclo que contiene un vértice de V_1 (figura 3.80).

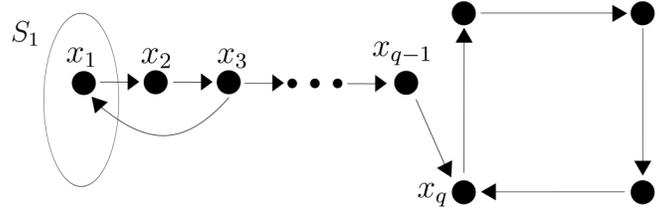


Figura 3.80.

Ahora supongamos que $V(P) \cap S_2 \neq \emptyset$. Observemos que $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$, pues de lo contrario si suponemos que existe otro vértice $x_i \in V(P) \cap S_2$, con $2 \leq i \leq q - 2$, entonces x_i es adyacente hacia un vértice x_l de C_1 , entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_l)$ es una trayectoria de longitud menor que la de P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$, así $x_{q-1} \in S_2$, entonces x_{q-1} es adyacente hacia todos los vértices en C_1 , en particular es adyacente hacia $v_3 \in V_1$.

- Si $q = 3$, como $x_1 \in S_1$, entonces $(v_3, x) \in F(T)$, así (v_3, x_1, x_2, v_3) es un 3-ciclo que contiene a $v_3 \in V_1$ (figura 3.81).
- Si $q \geq 4$, como $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$ y $V(P) \cap S_1 = \{x_1\}$, entonces x_{q-2} y $x_{q-3} \in V_1 \cup V_2$, así $x_{q-2} \in V_1$ o $x_{q-2} \in V_2$. Si $x_{q-2} \in V_1$, entonces $(v_2, x_{q-2}) \in F(T)$, pues $v_2 \in V_2$ además $(x_{q-2}, v_2) \notin F(T)$, pues $P_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{q-2}, v_2)$ es una trayectoria de S_1 a los vértices de C_1 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, pues P es una trayectoria míni-

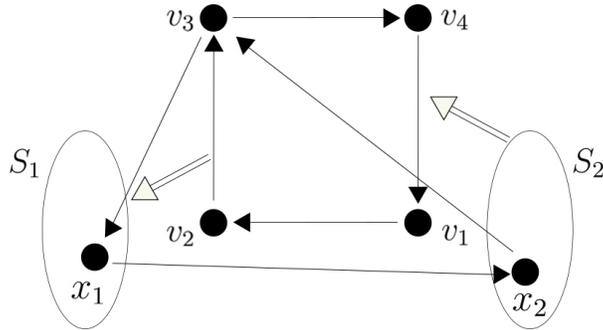


Figura 3.81.

ma. Así $(x_{q-2}, x_{q-1}, v_2, x_{q-2})$ es un 3-ciclo que contiene un vértice de V_1 . Por otro lado si $x_{q-2} \in V_2$ y como $v_3 \in V_1$, entonces $(v_3, x_{q-2}) \in F(T)$ o $(x_{q-2}, v_3) \in F(T)$, pero si $(x_{q-2}, v_3) \in F(T)$, entonces $P_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{q-2}, v_3)$ es una trayectoria de S_1 a los vértices de C_1 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, así $(v_3, x_{q-2}) \in F(T)$, entonces $P_2 = (v_3, x_{q-2}, x_{q-1}, v_3)$ es un 3-ciclo que contiene a $v_3 \in V_1$ (figura 3.82).

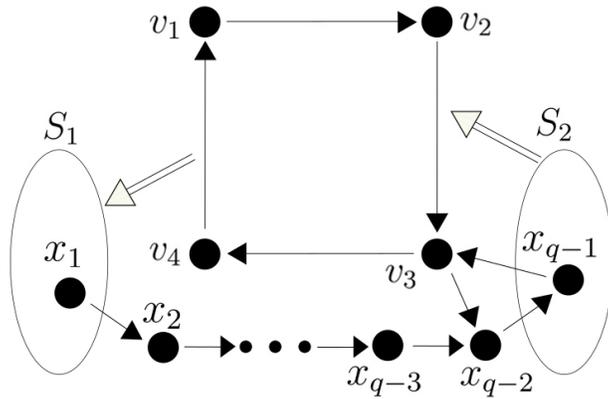


Figura 3.82.

Ahora supongamos que $S_1 = \emptyset$, entonces $S_2 \neq \emptyset$. Como T es fuerte, existe una trayectoria de cada vértice de C_1 a cada vértice de S_2 . Sea $P = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ una trayectoria mínima de algún vértice de C_1 a algún vértice de S_2 , notemos que $q \geq 3$, de lo contrario si $q = 2$,

entonces $P = (x_1, x_2)$, es decir x_2 es exvecino e invecino de C_1 , lo cual es una contradicción, pues no existe un vértice $x \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, tal que $x \in S_1 \cap S_2$. Por lo tanto $q \geq 3$.

Notemos que $V(P - \{x_q\}) \cap S_2 = \emptyset$, pues de lo contrario si existiera un vértice $x_i \in S_2$, con $2 \leq i \leq q-1$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)$ sería una trayectoria de C_1 a S_2 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V(P - \{x_q\}) \cap S_2 = \emptyset$.

Como $S_1 = \emptyset$ y $V(P - \{x_q\}) \cap S_2 = \emptyset$, entonces $V(P - \{x_q\}) \subseteq V_1 \cup V_2$, así $(x_q, x_{q-2}) \in F(T)$, pues $x_q \notin V_1 \cup V_2$ y $(x_{q-2}, x_q) \notin F(T)$, de lo contrario $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{q-2}, x_q)$ sería una trayectoria de C_1 a S_2 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Así existe $(x_q, x_{q-2}, x_{q-1}, x_q)$ un 3-ciclo en T , que contiene un vértice de V_1 (figura 3.83), ya que $x_{q-2} \in V_1$ y $x_{q-1} \in V_2$ o $x_{q-2} \in V_2$ y $x_{q-1} \in V_1$.

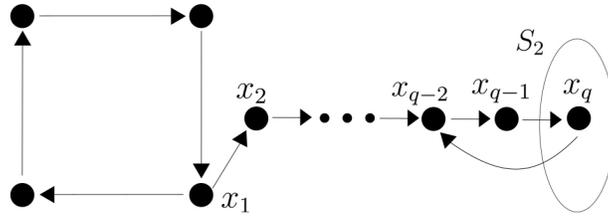


Figura 3.83.

Entonces podemos concluir que V_1 tiene al menos un vértice que pertenece a un 3-ciclo. Por lo tanto en cada conjunto de la partición existe al menos un vértice que pertenece a un 3-ciclo.

□

El siguiente teorema es una generalización del corolario 2.0.11 que dice que todo torneo T fuertemente conexo de orden $p \geq 3$, contiene un k -ciclo para todo k , con $3 \leq k \leq p$.

Teorema 3.0.29. *Cada conjunto de la partición de un torneo n -partito fuertemente conexo T , con $n \geq 3$, tiene al menos un vértice que pertenece a un ciclo de longitud m para cada $m \in \{3, 4, \dots, n\}$.*

Demostración. Sean V_1, V_2, \dots, V_n conjuntos de la partición en T . Mostraremos sin pérdida de generalidad, que V_1 tiene un vértice que está contenido

en un k -ciclo para $k = 3, 4, \dots, n$. Procederemos por inducción sobre k .

Primero mostraremos que V_1 tiene un vértice en un 3-ciclo.

Por el teorema 3.0.28 tenemos que si T es un torneo n -partito fuertemente conexo, entonces en cada conjunto de la partición existe al menos un vértice que pertenece a un 3-ciclo, en particular para V_1 .

Supongamos que u es un vértice de V_1 que pertenece a un t -ciclo para todo $t = 3, 4, \dots, k$, donde $k < n$. Probaremos que u está en un $(k + 1)$ -ciclo o V_1 contiene otro vértice que está en un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, k, k + 1$.

Sea $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ un k -ciclo con $u = v_1$, y sea S el conjunto de vértices que pertenecen a los conjuntos de la partición que no tienen vértices en C . Si existe $x \in S$ que es invecino y exvecino de $V(C)$, donde además x es adyacente a todo vértice de C , pues x no pertenece a ningún conjunto de la partición que contenga vértices en C , entonces afirmamos que existen v_j y v_{j+1} vértices en $V(C)$, tal que x es exvecino de v_j y x es invecino de v_{j+1} , así podemos formar

$$C_1 = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_j, x, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_k)$$

un $(k + 1)$ -ciclo que contiene a u (figura 3.84).

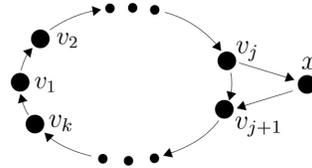


Figura 3.84.

Por otro lado, si no existe un vértice $x \in S$ tal que es invecino y exvecino de $V(C)$, entonces podemos partir a S en dos conjuntos ajenos S_1 y S_2 tal que $S_1 = \{x \in V(S) | (v_i, x) \in F(T) \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots, k\}$ y $S_2 = \{x \in V(T) - (V_1 \cup V_2) | (x, v_i) \in F(T) \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots, k\}$, donde $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Supongamos que $S_1 \neq \emptyset$. Como T es fuerte, entonces existe una trayectoria de cada vértice de S_1 a cada vértice de C . Sea $P = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q)$ una trayectoria mínima de S_1 a C (figura 3.85), notemos que $q \geq 3$, pues de lo contrario si $q = 2$, entonces $P = (x_1, x_2)$, es decir x_2 es exvecino e invecino de C , lo cual es una contradicción, pues no existe un vértice $x \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, tal que $x \in S_1 \cap S_2$. Por lo tanto $q \geq 3$.

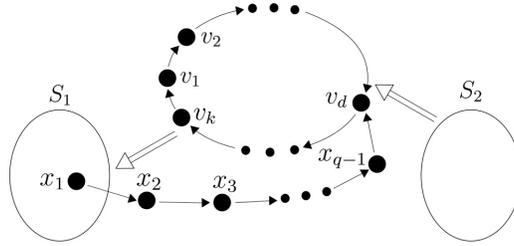


Figura 3.85.

Notemos que $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$, pues de lo contrario si existiera un vértice $x_i \in S_1$, con $3 \leq i \leq q$, entonces $P_1 = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_q)$ sería una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$.

Supongamos primero que $V(P) \cap S_2 = \emptyset$, denotemos por $W = V(T) - S$ al conjunto de vértices que pertenecen a un conjunto de la partición que tiene al menos un vértice en C , entonces $V(P - \{x_1\}) \subset W$, pues $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$ y $V(P - \{x_1\}) \cap S_2 = \emptyset$ y $S = S_1 \cup S_2$, entonces x_1 y x_i no pertenecen a un mismo conjunto de la partición, para todo $i \geq 2$, pues $x_1 \notin W$, entonces $(x_i, x_1) \in F(T)$, para todo $i \geq 3$, de lo contrario si existiera un $(x_1, x_i) \in F(T)$ para algún $i \geq 3$, entonces $P_1 = (x_1, x_i, x_{i+1}, \dots, x_q)$ es una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción pues P es una trayectoria de longitud mínima. Por lo tanto $(x_i, x_1) \in F(T)$, para todo $i \geq 3$ (figura 3.86).

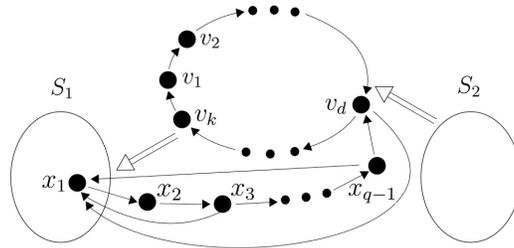


Figura 3.86.

Si P tiene al menos un vértice de V_1 , entonces podemos escoger el valor mínimo s , para el cual $x_s \in V(P) \cap V_1$, notemos que $(x_s, x_i) \in F(T)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, s - 2$, pues como s es el mínimo valor para el cual $x_s \in V(P) \cap V_1$, entonces $x_i \notin V_1$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, s - 2$, entonces $(x_s, x_i) \in$

$F(T)$ o $(x_i, x_s) \in F(T)$, pero si $(x_i, x_s) \in F(T)$, entonces existe $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_s, x_{s+1}, \dots, x_q)$ una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(x_s, x_i) \in F(T)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, s - 2$.

Como $x_q \in V(C)$, entonces supongamos que $x_q = v_d$, para algún $1 \leq d \leq k$, así renombramos los vértices de C de tal forma que $C = (u_1 = v_d, u_2 = v_{d+1}, u_3 = v_{d+2}, \dots, u_k = v_{d+k-1}, u_1)$. Afirmamos que x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, k + q - 1$, donde $k + q - 1 \geq k + 2$, ya que $q \geq 3$. Así tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $s = 2$ ó $s = 3$, sabemos que $(x_i, x_1) \in F(T)$, para $i = 3, 4, 5, \dots, q$, entonces existe $C_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_l, x_1)$ un l -ciclo, para $3 \leq l \leq q$ y que contiene a x_s (figura 3.87).

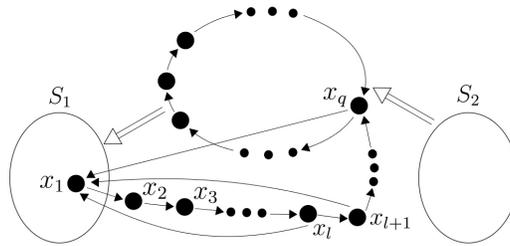


Figura 3.87.

Por otra parte como $x_1 \in S_1$, entonces $(u_i, x_1) \in F(T)$, para todo $i = 1, 2, 3, \dots, k$, entonces $C_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q = u_1) \cup (u_1, u_2, u_3, \dots, u_b) \cup (u_b, x_1)$ es un $(q + b)$ -ciclo, para $2 \leq b \leq k - 1$, y que contiene a x_s (ver figura 3.88), es decir x_s pertenece a un l -ciclo para $q + 1 \leq l \leq q + k - 1$, entonces x_s pertenece a un j -ciclo, para $j = 3, 4, 5, \dots, k + q - 1$.

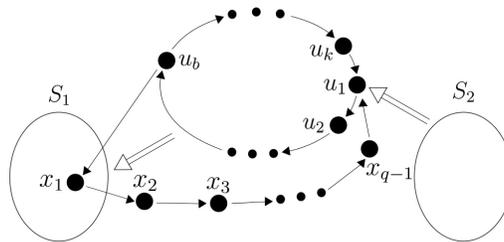


Figura 3.88.

Caso 2: Si $4 \leq s < q$, recordemos que $(x_s, x_i) \in F(T)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, s-2$, entonces existe $C_1 = (x_{s-r}, x_{s-r+1}, x_{s-r+2}, \dots, x_s, x_{s-r})$ un $(r+1)$ -ciclo, con $2 \leq r \leq s-1$ y $x_s \in C_1$ (ver figura 3.89), es decir x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, s$.

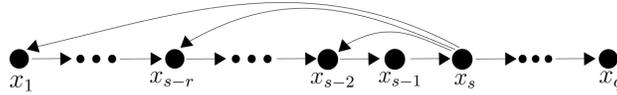


Figura 3.89.

Por otro lado existe $C_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+r}, x_1)$ un $s+r$ -ciclo, con $1 \leq r \leq q-s$ y $x_s \in C_2$ (ver figura 3.90), es decir x_s pertenece a un j -ciclo, para $j = s+1, s+2, \dots, q$.

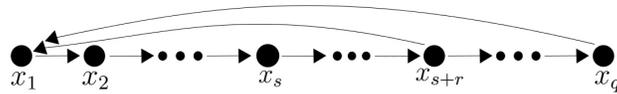


Figura 3.90.

Por otra parte como $x_1 \in S_1$, entonces $(u_i, x_1) \in F(T)$, para todo $i = 1, 2, 3, \dots, k$, entonces $C_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q = u_1, u_2, u_3, \dots, u_b, x_1)$ es un $(q+b)$ -ciclo, para $2 \leq b \leq k-1$, es decir x_s pertenece a un j -ciclo, para $j = q+1, q+2, \dots, q+k-1$ (ver figura 3.88). Entonces x_s pertenece a un j -ciclo, para $j = 3, 4, 5, \dots, k+q-1$.

Caso 3: Si $s = q$, recordemos que $(x_s, x_i) \in F(T)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, s-2$, entonces existe $C_1 = (x_{s-r}, x_{s-r+1}, x_{s-r+2}, \dots, x_s, x_{s-r})$ un $(r+1)$ -ciclo, con $2 \leq r \leq s-1$ y $x_s \in C_1$, es decir x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, q$ (ver figura 3.91).

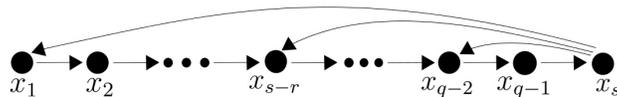


Figura 3.91.

Por otra parte como $x_1 \in S_1$, entonces $(u_i, x_1) \in F(T)$, para todo $i = 1, 2, 3, \dots, k$, así $C_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q = u_1, u_2, u_3, \dots, u_b, x_1)$ es un

$(q + b)$ -ciclo, para $2 \leq b \leq k - 1$, es decir x_s pertenece a un j -ciclo, para $j = q + 1, q + 2, \dots, q + k - 1$ (ver figura 3.88). Entonces x_s pertenece a un j -ciclo, para $j = 3, 4, 5, \dots, k + q - 1 \geq k + 2$.

Ahora supongamos que $V(P) \cap V_1 = \emptyset$, entonces $(v_1, x_i) \in F(T)$ o $(x_i, v_1) \in F(T)$, pues $x_i \notin V_1$, para $i = 1, 2, 3, \dots, q - 2$, pero si $(x_i, v_1) \in F(T)$, para algún $1 \leq i \leq q - 2$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, v_1)$ es una trayectoria de los vértices de S_1 a los vértices de C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, así $(v_1, x_i) \in F(T)$, para $1 \leq i \leq q - 2$. Recordemos que $x_q \in V(C)$, donde $x_q = v_d$, para $2 \leq d \leq k$, pues $x_q \neq v_1$. Entonces para cualquier $1 \leq i \leq q - 1$, el ciclo $(v_1, x_{q-i}, x_{q-i+1}, \dots, x_q = v_d, v_{d+1}, v_{d+2}, \dots, v_k, v_1)$ es un $(i + k - d + 2)$ -ciclo (ver figura 3.92).

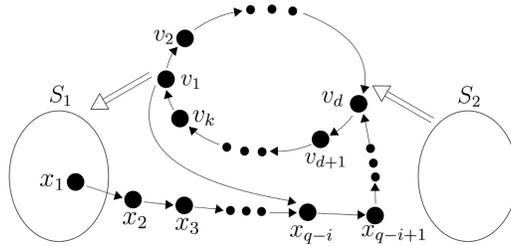


Figura 3.92.

Además para cualquier j con $1 \leq j \leq d - 1$, el ciclo $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_j, x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, x_q = v_d, v_{d+1}, \dots, v_k, v_1)$ es un $(j + q + k - d)$ -ciclo (ver figura 3.93).

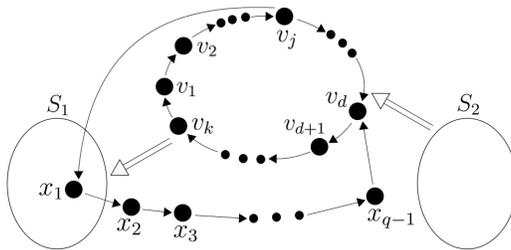


Figura 3.93.

Así v_1 pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, \dots, k + q - 1$, done $q \geq 3$. Queda por considerar el caso $V(P) \cap S_2 \neq \emptyset$. Observemos que $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$, pues de lo contrario si suponemos que existe otro vértice $x_i \in V(P) \cap S_2$, con $2 \leq i \leq q - 2$, entonces x_i es adyacente hacia un vértice

$v_l \in V(C)$, con $1 \leq l \leq k$, así $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, v_l)$ es una $S_1 C$ -trayectoria de longitud menor que P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$, así $x_{q-1} \in S_2$ y x_{q-1} es adyacente hacia todos los vértices en C . Si v_1 y x_{q-2} están en distintos conjuntos de la partición, entonces $(v_1, x_{q-2}) \in F(T)$ o $(x_{q-2}, v_1) \in F(T)$, pero si $(x_{q-2}, v_1) \in F(T)$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{q-2}, v_1)$ es una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Así

$$(v_1, x_{q-2}, x_{q-1}, v_3, v_4, \dots, v_k, v_1)$$

es un $(k+1)$ -ciclo. Si $x_{q-2} \in V_1$ y como $v_2 \notin V_1$, entonces $(v_2, x_{q-2}) \in F(T)$ o $(x_{q-2}, v_2) \in F(T)$, pero si $(x_{q-2}, v_2) \in F(T)$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{q-2}, v_2)$ es una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Así $(v_2, x_{q-2}) \in F(T)$ y $(v_1, v_2, x_{q-2}, x_{q-1}, v_4, v_5, \dots, v_k, v_1)$ es un $(k+1)$ -ciclo (ver figura 3.94) o en el caso que $k = 3$, entonces $(v_1, v_2, x_{q-2}, x_{q-1}, v_1)$ es un $(k+1)$ -ciclo.

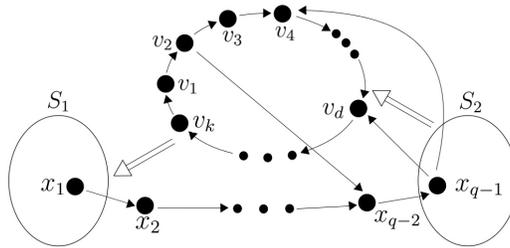


Figura 3.94.

Ahora supongamos que $S_1 = \emptyset$, entonces $S_2 \neq \emptyset$. Como T es fuerte, entonces existe una trayectoria de cada vértice de C a cada vértice de S_2 . Sea $P = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ una trayectoria mínima de C_1 a S_2 , notemos que $q \geq 3$, de lo contrario si $q = 2$, entonces $P = (x_1, x_2)$, es decir x_2 es exvecino e invecino de C , lo cual es una contradicción, pues no existe un vértice $x \in S$, tal que $x \in S_1 \cap S_2$. Por lo tanto $q \geq 3$.

Notemos que $V(P - \{x_q\}) \cap S_2 = \emptyset$, ya que de lo contrario si existiera un vértice $x_i \in S_2$, con $2 \leq i \leq q - 1$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)$ sería una trayectoria de los vértices de C a los vértices de S_2 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V(P - \{x_q\}) \cap S_2 = \emptyset$.

Como $S_1 = \emptyset$ y $V(P - \{x_q\}) \cap S_2 = \emptyset$, se tiene que $V(P - \{x_q\}) \subseteq W$, además $x_1 \in C$, entonces supongamos que $x_1 = v_d$, para algún $1 \leq d \leq k$, así tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $V(P) \cap V_1 = \emptyset$, entonces $x_r \notin V_1$, para $1 \leq r \leq q$ y $(x_q, v_f) \in F(T)$, para $1 \leq f \leq k$, pues $x_q \in S_2$. Así tenemos los siguientes casos:

- Si $q \leq k + 1 - d$, entonces existe

$$C_1 = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_d = x_1, x_2, x_3, \dots, x_q, v_{d+q-1}, v_{d+q}, v_{d+q+1}, \dots, v_k, v_1)$$

es un $k + 1$ -ciclo, con $v_1 \in C_1$ (ver figura 3.95), entonces v_1 pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, k + 1$.

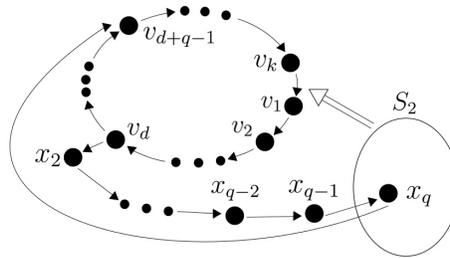


Figura 3.95.

- Si $q \geq k + 2 - d$, notemos que x_{k+2-d} y v_1 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces $(v_1, x_{k+2-d}) \in F(T)$ o $(x_{k+2-d}, v_1) \in F(T)$, pero notemos que si $d \neq k$, entonces $(x_{k+2-d}, v_1) \in F(T)$, pues si $(v_1, x_{k+2-d}) \in F(T)$, entonces existe $P_1 = (v_1, x_{k+2-d}, x_{k+3-d}, \dots, x_q)$ una trayectoria de C a S_2 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, por lo que $(x_{k+2-d}, v_1) \in F(T)$, así existe

$$C_1 = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_d = x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k+2-d}, v_1)$$

un $k + 1$ -ciclo, con $v_1 \in C_1$ (ver figura 3.96), entonces v_1 pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, k + 1$.

Si $d = k$, entonces $(v_1, x_2) \in F(T)$ o $(x_2, v_1) \in F(T)$, si $(x_2, v_1) \in F(T)$, entonces existe $C_1 = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k = x_1, x_2, v_1)$ es un $k + 1$ -ciclo, con $v_1 \in C_1$, entonces v_1 pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, k + 1$. Pero si $(v_1, x_2) \in F(T)$ y $q \leq k$, recordemos que $(x_q, v_j) \in F(T)$, para $1 \leq j \leq k$, pues $x_q \in S_2$, así existe $C_1 = (v_1, x_2, x_3, \dots, x_q, v_q, v_{q+1}, v_{q+2}, \dots, v_k, v_1)$ un $k + 1$ -ciclo (ver figura 3.97).

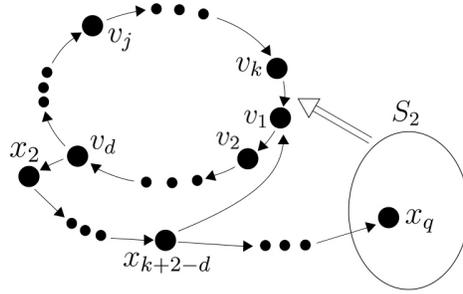


Figura 3.96.

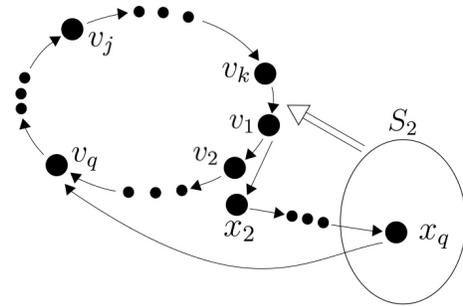


Figura 3.97.

Si $q \geq k + 1$, entonces recordemos que x_{k+1} y v_1 no pertenecen al mismo conjunto de la partición, de donde $(v_1, x_{k+1}) \in F(T)$ o $(x_{k+1}, v_1) \in F(T)$, pero si $(v_1, x_{k+1}) \in F(T)$, entonces existe $P_1 = (v_1, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_q)$ una trayectoria de C a S_2 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, por lo tanto $(x_{k+1}, v_1) \in F(T)$, así existe $C_1 = (v_1, x_2, x_3, \dots, x_{k+1}, v_1)$ un $(k + 1)$ -ciclo, con $v_1 \in C_1$, entonces v_1 pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, k + 1$.

Caso 2: Si $V(P) \cap V_1 \neq \emptyset$, entonces podemos escoger el valor máximo de s , para el cual $x_s \in V_1$, notemos que $s < q$, pues $x_q \notin V_1$, además si x_j y x_f pertenecen a distintos conjuntos de la partición, para $1 \leq j < f \leq q$, con $f \neq j + 1$, entonces $(x_f, x_j) \in F(T)$, pues si $(x_j, x_f) \in F(T)$, entonces existe $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, x_f, x_{f+1}, \dots, x_q)$ una trayectoria de los vértices de C a los vértices de S_2 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, entonces $(x_f, x_j) \in F(T)$, además

renombremos los vértices de C de tal forma que $C = (u_1 = v_d, u_2 = v_{d+1}, u_3 = v_{d+2}, \dots, u_k = v_{d+k-1}, u_1)$.

Ahora consideremos los siguientes casos:

- Si $s = q - 1$ ó $s = q - 2$, recordemos que $V(P - \{x_q\}) \cap S_2 = \emptyset$, entonces x_q y x_j no pertenecen al mismo conjunto de la partición, para $1 \leq j \leq q - 2$, entonces $(x_q, x_j) \in F(T)$, para todo $1 \leq j \leq q - 1$, pues si $(x_j, x_q) \in F(T)$ para algún $1 \leq j \leq q - 2$, entonces existe $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, x_q)$ una trayectoria de C a S_2 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, por lo que $(x_q, x_j) \in F(T)$, así

$$C_1 = (x_{q-r}, x_{q-r+1}, x_{q-r+2}, \dots, x_q, x_{q-r})$$

es un $(r + 1)$ -ciclo, con $2 \leq r \leq q - 1$, donde $x_s \in C_1$, es decir x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, q$. Por otro lado recordemos que $(x_q, u_j) \in F(T)$, para $1 \leq j \leq k$, pues $x_q \in S_2$, entonces

$$C = (u_{k-r}, u_{k-r+1}, u_{k-r+2}, \dots, u_k, u_1 = x_1, x_2, x_3, \dots, x_q, u_{k-r})$$

es un $(q+r+1)$ -ciclo, con $0 \leq r \leq k-2$ y $x_s \in C_1$ (ver figura 3.98), es decir x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = q+1, q+2, \dots, q+k-1$, donde $q+k-1 \geq k+2$, pues $q \geq 3$. Por lo que x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, q+k-1$.

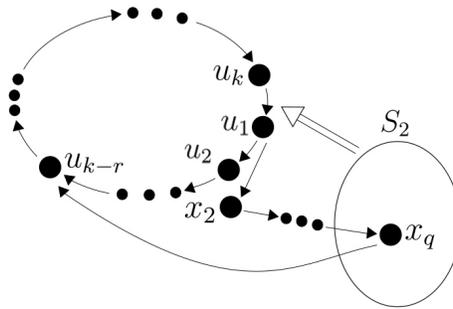


Figura 3.98.

- Si $1 < s \leq q-3$, entonces x_s y x_{s+r} no pertenecen al mismo conjunto de la partición, para $2 \leq r \leq q - s$, entonces $(x_{s+r}, x_s) \in F(T)$,

pues si $(x_s, x_{s+r}) \in F(T)$, tenemos que existe $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+r}, x_{s+r+1}, \dots, x_q)$ una trayectoria de C a S de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, entonces $(x_{s+r}, x_s) \in F(T)$, así existe

$$C_1 = (x_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{s+r}, x_s)$$

un $(r + 1)$ -ciclo, con $2 \leq r \leq q - s$, donde $x_s \in C_1$, es decir x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, q - s + 1$.

Por otro lado recordemos, que x_q y x_j no pertenecen al mismo conjunto de la partición, para $1 \leq j \leq q - 2$, entonces $(x_q, x_j) \in F(T)$, para $1 \leq j \leq q - 2$, entonces existe

$$C_1 = (x_{s-r}, x_{s-r+1}, x_{s-r+2}, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_q, x_{s-r})$$

un $(q - s + r + 1)$ -ciclo, con $1 \leq r \leq s - 1$ y $x_s \in C_1$, es decir, x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = q - s + 2, q - s + 3, \dots, q$.

También recordemos que $(x_q, u_j) \in F(T)$, para $1 \leq j \leq k$, pues $x_q \in S_2$, entonces

$$C_1 = (u_{k-r}, u_{k-r+1}, u_{k-r+2}, \dots, u_k, u_1 = x_1, x_2, x_3, \dots, x_q, u_{k-r})$$

es un $(q+r+1)$ -ciclo, con $0 \leq r \leq k - 2$ y $x_s \in C_1$ (ver figura 3.98), es decir x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = q + 1, q + 2, \dots, q + k - 1$, donde $q + k - 1 \geq k + 2$, pues $q \geq 3$. Entonces x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, q + k - 1$.

- Si $s = 1$, entonces $x_1 \in V_1$ y $x_j \notin V_1$, para $2 \leq j \leq q$, entonces $(x_j, x_1) \in F(T)$, para todo $3 \leq j \leq q$, pues si $(x_1, x_j) \in F(T)$, entonces existe $P_1 = (x_1, x_j, x_{j+1}, \dots, x_q)$ una trayectoria de C a S_2 de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción, entonces $(x_j, x_1) \in F(T)$, así

$$C_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_r, x_1)$$

es un r -ciclo, con $3 \leq r \leq q$, (ver figura 3.99).

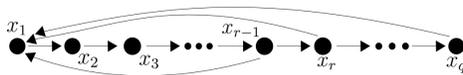


Figura 3.99.

Tenemos que $(x_q, u_j) \in F(T)$, para $1 \leq j \leq k$, pues $x_q \in S_2$, entonces

$$C = (u_{k-r}, u_{k-r+1}, k_{k-r+2}, \dots, u_k, u_1 = x_1, x_2, x_3, \dots, x_q, u_{k-r})$$

es un $(q+1+r)$ -ciclo, con $0 \leq r \leq k-2$ y $x_s \in C_1$ (ver figura 3.98), es decir x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = q+1, q+2, \dots, q+k-1$, donde $q+k-1 \geq k+2$, pues $q \geq 3$. Por lo que x_s pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, q+k-1$.

Por lo tanto existe un vértice $y \in V_1$ que pertenece a un t -ciclo, para $t = 3, 4, 5, \dots, n$.

Por lo tanto cada conjunto de la partición de T un torneo n -partito fuertemente conexo tiene al menos un vértice que pertenece a un ciclo de longitud m para cada $m \in \{3, 4, \dots, n\}$. \square

Con el teorema anterior podemos concluir que todo torneo fuertemente conexo es una digráfica pancíclica.

Teorema 3.0.30. *Cada vértice de un torneo n -partito fuertemente conexo T pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente q conjuntos de la partición, para cada $q \in \{3, 4, \dots, n\}$.*

Demostración. Sean V_1, V_2, \dots, V_n los conjuntos de la partición de T . Mostraremos sin pérdida de generalidad que todo vértice de V_1 está contenido en un ciclo que contiene vértices de exactamente q conjuntos de la partición para cada $q \in \{3, 4, \dots, n\}$.

Sea $v \in V_1$, primero demostraremos que v está contenido en un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición. Procederemos por inducción sobre q .

Como T es fuertemente conexo y por la proposición 3.0.15 (i) sabemos que para cualesquiera dos vértices de distintos conjuntos de la partición pertenecen a un ciclo en común, entonces podemos concluir que v pertenece a un ciclo en T y por el teorema 3.0.13 tenemos que v pertenece a un 3-ciclo o a un 4-ciclo.

Si v pertenece a un 3-ciclo, entonces v está contenido en un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición, pero si v no pertenece a un 3-ciclo, entonces v pertenece a un 4-ciclo, sea $C = (v_1 = v, v_2, v_3, v_4)$ dicho ciclo, así tenemos lo siguiente casos:

Caso 1: Notemos que $v_3 \in V_1$, pues si $v_3 \notin V_1$ entonces o $(v_1, v_3) \in F(T)$ y (v_1, v_3, v_4, v_1) es un 3-ciclo en T que contiene a v_1 (figura 3.100 (a)) o $(v_3, v_1) \in F(T)$ y (v_1, v_2, v_3, v_1) es un 3-ciclo en T que contiene a v_1 (figura 3.100 (b)), en ambos casos llegamos a una contradicción, pues v no pertenece a un 3-ciclo.

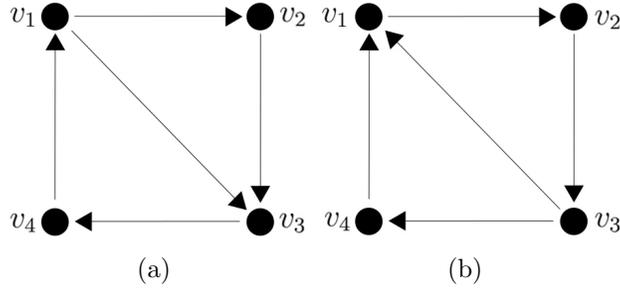


Figura 3.100.

Caso 2: Si v_2 y v_4 pertenecen a distintos conjuntos de la partición, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $v_2 \in V_2$ y $v_4 \in V_3$, y como v_1 y $v_3 \in V_1$, entonces C es un 4-ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición, es decir v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición.

Caso 3: Si v_2 y v_4 pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que v_2 y $v_4 \in V_2$, y como v_1 y $v_3 \in V_1$, entonces C es un 4-ciclo que contiene vértices de exactamente dos conjuntos de la partición.

Si existe un vértice $x \in V_i$, para $3 \leq i \leq n$, que es exvecino e invecino de C , entonces afirmamos que v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente 3 conjuntos de la partición.

- Notemos que x es adyacente a todos los vértices de C , pues $x \in V_i$ con $i \neq 1, 2$, además es exvecino e invecino de C , entonces afirmamos que existen dos vértices consecutivos v_j y v_{j+1} en C , para algún $j = 1, 2, 3, 4$ y $j + 1$ módulo 4, en C tal que (v_j, x) y $(x, v_{j+1}) \in F(T)$.
 - Como x es exvecino de C , entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $(v_1, x) \in F(T)$, además como x es invecino de

C , entonces podemos escoger el valor mínimo de s , para el cual $(x, v_s) \in F(T)$, con $v_s \in V(C)$, entonces para $v_{s-1} \in V(C)$ se tiene que $(v_{s-1}, x) \in F(T)$, entonces x es exvecino de v_{s-1} y x es invecino de v_s .

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(x, v_2), (v_3, x) \in F(T)$, entonces existe

$$C_1 = (v_1, v_2, x, v_3, v_4, v_1)$$

un 5-ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición (figura 3.101), pues $v_1, v_3 \in V_1$, $v_2, v_4 \in V_2$ y $x \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, entonces v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos.

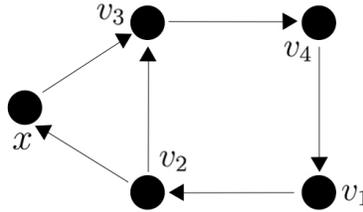


Figura 3.101.

Ahora supongamos que no existe un vértice $x \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, tal que es exvecino e invecino de C , entonces $V(T) - (V_1 \cup V_2)$ se puede partir en dos conjuntos S_1 y S_2 tal que $S_1 = \{x \in V(T) - (V_1 \cup V_2) \mid (v_i, x) \in F(T) \text{ para todo } i = 1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de exvecinos de C y $S_2 = \{x \in V(T) - (V_1 \cup V_2) \mid (x, v_i) \in F(T) \text{ para todo } i = 1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de invecinos de C (figura 3.102), donde $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

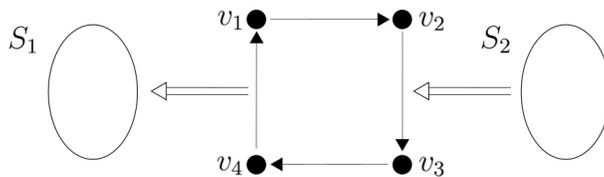


Figura 3.102.

Como $n \geq 3$, entonces al menos uno de los dos conjuntos S_1 o S_2 es

no vacío. Sin pérdida de generalidad supongamos que $S_1 \neq \emptyset$ (en el otro caso se considera la digráfica inversa). Como T es fuerte, entonces existe una trayectoria de cada vértice de S_1 a cada vértice de C . Sea $P = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q)$ una trayectoria mínima de los vértices de S_1 a los vértices de C , con $x_q = v_d$, para algún $1 \leq d \leq 4$ (figura 3.103), notemos que $q \geq 3$, pues de lo contrario si $q = 2$, entonces $P = (x_1, x_2)$, es decir x_1 es exvecino e invecino de C , lo cual es una contradicción, pues no existe un vértice $x \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, tal que $x \in S_1 \cap S_2$. Por lo tanto $q \geq 3$.

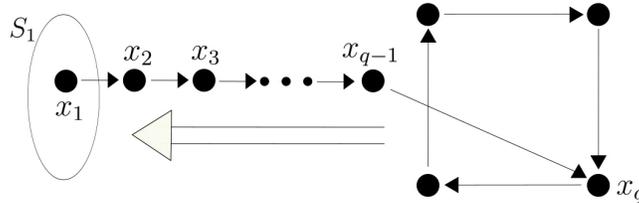


Figura 3.103.

Notemos que $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$, pues de lo contrario si existiera un vértice $x_i \in S_1$, con $2 \leq i \leq q$, entonces $P_1 = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_q)$ sería una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$.

Si $V(P) \cap S_2 \neq \emptyset$. Observemos que $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$, de lo contrario si suponemos que existe otro vértice $x_i \in V(P) \cap S_2$, con $2 \leq i \leq q - 2$, entonces x_i es adyacente hacia un vértice x_l de C , entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_l)$ es una trayectoria de longitud menor que la de P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$. Notemos que $V(P - \{x_1, x_2\}) \subseteq V_1 \cup V_2$, pues $V(P) \cap S_1 = \{x_1\}$ y $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$, entonces tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si x_1 y x_{q-1} pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces supongamos que $x_1, x_{q-1} \in V_i$ con $3 \leq i \leq n$, como $x_{q-1} \in S_2$, se tiene que $(x_{q-1}, v_4) \in F(T)$ y $x_1 \in S_1$, por lo que $(v_1, x_1) \in F(T)$, así

$$C_1 = (v_1, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{q-1}, v_4, v_1)$$

es un ciclo en T que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición (ver figura 3.104), pues $v_1 \in V_1$, $v_4 \in V_2$,

$V(P - \{x_1, x_2\}) \subseteq V_1 \cup V_2$ y $x_1, x_{q-1} \in V_i$. Entonces v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición.

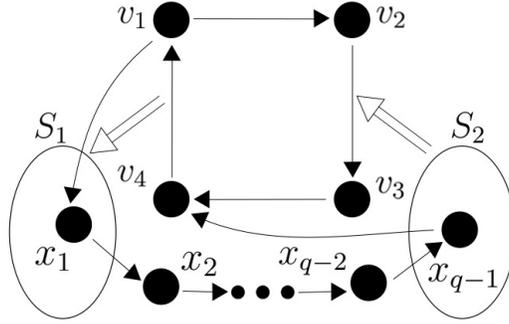


Figura 3.104.

Caso 2: Si x_1 y x_{q-1} no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 \in V_i$ y $x_{q-1} \in V_j$, con $3 \leq i < j \leq n$.

Notemos que $q \geq 4$, pues si $q = 3$ y como $x_{q-1} = x_2 \in S_2$, entonces $(x_2, v_1) \in F(T)$, así $C_1 = (x_1, x_2, x_3 = v_1, x_1)$ es un 3-ciclo que contiene a v_1 , lo cual es una contradicción, pues v_1 no pertenece a ningún 3-ciclo. Así $q \geq 4$, entonces $x_{q-2} \neq x_1$ y como $V(P - \{x_1, x_2\}) \subseteq V_1 \cup V_2$, entonces $x_{q-2} \in V_1$ o $x_{q-2} \in V_2$, así tenemos lo siguiente:

- Si $x_{q-2} \in V_1$ y como $v_2 \in V_2$, entonces $(x_{q-2}, v_2) \in F(T)$ o $(v_2, x_{q-2}) \in F(T)$, pero si $(x_{q-2}, v_2) \in F(T)$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{q-2}, v_2)$ es una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual no puede ocurrir, pues P es de longitud mínima, entonces $(v_2, x_{q-2}) \in F(T)$, además $(x_{q-1}, v_1) \in F(T)$, pues $x_{q-1} \in S_2$, así

$$C_1 = (v_1, v_2, x_{q-2}, x_{q-1}, v_1)$$

es un 4-ciclo en T que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición (ver figura 3.105), pues $v_1, x_{q-2} \in V_1$, $v_2 \in V_2$ y $x_{q-1} \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, entonces v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición.

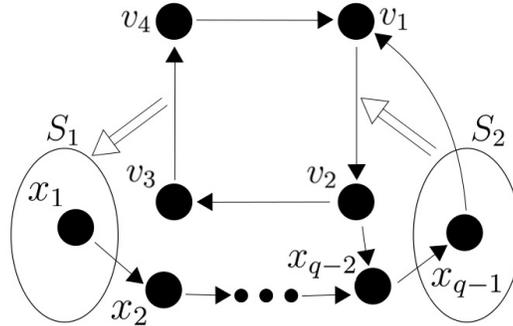


Figura 3.105.

- Si $x_{q-2} \in V_2$ y como $v_3 \in V_1$, entonces $(x_{q-2}, v_3) \in F(T)$ o $(v_3, x_{q-2}) \in F(T)$, pero si $(x_{q-2}, v_3) \in F(T)$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{q-2}, v_3)$ es una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual no puede ocurrir, pues P es de longitud mínima, entonces $(v_1, x_{q-2}) \in F(T)$, además $(x_{q-1}, v_3) \in F(T)$, pues $x_{q-1} \in S_2$, así

$$C_1 = (v_1, v_2, v_3, x_{q-2}, x_{q-1}, v_1)$$

es un 5-ciclo en T que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición (ver figura 3.106), pues $v_1, v_3 \in V_1, v_2, x_{q-2} \in V_2$ y $x_{q-1} \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, entonces v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición.

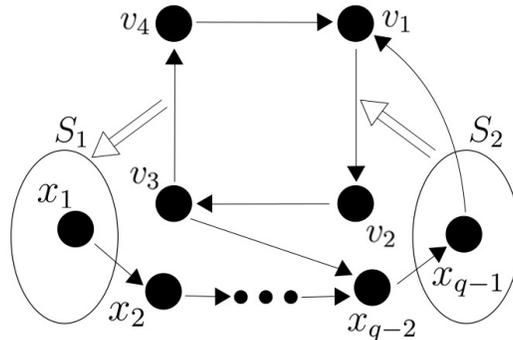


Figura 3.106.

Ahora supongamos que $V(P) \cap S_2 = \emptyset$, entonces $V(P - \{x_1\}) \subseteq V_1 \cup V_2$, pues $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$ y $V(P - \{x_1\}) \cap S_2 = \emptyset$, renombramos los vértices de $C = (u_2 = v_d, u_3 = v_{d+1}, u_4 = v_{d+2}, u_1 = v_{d+3}, u_2)$ tomando $d + 1, d + 2$ y $d + 3$ módulo 4. Notemos que $(u_1, x_1) \in F(T)$, pues $x_1 \in S_1$, entonces

$$C_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q = u_2, u_3, u_4, u_1, x_1)$$

es un ciclo en T que contiene vértices de exactamente tres conjuntos distintos de la partición (ver figura 3.107), pues $V(C) \cup V(P - x_1) \subseteq V_1 \cup V_2$ y $x_1 \in V_i$ con $3 \leq i \leq n$, donde además $V(C) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $V(C) \cap V_2 \neq \emptyset$, entonces v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición.

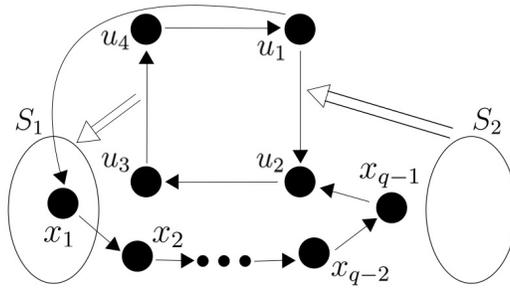


Figura 3.107.

Por lo tanto por todos los casos anteriores se concluye que v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente tres conjuntos de la partición.

Ahora, supongamos que v es un vértice de V_1 que pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente t conjuntos de la partición para $t = 3, 4, \dots, q$, donde $q < n$.

Mostraremos ahora que también v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente $q + 1$ conjuntos de la partición.

Sea $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ un ciclo con $u = v_1$, $k \geq 3$ que contiene vértices de exactamente q conjuntos de la partición, con $q < n$ y sea S el conjunto de vértices que pertenecen a los conjuntos de la partición que no tienen vértices en C . Si existe un $x \in S$ tal que es invecino y exvecino de C , donde además x es adyacente a todo vértice de C , pues x no pertenece a ningún conjunto de la partición que contenga vértices en C , entonces afirmamos que existen dos vértices consecutivos v_j y v_{j+1} en C , para algún $1 \leq j \leq k$ y $j + 1$ módulo k , en C tal que (v_j, x) y $(x, v_{j+1}) \in F(T)$. Así existe

$$C_1 = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_j, x, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_k, v_1)$$

un ciclo en T que contiene vértices de exactamente $q + 1$ conjuntos de la partición (ver figura 3.108), es decir v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente $q + 1$ conjuntos de la partición.

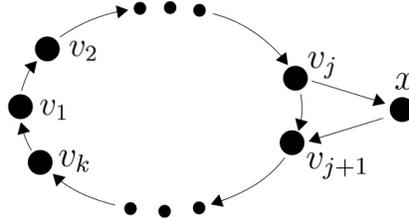


Figura 3.108.

Por otro lado, si no existe un vértice $x \in S$ tal que es invecino y exvecino de C , entonces podemos partir a S en dos conjuntos ajenos S_1 y S_2 tal que $S_1 = \{x \in V(S) | (v_i, x) \in F(T) \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots, k\}$ y $S_2 = \{x \in V(T) - (V_1 \cup V_2) | (x, v_i) \in F(T) \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots, k\}$, donde $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $S_1 \neq \emptyset$ (en el otro caso consideremos la digráfica inversa). Como T es fuerte, entonces existe una trayectoria de cada vértice de S_1 a cada vértice de C . Sea $P = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q)$ una trayectoria mínima de S_1 a C (figura 3.109), con $x_q = v_d$, para algún $1 \leq d \leq k$, notemos que $q \geq 3$, pues de lo contrario si $q = 2$, entonces $P = (x_1, x_2)$, es decir x_2 es exvecino e invecino de C , lo cual es una contradicción, pues no existe un vértice $x \in V_i$, con $3 \leq i \leq n$, tal que $x \in S_1 \cap S_2$. Por lo tanto $q \geq 3$.

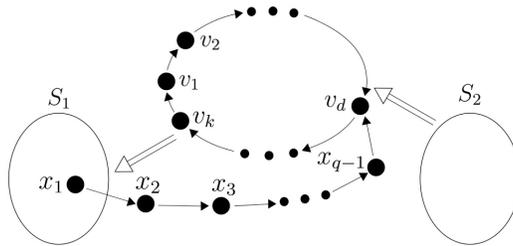


Figura 3.109.

Notemos que $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$, pues de lo contrario si existiera un vértice $x_i \in S_1$, con $3 \leq i \leq q$, entonces $P_1 = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_q)$ sería una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$, denotemos por $W = V(T) - S$ al conjunto de vértices que pertenecen a un conjunto de la partición que tiene al menos un vértice en C .

Supongamos primero que $V(P) \cap S_2 \neq \emptyset$. Observemos que $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$, pues de lo contrario si suponemos que existe otro vértice $x_i \in V(P) \cap S_2$, con $2 \leq i \leq q-2$, entonces x_i es adyacente hacia un vértice $v_l \in V(C)$, con $1 \leq l \leq k$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, v_l)$ es una S_1C -trayectoria de longitud menor que P , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$. Así tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $q = 3$, entonces x_1 y x_2 pertenecen a distintos conjuntos de la partición, pues $(x_1, x_2) \in F(T)$. Supongamos que $x_1 \in V_r$ y $x_2 \in V_s$, con $2 \leq r < s \leq n$, tal que $v_i \notin V_r \cup V_s$, para todo $1 \leq i \leq k$, así $P = (x_1, x_2, x_3)$, donde $x_1 \in S_1$ y $x_2 \in S_2$, sabemos que C es un ciclo que contiene vértices de exactamente q conjuntos de la partición, con $q < n$, sea $U \subseteq V(C)$, un conjunto que contiene q vértices de exactamente q conjuntos distintos de la partición, donde $|U| = q$ y tal que $v_1 \in U$, es decir si $x, y \in U$, entonces x y y no pertenecen al mismo conjunto de la partición, entonces por la proposición 3.0.14 sabemos que si T es un torneo n -partito y $W = \{v_0, v_1, \dots, v_m\} \subseteq V(T)$, con $0 < m < n$, tal que entre cualesquiera dos vértices no pertenezcan a un mismo conjunto de la partición, entonces existe una trayectoria de longitud m en T que los contiene, entonces existe una trayectoria de longitud $q-1$ en T que contiene los vértices de U , sea $P_1 = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ dicha trayectoria. Así tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1: Si $u_1 = v_1$, entonces $(x_2, u_1) \in F(T)$, pues $x_2 \in S_2$ y $u_1 \in V(C)$, además $(u_{q-1}, x_1) \in F(T)$, pues $x_1 \in S_1$ y $u_{q-1} \in V(C)$, entonces existe

$$C_1 = (u_1 = v_1, u_2, u_3, \dots, u_{q-1}, x_1, x_2, u_1)$$

un $(q+1)$ -ciclo que contiene vértices de exactamente $q+1$ conjuntos distintos de la partición (figura 3.110), pues $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{q-1}\}$ es un conjunto que contiene vértices de exactamente $q-1$ conjuntos distintos de la partición, $x_1 \in V_r$ y $x_2 \in V_s$.

Subcaso 2: Si $u_1 \neq v_1$, es decir $v_1 \in \{u_2, u_3, \dots, u_q\}$, tenemos que $(x_2, u_2) \in F(T)$, pues $x_2 \in S_2$ y $u_2 \in V(C)$, además $(u_q, x_1) \in F(T)$, pues $x_1 \in S_1$ y $u_q \in V(C)$, entonces existe

$$C_1 = (u_2, u_3, \dots, u_{q-1}, u_q, x_1, x_2, u_2)$$

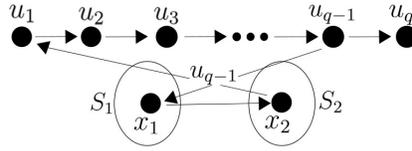


Figura 3.110.

un $(q+1)$ -ciclo que contiene vértices de exactamente $q+1$ conjuntos distintos de la partición (figura 3.111), pues $\{u_2, u_3, u_4, \dots, u_q\}$ es un conjunto que contiene vértices de exactamente $q-1$ conjuntos distintos de la partición, $x_1 \in V_r$ y $x_2 \in V_s$.

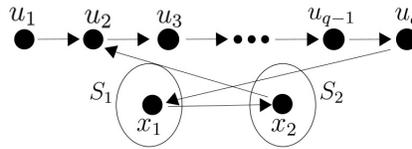


Figura 3.111.

En ambos subcasos v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente $q+1$ conjuntos de la partición.

Caso 2: Si $q \geq 4$, entonces $x_{q-2} \neq x_1$. Notemos que $V(P - \{x_1, x_2\}) \subseteq W$, pues $V(P) \cap S_1 = \{x_1\}$ y $V(P) \cap S_2 = \{x_{q-1}\}$, entonces $x_{q-2} \in V_1$ o $x_{q-2} \notin V_1$, consideremos $x_{q-1} \in V_j$, con $2 \leq j \leq n$, tal que $v_i \notin V_j$, para todo $1 \leq i \leq k$, así tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1: Si $x_{q-2} \in V_1$ y como $v_2 \notin V_1$, pues $(v_1, v_2) \in F(T)$, entonces $(x_{q-2}, v_2) \in F(T)$ o $(v_2, x_{q-2}) \in F(T)$, pero si $(x_{q-2}, v_2) \in F(T)$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{q-2}, v_2)$ es una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual no puede ocurrir, pues P es de longitud mínima, entonces $(v_2, x_{q-2}) \in F(T)$, además $(x_{q-1}, v_3) \in F(T)$, pues $x_{q-1} \in S_2$, así

$$C_1 = (v_1, v_2, x_{q-2}, x_{q-1}, v_3, v_4, \dots, v_k, v_1)$$

es un ciclo en T que contiene vértices de exactamente $q+1$ conjuntos distintos de la partición (figura 3.112), pues $\{x_{q-2}, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ es un conjunto que contiene vértices de exactamente q conjuntos distintos de la partición y $x_{q-1} \in V_j$.

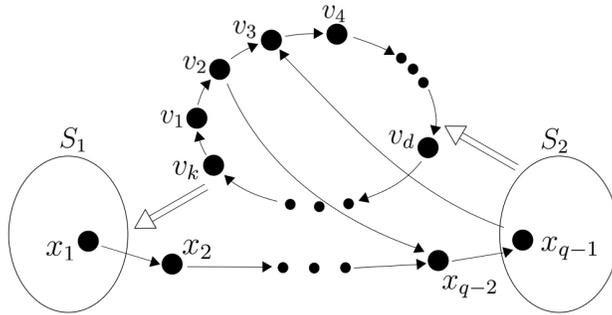


Figura 3.112.

Subcaso 2: Si $x_{q-2} \notin V_1$ y como $v_1 \notin V_1$, entonces $(x_{q-2}, v_1) \in F(T)$ o $(v_1, x_{q-2}) \in F(T)$, pero si $(x_{q-2}, v_1) \in F(T)$, entonces $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{q-2}, v_1)$ es una trayectoria de S_1 a C de longitud más pequeña que P , lo cual no puede ocurrir, pues P es de longitud mínima, entonces $(v_1, x_{q-2}) \in F(T)$, además $(x_{q-1}, v_2) \in F(T)$, pues $x_{q-1} \in S_2$, así

$$C_1 = (v_1, x_{q-2}, x_{q-1}, v_2, v_3, v_4, \dots, v_k, v_1)$$

es un ciclo en T que contiene vértices de exactamente $q+1$ conjuntos distintos de la partición (figura 3.113), pues $\{x_{q-2}, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ es un conjunto que contiene vértices de exactamente q conjuntos distintos de la partición y $x_{q-1} \in V_j$.

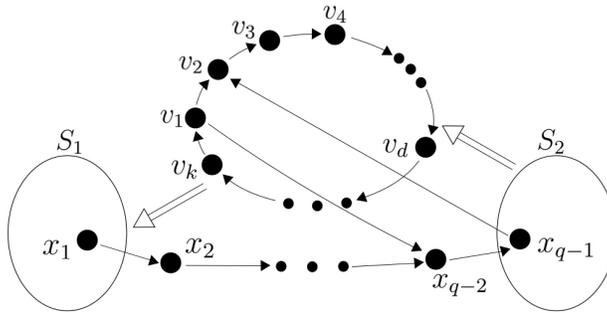


Figura 3.113.

En ambos subcasos se tiene que v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente $q+1$ conjuntos de la partición.

Ahora supongamos que $V(P) \cap S_2 = \emptyset$ y que $x_1 \in V_j$, con $2 \leq j \leq n$, tal que $v_i \notin V_j$, para todo $1 \leq i \leq k$.

Notemos que $V(P - \{x_1\}) \subseteq W$, pues $V(P - \{x_1\}) \cap S_1 = \emptyset$ y $V(P - \{x_1\}) \cap S_2 = \emptyset$ y $S = S_1 \cup S_2$, como $x_1 \in S_1$, entonces $(v_{d-1}, x_1) \in F(T)$, con $d - 1$ módulo k , así

$$C_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_q = v_d, v_{d+1}, v_{d+2}, \dots, v_k, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{d-1}, x_1)$$

es un ciclo que contiene vértices de exactamente $q + 1$ conjuntos distintos de la partición (figura 3.114), pues $V(P - \{x_1\}) \subseteq W$ y $V(C)$ es un conjunto que contiene vértices de exactamente q conjuntos distintos de la partición, es decir $V(P - \{x_1\}) \cup V(C)$ es un conjunto que contiene vértices de exactamente q conjuntos distintos de la partición, además $x_1 \in V_j$, entonces v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente $q + 1$ conjuntos de la partición.

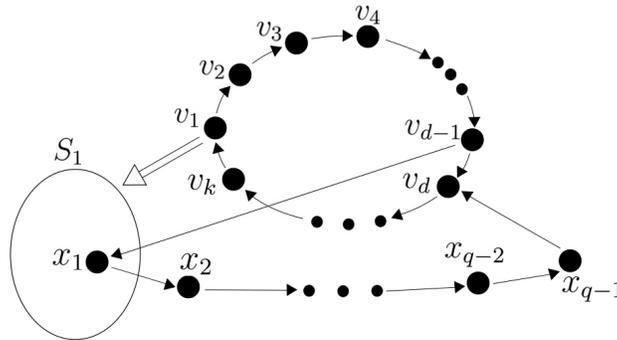


Figura 3.114.

Por lo tanto v pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente $q + 1$ conjuntos de la partición.

Por lo tanto cada vértice de V_1 pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente q conjuntos distintos de la partición, para cada $q \in \{3, 4, \dots, n\}$.

Por lo tanto cada vértice de un torneo n -partito fuertemente conexo T pertenece a un ciclo que contiene vértices de exactamente q conjuntos de la partición, para cada $q \in \{3, 4, \dots, n\}$. \square

Bibliografía

- [1] K. S. BAGGA, AND L. W. BEINEKE, On superstrong bipartite tournaments, *Congr. Numer.* 53 (1986), 113–119.
- [2] K. S. BAGGA, AND L. W. BEINEKE, On the numbers of some subtournaments of a bipartite tournaments, in "Proceedings of Third New York Conference on Combinatorial Mathematics", *Ann. New York Acad. Sci.*, No. 555, pp. 21–29, 1989.
- [3] K. S. BAGGA, AND L. W. BEINEKE, Uniquely realizable score lists in bipartite tournaments, *Czech. Math. J.* 37 (1987), 323–333.
- [4] L. W. BEINEKE AND K. S. BAGGA, On superstrong bipartite tournaments and their scores, in "Proceedings of Third New York Conference on Combinatorial Mathematics" *Ann. New York Acad. Sci.*, No. 555, pp. 32–39, 1989.
- [5] L. W. BEINEKE AND C. H. C. LITTLE, Cicles in bipartite tournaments, *J. Combin. Theory Sér. B* 32 (1982), 140–145.
- [6] L. W. BEINEKE AND J. W. MOON, On bipartite tournaments and scores, in "The Theory and Applications of Graphs" (Y. Alavi, G. Chartrand, D. Goldsmith, L. Lesniak, and D. R. Lick, Eds.), pp. 55–71, Wiley, New York, 1981
- [7] F. HARARY AND L. MOSER, The theory of round robin tournaments, *Amer. Math. Monthly* 73 (1966), 231–246
- [8] J. W. MOON, Topics on Tournaments, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1968.

- [9] L.W. BEINEKE, R.J WILSON, A survey of recent results on tournaments, Recent Advances in Graph Theory, Proceeding of the Symposium Prague, 1974, Academia, Praha,1075, pp. 31-48.
- [10] J.A. BONDY , Disconnected orientation and a conjeture of Las Vergnas J. London Math. Soc. 14 (1976) 277-282.
- [11] A. YEO, Semicomplete Multipartite Digraphs, Ph.D. Thesis, Odense University, 1998.
- [12] M. TEWES, In-tournaments and semicomplete multipartite digraphs, Ph.D. Thesis, Aachen, Germany; Aachemer Beitr. Math, 25 (1999) 114 pp.
- [13] Y. GUO, Semicomplete multipartite digraphs: a generalization of tournaments, Habilitation Thesis, RWTH Aachen, 1998, 102 pp.
- [14] J.A. BONDY, Disconnected orientation and a conjeture of Las Vergnas, J, London Math. Soc. 14 (1976) 277-282.
- [15] G. GUTIN, Cycles and phats in semicomplete multipartite digraphs, theorems, and algorithms: a survey, J. Graph Theory 19 (1995) 481-505.
- [16] WAYNE D. GODDARD, On Multipartite Tournaments, Journal of Combinatorial Theory, Series B 52, 284-300 (1991).
- [17] G. GUTIN, On Cycles in Multipartite Tournaments, Journal of Combinatorial Theory, Series B 58, 319-321 (1993).
- [18] LUTZ VOLKMANN, Cycles in Multipartite Tournaments: Results and Problems, Discrete Mathematics, 245 (2002) 19-53.
- [19] K.B. REID, L.W. BEINEKE, Tournaments, L.W. BEINEKE, R.J. WILSON (Eds.). Selected Topics in Graph Theory, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1987, pp. 169-204.
- [20] K.B. REID, L.W. BEINEKE, Tournaments, L.W. BEINEKE, R.J. WILSON (Eds.). Selected Topics in Graph Theory, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1987, pp. 169-204.

- [21] L.W. BEINEKE, A through tournaments or bipartite and ordinary tournaments: a comparative survey, *J. London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* 52 (1981) 4155.
- [22] J.C. BERMOND, C. THOMASSEN, Cycles in digraphs, A survey, *J. Graph Theory* 5 (1981) 1-43.
- [23] LUTZ VOLKMANN, Multipartite Tournaments: A survey, *Discrete Mathematics*, 307 (2007) 3097-3129.