Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

# Relaciones entre un espacio $X$ y su n-ésimo producto Simétrico

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TíTULO DE:

**MATEMÁTICO**

PRESENTA:

**Nataly Mondragón Chigora**

ASESORES:
DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ
DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

TOLUCA, MÉXICO 2017

# Introducción

La topología, es una rama de las matemáticas que apareció a finales del siglo XIX. Esta joven disciplina matemática estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas definidas entre estos.

Dentro de la topología, una vertiente importante es la Teoría de Hiperespacios. Los hiperespacios de un espacio topológico $X$, son espacios constituidos por una clase específica de subconjuntos de $X$. Tuvieron sus inicios en Alemania aproximadamente en 1900, con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris. Durante los años veinte y treinta del siglo XX, gran parte de la estructura fundamental de los hiperespacios fue establecida. Uno de los primeros hiperespacios estudiado fue el hiperespacio formado de los subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio $X$, denotado por $CL(X)$.

Considerando un espacio topológico $X$ y $n \in \mathbb{N}$, K. Borsuk y S. Ulam introducen el hiperespacio $F_n(X)$ al que llamaron el $n$-ésimo producto simétrico de $X$, y lo definieron como $F_n(X) = \{A \in CL(X) : A$ tiene a lo más $n$ puntos$\}$.

Podemos conocer la estructura de espacios topológicos complejos a partir de espacios más simples. Tener conocimiento sobre las relaciones entre estos espacios nos brinda una herramienta de apoyo para comprenderlos mejor.

El objetivo de este escrito es profundizar en la relación que existe entre algunas propiedades de un espacio topológico $X$ y su $n$-ésimo producto simétrico. El trabajo está organizado en dos capítulos.

El primer capítulo lo dividimos en dos secciones. En la primer sección daremos a conocer la base para la topología con la que dotamos a $F_n(X)$ y expondremos algunas propiedades y resultados de los abiertos básicos en el $n$-ésimo producto simétrico. En la segunda sección definimos una función a la que hemos nombrado canónica, dicha función nos será de gran utilidad por las propiedades que satisface.

El segundo capítulo lo dedicamos a presentar cada una de las propiedades que abordaremos en este escrito. En la primer sección del capítulo 2, presentamos algunas herramientas necesarias para poder establecer las relaciones entre $X$ y su hiperespacio $F_n(X)$, algunas de ellas son: la construcción de bases que preservan cerradura, redes, bases locales, familias discretas, entre otras. Estudiaremos propiedades como la compacidad local, ser regular, ser primero numerable, separabilidad, ser cósmico, ser $\gamma$-espacio, ser $\sigma$-espacio, ser $r$-espacio, entre otras. A partir de la sección 2 de este capítulo se describe la propiedad a estudiar, algunos ejemplos y mencionamos la relación basada en dicha propiedad que se mantiene entre $X$ y su hiperespacio $F_n(X)$.

En la mayoría de los casos damos las pruebas de los resultados presentados y en aquellos en los que las propiedades requieren de mayor profundidad, damos las referencias apropiadas.

# Índice general

# Capítulo 1

# El hiperespacio $F_n(X)$

En este capítulo, se muestran definiciones, notación y resultados que se utilizarán a lo largo de este trabajo.
Denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los enteros positivos y por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales.
Cuando $X$ sea un espacio topológico asumiremos que su topología es $\tau_X$.
Todos nuestros espacios serán espacios de Hausdorff a menos que se indique lo contrario.
Sea $X$ un espacio topológico, $\mathbb{P}(X)$ representará al conjunto potencia de $X$, es decir a la familia de subconjuntos de $X$.
Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\beta$ una base para la topología de $X$. Decimos que $\beta$ es cerrada bajo uniones finitas si para $U_1, \ldots, U_k \in \beta$, se tiene que $U_1 \cup \cdots \cup U_k \in \beta$.
Sean $X$ un espacio topológico y $A \subset X$, denotaremos por $\mathrm{Int_X(A)}$ al interior del conjunto $A$ en $X$ y por $\mathrm{Cl_X(A)}$ a la cerradura de $A$ en $X$.
Sea $n \in \mathbb{N}$. El símbolo $X^n$ representará el producto topológico del espacio $X$, considerado con la topología producto. Recordemos que la familia

$$\{U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \text{ es un abierto en } X, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

es una base para dicha topología.
Cuando $X = \mathbb{R}$, el símbolo $\tau_u$ representará la topología usual, generada por la siguiente familia como base:

$$\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

## 1.1. Propiedades de los abiertos básicos en $F_n(X)$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X$ un espacio topológico. Los hiperespacios de $X$ son espacios constituidos por una clase específica de subconjuntos de $X$. Algunos de ellos son:

$$CL(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y cerrado}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$$

La topología con la que se dota a $CL(X)$ es la topología de Vietoris, la cual describimos a continuación. Sean $E_1, \ldots, E_k \subset X$, definimos:

$$\langle E_1, \ldots, E_k \rangle = \{A \in CL(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{k} E_i \text{ y } A \cap E_i \neq \emptyset, \text{ para } i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

La topología de Vietoris se define como la mínima topología $\tau_{\mathrm{V}}$ para $CL(X)$ con la propiedad de que para cada $U \in \tau_X$, $\langle U \rangle, \langle X, U \rangle \in \tau_{\mathrm{V}}$.

El siguiente lema resalta algunas propiedades de los abiertos básicos de la topología de Vietoris en $CL(X)$.

**Lema 1.1.1.** *Sean $k \in \mathbb{N}$, $X$ un espacio topológico y $U_1, \ldots, U_k$ abiertos en $X$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*
*(a)*$\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle)$,
*(b)*$\langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle$,
*(c)*$\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle$,
*(d)*$\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$.

*Demostración.* Para probar (a), sea $A \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$. Claramente $A \in \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle$. Como $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $A \in \langle X, U_i \rangle$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Así, $A \in \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle)$.

Por otra parte, si $A \in \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle)$, entonces $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. De lo anterior $A \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$. Por lo que

$$\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle).$$

Para probar (b), sea $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$. Como $A \subset U_1$ y $A \subset U_2$, entonces $A \subset U_1 \cap\ U_2$. De lo anterior $A \in \langle U_1 \cap U_2 \rangle$.
Ahora tomemos $A \in \langle U_1 \cap U_2 \rangle$, entonces $A \subset U_1 \cap U_2$. Así, $A \subset U_i$ para $i \in \{1, 2\}$. De donde, $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$. Concluimos que

$$\langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle.$$

Para probar (c), sea $A \in \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Entonces $A \subset X \cup U_1 \cup U_2$, $A \cap U_1 \neq \emptyset$ y $A \cap U_2 \neq \emptyset$. Por lo que $A \in \langle X, U_1, U_2 \rangle$.
Ahora, si $A \in \langle X, U_1, U_2 \rangle$, entonces $A \cap U_1 \neq \emptyset \neq A \cap U_2$. Notemos que $X \cup U_1 = X = X \cup U_2$, así $A \in \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Por tanto

$$\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle.$$

Para probar (d), sea $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Dado que $A \in \langle U_1 \rangle$ y $U_1 = U_1 \cup (U_1 \cap U_2)$, se tiene que $A \subset U_1 \cup (U_1 \cap U_2)$. Como $A \subset U_1$, entonces $(A \cap U_1) \cap U_2 = A \cap U_2 \neq \emptyset$. Así, $A \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$. Por lo que $A \in \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$.
Por otra parte, tomemos $A \in \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$. Dado que $A \subset U_1 \cup (U_1 \cap U_2) = U_1$ y $A \cap U_1 \neq \emptyset$, $A \in \langle U_1 \rangle$. Por otro lado, como $A \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$, $A \in \langle X, U_2 \rangle$. Por lo que $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Concluimos que

$$\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle.$$

□

El siguiente resultado nos permite obtener una base para la topología $\tau_{\mathrm{V}}$.

**Teorema 1.1.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces la familia*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{V}} = \{\langle U_1, \ldots, U_k \rangle : U_1, \ldots, U_k \text{ son abiertos en } X, k \in \mathbb{N}\}$$

*es una base para $\tau_V$ en $CL(X)$.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \tau_X\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau_X\}$ y $\mathcal{S}^*$ la familia formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Dado que la familia $\mathcal{S}$ es una subbase para $\tau_V$, es suficiente probar que $\mathcal{S}^* = \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$.

Primero probaremos que:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{V}} \subset \mathcal{S}^*.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k$ abiertos en $X$ tales que $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \in \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$. Probaremos que $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \in \mathcal{S}^*$.

Por el Lema 1.1.1 (a), $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \in \mathcal{S}^*$.
Para ver que:

$$\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_{\mathrm{V}}.$$

Si $U_1, U_2$ son abiertos en $X$ y $\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle, \langle X, U_1\rangle, \langle X, U_2\rangle \in \mathcal{S}$. Por lo obtenido en (b), (c) y (d) del Lema 1.1.1, se tiene que $\langle U_1\rangle \cap \langle U_2\rangle$, $\langle X, U_1\rangle \cap \langle X, U_2\rangle$, $\langle U_1\rangle \cap \langle X, U_2\rangle$ pertenecen a $\mathcal{B}_{\mathrm{V}}$ por lo que se concluye que $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathrm{V}}$ es base para la topología de Vietories en $CL(X)$.

$\square$

Consideremos a $F_n(X)$ como subespacio de $CL(X)$. Sean $s \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_s \subset X$. Dado que este trabajo está enfocado a los hiperespacios $F_n(X)$, asumiremos en todo éste, que el conjunto $\langle U_1, \ldots, U_s\rangle$ está contenido en $F_n(X)$. Ahora, para $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$ y cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, definimos $U_{x_j} = \bigcap\{U \in \{U_1, \ldots, U_s\} : x_j \in U\}$. Notemos que si $U_1, \ldots, U_s$ son abiertos de $X$, entonces $U_{x_j}$ es abierto en $X$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$.

**Lema 1.1.3.** *Sean $s \in \mathbb{N}$, $X$ un espacio topológico y $U_1, \ldots, U_s \subset X$. Entonces las siguientes condiciones son ciertas:*

*(a) Si $V_j \subset U_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$, entonces $\langle V_1, \ldots, V_s\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$.*

*(b) Si $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$, entonces $\langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$.*

*Demostración.* Claramente se satisface la condición (a).
Para probar la parte (b), consideremos $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle$. Sea $k \in \{1, \ldots, s\}$ y $x_i \in \{x_1, \ldots, x_r\} \cap U_k$. Dado que $U_{x_i} \subset U_k$ y $\{y_1, \ldots, y_t\} \cap U_{x_i} \neq \emptyset$, $U_k \cap \{y_1, \ldots, y_t\} \neq \emptyset$. Así, $\{y_1, \ldots, y_t\} \cap U_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \{1, \ldots, s\}$. Como $\{y_1, \ldots, y_t\} \subset \bigcup_{j=1}^{r} U_{x_j} \subset \bigcup_{k=1}^{s} U_k$, concluimos que $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$.

$\square$

**Lema 1.1.4.** *Si $n, m \in \mathbb{N}$, $X$ un espacio topológico, $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m \subset X$, $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Entonces*

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle = \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U\rangle.$$

*Demostración.*
Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$. Dado que $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset$

$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = U$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j = V$, entonces $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V)$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U)$. Ahora, tomemos $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$. Sean $x_i \in \{x_1, \ldots, x_r\} \cap U_i$ y $x_j \in \{x_1, \ldots, x_r\} \cap V_j$. Como $x_i \in V$ y $x_j \in U$, se tiene que $x_i \in U_i \cap V$ y $x_j \in V_j \cap U$. Así, $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap (V_j \cap U) \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle$.

Por otra parte, sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle$. Dado que $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U)$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V)$ . Entonces $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Ahora, tomemos $i \in \{1, \ldots, n\}$y $j \in \{1, \ldots, m\}$. Sean $x_i \in \{x_1, \ldots, x_r\} \cap (U_i \cap V)$ y $x_j \in \{x_1, \ldots, x_r\} \cap (V_j \cap U)$. Entonces $x_i \in U_i$ y $x_j \in V_j$. Así, $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap V_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.
Por lo tanto $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. □

**Lema 1.1.5.** *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $X$ un espacio topológico y $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m \subset X$. Entonces $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ si y sólo si $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ y para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $U_i \subset V_j$.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $x \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in U_1$. Para cada $k \in \{2, \ldots, n\}$, tomemos un elemento $x_k \in U_k$. Así, $\{x, x_2, \ldots, x_n\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y como $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, entonces $\{x, x_2, \ldots, x_n\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. De lo anterior $x \in \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Así, $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$.
Ahora, supongamos que existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_i \nsubseteq V_j$. Por cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $x_i \in U_i - V_j$. Entonces $\{x_1, \ldots x_n\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\{x_1, \ldots x_n\} \notin \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $U_i \subset V_j$.

$\Leftarrow\rfloor$ Sean $j \in \{1, \ldots, m\}$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Como $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$, entonces $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Sea $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$U_{i_j} \subset V_j$. Dado que $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap U_{i_j} \neq \emptyset$, tomemos $x_{i_j} \in U_{i_j}$. Así, $x_{i_j} \in V_j$. De aquí que $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap V_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ y $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. $\square$

**Lema 1.1.6.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\mathcal{U}$ es abierto en $F_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es abierto en $X$.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{U}$ un abierto en $F_n(X)$ y $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Entonces existe $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{U}$ tal que $x \in \{x_1, \ldots, x_r\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x = x_1$. Como $\mathcal{U}$ es abierto en $F_n(X)$, existen abiertos $U_1, \ldots, U_s$ en $X$ tales que $\{x, x_2 \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s \rangle \subset \mathcal{U}$.
Probaremos que $U_{x_1} \subset \bigcup \mathcal{U}$. Para ello, sea $y \in U_{x_1}$. Entonces $\{y, x_2, \ldots, x_r\} \in \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r} \rangle$. Por el Lema 1.1.3, $\langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r} \rangle \subset \mathcal{U}$. Así, $y \in \bigcup \mathcal{U}$.
Por lo tanto $\bigcup \mathcal{U}$ es abierto en $X$. $\square$

**Lema 1.1.7.** *Sean $X$ un espacio topológico y $A \subset X$. Si $A$ es cerrado en $X$, entonces $\langle X, A \rangle$ es cerrado en $F_n(X)$.*

*Demostración.* Dado que $A$ es cerrado en $X$, $X - A$ es abierto en $X$. Para probar que $\langle X, A \rangle$ es cerrado en $F_n(X)$ basta probar que $\langle X, A \rangle = F_n(X) - \langle X - A \rangle$.
$\subset ]$ Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, A \rangle$. Como $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap A \neq \emptyset$. Tomemos $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $x_j \in A$, entonces $x_j \notin X - A$. De aquí que $\{x_1, \ldots, x_r\} \nsubseteq X - A$. Por lo que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X) - \langle X - A \rangle$.

$\supset ]$ Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X) - \langle X - A \rangle$. Entonces $\{x_1, \ldots, x_r\} \nsubseteq X - A$ o $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap X - A = \emptyset$.
Primero supongamos que $\{x_1, \ldots, x_r\} \nsubseteq X - A$. Sea $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $x_j \notin X - A$, entonces $x_j \in A$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap A \neq \emptyset$. Claramente $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset X = X \cup A$. Así, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, A \rangle$.
Ahora, supongamos que $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap X - A = \emptyset$. Entonces $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset A \subset X \cup A$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap A \neq \emptyset$. Por lo que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, A \rangle$.
Por lo anterior $\langle X, A \rangle = F_n(X) - \langle X - A \rangle$ y así $\langle X, A \rangle$ es cerrado en $F_n(X)$. $\square$

**Lema 1.1.8.** *Sean $X$ un espacio topológico y $U_1, \ldots, U_s \subset X$. Entonces $\langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s) \rangle = \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\langle U_1, \ldots, U_s \rangle)$.*

*Demostración.* Para probar que $\langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s) \rangle$ es cerrado en $F_n(X)$, primero veremos que:

$\langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle = \langle \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}_X(U_k)\rangle \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_1), X\rangle \cap \cdots \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_s), X\rangle$.
Para esto, sea $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle$. Claramente $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}_X(U_k)\rangle$. Dado que $\{y_1, \ldots, y_t\} \cap \mathrm{Cl}_X(U_k) \neq \emptyset$ para todo $k \in \{1, \ldots, s\}$, se cumple que $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \bigcap\limits_{k=1}^{s} \langle \mathrm{Cl}_X(U_k), X\rangle$. De lo anterior $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}_X(U_k)\rangle \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_1), X\rangle \cap \cdots \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_s), X\rangle$.
Ahora, supongamos que $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}_X(U_k)\rangle \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_1), X\rangle \cap \cdots \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_s), X\rangle$. Es claro que $\{y_1, \ldots, y_t\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}_X(U_k)$ y $\{y_1, \ldots, y_t\} \cap \mathrm{Cl}_X(U_k) \neq \emptyset$ para cada $k \in \{1, \ldots, s\}$. Así, $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle$. Por lo tanto $\langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle = \langle \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}_X(U_k)\rangle \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_1), X\rangle \cap \cdots \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_s), X\rangle$.
Ahora, por el Lema 1.1.7, $\langle \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}_X(U_k)\rangle \cap \langle 0\mathrm{Cl}_X(U_1), X\rangle \cap \cdots \cap \langle \mathrm{Cl}_X(U_s), X\rangle$ es cerrado en $F_n(X)$. De esta manera $\langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle$ es cerrado en $F_n(X)$.

Vamos a probar que $\langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle = \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\langle U_1, \ldots, U_s\rangle)$.
$\supset\rfloor$ De lo anterior y de que $\langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle$ (ver Lema 1.1.3), $\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\langle U_1, \ldots, U_s\rangle) \subset \langle \mathrm{Cl}_X(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle$.

$\subset\rfloor$ Sean $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle \mathrm{Cl}_X(U_1) \ldots \mathrm{Cl}_X(U_s)\rangle$ y $\mathcal{W}$ abierto en $F_n(X)$ tal que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{W}$. Consideremos $W_1, \ldots, W_k$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle W_1, \ldots, W_k\rangle \subset \mathcal{W}$. Probaremos que $\langle U_1, \ldots, U_s\rangle \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. Para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, definimos $\mathcal{Q}_j = \{U \in \{U_1, \ldots, U_s\} : x_j \in \mathrm{Cl}_X(U)\}$. Notemos que $W_{x_j}$ intersecta a cada uno de los elementos de $\mathcal{Q}_j$. Ahora,para cada $l \in \{1, \ldots, s\}$ consideremos $y_l \in U_l \cap W_{x_{j_l}}$ tales que $\{y_1, \ldots, y_l\} \in \langle W_{x_1}, \ldots, W_{x_r}\rangle \cap \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$. Como $\langle W_{x_1}, \ldots, W_{x_r}\rangle$ es abierto en $F_n(X)$, $\{y_1, \ldots, y_l\} \in F_n(X)$. De aquí que $\{y_1, \ldots, y_l\} \in \mathcal{W} \cap \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$.

□

**Lema 1.1.9.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto compacto de $F_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es un subconjunto compacto de $X$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de $X$ que cubre a $\bigcup\mathcal{B}$. Observemos que si $E \in \mathcal{B}$, $E$ es compacto de $X$. Así, existe $\{U_{E,1}, \ldots, U_{E,n_E}\}$ una subfamilia finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $E$. Ahora, para cada $E \in \mathcal{B}$, consideremos $\mathcal{U}_E = \langle U_{E,1}, \ldots, U_{E,n_E}\rangle$. Es claro que $E \in \mathcal{U}_E$. Entonces $\{\mathcal{U}_E\}_{E\in\mathcal{B}}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{B}$ en $F_n(X)$. Dado que $\mathcal{B}$ es compacto existen $E_1, \ldots, E_m$ una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ y $\{\mathcal{U}_{E_1}, \ldots \mathcal{U}_{E_m}\}$ cubre a $\mathcal{B}$. Por lo tanto $\{\bigcup\mathcal{U}_{E_1}, \ldots, \bigcup\mathcal{U}_{E_m}\}$ es una subfamilia finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $\bigcup\mathcal{B}$, con esto conluimos que $\bigcup\mathcal{B}$ es un subconjunto compacto de $X$. $\square$

**Lema 1.1.10.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta de $X$, entonces*

$$\mathfrak{G} = \{\langle G_1, \ldots, G_k\rangle : G_1, \ldots, G_k \in \mathcal{G} \text{ y } k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

*es una cubierta abierta de $F_n(X)$.*

*Demostración.* Dado que $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos abiertos de $X$, $\mathfrak{G}$ es familia de subconjuntos abiertos de $F_n(X)$. Tomemos $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$. Como $\mathcal{G}$ es cubierta abierta de $X$. Por cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, $x_j \in G_j$ para algún $G_j \in \mathcal{G}$. Así, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle G_1, \ldots, G_r\rangle$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathfrak{G}$.
Por lo tanto, $\mathfrak{G}$ es cubierta abierta de $F_n(X)$. $\square$

**Lema 1.1.11.** *Sean $X$ un espacio topológico y $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de $X$. Por cada $m \in \mathbb{N}$, definimos:*

$$\mathcal{G}_m = \{\bigcap_{j=1}^{m} V_j : V_j \in \mathcal{V}_j \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

*Entonces $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $X$.*

*Demostración.* Sea $m \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Probaremos que $\mathcal{G}_m$ es cubierta abierta de $X$. Como $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es sucesión de cubiertas abiertas de $X$, $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ son cubiertas abiertas de $X$. Por cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe $V_j \in \mathcal{V}_j$ tal que $x \in V_j$ así, $x \in \bigcap_{j=1}^{m} V_j \in \mathcal{G}_m$. Claramente $\bigcap_{j=1}^{m} V_j$ es abierto en $X$.
Por lo tanto $\mathcal{G}_m$ es cubierta abierta de $X$ y $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es sucesión de cubiertas abiertas de $X$. $\square$

**Lema 1.1.12.** *Sean $X$ un espacio topológico y $x_1, \ldots, x_r \in X$ con $r \leq n$. Para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, sea $\{U_{j,m}\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos de $X$. Si $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_{j,m} = \{x_j\}$ por cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, entonces $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \langle U_{1,m}, \ldots, U_{r,m} \rangle = \{\{x_1, \ldots, x_r\}\}$.*

*Demostración.* Sea $\{y_1, \ldots, y_l\} \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \langle U_{1,m}, \ldots, U_{r,m} \rangle$. Vamos a probar que $\{y_1, \ldots, y_l\} = \{x_1, \ldots, x_r\}$.

$\subset\rfloor$ Como $\{y_1, \ldots, y_l\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{r} U_{j,m}$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\{y_1, \ldots, y_l\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} (\bigcup_{j=1}^{r} U_{j,m}) = \bigcup_{j=1}^{r} (\bigcap_{m=1}^{\infty} U_{j,m}) = \bigcup_{j=1}^{r} \{x_j\} = \{x_1, \ldots, x_r\}.$$

Así, $\{y_1, \ldots, y_l\} \subset \{x_1, \ldots, x_r\}$.

$\supset\rfloor$ Sea $j \in \{1, \ldots, r\}$. Veremos que $\{y_1, \ldots, y_l\} \cap (\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_{j,m}) \neq \emptyset$. Supongamos que $\{y_1, \ldots, y_l\} \cap (\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_{j,m}) = \emptyset$. Entonces $\{y_1, \ldots, y_l\} \subset X - (\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_{j,m}) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (X - U_{j,m})$. Sean $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ tales que $y_i \in X - U_{j,m_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$. De donde $\{y_1, \ldots, y_l\} \cap \bigcap\limits_{i=1}^{l} U_{j,m_i} = \emptyset$. Dado que $\{U_{j,m}\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, $\bigcap\limits_{i=1}^{l} U_{j,m_i} = U_{j,m_k}$ para algún $k \in \{1, \ldots, l\}$. Así, $\{y_1, \ldots, y_l\} \cap U_{j,m_k} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo que $\{y_1, \ldots, y_l\} \cap (\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_{j,m}) \neq \emptyset$. Ahora, como $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_{j,m} = \{x_j\}$, $x_j \in \{y_1, \ldots, y_l\}$. De lo anterior $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \{y_1, \ldots, y_l\}$. Por lo tanto $\{y_1, \ldots, y_l\} = \{x_1, \ldots, x_r\}$. □

## 1.2. La función canónica $f_n : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$

**Definición 1.2.1.** *Sean $X$ un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos la función canónica $f_n : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ por $f_n((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.*

**Lema 1.2.2.** *Sean $X$ un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n \subset X$. Entonces $f_n(U_1 \times \cdots \times U_n) \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.*

*Demostración.* Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in f_n(U_1 \times \cdots \times U_n)$. Entonces existe $(y_1, \ldots, y_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$ tal que $f_n((y_1, \ldots, y_n)) = \{y_1, \ldots, y_n\} = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Es claro que $\{y_1, \ldots, y_n\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Así, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Por lo tanto $f_n(U_1 \times \cdots \times U_n) \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.

□

**Teorema 1.2.3.** *La función $f_n$ es cerrada, continua y suprayectiva.*

*Demostración.* Para ver que $f_n$ es una función suprayectiva, sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$. Si $r = n$, es claro que $f_n((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Ahora, si $r < n$, entonces $(x_1, \ldots, x_r, x_r, \ldots, x_r) \in X^n$, donde $x_r$ aparece exactamente $n-r+1$ veces y $f_n((x_1, \ldots, x_r, x_r, \ldots, x_r)) = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Concluimos que $f_n$ es una función suprayectiva.
Para probar la continuidad de $f_n$. Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$.
Sean $U_1, \ldots, U_s$ abiertos en $X$ tales que $f_n((x_1, \ldots, x_n)) \in \langle U_1, \ldots, U_s \rangle$. Dado que cada $U_{x_j}$ es un abierto en $X$, entonces $U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n}$ es un abierto básico en $X^n$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n}$. Por el Lema 1.1.3, $\langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_n} \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_s \rangle$. Es suficiente probar que: $f_n(U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n}) \subseteq \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_n} \rangle$. Por el Lema 1.2.2, $f_n(U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n}) \subseteq \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_n} \rangle$. Hemos probado que $f_n$ es una función continua.

En [2], se prueba que la función $f_n$ es cerrada. □

**Lema 1.2.4.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $U, V$ son abiertos no vacíos en $X$, entonces $f_2(U \times V) = \langle U, V \rangle$.*

*Demostración.* Por el Lema 1.2.2, $f_2(U \times V) \subset \langle U, V \rangle$.
Para probar la otra contención, sea $\{x, y\} \in \langle U, V \rangle$. Si ocurre que $x \notin U$, entonces $x \in V$, ahora como $\{x, y\} \cap U \neq \emptyset$, $y \in U$, así $(y, x) \in U \times V$ y $f_2((y, x)) = \{x, y\} \in f_2(U \times V)$. Los casos: $x \notin V$, $y \notin U$ y $y \notin V$, se prueban de manera similar al anterior. En el caso de que $\{x, y\} \subset U \cap V$, se tiene que $(y, x), (x, y) \in U \times V$ y $f_2((y, x)) = f_2((x, y)) = \{x, y\} \in f_2(U \times V)$. Esto prueba que $\langle U, V \rangle \subset f_2(U \times V)$. Por lo tanto $f_2(U \times V) = \langle U, V \rangle$.

□

**Lema 1.2.5.** *Si $X$ es un espacio topológico, entonces la función $f_2 : X^2 \to \mathcal{F}_2(X)$, es una función abierta.*

*Demostración.* Sea $U\times V$ un abierto básico de $X^2$. Probaremos que $f_2(U\times V)$ es un abierto en $F_2(X)$. Si $U = \emptyset = V$, claramente $f_2(U \times V)$ es abierto en $F_2(X)$ y si $U = X = V$, entonces $f_2(U \times V)$ es abierto en $F_2(X)$. Cuando $U, V$ son abiertos no vacíos en $X$, por el Lema 1.2.4, $f_2(U \times V)$ es abierto en $F_2(X)$. Por lo tanto $f_2$ es una función abierta. □

El siguiente ejemplo muestra que para $n > 2$, $f_n$ no es una función abierta.

**Ejemplo 1.2.6.** *Consideremos $X = [0, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual, $U_1 = (2/3, 1] = U_2, U_3 = [0, 1/3)$ y $U = U_1\times U_2\times U_3$ abierto básico en $X^3$. Probaremos que la función $f_3$ no es abierta. Para ello, supongamos que $f_3(U)$ es abierto en $F_3(X)$. Por la continuidad de $f_3, f_3^{-1}(f_3(U))$ es abierto en $X^3$. Notemos que, como $(1, 1, 0) \in U$ y $f_3((1, 1, 0)) = \{1, 0\} = f_3((0, 0, 1))$, se tiene que $(0, 0, 1) \in f_3^{-1}(f_3(U))$. Entonces existen $a, b, c \in [0, 1]$ tales que $0 < a, b < 1/3$ y $[0, a), [0, b), (c, 1]$ abiertos en $X$ y $(0, 0, 1) \in [0, a) \times [0, b) \times (c, 1] \subset f_3^{-1}(f_3(U))$. Sean $x, y \in [0, 1]$ tales que $0 < x < y$, $x \in [0, a)$ y $y \in [0, b)$. Entonces $f_3((x, y, 1)) \in f_3(U)$.*
*Por otra parte, existe $(u, v, w) \in U$ tal que $\{x, y, 1\} = \{u, v, w\}$. Como $(u, v, w) \in U$, entonces $2/3 < u, v \leq 1, 0 \leq w < 1/3$. Así, dado que $0 < x < y < 1/3$, se sigue que $u, v \notin \{x, y\}$, lo cual es una contradicción.*

El siguiente teorema es conocido y será un resultado de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.

**Teorema 1.2.7.** *Sean $X, Y$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*
*(a)$f^{-1}$ es continua,*
*(b)$f$ es abierta,*
*(c)$f$ es cerrada.*

*Demostración.* $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $A$ un abierto en $X$. Como $f^{-1}$ es continua y $f$ es biyectiva, entonces $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$. Así, $f(A)$ es abierto en $Y$. Por lo tanto $f$ es una función abierta.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $E$ un cerrado en $X$. Como $f$ es una función biyectiva, abierta y $X - E$ es abierto en $X$, $f(X - E) = Y - f(E)$ es abierto en $Y$. Entonces $f(E)$ es cerrado en $Y$. Por lo tanto $f$ es cerrada.
$(c) \Rightarrow (a)$ Sea $F$ un cerrado en $X$. Como $f$ es biyectva y cerrada, $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ es cerrado en $Y$. Por lo tanto $f^{-1}$ es continua. □

**Corolario 1.2.8.** *Una función $f : X \to Y$ biyectiva y continua es un homeomorfismo si satisface alguna de las condiciones equivalentes (a), (b), (c) del teorema anterior.*

**Lema 1.2.9.** *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \dots, A_n \subset X$ ajenos dos a dos. Entonces $\langle A_1, \dots, A_n\rangle$ es homeormorfo a $A_1 \times \cdots \times A_n$.*

*Demostración.* Por el Teorema 1.2.3, la función $f_n : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ es cerrada, continua y suprayectiva. Dado que $A_1, \dots, A_n$ son ajenos dos a dos es claro que $f_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \langle A_1, \dots, A_n\rangle$.
Probaremos que la función $g = f_{n|A_1\times\cdots\times A_n} : A_1 \times \cdots \times A_n \to \langle A_1, \dots, A_n\rangle$ es un homeormorfismo. Claramente $g$ es continua y suprayectiva.
Para probar la inyectividad, sean $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ dos elementos distintos de $A_1 \times \cdots \times A_n$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que $x_j \neq y_j$. Como $A_1, \dots, A_n$ son ajenos dos a dos, $x_j \notin \{y_1, \dots, y_n\}$. Entonces $\{x_1, \dots, x_n\} \neq \{y_1, \dots y_n\}$. De lo anterior $g$ es una función inyectiva.
Ahora, veremos que $g$ es una función cerrada. Sean $K$ cerrado en $X^n$ entonces $K \cap (A_1 \times \cdots \times A_n)$ es cerrado en $A_1 \times \cdots \times A_n$. Probaremos que $\langle A_1, \dots, A_n\rangle - g(K \cap (A_1 \times \cdots \times A_n))$ es abierto en $\langle A_1, \dots, A_n\rangle$. Para ello, consideremos $\{x_1, \dots, x_n\} \in \langle A_1, \dots, A_n\rangle - g(K \cap (A_1 \times \cdots \times A_n))$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_j \in A_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.
Nosotros solo mostraremos lo que ocurre cuando $(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$, los otros casos son análogos tomando en cuenta una adecuada permutación. Dado que $(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ y $X$ es de Hausdorff, existen $C_1, \dots, C_n$ abiertos ajenos dos a dos en $X$ y $(C_1 \times \cdots \times C_n) \cap (A_1 \times \cdots \times A_n)$ abierto en $A_1 \times \cdots \times A_n$ tales que $(x_1, \dots, x_n) \in (C_1 \times \cdots \times C_n) \cap (A_1 \times \cdots \times A_n) \subset A_1 \times \cdots \times A_n - K$. De lo anterior $\{x_1, \dots, x_n\} \in \langle C_1, \dots, C_n\rangle \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle \subset \langle A_1, \dots, A_n\rangle - g(K)$. Así, $\langle A_1, \dots, A_n\rangle - g(K \cap (A_1 \times \cdots \times A_n))$ es abierto en $\langle A_1, \dots, A_n\rangle$. Concluimos que $g$ es una función cerrada. Por el Corolario 1.2.8, $g$ es un homeormorfismo. □

**Teorema 1.2.10.** *Sean $n \geq 2$ y $X$ un espacio topológico. Se satisface lo siguiente:*
*1) Para cada $0 < m < n$, $F_m(X)$ es cerrado en $F_n(X)$.*
*2) La función $f_1 : X \to F_1(X)$ es un homeomorfismo.*

*Demostración.* A continuación probaremos 1). Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $0 < m < n$. Probaremos que $F_n(X) - F_m(X)$ es abierto en $F_n(X)$. Para ello, tomemos $A \in F_n(X) - F_m(X)$. Sin pérdida de generalidad supongamos

que $A = \{x_1, \ldots, x_r\}$ con $m < r \leq n$. Como $X$ es un espacio de Hausdorff, existen abiertos ajenos $U_1, \ldots, U_r$ tales que $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Así, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots U_r \rangle$ y $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle \subset F_n(X) - F_m(X)$. Por lo que $F_n(X) - F_m(X)$ es abierto en $F_n(X)$. Esto prueba que $F_m(X)$ es cerrado en $F_n(X)$.
Para justificar 2). Por el Teorema 1.2.3, $f_1$ es continua, cerrada y suprayectiva. Claramente $f_1$ es inyectiva y por el Corolario 1.2.8, $f_1$ es un homeomorfismo. $\square$

**Lema 1.2.11.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio de Hausdorff.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sean $\{x_1, \ldots, x_r\}, \{y_1, \ldots, y_t\}$ elementos distintos en $F_n(X)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_1 \notin \{y_1, \ldots, y_t\}$. Como $X$ es de Hausdorff, existen abiertos $U_1, V_1, \ldots, V_t$ en $X$ tales que $x_1 \in U_1$, y para cada $k \in \{1, \ldots, t\}, y_k \in V_k$ y $U_1 \cap V_k = \emptyset$. Notemos que $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle V_1, \ldots, V_t \rangle$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, X \rangle$. Necesitamos probar que $\langle U_1, X \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_t \rangle = \emptyset$. Supongamos que existe $\{z_1, \ldots, z_p\} \in \langle U_1, X \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_t \rangle$. Sea $p_1 \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $z_{p_1} \in U_1$. Como $\{z_1, \ldots, z_p\} \subset \bigcup_{k=1}^{t} V_k$, existe $k_{p_1} \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $z_{p_1} \in V_{k_{p_1}}$, así $U_1 \cap V_{k_{p_1}} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. De lo anterior $\langle U_1, X \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_t \rangle = \emptyset$. Por lo tanto $F_n(X)$ es un espacio de Hausdorff.

$\Leftarrow\rfloor$ Dado que $F_n(X)$ es de Hausdorff entonces $F_1(X)$ también lo es. Por el Teorema 1.2.10, $X$ es un espacio de Hausdorff. $\square$

Con el siguiente ejemplo mostramos que en general la unión de los elementos de un subconjunto cerrado en $F_n(X)$ no necesariamente es un cerrado en $X$.

**Ejemplo 1.2.12.** *Consideremos $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Sea $\mathcal{S} = \{\{x, 1/x\} : x \in (0, \infty)\}$. Veamos que $\mathcal{S}$ es cerrado en $F_2(\mathbb{R})$. Como el conjunto $\mathcal{L} = \{(x, 1/x) : x \in (0, \infty)\}$ es la gráfica en $\mathbb{R}^2$ de la función $y = 1/x$ definida en el correspondiente dominio, entonces $\mathcal{L}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Ahora, por el Teorema 1.2.3, la función $f_2 : \mathbb{R}^2 \to F_2(\mathbb{R}^2)$ es cerrada y dado que $f_2(\mathcal{L}) = \mathcal{S}$, tenemos que $\mathcal{S}$es cerrado en $F_2(\mathbb{R})$. Sin embargo, $\bigcup \mathcal{S} = (0, \infty)$ y no es cerrado en $\mathbb{R}$.*

# Capítulo 2

# Propiedades que se preservan entre $X$ y $F_n(X)$

## 2.1. Algunas familias de subconjuntos de $X$

### 2.1.1. Familias que preservan cerradura

**Definición 2.1.1.** *Sea $X$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X$* ***preserva cerradura en*** *$X$ si para cada $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$,*

$$\mathrm{Cl}_X(\bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\}) = \bigcup\{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in \mathcal{V}\}.$$

**Ejemplo 2.1.2.** *Consideremos $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Veamos que la familia $\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ preserva cerradura en $\mathbb{R}$. Antes, observemos que para dos elementos $(-n, n)$ y $(-m, m)$ en $\mathcal{U}$, se tiene que $(-n, n) \subset (-m, m)$ o $(-m, m) \subset (-n, n)$. Sea $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. Consideremos los siguientes casos:*
*Supongamos que $\mathcal{W}$ es finito. Notemos que $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(\bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\}) = [-p, p]$, donde $p = max\{m : (-m, m) \in \mathcal{W}\}$. Claramente $[-p, p] = \bigcup\{\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(W) : W \in \mathcal{W}\}$.*
*Ahora, supongamos que $\mathcal{W}$ es infinito. Sea $L = \{m : (-m, m) \in \mathcal{W}\}$. Notemos que $L$ es infinito. Veamos que $\bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\} = \mathbb{R}$. Es suficiente probar que $\mathbb{R} \subset \bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Dado que $L$ es un conjunto infinito de los números naturales, por la propiedad arquimediana, existe $m \in L$ tal que $x \in (-m, m)$. Así, $x \in \bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\}$. Por lo que $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(\bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\}) = \mathbb{R}$.*
*Por otro lado, $\mathbb{R} = \bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\} \subset \bigcup\{\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(W) : W \in \mathcal{W}\} \subset \mathbb{R}$. Así,*

$\bigcup\{\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(W) : W \in \mathcal{W}\} = \mathbb{R}$.
*En cualquier caso, $\mathcal{U}$ preserva cerradura en $\mathbb{R}$.*

**Lema 2.1.3.** *Sea $X$ un espacio. Si $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son dos familias de subconjuntos de $X$ que preservan cerradura en $X$, entonces $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ preserva cerradura en $X$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. La prueba del Lema, se sigue de las siguientes igualdades.
$\mathrm{Cl}_X(\bigcup\{V : V \in \mathcal{W}\})$
$= \mathrm{Cl}_X(\bigcup\{V : V \in \mathcal{W} \cap (\mathcal{U} \cup \mathcal{V})\})$
$= \mathrm{Cl}_X(\bigcup\{V : V \in (\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{W} \cap \mathcal{V})\})$
$= \mathrm{Cl}_X((\bigcup\{V : V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{U}\}) \cup (\bigcup\{V : V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{V}\}))$
$= (\mathrm{Cl}_X(\bigcup\{V : V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{U}\})) \cup (\mathrm{Cl}_X(\bigcup\{V : V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{V}\}))$
$= (\bigcup\{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{U}\}) \cup (\bigcup\{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{V}\})$
$= \bigcup(\{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{U}\} \cup \{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{V}\})$
$= \bigcup\{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in (\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{W} \cap \mathcal{V})\}$
$= \bigcup\{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in (\mathcal{W} \cap (\mathcal{U} \cup \mathcal{V}))\}$
$= \bigcup\{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in \mathcal{W}\}$. □

**Teorema 2.1.4.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\mathcal{U}$ preserva cerradura en $X$, entonces la familia $\mathfrak{U} = \{\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \subset F_n(X) : U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}\}$ preserva cerradura en $F_n(X)$.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$. Para probar que

$$\bigcup\{\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}) = \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}),$$

mostraremos que:

$$F_n(X) - (\bigcup\{\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}) = F_n(X) - \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}).$$

Para esto, sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X) - (\bigcup\{\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\})$. Primero probaremos la existencia de un abierto $\mathcal{V}$ en $F_n(X)$ que contiene al punto $\{x_1, \ldots, x_r\}$ y tal que $\mathcal{V} \subset F_n(X) - (\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\})$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, sean $\mathcal{Q}_j = \{U \in \mathcal{U} : x_j \notin \mathrm{Cl}_X(U)\}$ y $V_j = X - \bigcup\{\mathrm{Cl}_X(U) : U \in \mathcal{Q}_j\}$. Como $\mathcal{Q}_j \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ preserva cerradura en $X$, $V_j$ es abierto en $X$. Veamos que $x_j \in V_j$. Supongamos que $x_j \in X - V_j$. Entonces existe $U \in \mathcal{Q}_j$ tal que $x_j \in \mathrm{Cl}_X(U)$, esto contradice la definición de $\mathcal{Q}_j$. Así, $x_j \in V_j$. Ahora, definamos $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_r\rangle$. Probaremos que $\mathcal{V}$ cumple con

las propiedades requeridas.
Claramente, $\mathcal{V}$ es un abierto en $F_n(X)$ que contiene al punto $\{x_1, \ldots, x_r\}$.
Afirmación: $\mathcal{V} \subset F_n(X) - (\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\})$. Supongamos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ para algún $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0$. Sean $\mathcal{W} = \langle \mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_\mathrm{s} \rangle$ y $\{z_1, \ldots, z_m\} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Como $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X) - (\bigcup\{\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\})$, entonces $\{x_1, \ldots, x_r\} \notin \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\mathcal{W})$. Como $\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\mathcal{W}) = \langle \mathrm{Cl}_X(W_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(W_s) \rangle$ (ver Lema 1.1.8), $\{x_1, \ldots, x_r\} \notin \langle \mathrm{Cl}_X(W_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(W_s) \rangle$.
Consideremos los siguiente casos.

**Caso I.** Supongamos que $\{x_1, \ldots, x_r\} \nsubseteq \bigcup\limits_{i=1}^{s} \mathrm{Cl}_X(W_i)$.
Entonces existe $l \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $x_l \notin \mathrm{Cl}_X(W_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$. Así, cada $W_i \in \mathcal{Q}_l$. Ahora, dado que $\{z_1, \ldots, z_m\} \in \mathcal{V}$, consideremos $m_l \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $z_{m_l} \in V_l$.
Por otra parte, como $\{z_1, \ldots, z_m\} \in \mathcal{W}$, $z_{m_l} \in W_i \subset \mathrm{Cl}_X(W_i)$ para algún $i \in \{1, \ldots, s\}$. De lo anterior y de que $W_i \in \mathcal{Q}_l$, $z_{m_l} \notin V_l$, lo cual es una contradicción.
**Caso II.** Sea $k \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap \mathrm{Cl}_X(W_k) = \emptyset$.
Notemos que para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, $W_k \in \mathcal{Q}_j$. Como $\{z_1, \ldots, z_m\} \in \mathcal{W}$, tomemos $m_k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $z_{m_k} \in W_k \subset \mathrm{Cl}_X(W_k)$. Así, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$, $z_{m_k} \notin V_j$.
Por otro lado, dado que $\{z_1, \ldots, z_m\} \in \mathcal{V}$, $z_{m_k} \in V_j$ para alguna $j \in \{1, \ldots, r\}$, lo cual es una contradicción.
En cualquiera de los dos casos se tiene que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \emptyset$ para todo $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0$ y $\mathcal{V} \subset F_n(X) - (\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\})$.
A continuación probaremos que:

$$\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X) - (\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}).$$

Supongamos que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\})$, entonces $\mathcal{V} \cap (\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}) \neq \emptyset$, obtenemos una contradicción. Esto finaliza la prueba de la primera contención.
Ahora para probar la otra contención.
Dado que $\bigcup\{\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\} \subset \mathrm{Cl}_{F_n}(X)(\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\})$, se tiene que:

$$F_n(X) - \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\bigcup\{\mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}) \subset F_n(X) - (\bigcup\{\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}).$$

De ambas contenciones concluimos que $\mathfrak{U}$ preserva cerradura en $F_n(X)$. $\square$

### 2.1.2. Redes

**Definición 2.1.5.** *Sean $X$ un espacio topológico y $\mathcal{N}$ una familia de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{N}$ es una **red** en $X$ si para cada $x \in X$ y cada abierto $U$ en $X$ con $x \in U$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subset U$.*

**Ejemplo 2.1.6.** *Sea $X$ un espacio topológico. Notemos que cualquier base para la topología de $X$ es una red en $X$. El conjunto potencia de $X$ es una red.*

**Lema 2.1.7.** *Sean $X$ un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{N}$ es una red en $X$, entonces la familia $\mathfrak{N} = \{\langle N_1, \ldots, N_l\rangle : N_1, \ldots, N_l \in \mathcal{N} \, y \, l \in \{1, \ldots, n\}\}$ es una red en $F_n(X)$.*

*Demostración.* Sean $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{U}$ un abierto en $F_n(X)$ tal que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{U}$. Consideremos $U_1, \ldots, U_s$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Sea $j \in \{1, \ldots, r\}$. Como $\mathcal{N}$ es red en $X$ y $U_{x_j}$ es abierto en $X$, existe $N_j \in \mathcal{N}$ tal que $x_j \in N_j \subset U_{x_j}$. Por el Lema 1.1.3, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle N_1, \ldots, N_r\rangle \subset \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle \subset \mathcal{U}$.
Por lo tanto $\mathfrak{N}$ es una red en $F_n(X)$. □

### 2.1.3. Familias discretas

**Definición 2.1.8.** *Sean $X$ un espacio topológico y $\mathcal{N}$ una familia de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{N}$ es una **familia discreta** de $X$, si para cada $x \in X$, existe un abierto $U$ en $X$ tal que $x \in U$ y $U$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{N}$.*

**Ejemplo 2.1.9.** *Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Veamos que $\mathcal{N}_1 = \{(1,2), (3,4), (5,6), \ldots\}$ es una familia discreta de $\mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Tomemos $(x - 1/2, x + 1/2)$ abierto básico en $\mathbb{R}$. Veremos que $(x - 1/2, x + 1/2)$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{N}_1$. Sean $a \neq b$ números impares positivos. Sin pérdida de generalidad asumimos que $a < b$. Supongamos que $(x - 1/2, x + 1/2) \cap (a, a+1) \neq \emptyset$ y $(x - 1/2, x + 1/2) \cap (b, b+1) \neq \emptyset$. Entonces $x - 1/2 < a + 1$ y $b < x + 1/2$. Notemos que $|b - (a+1)| \geqslant 1$, $|(a+1) - (x - 1/2)| > 0$ y $|(x + 1/2) - b| > 0$. Entonces $|(x+1/2) - (x-1/2)| = |(a+1) - (x-1/2)| + |b - (a+1)| + |(x + 1/2) - b| > 1$, lo cual es una contradicción. Por lo que $(x - 1/2, x + 1/2)$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_1$ es una familia discreta de $\mathbb{R}$.*

El siguiente ejemplo muestra que en general la unión de dos familias discretas no necesariamente es una familia discreta.

**Ejemplo 2.1.10.** *Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Consideremos $\mathcal{N}_1$ como en el ejemplo anterior y $\mathcal{N}_2 = \{(0,1), (2,3), (4,5), \ldots\}$. Veremos que $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, no es familia discreta de $\mathbb{R}$. Consideremos $x = 2$. Sea $(c,d)$ abierto básico en $\mathbb{R}$ tal que $2 \in (c,d)$. Como $c < 2$, existe $q \in \mathbb{R}$ tal que $c < q < 2$ y $1 < q < 2$. Dado que $2 < d$, existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $2 < p < d$ y $2 < p < 3$.*
*Así, $(c,d) \cap (1,2) \neq \emptyset$ y $(c,d) \cap (2,3) \neq \emptyset$, dos elementos distintos de $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. Por lo tanto $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, no es familia discreta de $\mathbb{R}$.*

**Lema 2.1.11.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\mathcal{N}$ es una familia discreta de $X$, entonces la familia $\mathfrak{N} = \{\langle N_1, \ldots, N_l \rangle \subset F_n(X) : N_1, \ldots, N_l \in \mathcal{N}\}$ es una familia discreta de $F_n(X)$.*

*Demostración.* Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$. Como $\mathcal{N}$ es una familia discreta de $X$, por cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, existe un abierto $U_j$ en $X$ tal que $x_j \in U_j$ y $U_j$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{N}$. Notemos que $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle$ es un abierto en $F_n(X)$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_r \rangle$.
Probaremos que $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle$ intersecta a lo más un elemento de $\mathfrak{N}$.
Sean $\langle N_1', \ldots, N_s' \rangle \neq \langle N_1, \ldots, N_l \rangle \in \mathfrak{N}$, tales que $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle \cap \langle N_1, \ldots, N_l \rangle \neq \emptyset$ y $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle \cap \langle N_1', \ldots, N_s' \rangle \neq \emptyset$. Demostraremos que $\{N_1, \ldots, N_l\} = \{N_1', \ldots, N_s'\}$.
Tomemos $\{z_1, \ldots, z_p\} \in \langle U_1, \ldots, U_r \rangle \cap \langle N_1, \ldots, N_l \rangle$. Como $\{z_1, \ldots, z_p\} \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $\{z_1, \ldots, z_p\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} N_j$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe $j_i \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $U_i \cap N_{j_i} \neq \emptyset$. Así, por la elección de cada $U_i$, $U_i$ sólo intersecta a $N_j$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$.
Ahora, como $\{z_1, \ldots, z_p\} \cap N_j \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \ldots, l\}$ y $\{z_1, \ldots, z_p\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i$, existe $i_j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $N_j \cap U_{i_j} \neq \emptyset$. De lo anterior, si $k \in \{1, \ldots, s\}$ es tal que $N_k' \notin \{N_1, \ldots, N_l\}$, entonces $N_k' \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i) = \emptyset$, obtenemos una contradicción. Por lo que $\{N_1', \ldots, N_s'\} \subset \{N_1, \ldots, N_l\}$.
Por otra parte, dado que $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle \cap \langle N_1', \ldots, N_s' \rangle \neq \emptyset$, de manera similar a lo anterior, se puede probar que $\{N_1, \ldots, N_l\} \subset \{N_1', \ldots, N_s'\}$. Así, $\{N_1, \ldots, N_l\} = \{N_1', \ldots, N_s'\}$ y $\langle N_1', \ldots, N_s' \rangle = \langle N_1, \ldots, N_l \rangle$.
Por lo tanto $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle$ intersecta a lo más un elemento de $\mathfrak{N}$, lo que concluye la prueba del Lema. $\square$

### 2.1.4. Estrellas

**Definición 2.1.12.** *Sean $\mathcal{U}$ una cubierta de $X$ y $A \subset X$. La estrella de $A$ con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto $St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}$. Cuando $A = \{x\}$, usaremos por conveniencia la notación $St(x,\mathcal{U})$.*

**Lema 2.1.13.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta de $X$, $\mathfrak{G} = \{\langle G_1, \ldots, G_k\rangle : G_1, \ldots, G_k \in \mathcal{G}$ y $k \in \{1, \ldots, n\}\}$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$, entonces*

$$St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}) \subset \langle St(x_1, \mathcal{G}), St(x_2, \mathcal{G}), \ldots, St(x_r, \mathcal{G})\rangle.$$

*Demostración.* Por el Lema 1.1.10, $\mathfrak{G}$ es cubierta abierta de $F_n(X)$. Sea $\{y_1, \ldots, y_t\} \in St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G})$. Entonces existe $\langle G_1, \ldots, G_k\rangle \in \mathfrak{G}$ tal que $\{y_1, \ldots, y_t\}, \{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle G_1, \ldots, G_k\rangle$. A continuación probaremos que:

$$\langle G_1, \ldots, G_k\rangle \subset \langle St(x_1, \mathcal{G}), St(x_2, \mathcal{G}), \ldots, St(x_r, \mathcal{G})\rangle.$$

Consideremos $\{z_1, \ldots, z_p\} \in \langle G_1, \ldots, G_k\rangle$. A continuación vamos a probar que $\{z_1, \ldots, z_p\} \cap St(x_j, \mathcal{G}) \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Sea $j \in \{1, \ldots, r\}$. Como $\{x_1, \ldots, x_r\}, \{z_1, \ldots, z_p\} \in \langle G_1, \ldots, G_k\rangle$, existen $j \in \{1, \ldots, r\}$, $t \in \{1, \ldots, p\}$ y $m \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $x_j, z_t \in G_m$. Así, $z_t \in St(x_j, \mathcal{G})$.
Ahora veremos que $\{z_1, \ldots, z_p\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{r} St(x_j, \mathcal{G})$. Sea $l \in \{1, \ldots, p\}$. Dado que $\{x_1, \ldots, x_r\}, \{z_1, \ldots, z_p\} \in \langle G_1, \ldots, G_k\rangle$, existen $m \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $x_j, z_l \in G_m$. De donde, $z_l \in St(x_j, \mathcal{G})$ y $z_l \in \bigcup\limits_{j=1}^{r} St(x_j, \mathcal{G})$.
Así, $\{z_1, \ldots, z_p\} \in \langle St(x_1, \mathcal{G}), St(x_2, \mathcal{G}), \ldots, St(x_r, \mathcal{G})\rangle$.
Por lo que:

$$\langle G_1, \ldots, G_k\rangle \subset \langle St(x_1, \mathcal{G}), St(x_2, \mathcal{G}), \ldots, St(x_r, \mathcal{G})\rangle.$$

De lo anterior $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \langle St(x_1, \mathcal{G}), St(x_2, \mathcal{G}), \ldots, St(x_r, \mathcal{G})\rangle$.
Por lo tanto:

$$St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}) \subset \langle St(x_1, \mathcal{G}), St(x_2, \mathcal{G}), \ldots, St(x_r, \mathcal{G})\rangle.$$

□

**Lema 2.1.14.** *Sean $X$ un espacio topológico, $Y \subset X$ un subespacio de $X$ y $\mathcal{G}$ una cubierta de $X$. Entonces para cada $y \in Y$, $St(y, \mathcal{G} \cap Y) \subset St(y, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} \cap Y = \{G \cap Y : G \in \mathcal{G}\}$.*

*Demostración.* Sea $w \in St(y, \mathcal{G} \cap Y)$, entonces existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $w, y \in G \cap Y$. De aquí que $w \in St(y, \mathcal{G})$.
Por lo tanto $St(y, \mathcal{G} \cap Y) \subset St(y, \mathcal{G})$. □

### 2.1.5. Bases locales

**Definición 2.1.15.** *Sean $X$ un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $\beta \subset \tau_X$ es una **base local de x** si para cada $U \in \tau_X$ que contiene a $x$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$.*

**Observación 2.1.16.** *Sean $Z$ un conjunto y $x \in Z$. Si $\mathcal{Q} = \{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de $Z$ tal que $x \in Q_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Veremos que siempre es posible obtener una nueva sucesión decreciente apartir de $\mathcal{Q}$. Para ello, basta considerar la siguiente construcción: para $m = 1$, consideremos $Q_1^{'} = Q_1$ y para $m \geqslant 2$, sea $Q_m^{'} = Q_{m-1}^{'} \cap Q_m$. Usando inducción, obtenemos la sucesión $\mathcal{Q}^{'} = \{Q_m^{'}\}_{m=1}^{\infty}$. Es claro que $Q_{(m+1)}^{'} \subset Q_m^{'}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

**Lema 2.1.17.** *Sean $X$ un espacio topológico y $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$. Si cada $\mathcal{U}_j = \{U_{j,m}\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, entonces*

$$\mathfrak{U} = \{\langle U_{1,m}, \ldots, U_{r,m}\rangle : U_{j,m} \in \mathcal{U}_j, j \in \{1, \ldots, r\}\}_{m=1}^{\infty}$$

*es base local de $\{x_1, \ldots, x_r\}$ en $F_n(X)$.*

*Demostración.* Por la Observación 2.1.16, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada $\mathcal{U}_j$ es una sucesión decreciente. Sea $\mathcal{W}$ un abierto en $F_n(X)$ tal que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{W}$. Consideremos $W_1, \ldots, W_s$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \langle W_1, \ldots, W_s\rangle$
$\subset \mathcal{W}$. Tomemos $j \in \{1, \ldots, r\}$. Como cada $W_{x_j}$ es abierto en $X$ y $\mathcal{U}_j$ es base local de $x_j$, existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in U_{j,m_j} \subset W_{x_j}$. Notemos que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_{1,m_1}, \ldots, U_{r,m_r}\rangle \subset \langle W_{x_1}, \ldots, W_{x_r}\rangle \subset \langle W_1, \ldots, W_s\rangle$ (ver Lema 1.1.3). Ahora, sea $m = máx\{m_1, \ldots, m_r\}$. Dado que $\mathcal{U}_j$ es sucesión decreciente, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, $x_j \in U_{j,m} \subset U_{j,m_j} \subset W_{x_j}$. Así, por el Lema 1.1.3, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_{1,m}, \ldots, U_{r,m}\rangle \subset \mathcal{W}$. De lo anterior y de que $\langle U_{1,m}, \ldots, U_{r,m}\rangle \in \mathfrak{U}$, concluimos que $\mathfrak{U}$ es base local de $\{x_1, \ldots, x_r\}$ en $F_n(X)$. □

## 2.2. Espacios de Lãsnev

**Definición 2.2.1.** *Un espacio topológico es de Lãsnev si es la imagen cerrada de un espacio métrico.*

**Ejemplo 2.2.2.** *Sea $Y$ el espacio cociente obtenido de $\mathbb{R}$ identificando los enteros a un punto. Veremos que $Y$ es un espacio de Lãsnev que no es metrizable.*
*Para verficar que $Y$ es un espacio de Lãsnev basta con probar que la proyección natural $p : \mathbb{R} \to Y$ es cerrada y continua.*
*Es claro que $p$ es continua, ya que estamos considerando la topología cociente, $\tau_Y = \{U \subset Y : p^{-1}(U) \in \tau_u\}$.*
*Para ver que $p$ es cerrada, recordemos el siguiente resultado:*
*La proyección natural $p : \mathbb{R} \to Y$ es cerrada si y sólo si para cada cerrado $A$ en $X$, la unión de todas las clases de equivalencia cuya unión es $A$ es cerrada en $X$. De lo anterior tenemos que $Y$ es un espacio de Lãsnev.*
*Para probar que $Y$ no es métrico es suficiente ver que $Y$ no es primero numerable. Sea $[0] = \mathbb{Z}$ . Vamos a probar que no existen bases locales numerables de $[0]$. Supongamos que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de subconjuntos abiertos del $[0]$. Como $V_n$ es un abierto del $[0]$, entonces $\mathbb{Z} = p^{-1}([0]) \subset p^{-1}(V_n)$. Notemos que $p^{-1}(V_n)$ es abierto de $m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Entonces $p^{-1}(V_n)$ es abierto de $n$ en $\mathbb{R}$. Así, existe $x_n \in p^{-1}(V_n)$ tal que $0 < |n - x_n| < 1/2$. Consideremos $U = \mathbb{R} - \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , es claro que $U$ es abierto en $\mathbb{R}$. Observemos que $p(U)$ es abierto, ya que $p^{-1}(p(U)) = U$ y $U$ es abierto en $\mathbb{R}$. Ahora, como $x_n \in p^{-1}(V_n) - U$, tenemos que $p^{-1}(V_n) \nsubseteq U$. De lo anterior $V_n \nsubseteq p(U)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser base local de $[0]$.*

**Lema 2.2.3.** *Sea $X$ un espacio de Lãsnev. Si $Y \subset X$ es un subespacio de $X$, entonces $Y$ es un espacio de Lãsnev.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es un espacio de Lãsnev. Entonces existe un espacio métrico $Z$ y una función $g : Z \to X$ continua, cerrada y suprayectiva. Sea $Z' = g^{-1}(Y)$. Claramente, $Z'$ es métrico y $g_{|Z'} : Z' \to Y$ es una función continua y suprayectiva. Para probar que $g_{|Z'}$ es una función cerrada. Sean $K$ un cerrado en $Z'$ y $A$ un cerrado en $Z$ tales que $K = Z' \cap A$. Usando que $g(A)$ es cerrado en $X$ y $g(K) = g(Z' \cap A) = g(g^{-1}(Y) \cap A) = Y \cap g(A)$, $g(K) = g_{|Z'}(K)$ es cerrado en $Y$.
Por lo tanto $Y$ es un espacio de Lãsnev. □

**Lema 2.2.4.** *Sea $X$ es un espacio de Lãsnev. Si $f : X \to Y$ es una función continua, cerrada y suprayectiva, entonces $Y$ es un espacio de Lãsnev.*

*Demostración.* Como $X$ es un espacio de Lãsnev, existe un espacio métrico $Z$ y una función $g : Z \to X$ continua, cerrada y suprayectiva. Consideremos $f \circ g : Z \to Y$. Entonces $f \circ g$ es una función continua, suprayectiva y cerrada. Por lo tanto $Y$ es un espacio de Lãsnev. □

**Teorema 2.2.5.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $F_n(X)$ es un espacio de Lãsnev, entonces $X$ es un espacio de Lãsnev.*

*Demostración.* Como $F_1(X)$ es un subespacio de $F_n(X)$, por el Lema 2.2.3, $F_1(X)$ es de Lãsnev. Así, dado que $F_1(X)$ es homeomorfo a $X$, por el Lema 2.2.4, $X$ es de Lãsnev. □

## 2.3. Separablilidad

**Definición 2.3.1.** *Decimos que un espacio topológico es **separabale** si éste contiene un subconjunto denso numerable.*

**Teorema 2.3.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es separable si y sólo si $F_n(X)$ es separable.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$Sea $D$ un subconjunto denso numerable de $X$. Sea $\mathfrak{D} = \{\{d_1, \ldots, d_t\} \in F_n(X) : d_1, \ldots, d_t \in D\}$. Notemos que $\mathfrak{D}$ es numerable. Para ver que $\mathfrak{D}$ es denso en $F_n(X)$, sean $\mathcal{U}$ abierto no vacío en $F_n(X)$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{U}$. Entonces existen abiertos $U_1, \ldots, U_s$ en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Por el Lema 1.1.3, $\langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Como $D$ es un subconjunto denso en $X$ y cada $U_{x_j}$ es abierto en $X$, elegimos $d_j \in D \cap U_{x_j}$ por cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Así, $\{d_1, \ldots, d_r\} \in \mathfrak{D} \cap \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle \subset \mathcal{U}$.
Por lo tanto $F_n(X)$ es separable.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $\mathfrak{D}$ un subconjunto denso numerable de $F_n(X)$. Sea $D = \bigcup \mathfrak{D}$. Notemos que $D$ es numerable. Para ver que $D$ es denso en $X$. Sea $U$ abierto no vacío en $X$. Como $\mathfrak{D}$ es denso en $F_n(X)$, existe $A \in \mathfrak{D} \cap \langle U\rangle$. Consecuentemente $U \cap D \neq \emptyset$.
Por lo tanto $X$ es un espacio separable. □

## 2.4. Primero numerable

**Definición 2.4.1.** *Decimos que un espacio topológico es* ***primero numerable*** *si cada uno de sus puntos tiene una base local numerable.*

**Teorema 2.4.2.** *Sea $X$ un espacio topólogico. Entonces $X$ es primero numerable si y sólo si $F_n(X)$ es primero numerable.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$. Como $X$ es primero numerable, por cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, existe una base local numerable $\mathcal{U}_j = \{U_{j,m}\}_{m=1}^{\infty}$ de $x_j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que cada $\mathcal{U}_j$ es decreciente. Sea $\mathfrak{U}=\{\langle U_{1,m}, \ldots, U_{r,m}\rangle : U_{j,m} \in \mathcal{U}_j\}_{m=1}^{\infty}$. Notemos que $\mathfrak{U}$ es numerable. Por el Lema 2.1.17, $\mathfrak{U}$ es base local de $\{x_1, \ldots, x_r\}$ en $F_n(X)$.
Por tanto $F_n(X)$ es primero numerable.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $x \in X$. Como $F_n(X)$ es primero numerable, existe una base local numerable $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{x\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $U_m = \bigcup \mathcal{U}_m$. Claramente $U_m$ contiene a $x$. Por el Lema 1.1.6, $U_m$ es abierto en $X$. Probaremos que $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$. Sea $W$ un abierto en $X$ tal que $x \in W$. Dado que $\{x\} \in \langle W\rangle$ y $\mathfrak{U}$ es base local de $\{x\}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}_m \subset \langle W\rangle$. De lo anterior $x \in \bigcup \mathcal{U}_m = U_m \subset \bigcup \langle W\rangle = W$. Concluimos que $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ es base local numerable de $x$ en $X$.
Por lo tanto $X$ es primero numerable. □

## 2.5. Base por parejas

**Definición 2.5.1.** *Diremos que $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(X)$ es* ***base por parejas*** *en $X$ si se satisfacen las siguientes condiciones:*
*(1)Para cada $(A, B) \in \mathcal{P}$, $A$ es abierto en $X$.*
*(2)Para cada $x \in X$ y cada vecindad $U$ de $x$ en $X$, existe $(A, B) \in \mathcal{P}$ tal que $A \subset B \subset U$.*

**Ejemplo 2.5.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\beta$ es base para $\tau_X$, entonces $\mathcal{P} = \beta \times \beta$ es una base por parejas .*

**Teorema 2.5.3.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ tiene una base por parejas si y sólo si $F_n(X)$ tiene una base por parejas.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\mathcal{P}$ una base por parejas de $X$. Consideremos

$$\mathfrak{P} = \{(\langle P_{11}, \ldots, P_{1k}\rangle, \langle P_{21}, \ldots, P_{2k}\rangle) : (P_{1j}, P_{2j}) \in \mathcal{P}, j \in \{1, \ldots, k\} \text{ y}$$

$$k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Probaremos que $\mathfrak{P}$ es base por parejas de $F_n(X)$. Dado que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $P_{1j}$ es abierto en $X$, es claro que se satisface la condición 1). Para probar la condición 2), tomemos $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{U}$ un abierto en $F_n(X)$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{U}$. Entonces existen $U_1, \ldots, U_s$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Sea $j \in \{1, \ldots, r\}$. Como $\mathcal{P}$ es base por parejas de $X$ y cada $U_{x_j}$ es abierto en $X$, existe $(P_{1j}, P_{2j}) \in \mathcal{P}$ tal que $x_j \in P_{1j} \subset P_{2j} \subset U_{xj}$. Por el Lema 1.1.3, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle P_{11}, \ldots, P_{1r}\rangle \subset \langle P_{21}, \ldots, P_{2r}\rangle \subset \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$.
Por lo tanto $\mathfrak{P}$ es base por parejas de $F_n(X)$.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $\mathfrak{P}$ una base por parejas de $F_n(X)$. Veremos que

$$\mathcal{P} = \{(\bigcup \mathcal{P}_1, \bigcup \mathcal{P}_2) : (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \in \mathfrak{P}\}$$

es una base por parejas de $X$. Por el Lema 1.1.6, $\bigcup \mathcal{P}_1$ es abierto en $X$ para cada $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \in \mathfrak{P}$. Para probar la condición 2), tomemos $x \in X$ y $U$ abierto en $X$ tal que $x \in U$. Entonces $\langle U\rangle$ es abierto en $F_n(X)$ y $\{x\} \in \langle U\rangle$. Como $\mathfrak{P}$ es base por parejas de $F_n(X)$, existe $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \in \mathfrak{P}$ tal que $\{x\} \in \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \langle U\rangle$. Así, $x \in \bigcup \mathcal{P}_1 \subset \bigcup \mathcal{P}_2 \subset \bigcup \langle U\rangle = U$.
Por lo tanto $\mathcal{P}$ es base por parejas de $X$. □

## 2.6. Regularidad

**Definición 2.6.1.** *Un espacio topológico $X$ es un espacio **regular**, si satisface las siguientes condiciones:*
*a)$X$ es $T_1$.*
*b)Para cualquier cerrado $F$ en $X$ y $x \in X - F$ existen subconjuntos abiertos $U$ y $V$ en $X$ ajenos tales que $x \in U$ y $F \subset V$.*

El siguiente resultado muestra otra forma de determinar cuando un espacio topológico es regular.

**Teorema 2.6.2.** *Sea $X$ un espacio topológico y $T_1$. Entonces $X$ es un espacio regular si y sólo si para cada $x \in X$ y cada abierto $U$ en $X$ tales que $x \in U$, existe un abierto $V$ en $X$ tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}_X(V) \subset U$.*

**Teorema 2.6.3.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un espacio regular si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio regular.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Utilizaremos el Teorema 2.6.2 para probar que $F_n(X)$ es un espacio regular. Para ello, tomemos $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{U}$ abierto en $F_n(X)$ tal que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{U}$. Sean $U_1, \ldots, U_s$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Por el Lema 1.1.3, $\langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Sea $j \in \{1, \ldots, r\}$. Como $X$ es un espacio regular y cada $U_{x_j}$ es abierto en $X$, existe $V_j$ abierto en $X$ tal que $x_j \in V_j \subset \mathrm{Cl}_X(V_j) \subset U_{xj}$. Por el Lema 1.1.3, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle V_1, \ldots, V_r\rangle \subset \langle \mathrm{Cl}_X(V_1), \ldots, \mathrm{Cl}_X(V_r)\rangle \subset \mathcal{U}$. Utilizando el Lema 1.1.8, concluimos que $F_n(X)$ es un espacio regular.

$\Leftarrow\rfloor$ Dado que $F_n(X)$ es un espacio regular entonces $F_1(X)$ también lo es. Por el Teorema 1.2.10, $X$ es un espacio regular. $\square$

## 2.7. Compacidad Local

**Definición 2.7.1.** *Decimos que un espacio topológico es **localmente compacto** si cada uno de sus puntos tiene una vecindad compacta.*

**Lema 2.7.2.** *Sea $X$ un espacio topológico y de Hausdorff. Entonces $X$ es localmente compacto si y sólo si para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta $U$ de $x$ tal que la cerradura de $U$ es compacta.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sean $x \in X$ y $V$ una vecindad compacta de $X$. Consideremos $U$ abierto en $X$, tal que $x \in U \subset V$. Como $X$ es de Hausdorff y $V$ es un subconjunto compacto de $X$, $V$ es cerrado en $X$. Dado que $\mathrm{Cl}_X(U) \subset \mathrm{Cl}_X(V) = V$ un compacto de $X$, entonces $\mathrm{Cl}_X(U)$ es compacto de $X$.

$\Leftarrow\rfloor$ Esta implicación es clara de la definición. $\square$

**Observación 2.7.3.** *Notemos que si $X$ un espacio regular, $x, y \in X$ y $U, V$ abiertos en $X$ tales que $x \in U$, $y \in V$. Veremos que siempre es posible* *obtener abiertos $P, Q$ en $X$ para los cuales $\mathrm{Cl}_X(P) \cap \mathrm{Cl}_X(Q) = \emptyset$. Para ello, notemos que como $X$ es de Hausdorff existen $A$ y $B$ abiertos ajenos tales que $x \in A$ y $y \in B$. Entonces $A \cap U$, $B \cap V$ son abiertos ajenos en $X$ tales que $x \in A \cap U$, $y \in B \cap V$. Como $X$ es regular existen abiertos $P$, $Q$ en $X$ tales que $x \in P \subset \mathrm{Cl}_X(P) \subset A \cap U$, $y \in Q \subset \mathrm{Cl}_X(Q) \subset B \cap V$. Claramente $\mathrm{Cl}_X(P) \cap \mathrm{Cl}_X(Q) = \emptyset$.*

**Teorema 2.7.4.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $X$ es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $X$ es un espacio regular.*

*Demostración.* Dado que todo espacio localmente compacto y de Hausdorff es un espacio de Tychonoff (ver [3], p. 178) y todo espacio de Tychonoff es regular (ver [3], p. 210). Tenemos que todo espacio localmente compacto y de Hausdorff es un espacio regular. □

**Lema 2.7.5.** *Sea $X$ un espacio de Hausdorff y $Y \subset X$ un subespacio cerrado. Si $X$ es localmente compacto, entonces $Y$ es localmente compacto.*

*Demostración.* Sea $y \in Y$. Como $X$ es localmente compacto, existen $U$ abierto en $X$ y $K$ un compacto de $X$ tales que $y \in U \subset K$, entonces $y \in U \cap Y \subset K \cap Y$. Notemos que $U \cap Y$ es abierto en $Y$. Dado que $K$ es compacto de $X$ y $X$ es de Hausdorff, $K$ es cerrado en $X$ y $K \cap Y$ es cerrado en $X$. Como $K \cap Y \subset K$ un compacto, entonces $K \cap Y$ es compacto de $Y$. Por lo tanto $Y$ es localmente compacto. □

**Lema 2.7.6.** *Sea $X$ un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es una función continua, suprayectiva y abierta, entonces $Y$ es un espacio localmente compacto.*

*Demostración.* Sea $y \in Y$. Como $f$ es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Dado que $X$ es localmente compacto, existe una vecindad compacta $K$ de $x$ en $X$. Consideremos $U$ abierto en $X$ tal que $x \in U \subset K$. Notemos que $y \in f(U) \subset f(K)$. Dado que $f$ es una función continua y abierta, $f(K)$ es un subconjunto compacto de $Y$ y $f(U)$ es abierto en $Y$. De lo anterior, $f(K)$ es una vecindad compacta de $y$ en $Y$.
Por lo tanto $Y$ es localmente compacto. □

**Teorema 2.7.7.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es localmente compacto si y sólo si $F_n(X)$ es localmente compacto.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Para probar que $F_n(X)$ es localmente compacto utilizaremos el Lema 2.7.2. Por el Lema 1.2.11, $F_n(X)$ es un espacio de Hausdorff. Sean $\{x_1,\ldots,x_r\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{U}$ abierto en $F_n(X)$ tales que $\{x_1,\ldots,x_r\} \in \mathcal{U}$. Entonces existen $U_1,\ldots,U_s$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1,\ldots,x_r\} \in \langle U_1,\ldots,U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Dado que $X$ es un espacio regular y cada $U_{x_j}$ es abierto en $X$. Para cada $j \in \{1,\ldots,r\}$ existe $W_j$ abierto en $X$ tal que $x_j \in W_j \subset \mathrm{Cl}_X(W_j) \subset U_{x_j}$, con la $\mathrm{Cl}_X(W_j)$ un compacto. Por la Observación 2.7.3, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathrm{Cl}_X(W_j) \cap \mathrm{Cl}_X(W_k) = \emptyset$ cuando $j \neq k$. Por los Lemas 1.1.3 y 1.1.8, $\{x_1,\ldots,x_r\} \in \langle W_1,\ldots,W_r\rangle \subset \langle \mathrm{Cl}_X(W_1),\ldots,\mathrm{Cl}_X(W_r)\rangle$.
Finalmente probaremos que $\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\langle W_1,\ldots,W_r\rangle)$ es compacto en $F_n(X)$. Por el Lema 1.2.9, $\langle \mathrm{Cl_X(W_1)},\ldots,\mathrm{Cl_X(W_r)}\rangle$ es homeomorfo a un producto finito de espacios compactos. Entonces $\langle \mathrm{Cl}_X(W_1),\ldots,\mathrm{Cl}_X(W_r)\rangle$ es un subconjunto compacto de $F_n(X)$.
Por lo tanto $F_n(X)$ es localmente compacto.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Teorema 1.2.10, $F_1(X)$ es cerrado en $F_n(X)$ y por el Lema 2.7.5, $F_1(X)$ es localmente compacto. Por otra parte, usando el Teorema 1.2.10 y el Lema 2.7.6, tenemos que $X$ es un espacio localmente compacto. $\square$

## 2.8. Espacios cósmicos

**Definición 2.8.1.** *Decimos que un espacio topológico $X$ es un* ***espacio cósmico****, si tiene una red numerable.*

**Ejemplo 2.8.2.** *Si $X$ es un espacio topológico segundo numerable, entonces $X$ es un espacio cósmico. Al ser $X$ un espacio segundo numerable, existe una base numerable en $X$. Consecuentemente por el ejemplo 2.1.6, $X$ tiene una red numerable.*

**Teorema 2.8.3.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es cósmico si y sólo si $F_n(X)$ es cósmico.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sean $\mathcal{N}$ una red numerable en $X$ y

$$\mathfrak{N} = \{\langle N_1,\ldots,N_l\rangle : N_1,\ldots,N_l \in \mathcal{N} \text{ y } l \in \{1,\ldots,n\}\}.$$

Es claro que $\mathfrak{N}$ es numerable. Por el Lema 2.1.7, $\mathfrak{N}$ es una red en $F_n(X)$. Por lo tanto $F_n(X)$ es un espacio cósmico.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $\mathfrak{N}$ una red numerable en $F_n(X)$. Consideremos

$$\mathfrak{N}_1 = \{\mathcal{N} \in \mathfrak{N} : \mathcal{N} \cap F_1(X) \neq \emptyset\} \text{ y } \mathcal{N}_1 = \{\bigcup \mathcal{N} : \mathcal{N} \in \mathfrak{N}_1\}.$$

$\mathcal{N}_1$ es numerable. Probaremos que $\mathcal{N}_1$ es red. Sean $x \in X$ y $U$ un abierto en $X$, tales que $x \in U$. Entonces $\langle U \rangle$ es abierto en $F_n(X)$ y $\{x\} \in \langle U \rangle$. Como $\mathfrak{N}$ es red en $F_n(X)$ existe $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}$, tal que $\{x\} \in \mathcal{N} \subset \langle U \rangle$. Notemos que $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}_1$, ya que $\{x\} \in \mathcal{N}_1 \cap F_1(X)$.
Claramente $x \in \bigcup \mathcal{N} \subset U$, así $\mathcal{N}_1$ es red en $X$. Por lo tanto $X$ es cósmico. □

## 2.9. $\aleph_o$- espacios

**Definición 2.9.1.** *Una familia $\mathcal{Q}$ de subconjuntos de $X$ es* ***pseudobase en*** *$X$ si para cada compacto $C$ de $X$ y cada abierto $U$ en $X$ tales que $C \subset U$, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $C \subset P \subset U$.*

**Ejemplo 2.9.2.** *Toda base en $X$ cerrada bajo uniones finitas es pseudobase en $X$.*
*Sea $\beta$ una base para la topología de $X$, con $\beta$ cerrada bajo uniones finitas. Probaremos que $\beta$ es una pseudobase en $X$. Sean $C$ un subconjunto compacto de $X$ y $U$ abierto en $X$ tales que $C \subset U$. Como $U$ es abierto entonces $U = \bigcup\limits_{B \in \beta} B$. Dado que $C \subset U$ y $C$ es un subconjunto compacto, existe una cantidad finita de elementos de $\beta$, digamos $B_1, \ldots, B_m$ tales que $C \subset B_1 \cup \ldots \cup B_m$. Claramente $L = B_1 \cup \ldots \cup B_m \in \beta$ y es tal que $C \subset L \subset U$.*
*Por lo tanto $\beta$ es una pseudobase en $X$.*

**Definición 2.9.3.** *Decimos que $X$ un espacio topológico es un* ***$\aleph_o$-espacio*** *si $X$ es regular y tiene una pseudobase numerable.*

**Ejemplo 2.9.4.** *Sea $X$ un espacio métrico y separable. Si cualquier base para la topología de $X$ es cerrada bajo uniones finitas, entonces $X$ es un $\aleph_o$-espacio.*
*Como $X$ es un espacio métrico y separable, entonces $X$ es segundo numerable. Sea $\beta$ una base numerable para la topología de $X$, entonces $\beta$ es cerrada bajo uniones finitas. Usando el ejemplo 2.9.2, tenemos que $\beta$ es una pseudobase. Por tanto $\beta$ es una pseudobase numerable y tenemos que $X$ es un $\aleph_o$-espacio.*

Para probar los Lemas 2.9.14 y 2.9.15, se tomarán en cuenta las definiciones y proposiciones siguientes, las cuales dejaremos sin prueba pues quedan fuera del objetivo de este trabajo.

**Definición 2.9.5.** *Sean $\mathcal{U}, \mathcal{P}$ familias de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{P}$ es una $\mathcal{U}-$pseudobase, si para cada $C$ compacto y $U \in \mathcal{U}$ tales que $C \subset U$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $C \subset P \subset U$.*

**Definición 2.9.6.** *Decimos que una función continua $f : X \to Y$ es compactamente cubierta. Si cada subconjunto compacto de $Y$, es la imagen de un subconjunto compacto de $X$.*

**Definición 2.9.7.** *Sean $\mathcal{U}$,$\mathcal{U}'$ familias de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{U}'$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, si para cada $U' \in \mathcal{U}'$, existe $U \in \mathcal{U}$ tales que $U' \subset U$ y $\bigcup\{U' : U' \in \mathcal{U}'\} = \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Cuando todos los elementos de $\mathcal{U}'$ son abiertos en $X$, diremos que $\mathcal{U}'$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$.*

**Definición 2.9.8.** *Sea $X$ un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{U}$ es una familia localmente finita si y sólo si cada $x \in X$ posee una vecindad que intersecta a lo más una colección finita de elementos de $\mathcal{U}$.*

**Definición 2.9.9.** *Un espacio topológico $X$ es paracompacto si cualquier cubierta abierta de $X$ tine un refinamiento abierto localmente finito.*

**Proposición 2.9.10.** *Sean $X$ un espacio topológico de Hausdorff y $\mathcal{S}$ una subbase para $X$. Entonces $X$ tiene una pseudobase numerable si y sólo si tiene una $\mathcal{S}-$pseudobase numerable.*

**Proposición 2.9.11.** *Si $X$ es un $\aleph_o$-espacio, entonces $X$ es un espacio paracompacto.*

**Proposición 2.9.12.** *Si $X$ es un espacio paracompacto y $f : X \to Y$ es continua, cerrada y suprayectiva, entonces $f$ es compactamente cubierta.*

**Proposición 2.9.13.** *Si $f : X \to Y$ es compactamente cubierta y $X$ tiene una pseudobase numerable, entonces $Y$ tiene una pseudobase numerable.*

**Lema 2.9.14.** *Todo producto finito de $\aleph_o$-espacios es un $\aleph_o$-espacio.*

*Demostración.* Sea $Q = \prod_{i=1}^{n} X_i$, donde cada $X_i$ es $\aleph_o$-espacio. Como cada $X_i$ es regular, entonces $Q$ es un espacio regular. Sea $\mathcal{S}$ la subbase para $Q$ formada por todos los subconjuntos $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde $U_i$ es abierto en $X_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por la proposición 2.9.10, es suficiente encontrar una $\mathcal{S} - pseudobase$ numerable.
Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ consideremos una pseudobase numerable $\mathcal{P}_i$ para $X_i$ y $\mathcal{P} = \{\pi_i^{-1}(P_i) \subset Q : P_i \in \mathcal{P}_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Probaremos que $\mathcal{P}$ es una $\mathcal{S} - pseudobase$. Sean $C$ compacto de $Q$ y $U_i$ abierto en $X_i$ tales que $C \subset \pi_i^{-1}(U_i)$. Entonces $\pi_i(C) \subset U_i$ y $\pi_i(C)$ es compacto de $X_i$. Dado que $\mathcal{P}_i$ es pseudobase numerable para $X_i$ existe $P_i \in \mathcal{P}_i$ tal que $\pi_i(C) \subset P_i \subset U_i$. De aquí que $C \subset \pi_i^{-1}(P_i) \subset \pi_i^{-1}(U_i)$.
Por lo tanto $\mathcal{P}$ es $\mathcal{S} - pseudobase$ y $Q$ un $\aleph_o$-espacio. □

**Lema 2.9.15.** *Si $X$ es un $\aleph_o$-espacio y $f : X \to Y$ es una función cerrada, continua y suprayectiva, entonces $Y$ es un $\aleph_o$-espacio.*

*Demostración.* Como $X$ es un $\aleph_o$-espacio. Por la Proposición 2.9.11, $X$ es paracompacto y consecuentemente normal, dado que toda imagen continua y cerrada de un espacio normal es normal, $Y$ es normal y entonces regular. Por las Proposiciones 2.9.12 y 2.9.13, $Y$ tiene una pseudobase numerable.
Por lo tanto $Y$ es un $\aleph_o$-espacio. □

**Teorema 2.9.16.** *Sea $X$ un espacio regular. Entonces $X$ es un $\aleph_o$-espacio si y sólo si $F_n(X)$ es un $\aleph_o$-espacio.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Del Lema 2.9.14, $X^n$ es un $\aleph_o$-espacio. Por el Teorema 1.2.3 y el Lema 2.9.15, $F_n(X)$ es un $\aleph_o$-espacio.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $\mathfrak{N}$ una pseudobase numerable en $F_n(X)$. Consideremos

$$\mathcal{N}_1 = \{\bigcup \mathcal{N} \subset X : \mathcal{N} \in \mathfrak{N}\}.$$

Es claro que $\mathcal{N}_1$ es numerable. Veamos que $\mathcal{N}_1$ es pseudobase en $X$. Para ello, tomemos $C$ un compacto de $X$ y $U$ un abierto en $X$ tales que $C \subset U$. Por el Teorema 1.2.3, la función $f_n$ es continua, así, $F_n(C)$ es compacto de $F_n(X)$. Dado que $\mathfrak{N}$ es pseudobase en $F_n(X)$ y $\langle U \rangle$ es abierto en $F_n(X)$ con $F_n(C) \subset \langle U \rangle$, existe $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}$ tal que $F_n(C) \subset \mathcal{N} \subset \langle U \rangle$. De lo anterior $C = \bigcup F_n(C) \subset \bigcup \mathcal{N} \subset \bigcup \langle U \rangle = U$. Concluimos que $\mathcal{N}_1$ es pseudobase en $X$. Por lo tanto $X$ es un $\aleph_o$-espacio. □

## 2.10. $\sigma$-*espacios*

**Definición 2.10.1.** *Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de $X$ es una **red $\sigma$-discreta**, si $\mathcal{N}$ es una red en $X$ y es unión numerable de familias discretas de subconjuntos de $X$.*

**Definición 2.10.2.** *Un espacio topológico $X$ es un **$\sigma$-espacio** si tiene una red $\sigma$-discreta.*

**Lema 2.10.3.** *Sea $X$ un $\sigma$-espacio. Si $Y \subset X$ es un subespacio de $X$, entonces $Y$ es $\sigma$-espacio.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}_j$ una red $\sigma$-dicreta en $X$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathcal{N}_j \cap Y = \{N_j \cap Y : N_j \in \mathcal{N}_j\}$. Veremos que $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (\mathcal{N}_j \cap Y)$ es una red $\sigma$-dicreta en $Y$.
Primero probaremos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_j \cap Y$ es familia discreta de subconjuntos de $Y$. Sean $j \in \mathbb{N}$ y $y \in Y$. Dado que $\mathcal{N}_j$ es familia discreta de subconjuntos de $X$, existe $U$ abierto en $X$ tal que $y \in U$ y $U$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{N}_j$. De aquí que $Y \cap U$ es abierto en $Y$ tal que $y \in Y \cap U$. Para probar que $Y \cap U$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{N}_j \cap Y$, vamos a suponer que existen $N_{l_j} \neq N_{m_j} \in \mathcal{N}_j$ tales que $(Y \cap U) \cap (N_{l_j} \cap Y) \neq \emptyset$ y $(Y \cap U) \cap (N_{m_j} \cap Y) \neq \emptyset$. De lo anterior $U \cap N_{l_j} \neq \emptyset$ y $U \cap N_{m_j} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así $\mathcal{N}_j \cap Y$ es familia discreta de subconjuntos de $Y$.
Ahora, veremos que $\mathcal{M}$ es red en $Y$. Sean $y \in Y$, $W$ abierto en $Y$ y $V$ abierto en $X$ tales que $y \in W = V \cap Y$. Como $\mathcal{N}$ es red en $X$, existen $j \in \mathbb{N}$ y $N_{l_j} \in \mathcal{N}_j$, tales que $y \in N_{l_j} \subset V$. Es claro que $y \in N_{l_j} \cap Y \subset W$ y $N_{l_j} \cap Y \in \mathcal{N}_j \cap Y$. Concluimos que $\mathcal{M}$ es una red $\sigma$-discreta.
Por lo tanto $Y$ es un $\sigma$-espacio. $\square$

**Lema 2.10.4.** *Sea $X$ un $\sigma$-espacio. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ es un $\sigma$-espacio.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}_j$ una red $\sigma$-discreta en $X$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos $f(\mathcal{N}_j) = \{f(N_j) : N_j \in \mathcal{N}_j\}$. Sea $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_j)$. Probaremos que $\mathcal{M}$ es una red $\sigma$-dicreta en $Y$. Notemos que para cada $j \in \mathbb{N}, f(\mathcal{N}_j)$ es

familia discreta de subconjuntos de $Y$. Sea $j \in \mathbb{N}$ y $y \in Y$, por la biyectividad de $f$ existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Como $\mathcal{N}_j$ es familia discreta de subconjuntos de $X$, existe $U$ abierto en $X$ tal que $x \in U$ y $U$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{N}_j$. Dado que f es abierta, $f(U)$ es abierto en $Y$, tal que $y \in f(U)$. Para probar que $f(U)$ intersecta a lo más un elemento de $f(\mathcal{N}_j)$ supongamos que existen $N_{l_j} \neq N_{m_j} \in \mathcal{N}_j$ tales que $f(U) \cap f(N_{l_j}) \neq \emptyset$ y $f(U) \cap f(N_{m_j}) \neq \emptyset$. Por la biyectividad de $f$, $U \cap N_{l_j} \neq \emptyset$ y $U \cap N_{m_j} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así, $f(\mathcal{N}_j)$ es familia discreta de subconjuntos de $Y$.
Ahora, veremos que $\mathcal{M}$ es red en $Y$. Sean $y \in Y$ y $W$ abierto en $Y$ tales que $y \in W$. Entonces $f^{-1}(W)$ es abierto en $X$ y existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como $\mathcal{N}$ es red en $X$ y $x \in f^{-1}(W)$ existen $j \in \mathbb{N}$ y $N_{l_j} \in \mathcal{N}_j$ tales que $x \in N_{l_j} \subset f^{-1}(W)$. Es claro que $y \in f(N_{l_j}) \subset W$ y $f(N_{l_j}) \in f(\mathcal{N}_j)$. Concluimos que $\mathcal{M}$ es una red $\sigma$-discreta.
Por lo tanto $Y$ es un $\sigma$-espacio. □

**Teorema 2.10.5.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $F_n(X)$ es un $\sigma$-espacio, entonces $X$ es un $\sigma$-espacio.*

*Demostración.* Por el Lema 2.10.3, $F_1(X)$ es un $\sigma$-espacio. Del Teorema 1.2.10 y el Lema 2.10.4, $X$ es un $\sigma$-espacio. □

## 2.11. Espacios Desarrollables

**Definición 2.11.1.** *Un espacio topológico $X$ es **desarrollable** si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de $X$ tal que para cada $x \in X$, $\{St(x, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$. Llamaremos desarrollo de $X$ a la familia $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$.*

**Lema 2.11.2.** *Sea $X$ un espacio desarrollable. Si $Y \subset X$ es un subespacio de $X$, entonces $Y$ es un espacio desarrollable.*

*Demostración.* Sean $y \in Y$ y $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de $X$ tal que $\{St(y, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $X$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathcal{G}_m \cap Y = \{G_m \cap Y : G_m \in \mathcal{G}_m\}$. Claramente $\{(\mathcal{G}_m \cap Y)\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $Y$. Probaremos que $\{St(y, \mathcal{G}_m \cap Y)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$. Para ello, tomemos $V$ abierto en $Y$ y $W$ abierto en $X$ tales que $y \in V = W \cap Y$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in St(y, \mathcal{G}_m) \subset W$. De aquí que $y \in G_m$, para algún $G_m \in \mathcal{G}_m$. Así, $y \in G_m \cap Y \in \mathcal{G}_m \cap Y$ por

lo que $y \in St(y, \mathcal{G}_m \cap Y)$. Solo nos falta ver que $St(y, \mathcal{G}_m \cap Y) \subset V$. Sea $z \in St(y, \mathcal{G}_m \cap Y)$, entonces existe $G_m \in \mathcal{G}_m$ tal que $z, y \in G_m \cap Y$. Así, $z \in St(y, \mathcal{G}_m) \subset W$. De lo anterior $z \in V$ y $St(y, \mathcal{G}_m \cap Y) \subset V$. Concluimos que $\{St(y, \mathcal{G}_m \cap Y)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$.
Por lo tanto $Y$ es un espacio desarrollable. □

**Lema 2.11.3.** *Sea $X$ un espacio desarrollable. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ es un espacio desarrollable.*

*Demostración.* Sean $y \in Y$ y $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de $X$ que satisface la Definición 2.11.1. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $f(\mathcal{G}_m) = \{f(G_m) : G_m \in \mathcal{G}_m\}$. Claramente como $f$ es función abierta, $\{f(\mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $Y$. Probaremos que $\{St(y, f(\mathcal{G}_m))\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$. Para ello, tomemos $W$ abierto en $Y$ tal que $y \in W$. Sea $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como $\{St(x, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$ en $X$, $f^{-1}(W)$ es abierto en $X$ y $x \in f^{-1}(W)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in St(x, \mathcal{G}_m) \subset f^{-1}(W)$. Así, $x \in G_m$ para algún $G_m \in \mathcal{G}_m$. De lo anterior $y \in f(G_m) \in f(\mathcal{G}_m)$ y $y \in St(y, f(\mathcal{G}_m))$.
Por último necesitamos ver que $St(y, f(\mathcal{G}_m)) \subset W$. Sea $z \in St(y, f(\mathcal{G}_m))$, entonces existe $G_m \in \mathcal{G}_m$ tal que $y, z \in f(G_m)$. Tomemos $w \in G_m$ tal que $f(w) = z$, entonces $w \in St(x, \mathcal{G}_m) \subset f^{-1}(W)$. De lo anterior $z \in W$ y $St(y, f(\mathcal{G}_m)) \subset W$.
Concluimos que $\{St(y, f(\mathcal{G}_m))\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$. Por lo tanto $Y$ es un espacio desarrollable.

□

**Lema 2.11.4.** *Sea $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ un desarrollo de $X$. Por cada $m \in \mathbb{N}$, definimos:*

$$\mathcal{G}_m = \{\bigcap_{j=1}^{m} V_j : V_j \in \mathcal{V}_j \text{ para todo } j \in \{1, \dots, m\}\}.$$

*Entonces $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de $X$.*

*Demostración.* Por el Lema 1.1.11, $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $X$. Sea $x \in X$. Veremos que $\{St(x, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$ en $X$. Sea $W$ abierto en $X$ tal que $x \in W$. Como $\{St(x, \mathcal{V}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$ en $X$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in St(x, \mathcal{V}_m) \subset W$. Así, $x \in V_m$ para algún $V_m \in \mathcal{V}_m$. Sea $j \in \{1, \dots, m-1\}$. Dado que $\mathcal{V}_j$ es cubierta de $X$ por cada $j$, existen $V_j \in \mathcal{V}_j$ tales que $x \in V_j$, de aquí que $x \in (\bigcap_{j=1}^{m-1} V_j \cap V_m) \in \mathcal{G}_m$. De lo

anterior $x \in St(x, \mathcal{G}_m)$. Para probar que $St(x, \mathcal{G}_m) \subset W$. Sea $y \in St(x, \mathcal{G}_m)$, entonces existe $G_m \in \mathcal{G}_m$ tal que $x, y \in G_m$. Claramente $y \in St(x, \mathcal{V}_m)$ y dado que $St(x, \mathcal{V}_m) \subset W$, concluimos que $St(x, \mathcal{G}_m) \subset W$. Así, $\{St(x, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$ en $X$.
Por lo tanto $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de $X$. □

**Teorema 2.11.5.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un espacio desarrollable si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio desarrollable.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ un desarrollo de $X$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos:

$$\mathcal{G}_m = \{\bigcap_{j=1}^{m} V_j : V_j \in \mathcal{V}_j \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Por el Lema 2.11.4, $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de $X$. Por construcción se cumple $\mathcal{G}_{m+1} \subset \mathcal{G}_m$ y $St(x, \mathcal{G}_{m+1}) \subset St(x, \mathcal{G}_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y

$$\mathfrak{G}_m = \{\langle G_{m,1}, \ldots, G_{m,k}\rangle : G_{m,1}, \ldots, G_{m,k} \in \mathcal{G}_m \text{ y } k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Probaremos que $\{\mathfrak{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de $F_n(X)$. Por el Lema 1.1.10, $\{\mathfrak{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $F_n(X)$.
Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$, veremos que $\{St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $\{x_1, \ldots, x_r\}$ en $F_n(X)$. Para ello, tomemos $\mathcal{U}$ abierto en $F_n(X)$ tal que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{U}$. Entonces existen $U_1, \ldots, U_s$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Sea $j \in \{1, \ldots, r\}$. Como $\{St(x_j, \mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x_j$ en $X$ y cada $U_{x_j}$ es abierto en $X$, existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in St(x_j, \mathcal{G}_{m_j}) \subset U_{x_j}$. Entonces existe $m \geq \text{máx}\{m_1, \ldots, m_r\}$ tal que $St(x_j, \mathcal{G}_m) \subset St(x_j, \mathcal{G}_{m_j})$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Por el Lema 1.1.3, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle St(x_1, \mathcal{G}_m), \ldots, St(x_r, \mathcal{G}_m)\rangle \subset \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_s\rangle \subset \mathcal{U}$. Por el Lema 2.1.13, $St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m) \subset \mathcal{U}$.
Concluimos que $\{St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $\{x_1, \ldots, x_r\}$ en $F_n(X)$ y $\{\mathfrak{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un desarrollo de $F_n(X)$.
Por lo tanto $F_n(X)$ es un espacio desarrollable.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Lema 2.11.2, $F_1(X)$ es un espacio desarrollable. Por el Teorema 1.2.10 y el Lema 2.11.3, $X$ es un espacio desarrollable. □

## 2.12. Espacios de Moore

**Definición 2.12.1.** *Decimos que un espacio topológico $X$ es un **espacio de Moore** si es un espacio regular y desarrollable.*

**Teorema 2.12.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un espacio de Moore si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio de Moore.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Por el Teorema 2.6.3, $F_n(X)$ es un espacio regular y del Teorema 2.11.5, $F_n(X)$ es desarrollable.
Por lo tanto $F_n(X)$ es un espacio de Moore.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Teorema 2.6.3, $X$ es un espacio regular y del Teorema 2.11.5, $X$ es desarrollable.
Por lo tanto $X$ es un espacio de Moore. $\square$

## 2.13. $\mathcal{G}_\delta$-diagonal

**Definición 2.13.1.** *Sea $X$ un espacio topológico. Diremos que $X$ tiene una **$\mathcal{G}_\delta$-diagonal** si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^\infty$ de cubiertas abiertas de $X$ tal que para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(x, \mathcal{G}_m)$.*

**Definición 2.13.2.** *Sea $X$ un espacio, $X$ tiene una **$\mathcal{G}^*{}_\delta$-diagonal** si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^\infty$ de cubiertas abiertas de $X$ tal que para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl_X(St(x, \mathcal{G}_m))}$.*

**Lema 2.13.3.** *Sea $Y \subset X$ un subespacio de $X$. Si $X$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal, entonces $Y$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal.*

*Demostración.* Sea $y \in Y$. Como $X$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal existe $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^\infty$ sucesión de cubiertas abiertas de $X$ tal que $\{x\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(x, \mathcal{G}_m)$ para todo $x \in X$, en particular $\{y\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(y, \mathcal{G}_m)$ . Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathcal{G}_m \cap Y = \{G_m \cap Y : G_m \in \mathcal{G}_m\}$, entonces $\{\mathcal{G}_m \cap Y\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $Y$. Probaremos que $\{y\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} (St(y, \mathcal{G}_m \cap Y)$. Claramente

$y \in St(y, \mathcal{G}_m \cap Y)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.1.14, para cada $m \in \mathbb{N}$ $St(y, \mathcal{G}_m \cap Y) \subset St(y, \mathcal{G}_m)$. Así, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(y, \mathcal{G}_m \cap Y) \subset \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(y, \mathcal{G}_m) = \{y\}$.
Por lo tanto $Y$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal. □

**Lema 2.13.4.** *Si $X$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal y $f : X \to Y$ es un homeomofismo, entonces $Y$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal.*

*Demostración.* Sean $y \in Y$ y $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de $X$ que satisface la Definición 2.13.1. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $f(\mathcal{G}_m) = \{f(G_m) : G_m \in \mathcal{G}_m\}$. Como $f$ es función abierta, $\{f(\mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $Y$. Probaremos que $\{y\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(y, f(\mathcal{G}_m))$. Claramente $y \in St(y, f(\mathcal{G}_m))$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $z \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(y, f(\mathcal{G}_m))$. Por cada $m \in \mathbb{N}$, tomemos $G_m \in \mathcal{G}_m$ tal que $z, y \in f(G_m)$. Sean $x_y, x_z \in G_m$ tales que $f(x_y) = y$ y $f(x_z) = z$, entonces $x_z \in St(x_y, \mathcal{G}_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Dado que $x_z \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(x_y, \mathcal{G}_m) = \{x_y\}$ tenemos que $x_z = x_y$. Así, $z = f(x_z) = f(x_y) = y$. De lo anterior, $\{y\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(y, f(\mathcal{G}_m))$.
Por lo tanto $Y$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal. □

**Teorema 2.13.5.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal si y sólo si $F_n(X)$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de $X$ que satisface la Definición 2.13.1. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos:

$$\mathcal{G}_m = \{\bigcap_{j=1}^{m} V_j : V_j \in \mathcal{V}_j \text{ para todo } j \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Veamos que $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $X$ tal que para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(x, \mathcal{G}_m)$. Por el Lema 1.1.11, $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $X$. Sea $x \in X$. Claramente $x \in St(x, \mathcal{G}_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $w \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} St(x, \mathcal{G}_m)$. Por cada $m \in \mathbb{N}$, tomemos $G_m \in \mathcal{G}_m$ tal que $w, x \in G_m$. De lo anterior, $w \in St(x, \mathcal{V}_m)$ para todo

$m \in \mathbb{N}$. Como $\{x\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} St(x, \mathcal{V}_m)$, entonces $w = x$. Así, $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ satisface lo requerido.
Por la manera en la que definimos cada $\mathcal{G}_m$, se cumple que $\mathcal{G}_{m+1} \subset \mathcal{G}_m$ y $St(x, \mathcal{G}_{m+1}) \subset St(x, \mathcal{G}_m)$ para todo $x \in X$ y cada $m \in \mathbb{N}$.
Sean $m \in \mathbb{N}$ y

$$\mathfrak{G}_m = \{\langle G_{m,1}, \ldots, G_{m,k} \rangle : G_{m,1}, \ldots, G_{m,k} \in \mathcal{G}_m \text{ y } k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Por el Lema 1.1.10, $\{\mathfrak{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $F_n(X)$.
Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$. A continuación, veremos que $\{\{x_1, \ldots, x_r\}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m)$. Por el Lema 2.1.13,

$$St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m) \subset \langle St(x_1, \mathcal{G}_m), \ldots, St(x_r, \mathcal{G}_m) \rangle.$$

Entonces

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \langle St(x_1, \mathcal{G}_m), \ldots, St(x_r, \mathcal{G}_m) \rangle.$$

Por el Lema 1.1.12 se tiene que,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \langle St(x_1, \mathcal{G}_m), \ldots, St(x_r, \mathcal{G}_m) \rangle = \{\{x_1, \ldots, x_r\}\}.$$

De aquí que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m) \subset \{\{x_1, \ldots, x_r\}\}.$$

Claramente $\{\{x_1, \ldots, x_r\}\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m)$.
Así, $\{\{x_1, \ldots, x_r\}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m)$.
Por lo tanto $F_n(X)$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal.

$\Leftarrow \rfloor$ Por el Lema 2.13.3, $F_1(X)$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal. Del Teorema 1.2.10 y del Lema 2.13.4, $X$ tiene una $\mathcal{G}_\delta$-diagonal. $\square$

**Lema 2.13.6.** *Si $X$ tiene una ${\mathcal{G}^*}_\delta$-diagonal y $Y \subset X$ un subespacio de $X$, entonces $Y$ tiene una ${\mathcal{G}^*}_\delta$-diagonal.*

*Demostración.* Sean $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de $X$ que satisface la Definición 2.13.2 y $y \in Y$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{G}_m \cap Y = \{G_m \cap Y : G_m \in \mathcal{G}_m\}$, entonces $\{\mathcal{G}_m \cap Y\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $Y$ . Probaremos que $\{y\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(St(y, \mathcal{G}_m \cap Y))$. Claramente $y \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(St(y, \mathcal{G}_m \cap Y))$. Por el Lema 2.1.14, $St(y, \mathcal{G}_m \cap Y) \subset St(y, \mathcal{G}_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(St(y, \mathcal{G}_m \cap Y) \subset \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(St(y, \mathcal{G}_m) \subset \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_X(St(y, \mathcal{G}_m) = \{y\}$.
Por lo tanto $Y$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_\delta$-diagonal. □

**Lema 2.13.7.** *Si $X$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_\delta$-diagonal y $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_\delta$-diagonal.*

*Demostración.* Sean $y \in Y$ y $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ susesión de cubiertas abiertas de $X$ que satisface la Definición 2.13.2. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $f(\mathcal{G}_m) = \{f(G_m) : G_m \in \mathcal{G}_m\}$. Como $f$ es función abierta $\{f(\mathcal{G}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $Y$. Veamos que $\{y\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(St(y, f(\mathcal{G}_m))$. Claramente $y \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(St(y, f(\mathcal{G}_m))$. Ahora, tomemos $w \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(St(y, f(\mathcal{G}_m))$. Consideremos $x_y, x_w \in X$ tales que $f(x_y) = y$ y $f(x_w) = w$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_w \in f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(St(y, f(\mathcal{G}_m))) \subset \mathrm{Cl}_X(St(x_y, \mathcal{G}_m))$. De aquí que $x_w \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_X(St(x_y, \mathcal{G}_m)) = \{x_y\}$. De lo anterior $x_w = x_y$ y $w = f(x_w) = f(x_y) = y$. Así, $\{y\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(St(y, f(\mathcal{G}_m))$.
Por lo tanto $Y$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_\delta$-diagonal.. □

**Teorema 2.13.8.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_\delta$-diagonal si y sólo si $F_n(X)$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_\delta$-diagonal*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ una susesión de cubiertas abiertas de $X$ que satisface la Definición 2.13.2. Para cada $m \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$\mathcal{G}_m = \{\bigcap_{j=1}^{m} V_j : V_j \in \mathcal{V}_j \text{ para todo} j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Veamos que $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $X$ tal que para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl_X}(St(x, \mathcal{G}_m))$. Por el Lema 1.1.11, $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $X$. Claramente $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl_X}(St(x, \mathcal{G}_m))$. Ahora, tomemos $w \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl_X}(St(x, \mathcal{G}_m))$. Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Cl_X}(St(x, \mathcal{G}_m)) \subset \mathrm{Cl_X}(St(x, \mathcal{V}_m))$. Entonces $w \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl_X}(St(x, \mathcal{V}_m)) = \{x\}$. Así, $w = x$ y $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ satisface lo requerido.
Por la manera en la que definimos cada $\mathcal{G}_m$, se cumple que $\mathcal{G}_{m+1} \subset \mathcal{G}_m$ y $St(x, \mathcal{G}_{m+1}) \subset St(x, \mathcal{G}_m)$ para todo $x \in X$ y cada $m \in \mathbb{N}$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y

$$\mathfrak{G}_m = \{\langle G_{m,1}, \ldots, G_{m,k}\rangle : G_{m,1}, \ldots, G_{m,k} \in \mathcal{G}_m \text{ y } k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Por el Lema 1.1.10, $\{\mathfrak{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $F_n(X)$. Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$. A continuación, veremos que

$$\{\{x_1, \ldots, x_r\}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m)).$$

Del Lema 2.1.13, se tiene que

$$\mathrm{Cl}_{F_n(X)}(St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m)) \subset \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(\langle St(x_1, \mathcal{G}_m), \ldots, St(x_r, \mathcal{G}_m)\rangle).$$

Entonces por el Lema 1.1.7,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m)) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} (\langle \mathrm{Cl}_X(St(x_1, \mathcal{G}_m), \ldots, \mathrm{Cl}_X(St(x_r, \mathcal{G}_m)\rangle).$$

Del Lema 1.1.12,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \langle \mathrm{Cl}_X(St(x_1, \mathcal{G}_m), \ldots, \mathrm{Cl}_X(St(x_r, \mathcal{G}_m)\rangle = \{\{x_1, \ldots, x_r\}\}.$$

De aquí que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(St(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathfrak{G}_m) \subset \{\{x_1, \ldots, x_r\}\}.$$

Claramente $\{\{x_1,\ldots,x_r\}\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(St(\{x_1,\ldots,x_r\},\mathfrak{G}_m)$. De lo anterior $\{\{x_1,\ldots,x_r\}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_{F_n(X)}(St(\{x_1,\ldots,x_r\},\mathfrak{G}_m)$.
Por lo tanto $F_n(X)$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_{\delta}$-diagonal.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Lema 2.13.6, $F_1(X)$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_{\delta}$-diagonal. Del Teorema 1.2.10 y el Lema 2.13.7, $X$ tiene una $\mathcal{G}^*{}_{\delta}$-diagonal. $\square$

## 2.14. $\alpha$-espacio

**Definición 2.14.1.** *Sea $X$ un espacio topológico. Decimos que $X$ es un **$\alpha$-espacio** si existe una función $g:\mathbb{N}\times X\to\tau_X$, tal que para cada $x\in X$ se satisface:*
*(a)* $\bigcap_{m=1}^{\infty} g(m,x)=\{x\}$.
*(b)Si $y\in g(m,x)$, entonces $g(m,y)\subset g(m,x)$.*

**Lema 2.14.2.** *Sea $X$ un $\alpha$-espacio. Si $Y\subset X$ es un subespacio de $X$, entonces $Y$ es un $\alpha$-espacio.*

*Demostración.* Sean $g:\mathbb{N}\times X\to\tau_X$ una función que cumple con la Definición 2.14.1. Consideremos $h:\mathbb{N}\times Y\to\tau_Y$ dada por $h(m,y)=g(m,y)\cap Y$. La función $h$ está bien definida pues para cada $(m,y)\in\mathbb{N}\times Y, g(m,y)\in\tau_X$ así, $h(m,y)=g(m,y)\cap Y\in\tau_Y$. Sea $y\in Y$. Para probar $(a)$. Notemos que $\bigcap_{m=1}^{\infty} h(m,y)=\bigcap_{m=1}^{\infty} g(m,y)\cap Y=\{y\}\cap Y=\{y\}$.
Ahora, para probar (b), sean $m\in\mathbb{N}$ y $w\in h(m,y)$. Como $w\in g(m,y)$, entonces $g(m,w)\subset g(m,y)$. Así, $h(m,w)=g(m,w)\cap Y\subset g(m,y)\cap Y=h(m,y)$. Por lo tanto $Y$ es un $\alpha$- espacio. $\square$

**Lema 2.14.3.** *Sea $X$ es $\alpha$-espacio. Si $f:X\to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ es un $\alpha$-espacio.*

*Demostración.* Sea $g:\mathbb{N}\times X\to\tau_X$ una función que cumple con la Definición 2.14.1. Para cada $y\in Y$, tomemos $x_y\in X$ tal que $f(x_y)=y$. Consideremos $h:\mathbb{N}\times Y\to\tau_Y$ dada por $h(m,y)=f(g(m,x_y))$. Dado que $g(m,x_y)\in\tau_X$ y $f$ es una función abierta, entonces $h(m,y)=f(g(m,x_y))\in\tau_Y$ así, $h$ es una función bien definida.

Sea $y \in Y$. Probaremos que $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} h(m, y) = \{y\}$.

$\subset\rfloor$ Sea $w \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} h(m, y)$, entonces $w \in f(g(m, x_y))$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Así, $x_w \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} g(m, x_y)$ y como $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} g(m, x_y) = \{x_y\}$ tenemos que $x_w = x_y$. De lo anterior $w = f(x_w) = f(x_y) = y$.

$\supset\rfloor$ Como $\{x_y\} \subset \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} g(m, x_y)$, entonces $f(x_y) = y \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} f(g(m, x_y)) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} h(m, y)$.

Concluimos que $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} h(m, y) = \{y\}$.

Para probar (b), sean $m \in \mathbb{N}$, $w \in h(m, y)$ y $z \in h(m, w)$. Entonces $x_w \in g(m, x_y)$ y $x_z \in g(m, x_w)$. Dado que $g(m, x_w) \subset g(m, x_y)$, se tiene que $x_z \in g(m, x_y)$. De aquí que $z = f(x_z) \in f(g(m, x_y)) = h(m, y)$. Así, $h(m, w) \subset h(m, y)$. Por lo tanto $Y$ es un $\alpha$-espacio.

$\square$

**Lema 2.14.4.** *Un espacio $X$ es un $\alpha-$espacio si y sólo si existe una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$, tal que para cada $x \in X$ se satisface:*
*(1) $g(m+1, x) \subset g(m, x)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*
*(2) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} g(m, x) = \{x\}$.*
*(3) Si $y \in g(m, x)$, entonces $g(m, y) \subset g(m, x)$.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $g' : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ una función que cumple con la Definición 2.14.1. Definimos una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ por $g(m, x) = \bigcap\limits_{j=1}^{m} g'(j, x)$. Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $g$ es la intersección finita de abiertos en $X$, por lo que $g$ está bien definida para todo $m \in \mathbb{N}$.
Por definición de $g$ se cumple que para cada $x \in X$, $g(m+1, x) \subset g(m, x)$.
Para probar la condición (2). Veamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$, $g(m, x) \subset g'(m, x)$. Como $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} g'(m, x) = \{x\}$, tenemos que $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} g(m, x) = \{x\}$.
Finalmente, probaremos (3). Sean $m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X$ tales que $y \in g(m, x)$.

Entonces, $y \in \bigcap_{j=1}^{m} g'(j,x)$. Por las propiedades que tiene $g'$ para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$, $g'(j,y) \subset g'(j,x)$. De lo anterior $\bigcap_{j=1}^{m} g'(j,y) \subset \bigcap_{j=1}^{m} g'(j,x)$. Así, $g(m,y) \subset g(m,x)$.
Por lo tanto $g$ satisface las condiciones (1), (2) y (3).

$\Leftarrow\rfloor$ Esta implicación es inmediata de la Definición 2.14.1. $\square$

**Teorema 2.14.5.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un $\alpha$-espacio si y sólo si $F_n(X)$ es un $\alpha$-espacio.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ una función que satisface las condiciones del Lema 2.14.4. Sea $\mathbf{g} : \mathbb{N} \times F_n(X) \to \tau_{F_n(X)}$ dada por $\mathbf{g}(m,\{x_1,\ldots,x_r\}) = \langle g(m,x_1),\ldots,g(m,x_r)\rangle$. Sea $\{x_1,\ldots,x_r\} \in F_n(X)$. Por las propiedades de $g$ y el Lema 1.1.12, tenemos que:

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \mathbf{g}(m,\{x_1,\ldots,x_r\}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \langle g(m,x_1),\ldots,g(m,x_r)\rangle = \{\{x_1,\ldots,x_r\}\}.$$

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\{y_1,\ldots,y_t\} \in \mathbf{g}(m,\{x_1,\ldots,x_r\})$. Entonces $\{y_1,\ldots,y_t\} \cap g(m,x_j) \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1,\ldots,r\}$. Para cada $j \in \{1,\ldots,r\}$, sean $y_{j,1},\ldots,y_{j,k_j}$ los elementos de $\{y_1,\ldots,y_t\}$ tales que $\{y_{j,1},\ldots,y_{j,k_j}\} \subset g(m,x_j)$. Como $X$ es un $\alpha$-espacio, para cada $l \in \{1,\ldots,k_j\}$, $g(m,y_{j,l}) \subset g(m,x_j)$. Entonces, $\bigcup_{l=1}^{k_j} g(m,y_{j,l}) \subset \bigcup_{j=1}^{r} g(m,x_j)$. Por el Lema 1.1.5, tenemos que
$\mathbf{g}(m,\{y_1,\ldots,y_t\}) = \langle g(m,y_1),\ldots,g(m,y_t)\rangle \subset \langle g(m,x_1),\ldots,g(m,x_r)\rangle = \mathbf{g}(m,\{x_1,\ldots,x_r\})$. Por lo tanto $F_n(X)$ es un $\alpha$-espacio.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Lema 2.14.2, $F_1(X)$ es un $\alpha$-espacio. Del Teorema 1.2.10 y del Lema 2.14.3, $X$ es un $\alpha$-espacio. $\square$

## 2.15. Espacios estrictamente primero numerable

**Definición 2.15.1.** *Sea $X$ un espacio topológico. Decimos que $X$ es **estrictamente primero numerable** si existe una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ tal*

*que para cada $x \in X$ se satisface:*
*a) $\{g(m,x)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$.*
*b) Si $y \in g(m,x)$, entonces $g(m,y) \subset g(m,x)$.*

**Lema 2.15.2.** *Sea $X$ un espacio estrictamente primero numerable. Si $Y$ es un subespacio de $X$, entonces $Y$ es un espacio estrictamente primero numerable.*

*Demostración.* Sean $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ una función que cumple con la Definición 2.15.1. Consideremos $h : \mathbb{N} \times Y \to \tau_Y$ dada por $h(m,y) = g(m,y) \cap Y$. Notemos que la función $h$ está bien definida pues para cada $(m,y) \in \mathbb{N} \times Y, g(m,y) \in \tau_X$ así, $g(m,y) \cap Y \in \tau_Y$. Dado que $\{g(m,y)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $X$ se tiene que $\{h(m,y)\}_{m=1}^{\infty} = \{g(m,y) \cap Y\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$. El mismo argumento dado en la prueba del Lema 2.14.2, asegura que la condición (b) es cierta.
Por lo tanto $Y$ es estrictamente primero numerable. □

**Lema 2.15.3.** *Sea $X$ un espacio estrictamente primero numerabble. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ es un espacio estrictamente primero numerable.*

*Demostración.* Sea $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ una función que cumple con la Definición 2.15.1. Para cada $y \in Y$, sea $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Consideremos $h : \mathbb{N} \times Y \to \tau_Y$ dada por $h(m,y) = f(g(m,x_y))$. Dado que $g(m,x_y) \in \tau_X$ y $f$ es una función abierta, entonces $h(m,y) = f(g(m,x_y) \in \tau_Y$ así, $h$ está bien definida.
Sea $y \in Y$. Probaremos que $\{h(m,y)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$. Tomemos $W$ abierto en $Y$ tal que $y \in W$. Como $f$ es continua, $f^{-1}(W)$ es abierto en $X$. Dado que $\{g(m,x_y)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x_y$ en $X$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_y \in g(m,x_y) \subset f^{-1}(W)$. Entonces $y \in f(g(m,x_y)) = h(m,y) \subset W$. De lo anterior $\{h(m,y)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$.
El mismo argumento dado en la prueba del Lema 2.14.3, asegura que la condición (b) es cierta.
Por lo tanto $Y$ es estrictamente primero numerable.

□

**Lema 2.15.4.** *Un espacio $X$ es un espacio estrictamente primero numerable si y sólo si existe una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$, tal que para cada $x \in X$:*
*1) $g(m+1,x) \subset g(m,x)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*
*2) $\{g(m,x)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$.*
*3) Si $y \in g(m,x)$, entonces $g(m,y) \subset g(m,x)$.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $g' : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ una función que cumple con la Definición 2.15.1. Definimos $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ por $g(m,x) = \bigcap_{j=1}^{m} g'(j,x)$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$ la función $g$ es la intersección finita de abiertos en $X$ tenemos que $g$ está bien definida para todo $m \in \mathbb{N}$. Claramente $g(m,+1,x) \subset g(m,x)$, para todo $x \in X$.
Para probar (2). Sean $x \in X$ y $U$ abierto en $X$ tales que $x \in U$. Dado que $\{g'(m,x)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g'(m,x) \subset U$. Como $g(m,x) \subset g'(m,x)$, entonces $\{g(m,x)\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de $x$.
Finalmente para probar (3). Sean $m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X$ tales que $y \in g(m,x)$. El mismo argumento que en la prueba del Lema 2.14.4, muestra que $g(m,y) \subset g(m,x)$.
Por lo tanto, la función $g$ satisface las condiciones (1), (2) y (3).

$\Leftarrow\rfloor$ Esta implicación es inmediata por la Definición 2.15.1. $\square$

**Teorema 2.15.5.** *Sea $X$ un espacio toplógico. Entonces $X$ es estrictamente primero numerable si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio estrictamente primero numerable.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ una función que satisface las condiciones del Lema 2.15.4. Sea $\mathbf{g} : \mathbb{N} \times F_n(X) \to \tau_{F_n(X)}$ dada por $\mathbf{g}(m, \{x_1, \ldots, x_r\}) = \langle g(m,x_1), \ldots, g(m,x_r) \rangle$. Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$.
Por el Lema 2.1.17, $\{\mathbf{g}(m, \{x_1, \ldots, x_r\})\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $\{x_1, \ldots, x_r\}$ en $F_n(X)$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \mathbf{g}(m, \{x_1, \ldots, x_r\})$. Por el argumento dado en el Teorema 2.14.5, tenemos que $\mathbf{g}(m, \{y_1, \ldots, y_t\}) \subset \mathbf{g}(m, \{x_1, \ldots, x_r\})$.
Por lo tanto $F_n(X)$es un espacio estrictamente primero numerable.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Lema 2.15.2, $F_1(X)$ es un espacio estrictamente primero numerable. Del Teorema 1.2.10 y el Lema 2.15.3, $X$ es un espacio estrictamente primero numerable. $\square$

## 2.16. $M_1$-espacios

**Definición 2.16.1.** *Sean $X$ un espacio topológico y $\beta \subset \tau_X$. Decimos que $\beta$ es una **base que preserva $\sigma$-cerradura** si $\beta$ es la unión numerable de familias que preservan cerradura y $\beta$ es base para $\tau_X$.*

**Definición 2.16.2.** *Sea $X$ espacio topológico. Se dirá que $X$ es un $M_1$-**espacio** si este es un espacio regular y tiene una base que preserva $\sigma-$cerradura.*

En [4, Teorema 2.4] se prueba el siguiente Lema.

**Lema 2.16.3.** *Sea $X$ un $M_1$-espacio. Si $Y \subset X$ es un subespacio cerrado en $X$, entonces $Y$ es un $M_1$- espacio.*

En [4, Teorema 2.9] se prueba el siguiente Lema.

**Lema 2.16.4.** *Sea $X$ un $M_1$-espacio. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ es un $M_1$-espacio.*

**Observación 2.16.5.** *Sea $\{\mathcal{U}_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de familias que preservan cerradura en $X$. Siempre es posible obtener una nueva sucesión creciente de familias que preservan cerradura en $X$ apartir de $\{\mathcal{U}_j\}_{j=1}^{\infty}$. Para ello basta considerar la siguiente construcción: para $m = 1$, consideremos $\mathcal{U}_1^{'} = \mathcal{U}_1$ y para $m \geqslant 2$, sea $\mathcal{U}_m^{'} = \mathcal{U}_{m-1}^{'} \bigcup \mathcal{U}_m$. Por el Lema 2.1.3, $\mathcal{U}_m^{'}$ preserva cerradura en $X$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Usando inducción, obtenemos que la sucesión $\{\mathcal{U}_m^{'}\}_{m=1}^{\infty}$ satisface que $\mathcal{U}_m^{'} \subset \mathcal{U}_{m+1}^{'}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

**Teorema 2.16.6.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un $M_1$-espacio si y sólo si $F_n(X)$ es un $M_1$-espacio.*

*Demostración.*
$\Rightarrow \rfloor$ Sea $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{U}_j$ una base que preserva $\sigma$-cerradura. Por la Observación 2.16.5, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}_{j+1}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathfrak{U}_j = \{\langle U_1, \ldots, U_k \rangle : U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}_j\}$. Como $\mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}_{j+1}$, entonces $\mathfrak{U}_j \subset \mathfrak{U}_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.1.4, $\mathfrak{U}_j$ preserva cerradura en $F_n(X)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $\mathfrak{U} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathfrak{U}_j$. Probaremos que $\mathfrak{U}$ es base en $F_n(X)$. Sean $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{W}$ un abierto en $F_n(X)$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{W}$. Tomemos $U_1, \ldots, U_s$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s \rangle \subset \mathcal{W}$. Como $x_i \in U_{x_i}$, cada $U_{x_i}$ es abierto en $X$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $\mathcal{U}$ es base en $X$. Por cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ tomemos $j_i \in \mathbb{N}$ y $U_{j_i} \in \mathcal{U}_{j_i}$ tales que $x_i \in U_{j_i} \subset U_{x_i}$. Por el Lema 1.1.3, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_{j_1}, \ldots, U_{j_r} \rangle \subset \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r} \rangle \subset \mathcal{W}$. Dado que $\mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $j_0 = máx\{j_i : i \in \{1, \ldots, r\}\}$, entonces

$\{U_{j_1},\ldots,U_{j_r}\} \subset \mathcal{U}_{j_0}$. Así, $\langle U_{j_1},\ldots,U_{j_r}\rangle \in \mathfrak{U}_{j_0}$.
Por lo tanto $\mathfrak{U}$ es base para $F_n(X)$.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Lema 2.16.3, $F_1(X)$ es un $M_1$-espacio. Por el Teorema 1.2.10 y el Lema 2.16.4, $X$ es un $M_1$-espacio.

$\square$

## 2.17. $M_2$-espacios

**Definición 2.17.1.** *Sea $X$ un espacio topológico regular y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{B}$ es **casi-base** en $X$ si, para cada $x \in X$ y $U$ vecindad de $x$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \operatorname{Int}_X(B) \subset B \subset U$.*

**Definición 2.17.2.** *Sean $X$ un espacio topológico regular y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de $X$. Decimos que $\beta$ es una casi-base que preserva $\sigma$-cerradura si es la unión numerable de familias que preservan cerradura y $\mathcal{B}$ es casi-base en $X$ .*

**Definición 2.17.3.** *$X$ un espacio topológico regular es un $M_2$**-espacio** si tiene una casi-base que preserva $\sigma$-cerradura.*

**Lema 2.17.4.** *Sea $X$ un $M_2$-espacio. Si $Y$ es un subespacio en $X$, entonces $Y$ es un $M_2$-espacio.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j$ una casi-base que preserva $\sigma$-cerradura en $X$. Para cada $j \in \mathbb{N}$. Consideremos $\mathcal{B}'_j = \{Y \cap \operatorname{Cl}_X(B) : B \in \mathcal{B}_j\}$. Primero veremos que $\mathcal{B}'_j$ preserva cerradura en $Y$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Sea $j \in \mathbb{N}$, tenemos que probar que para cada $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}'_j$,

$$Y - \bigcup\{\operatorname{Cl}_Y(Y \cap \operatorname{Cl}_X(B)) : B \in \mathcal{A}\} = Y - \operatorname{Cl}_Y(\bigcup\{Y \cap \operatorname{Cl}_X(B) : B \in \mathcal{A}\}).$$

Para probar la primera contención, sea $y \in Y$ tal que $y \notin \bigcup\{\operatorname{Cl}_Y(Y \cap \operatorname{Cl}_X(B)) : B \in \mathcal{A}\}$, entonces para cada $B \in \mathcal{A}$, $y \notin \operatorname{Cl}_Y(Y \cap \operatorname{Cl}_X(B))$. Así, $y \notin Y \cap \operatorname{Cl}_X(B)$ y $y \notin \operatorname{Cl}_X(B)$. Entonces $y \notin \bigcap\{\operatorname{Cl}_X(B) : B \in \mathcal{A}\} = \operatorname{Cl}_Y(\bigcup\{\operatorname{Cl}_X(B) : B \in \mathcal{A}\}$. De aquí $y \notin \operatorname{Cl}_Y(\bigcup\{Y \cap \operatorname{Cl}_X(B) : B \in \mathcal{A}\}$.

Para probar la otra contención, notemos que como$\bigcup\{\mathrm{Cl}_Y(Y \cap \mathrm{Cl}_X(B)) \subset \mathrm{Cl_Y}(\bigcup\{Y \cap \mathrm{Cl}_X(B) : B \in \mathcal{A}\})$, se tiene que:

$$Y - \mathrm{Cl_Y}(\bigcup\{Y \cap \mathrm{Cl}_X(B) : B \in \mathcal{A}\}) \subset Y - \bigcup\{\mathrm{Cl}_Y(Y \cap \mathrm{Cl}_X(B)) : B \in \mathcal{A}\}.$$

Por lo que $\mathcal{B}'_j$ preserva cerradura en $Y$.

Ahora, veremos que $\mathcal{B}' = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}'_j$ es casi-base en $Y$. Sean $y \in Y$, $U$ abierto en $Y$ y $W$ abierto en $X$ tales que $U = W \cap Y$. Como $\mathcal{B}$ es casi-base en $X$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathcal{B}_j$ tales que $y \in \mathrm{Int}_X(B) \subset B \subset \mathrm{Cl_X}(B) \subset W$. De lo anterior y de que $Y \cap \mathrm{Cl_X}(B) \in \mathcal{B}_j$ tenemos que $y \in \mathrm{Int_Y}(Y \cap \mathrm{Cl}_X(B)) \subset Y \cap \mathrm{Cl_X}(B) \subset W \cap Y = U$.

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es casi-base en $Y$ y $Y$ es un $M_2$-espacio. $\square$

En [5, Teorema 7.2] se prueba el siguiente Lema.

**Lema 2.17.5.** *Sea $X$ un $M_2$-espacio. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ es un $M_2$-espacio.*

**Teorema 2.17.6.** *Sea $X$ un espacio regular. Entonces $X$ es un $M_2$-espacio si y sólo si $F_n(X)$ es un $M_2$-espacio.*

*Demostración.*

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j$ una casi-base que preserva $\sigma$-cerradura. Sin pérdida de generalidad supongamos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_{j+1}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathfrak{B}_j = \{\langle B_1, \ldots, B_k\rangle : B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}_j\}$. Por el Teorema 2.1.4, $\mathfrak{B}_j$ preserva cerradura en $F_n(X)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathfrak{B}_j$. Probaremos que $\mathfrak{B}$ es casi-base en $F_n(X)$. Sean $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{W}$ un abierto en $F_n(X)$ tal que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{W}$. Entonces existen $W_1, \ldots, W_s$ abiertos en $X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle W_1, \ldots, W_s\rangle \subset \mathcal{W}$. Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$. Como $x_i \in W_{x_i}$, cada $W_{x_i}$ es abierto en $X$ y $\mathcal{B}$ es casi-base en $X$, existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $B_{j_i} \in \mathcal{B}_{j_i}$ y $x_i \in \mathrm{Int}_X(B_{j_i}) \subset B_{j_i} \subset W_{x_i}$. Por el Lema 1.1.3, se tiene que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle \mathrm{Int}_X(B_{j_1}), \ldots, \mathrm{Int_X(B_{j_r})}\rangle \subset \langle \mathrm{B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}}\rangle \subset \langle \mathrm{W_{x_1}, \ldots, W_{x_r}}\rangle \subset \langle \mathrm{W_1, \ldots, W_s}\rangle \subset \mathcal{W}$. Dado que $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $j_0 = máx\{j_i : i \in \{1, \ldots, r\}\}$, entonces $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}\} \subset \mathcal{B}_{j_0}$. Así, $\langle B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}\rangle \in \mathfrak{B}_{j_0}$. Por lo tanto $\mathfrak{B}$ es $casi-base$ en $F_n(X)$.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Teorema 1.2.10 y el Lema 2.17.4, $F_1(X)$ es un $M_2$- espacio. Del Teorema 1.2.10 y el Lema 2.17.5, $X$ es un $M_2$-espacio. $\square$

## 2.18. Espacios de Nagata

**Definición 2.18.1.** *Un espacio topológico $X$ es un* ***espacio de Nagata*** *si para cada $x \in X$, existen sucesiones de vecindades abiertas de $x$ en $X$, $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{V_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ tales que para todo $x \in X$ se satisface:*
*(1) $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de vecindades de $x$.*
*(2) Si $y \notin U_m(x)$, entonces $V_m(y) \cap V_m(x) = \emptyset$ para cada $y \in X$.*

**Definición 2.18.2.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una familia de parejas ordenadas $(P_1, P_2)$ de subconjuntos de $X$, con $P_1 \subset P_2$ para todo $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ es llamada amortiguada si para cada $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, $\mathrm{Cl}_X(\bigcup\{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathcal{P}'\}) \subset \bigcup\{P_2 : (P_1, P_2) \in \mathcal{P}'\}$.*

**Definición 2.18.3.** *$\mathcal{P}$ es llamada $\sigma$-amortiguada si es la unión numerable de subfamilias amortiguadas.*

**Definición 2.18.4.** *$X$ un espacio topológico regular es un* $M_3$***-espacio*** *si tiene una base por parejas $\sigma$-amortiguada.*

En [5, pg. 107] y [5, Teorema 7.2] se prueban los siguientes dos Lemas.

**Lema 2.18.5.** *Sea $X$ un $M_3$-espacio. Si $Y \subset X$ es un subespacio en $X$, entonces $Y$ es un $M_3$-espacio.*

**Lema 2.18.6.** *Sea $X$ un $M_3$-espacio. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ es un $M_3$-espacio.*

En [5, Teorema 3.1] se prueba el siguiente Lema.

**Lema 2.18.7.** *Sea $X$ un espacio topológico. $X$ es un espacio de Nagata si y sólo si $X$ es primero numerable y un $M_3$-espacio.*

**Teorema 2.18.8.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un espacio de Nagata si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio de Nagata.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Para cada $x \in X$, sean $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{V_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ sucesiones de vecindades abiertas de $x$ en $X$ que satisfacen la Definición 2.18.1. Para probar (1). Sean $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$ y $m \in \mathbb{N}$. Consideremos $\mathcal{U}_m(\{x_1, \ldots, x_r\}) = \langle U_m(x_1), \ldots, U_m(x_r)\rangle$ y $\mathcal{V}_m(\{x_1, \ldots, x_r\}) = \langle V_m(x_1), \ldots, V_m(x_r)\rangle$. Entonces

$$\{\mathcal{U}_m(\{x_1, \ldots, x_r\})\}_{m=1}^{\infty} \text{ y } \{\mathcal{V}_m(\{x_1, \ldots, x_r\})\}_{m=1}^{\infty}$$

son sucesiones de vecindades abiertas de $\{x_1,\dots,x_r\}$ en $F_n(X)$. Por el Lema 2.1.17, $\{\mathcal{U}_m(\{x_1,\dots,x_r\})\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de vencindades de $\{x_1,\dots,x_r\}$ en $F_n(X)$.
Ahora, probaremos (2). Sean $m\in\mathbb{N}$, $\{x_1,\dots,x_r\}$ y $\{y_1,\dots,y_t\}\in F_n(X)$ tales que $\{y_1,\dots,y_t\}\notin\mathcal{U}_m(\{x_1,\dots,x_r\})$. Consideremos los siguientes casos:
**Caso a).** Si $\{y_1,\dots,y_t\}\not\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{r}U_m(x_j)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $y_1\notin U_m(x_j)$ para todo $j\in\{1\dots,r\}$. Como $X$ es un espacio de Nagata para cada $j\in\{1,\dots,r\}$, $V_m(y_1)\cap V_m(x_j)=\emptyset$. Así, $V_m(y_1)\cap(\bigcup\limits_{j=1}^{r}V_m(x_j))=\emptyset$. Sean $U_m=\bigcup\limits_{j=1}^{r}V_m(x_j)$ y $V_m=\bigcup\limits_{l=1}^{t}V_m(y_l)$. Por el Lema 1.1.4, $\mathcal{V}_m(\{y_1,\dots,y_t\})\cap\mathcal{V}_m(\{x_1,\dots,x_r\})=\langle U_m\cap V_m(y_1),\dots,U_m\cap V_m(y_t),V_m\cap V_m(x_1),\dots,V_m\cap V_m(x_r)\rangle$. Dado que $U_m\cap V_m(y_1)=\emptyset$, entonces $\mathcal{V}_m(\{y_1,\dots,y_t\})\cap\mathcal{V}_m(\{x_1,\dots,x_r\})=\emptyset$.
**Caso b).** Si existe $j\in\{1,\dots,r\}$ tal que $\{y_1,\dots,y_t\}\cap U_m(x_j)=\emptyset$. Como $X$ es un espacio de Nagata para cada $l\in\{1,\dots,t\}$, $V_m(y_l)\cap V_m(x_j)=\emptyset$. Entonces $(\bigcup\limits_{l=1}^{t}V_m(y_l))\cap V_m(x_j)=\emptyset$. Sean $U_m=\bigcup\limits_{j=1}^{r}V_m(x_j)$ y $V_m=\bigcup\limits_{l=1}^{t}V_m(y_l)$. Por el lema 1.1.4, $\mathcal{V}_m(\{y_1,\dots,y_t\})\cap\mathcal{V}_m(\{x_1,\dots,x_r\})=\langle U_m\cap V_m(y_1),\dots,U_m\cap V_m(y_t),V_m\cap V_m(x_1),\dots,V_m\cap V_m(x_r)\rangle$. Dado que $V_m\cap U_m(x_j)=\emptyset$, entonces $\mathcal{V}_m(\{y_1,\dots,y_t\})\cap\mathcal{V}_m(\{x_1,\dots,x_r\})=\emptyset$.
De ambos casos concluimos que $F_n(X)$ es un espacio de Nagata.

$\Leftarrow\rfloor$ Usaremos el Lema 2.18.7. Por los Lemas 2.4.2 y 2.18.5, $F_1(X)$ es un espacio de Nagata. Por el Teorema 1.2.10 y los Lemas 2.4.2 y 2.18.6, $X$ es un espacio de Nagata. $\square$

## 2.19. $\gamma$-espacios

**Definición 2.19.1.** *Un espacio topológico $X$ es un $\gamma$-espacio si para cada $x\in X$, existen sucesiones de vecindades abiertas de $x$ en $X$, $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{V_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ tales que para todo $x,y\in X$ se satisface:*
*(a) $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de vecindades abiertas de $x$.*
*(b) Si para cada $m\in\mathbb{N}$, $y\in V_m(x)$ entonces $V_m(y)\subset U_m(x)$.*

**Lema 2.19.2.** *Sea $X$ un $\gamma$-espacio. Si $Y\subset X$ es un subespacio en $X$, entonces $Y$ es un $\gamma$-espacio.*

*Demostración.* Sean $y, w \in Y$ y $\{U_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{V_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$ sucesiones de vecindades en $X$ que satisfacen la Definición 2.19.1. Dado que $\{U_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $X$, $\{U_m(y) \cap Y\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$. Ahora, sean $m \in \mathbb{N}$ y $w \in V_m(y) \cap Y$. Como $V_m(w) \subset U_m(y)$, entonces $V_m(w) \cap Y \subset U_m(y) \cap Y$. Por lo tanto $Y$ es un $\gamma$-espacio.

□

**Lema 2.19.3.** *Sea $X$ un $\gamma$-espacio. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Y$ es un $\gamma$-espacio*

*Demostración.* Sean $y, w \in Y$, tomemos $x_y, x_w \in X$ tales que $f(x_y) = y$ y $f(x_w) = w$. Consideremos $\{U_m(x_y)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{V_m(x_y)\}_{m=1}^{\infty}$ sucesiones de vecindades en $X$ que satisfacen la Definición 2.19.1. Como $f$ es una función abierta entonces $\{f(U_m(x_y))\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{f(V_m(x_y))\}_{m=1}^{\infty}$ son sucesiones de vecindades abiertas en $Y$. Probaremos que $\{f(U_m(x_y))\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$. Tomemos $W$ abierto en $Y$ tal que $y \in W$. Como $f$ es continua, $f^{-1}(W)$ es abierto en $X$. Dado que $\{U_m(x_y)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x_y$ en $X$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_y \in U_m(x_y) \subset f^{-1}(W)$. Entonces $y \in f(U_m(x_y)) \subset W$. De lo anterior $\{f(U_m(x_y))\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $y$ en $Y$.
Para probar (b). Sean $m \in \mathbb{N}$ y $w \in f(V_m(x_y))$. Entonces $x_w \in V_m(x_y)$. Como $V_m(x_w) \subset U_m(x_y)$, $f(V_m(x_w)) \subset f(U_m(x_y))$.
Por lo tanto $Y$ es un $\gamma$-espacio.

□

**Lema 2.19.4.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un $\gamma$-espacio si y sólo si para cada $x \in X$, existen sucesiones de vecindades abiertas de $x$ en $X$, $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{V_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ tal que para todo $x, y \in X$ :*
*1) $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de vecindades abiertas de $x$.*
*2) Si $y \in V_m(x)$ entonces $V_m(y) \subset U_m(x)$.*
*3) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1}(x) \subset U_m(x)$ y $V_{m+1}(x) \subset V_m(x)$.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sean $x \in X$, $\{U'_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{V'_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ sucesiones de vecindades abiertas de $x$ en $X$ que satisfacen la Definición 2.19.1.
Para probar (1). Sean $m \in \mathbb{N}$, $U_m(x) = \bigcap\limits_{j=1}^{m} U'_j(x)$ y $V_m(x) = \bigcap\limits_{j=1}^{m} V'_m(x)$. Claramente $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{V_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ son sucesiones de vecindades abiertas de $x$ en $X$. Como $\{U'_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$, entonces $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ es base local de $x$ en $X$.

Ahora, probaremos (2). Sea $y \in V_m(x)$. Entonces $y \in V'_j(x)$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. De aquí para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $V'_j(y) \subset U'_j(x)$. De lo anterior, $V_m(x) = \bigcap_{j=1}^{m} V'_j(x) \subset \bigcap_{j=1}^{m} U'_j(x) = U_m(x)$.
Finalmente para probar (3), notemos que por construcción $U_{m+1}(x) \subset U_m(x)$ y $V_{m+1}(x) \subset V_m(x)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow\rfloor$ Esta implicación es inmediata de la Definición 2.19.1. $\square$

**Teorema 2.19.5.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es un $\gamma$-espacio si y sólo si $F_n(X)$ es un $\gamma$-espacio.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sean $x \in X$, $\{U_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{V_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ susesiones de vecindades abiertas de $x$ en $X$ que satisfacen la Definición 2.19.1. Probaremos (a). Por el Lema 2.19.4, supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1}(x) \subset U_m(x)$ y $V_{m+1}(x) \subset V_m(x)$.
Sean $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$ y $m \in \mathbb{N}$. Consideremos $\mathcal{U}_m(\{x_1, \ldots, x_r\}) = \langle U_m(x_1), \ldots, U_m(x_r)\rangle$ y $\mathcal{V}_m(\{x_1, \ldots, x_r\}) = \langle V_m(x_1), \ldots, V_m(x_r)\rangle$. Entonces

$$\{\mathcal{U}_m(\{x_1, \ldots, x_r\})\}_{m=1}^{\infty} \text{ y } \{\mathcal{V}_m(\{x_1, \ldots, x_r\})\}_{m=1}^{\infty}$$

son susesiones de vecindades abiertas de $\{x_1, \ldots, x_r\}$ en $F_n(X)$. Por el Lema 2.1.17, $\{\mathcal{U}_m(\{x_1, \ldots, x_r\})\}_{m=1}^{\infty}$ es una base local de vencindades abiertas de $\{x_1, \ldots, x_r\}$ en $F_n(X)$.
Para probar (b). Sean $m \in \mathbb{N}, \{x_1, \ldots, x_r\}$ y $\{y_1, \ldots, y_t\} \in F_n(X)$ tales que $\{y_1, \ldots, y_t\} \in \mathcal{V}_m(\{x_1, \ldots, x_r\})$. Sean $j \in \{1, \ldots, t\}$ y $V_m(x_{j,1}), \ldots, V_m(x_{j,l_j})$ elementos de $\{V_m(x_1), \ldots, V_m(x_r)\}$ que contienen a $y_j$. Entonces como $X$ es un $\gamma - espacio$, $V_m(y_j) \subset \bigcap_{g=1}^{l_j} U_m(x_{j,g})$. Por el Lema 1.1.5, $\mathcal{V}_m(\{y_1, \ldots, y_t\}) = \langle V_m(y_1), \ldots, V_m(y_t)\rangle \subset \langle U_m(x_1), \ldots, U_m(x_r)\rangle = \mathcal{U}_m(\{x_1, \ldots, x_r\})$.
Por lo tanto $F_n(X)$ es un $\gamma - espacio$.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Lema 2.19.2, $F_1(X)$ es un $\gamma$-espacio. Del Teorema 1.2.10 y del Lema 2.19.3, $X$ es un $\gamma - espacio$.

$\square$

## 2.20. $r$-espacios

**Definición 2.20.1.** *Sea $X$ un espacio topológico regular. Un punto $x \in X$ es un $r$-**punto** si tiene una sucesión $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ de vecindades tal que si $x_m \in U_m$, entonces $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ esta contenida en un compacto de $X$.*
*$X$ es un $r$-**espacio** si todos sus puntos son $r$-puntos.*

**Teorema 2.20.2.** *Sean $X$ un espacio regular. Entonces $X$ es un $r$-espacio si y sólo si $F_n(X)$ es un $r$-espacio.*

*Demostración.*
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in F_n(X)$. Como $X$ es un $r-$*espacio*, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, existe una sucesión $\{U_{j,m}\}_{m=1}^{\infty}$ de vecindades de $x_j$ que satisface la Definición 2.20.1. Como $X$ es un espacio de Hausdorff , sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U_{j,m} \cap U_{k,l} = \emptyset$ si $j \neq k$ y $m, l \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{U}_m = \langle U_{1,m}, \ldots, U_{r,m}\rangle$. Entonces $\{\mathcal{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de vecindades de $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\{y_{1,m}, \ldots, y_{t_m,m}\} \in \mathcal{U}_m$. Probaremos que $\{\{y_{1,m}, \ldots, y_{t_m,m}\}\}_{m=1}^{\infty}$ está contenida en un compacto de $F_n(X)$.
Sean $j \in \{1, \ldots, r\}$ y $y_{m,j_1}, \ldots, y_{m,j_{r_{m_j}}}$ elementos de $\{y_{1,m}, \ldots, y_{t_m,m}\}$ tales que $\{y_{m,j_1}, \ldots, y_{m,j_{r_{m_j}}}\} \subset U_{j,m}$. Sea $r_j = max\{r_{m_j} : m \in \mathbb{N}\}$. Si $i \in \{1, \ldots, r_j\}$. Sea

$$y'_{m,j_i} = \begin{cases} y_{m,j_i} & \text{si } 1 \leq i \leq r_{m_j} \\ y_{m,j_{r_{m_j}}} & \text{si } r_{m_j} \leq i \leq r_j \end{cases}$$

Entonces $\{y'_{m,j_1}, \ldots, y'_{m,j_{r_j}}\} \subset U_{j,m}$. Como $X$ es un $r-$*espacio*, para cada $i \in \{1, \ldots, r_j\}$, la sucesión $\{y'_{m,j_i}\}_{m=1}^{\infty}$ está contenida en un compacto $K_{j,i}$ de $X$. Sea $K = \bigcup\limits_{j=1}^{r} \bigcup\limits_{i=1}^{r_j} K_{j,i}$. Entonces $K$ es un compato de $X$ y $F_n(K)$ es un subconjunto compacto de $F_n(X)$ que contiene a $\{\{y_{1,m}, \ldots, y_{m,t_m}\}\}_{m=1}^{\infty}$.
Por lo tanto $F_n(X)$ es un $r-$*espacio.*

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $x \in X$. Entonces $\{x\} \in F_n(X)$. Como $F_n(X)$ es un $r-$*espacio*, existe una sucesión $\{\mathcal{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$ de vecindades de $\{x\}$ que satisface la definición 2.20.1. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $U_m = \bigcup \mathcal{U}_m$. Por el Lema 1.1.6, $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de vecindades de $x$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $x_m \in U_m$. Entonces $\{x_m\} \in \mathcal{U}_m$. Como $F_n(X)$ es un $r-$*espacio*, $\{\{x_m\}\}_{m=1}^{\infty}$ esta contenida en un subconjunto compacto $\mathcal{K}$ de $F_n(X)$. Sea $K = \bigcup \mathcal{K}$. Por el Lema 1.1.9, $K$

es compacto de $X$. Es claro que $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$.
Por lo tanto, $X$ es un $r-espacio$.

□

## 2.21. ccc-espacios

**Definición 2.21.1.** *Un espacio $X$ es un* ***ccc-espacio*** *si cada familia de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos de $X$ es a lo mas numerable.*

**Teorema 2.21.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $F_n(X)$ es un $ccc-espacio$, entonces $X$ es un $ccc-espacio$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ no es un $ccc-espacio$, entonces existe una familia no numerable $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos de $X$. Entonces $\{\langle U_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia no numerable de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos de $F_n(X)$,lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $F_n(X)$ no es un $ccc-espacio$.

□

**Teorema 2.21.3.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $X^n$ es un $ccc-espacio$, entonces $F_n(X)$ es un $ccc-espacio$.*

*Demostración.* Sea $f_n : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$, la función canónica. Por el Teorema 1.2.3, $f_n$ es una función suprayectiva y continua. Si $F_n(X)$ no es un $ccc-espacio$, entonces existe una familia no numerable $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos de $F_n(X)$. Entonces $\{f_n^{-1}\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia no numerable de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos de $X^n$.
Por lo tanto $X^n$ no es un $ccc-espacio$.

□

# Bibliografía

[1] C. Good y S. Macías, *Symmetric Products of Generalized Metric Spaces.*

[2] T. Ganea, *Symmetrische Potenzen topologischer Raume,* Math Nachr., **11**, (1961), 306-308.

[3] F. Casarrubias y A. Tamariz, *Elementos de Topología de Conjuntos,* México,(2012).

[4] T. Mizokami, *On closed subset of* $M_1$*-spaces,* Topology Appl., **141**, (2004), 197-206.

[5] J. G. Ceder, *Some generalizations of metric spaces,* Pacific J. Math., **11**, (1961), 105-125.