



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

BIFURCACIONES EN LA  
DINÁMICA DE LA NEURONA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Licenciado en matemáticas**

PRESENTA:

**Lizbeth Martinez Hernandez**

DIRECTOR DEL TRABAJO:

Dr. Fernando Alberto Ongay Larios

Toluca, México, a 11 de Octubre del 2017



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Estabilidad</b>                                  | <b>1</b>  |
| 1.1. Estabilidad . . . . .                             | 1         |
| 1.2. Linealización . . . . .                           | 4         |
| <b>2. Bifurcaciones</b>                                | <b>11</b> |
| 2.1. Bifurcaciones silla-nodo . . . . .                | 11        |
| 2.2. Bifurcaciones transcricas . . . . .               | 15        |
| 2.3. Bifurcaciones Pitchfork . . . . .                 | 17        |
| 2.3.1. Bifurcación de Pitchfork Supercrítica . . . . . | 17        |
| 2.3.2. Bifurcación de Pitchfork Subcrítica . . . . .   | 18        |
| 2.4. Bifurcaciones en dos dimensiones . . . . .        | 20        |
| 2.5. Bifurcación de Hopf . . . . .                     | 26        |
| 2.5.1. Bifurcación de Hopf supercritica . . . . .      | 26        |
| 2.5.2. Bifurcación de Hopf subcritica . . . . .        | 27        |
| <b>3. Teoría de FitzHugh-Nagumo</b>                    | <b>29</b> |
| 3.1. Modelación . . . . .                              | 29        |
| 3.2. Equilibrios de FHN . . . . .                      | 30        |
| 3.3. Bifurcaciones silla-nodo . . . . .                | 36        |
| 3.4. Bifurcación de Hopf . . . . .                     | 43        |
| <b>4. Conclusiones</b>                                 | <b>49</b> |

# Introducción

El cuerpo humano representa un reto como objeto de estudio para el hombre, el cual lo ha visto desde varias perspectivas como la psicológica, la medica, etc. Este estudio requiere una diversidad de enfoques teóricos y formas de modelar los también diversos subsistemas que componen al cuerpo humano. Sin duda, uno de los más importantes e interesantes es el sistema nervioso y el cerebro en particular; una de las principales unidades de este sistema es la neurona, célula especializada en transmitir las señales nerviosas encargadas de controlar el funcionamiento de todo el organismo, e incluso funciones superiores como es el pensamiento. Larga es la historia en el estudio de estos objetos entre los que destacan los insignes trabajos de Santiago Ramón y Cajal, fisiólogo español que compartió el premio Nobel de Medicina en 1906 con Camillo Golgi «en reconocimiento de su trabajo sobre la estructura del sistema nervioso», por sus investigaciones sobre los mecanismos que gobiernan la morfología y los procesos conectivos de las células nerviosas. Ya dentro del campo de la modelación matemática debemos mencionar a los también ganadores del premio Nobel Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Fielding Huxley, quienes obtuvieron el galardón en 1963 por su trabajo en las bases del potencial de acción, de los nervios, los impulsos eléctricos que habilitan la actividad del organismo y su coordinación del sistema nervioso central. Estos científicos propusieron un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales para modelar la fisiología de la neurona.

En este trabajo nos enfocaremos en las matemáticas aplicadas a la fisiología de la neurona, aún siendo más específicos, en el uso de la teoría de bifurcaciones para describir el comportamiento de la propagación del potencial de acción (impulsos o señales nerviosas) a través del axón. Este proceso se da mediante el intercambio de  $\text{Na}^+$  (sodio) y  $\text{K}^+$  (potasio) a lo largo de la membrana. Cada neurona individual genera un potencial de acción idéntico después de cada estímulo y lo conduce a una velocidad fija a lo largo del

axón. Esta actividad fisiológica dentro del axón tiene un relativamente sencillo modelamiento matemático en el trabajo de FitzHugh-Nagumo, con el que se logró dar un sistema de ecuaciones para comprender la esencia dinámica del fenómeno de excitabilidad de la neurona y mediante el cual se puede dar una clasificación del tipo de bifurcaciones que existen en aquel y una interpretación de éstas.

EL proceso mediante el cual se desarrolla la presente tesis es el siguiente: en el primer capítulo daremos algunas definiciones básicas de sistemas dinámicos como lo son trayectorias, puntos fijos, estabilidad y otros.

En el segundo capítulo nos centraremos en las bifurcaciones, los tipos y sus principales características desde la perspectiva de una y dos dimensiones.

En el tercer capítulo nos adentraremos en las propiedades del sistema de FitzHugh-Nagumo para lo cual es necesario asimilar un poco su modelación. Nuestro objetivo es describir las principales bifurcaciones que están presentes en el sistema, por lo que nos concentraremos en la bifurcación silla-nodo y Hopf, con lo que podremos obtener algunas conclusiones.

# Capítulo 1

## Estabilidad

### 1.1. Estabilidad

En este trabajo se estudian sistemas dinámicos modelados por ecuaciones diferenciales. El ambiente en el que el sistema evoluciona se conoce como *espacio fase*, y la evolución del sistema, a partir de cierta condición inicial, se llama la *trayectoria* del sistema. Para los fines de análisis los conceptos relevantes se definen en esta sección.

**Definición 1** Sea  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial diferencialmente continuo definido en un subconjunto abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  y consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

$(x \in \Omega)$ . Diremos que  $\Omega$  es el **espacio fase** del sistema dinámico definido por el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1), los elementos de  $\Omega$  se llamarán **estados** del sistema.

A partir de cierto estado  $x \in \Omega$ , llamado *estado inicial*, los estados subsecuentes y antecedentes del sistema se encuentra resolviendo el sistema (1.1). La regla es la siguiente: se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales tomando el estado inicial como las condiciones iniciales, en algún tiempo  $t \in \mathbb{R}$ , el estado del sistema dinámico será el valor (vectorial) de la solución en ese  $t$ ; será un estado posterior al estado inicial si  $t > 0$  y anterior si  $t < 0$ . El sistema (1.1) determina la manera en que el sistema evoluciona, por lo que a veces se le llama ley de evolución del sistema.

La evolución del sistema dinámico es considerar todos los estados recorridos en el espacio fase a partir de uno inicial, tanto hacia el futuro como al pasado, en otras palabras las soluciones se visualizan como trayectorias de  $n$  dimensiones en el espacio fase que representan las diversas evoluciones del sistema dinámico.

Para una mejor comprensión de los conceptos iniciaremos con las definiciones formales de los conceptos básicos. Los elementos del espacio fase serán llamados *puntos*.

**Definición 2** Definimos la **órbita** o **trayectoria** del punto  $x \in \Omega$  al conjunto

$$\Phi_x = \{\phi_t(x)\}_{t=-\infty}^{\infty}$$

siendo  $\phi_t(x)$  la solución de  $\dot{x} = f(x)$  en el tiempo  $t$ , tal que en  $t = 0$  pasa por  $x$ , es decir,  $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x))$  y  $\phi_0(x) = x$ . La colección de funciones soluciones  $\phi_t$  se llama el **flujo** del sistema de ecuaciones diferenciales (1.1) o del sistema dinámico determinado por éste.

En este sentido existen tipos especiales de trayectorias como los puntos fijos de los cuales hablaremos a continuación, trayectorias cerradas, también llamadas ciclos, las cuales definiremos mas adelante.

**Definición 3** Un punto  $x$  se denomina **fijo** si cumple que  $f(x) = 0$ . Los puntos que no son puntos fijos se les denomina **ordinarios**.

**Definición 4** Se les llama **ciclos** a aquellas trayectorias que cumplen lo siguiente: existe  $T > 0$  tal que para todo  $t$  se tiene que  $\phi_{t+T}(x) = \phi_t(x)$  (en particular  $\phi_T(x) = \phi_0(x)$ ). Los ciclos en el espacio fase se representan como trayectorias cerradas.

**Definición 5** Se dice que un punto  $y$  es un  $\alpha(\omega)$  punto límite de  $x$  si existe una sucesión de tiempos  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$  teniendo a menos (mas) infinito, cuando  $n \rightarrow \infty$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = y$ . Denotaremos por  $L_\alpha(x)$  el conjunto de  $\alpha$  puntos límite de  $x$  y por  $L_\omega(x)$  el de los  $\omega$  puntos límite. Si  $x$  es un punto fijo, entonces  $\phi_t(x) = x$  para todo  $t$  y  $L_\alpha(x) = L_\omega(x) = \{x\}$ .

**Definición 6** Una órbita cerrada,  $\gamma$ , se dice que es un ciclo límite si  $\gamma$  es un subconjunto de  $L_\alpha(x)$  o  $L_\omega(x)$  para algún  $x$  que no esta en  $\gamma$ .

**Definición 7** Dado el sistema  $\dot{x} = f(x)$  con el flujo  $\phi$ , se dice que un subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  es un conjunto **positivamente invariante** para el sistema si, para cada punto  $x_0$  de  $D$ ,  $\phi_t(x_0) \in D$  para todo  $t$  positivo. Se denomina conjunto **negativamente invariante** cuando es para todo  $t$  negativo.

Además de la clasificación que se les da a los puntos, también existen ciertas características en los puntos fijos como lo son el ser estables e inestables cuyas definiciones derivan de la estabilidad de Liapunov.

**Definición 8** (Estabilidad de Liapunov) Sea  $\gamma$  una órbita de un sistema dinámico ( $\gamma \subset \Omega$ ),  $\gamma$  es **estable** si para toda vecindad  $N$  de  $\alpha$  existe otra vecindad  $N'$  de  $\gamma$  tal que :

si  $x \in N'$  entonces  $\Phi_x \subset N$ . Es **inestable** si no es estable.

Es **asintóticamente estable** si es estable y existe otra vecindad  $V$  (posiblemente la misma  $N'$ ) tal que si  $x \in V$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(x), \gamma) = 0$ .

El retrato fase es la representación de todas las trayectorias en el espacio fase, en una o dos dimensiones se puede representar gráficamente y es una herramienta útil para visualizar las diferentes formas posibles de evolucionar de un sistema dinámico. La definición formal se da a continuación.

**Definición 9** El **retrato fase** de un sistema dinámico es la colección de todas las órbitas:

$$\{\Phi_x\}_{x \in \Omega}$$

**Definición 10** Un sistema dinámico  $(\Omega, \phi_t)$  es **topológicamente equivalente** a el sistema dinámico  $(\tilde{\Omega}, \psi_t)$  si existe un homeomorfismo  $h : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  y una función continua, biyectiva y estrictamente creciente  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\tau(0) = 0$ , tal que para todas  $x \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}$  se cumple que  $h(\phi_t(x)) = \psi_{\tau(t)}(h(x))$ .

El análisis del problema de estabilidad recibió un sólido fundamento gracias a los trabajos del físico-matemático Alexander Liapunov con las llamadas *funciones de Liapunov* (1857-1918), brevemente describimos los resultados fundamentales de la teoría de Liapunov.

**Definición 11** Una función valuada en los reales  $V : N \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $N$  es una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^n$ , se dice ser **definida positiva(negativa)** en  $N$  si  $V(x) > 0$  ( $V(x) < 0$ ) para  $x \in N$  y  $V(0) = 0$ .

**Definición 12** Una función valuada en los reales  $V : N \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $N$  es una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^2$ , se dice ser **semidefinida positiva (negativa)** en  $N$  si  $V(x) \geq 0$  ( $V(x) \leq 0$ ) para  $x \in N$  y  $V(0) = 0$ .

**Definición 13** La derivada de  $V : N \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a lo largo de una curva parametrizada por  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  están definidos por

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_n} \dot{x}_n$$

**Teorema 14** (de Liapunov). Supongamos el sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  tiene un punto fijo en el origen. Si existe una función valuada en los reales  $V$  en una vecindad  $N$  del origen tal que:

**Definición 15** 1.-Las derivadas parciales  $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$  existen y son continuas.

2.- $V$  es definida positiva.

3.- $\dot{V}$  es semidefinida negativa, entonces el origen es un punto fijo estable de el sistema.

Si 3 es reemplazada por una condición mas fuerte

3'.- $\dot{V}$  es definida negativa entonces el origen es un punto fijo asintóticamente estable.

## 1.2. Linealización

La linealización es una herramienta utilísima en el estudio de la dinámica cerca de puntos de equilibrio. Aunque su alcance es solamente local, su importancia no puede ser despreciada sobre todo en los puntos fijos llamados *hiperbólicos*.

**Definición 16** Si  $f(x_0) = 0$  y la matriz  $A = Df(x_0)$  no tiene valor propio con parte real cero se dice que  $x_0$  es un punto fijo **hiperbólico** del sistema (1.1).

Para analizar un sistema no lineal como

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

lo primero es determinar los puntos de equilibrio de (1.2), es decir los puntos fijos, y describir el comportamiento de (1.2) cerca de ellos. En lo que sigue se

muestra que el comportamiento local del sistema no lineal (1.2) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$  está cualitativamente determinado por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \quad (1.3)$$

con la matriz  $A = Df(x_0)$ , cerca el origen. La función lineal  $Ax = Df(x_0)x$  es llamada la *parte lineal* de  $f$  en  $x_0$  y la ecuación (1.3) la *linealización* de (1.2) en o alrededor de  $x_0$ .

**Teorema 17 (Harman-Gobman)** *Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen. Sea  $f \in C^1(\Omega)$  y  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (1.2). Supongamos que  $f(0) = 0$  y que la matriz  $A = Df(0)$  no tiene valor propio con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo  $H$  de un conjunto abierto  $U$  que contiene el origen en un conjunto abierto  $V$  que contiene el origen de tal manera que para cada  $x_0 \in U$ , existe un intervalo abierto  $I_0 \subset \mathbb{R}$  que contiene a cero tal que para todo  $x_0 \in U$  y  $t \in I_0$ .*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$$

es decir,  $H$  mapea las trayectorias de (1.2) cerca del origen en las trayectorias de (1.3) cerca del origen y preserva la parametrización por el tiempo.

### Estructura de la demostración.

Consideremos el sistema no lineal (1.2) con  $f \in C^1(E)$ ,  $f(0)$  y  $A = Df(0)$ .

1.-Supongamos que la matriz  $A$  es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Donde los eigenvalores de  $P$  tienen parte real negativa y los eigenvalores de  $Q$  tienen parte real positiva.

2.- Sea  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (1.4) y su solución

$$x(t, x_0) = \phi_t(x_0) \begin{vmatrix} y(t, y_0, z_0) \\ z(t, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

donde

$$x_0 = \begin{vmatrix} y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$y_0 \in E^s$ , el subespacio estable  $A$  y  $z_0 \in E^u$ , el subespacio inestable de  $A$ .

3.-Defina las funciones

$$\begin{aligned} Y(y_0, z_0) &= y(1, y_0, z_0) - e^P y_0, \\ Z(y_0, z_0) &= z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0. \end{aligned}$$

$b = \|B\| < 1$  y  $c = \|C^{-1}\| < 1$ .

4.-Sean  $B = e^P$  y  $C = e^Q$ . Para  $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  se definen las transformaciones

$$L(y, z) = \begin{pmatrix} By \\ Cz \end{pmatrix}$$

y

$$T(y, z) = \begin{pmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{pmatrix}$$

es decir  $L(x) = e^A x$  y localmente  $T(x) = \phi_1(x)$ .

**Lema 18** *Existe un homeomorfismo  $H$  de un conjunto abierto  $U$  que contiene al origen en un conjunto abierto  $V$  que contiene al origen de tal manera que*

$$H \circ T = L \circ H$$

Se demuestra este lema usando el método de aproximaciones sucesivas. Para  $x \in \mathbb{R}^n$ , sea

$$H(x) = \begin{pmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(x, z) \end{pmatrix}$$

Entonces  $H \circ T = L \circ H$  es equivalente al par de las ecuaciones

$$\begin{aligned} B\Phi(y, z) &= \Phi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ C\Psi(y, z) &= \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Definimos las aproximaciones sucesivas para la segunda ecuación

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, z) &= z \\ \Psi_{k+1}(y, z) &= C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \end{aligned} \quad (1.6)$$

y para la primera ecuación tomamos en cuenta esta

$$B^{-1}\Phi(y, z) = \Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z)) \quad (1.7)$$

donde las funciones  $Y_1$  y  $Z_1$  se definen por la inversa de  $T$  como sigue:

$$T^{-1}(y, z) = \begin{pmatrix} B^{-1}y + Y_1(y, z) \\ C^{-1}z + Z_1(y, z) \end{pmatrix}$$

Con lo que sus aproximaciones sucesivas son

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) &= y \\ \Phi_{k+1} &= \Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z)). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por lo tanto obtenemos la función continua

$$H(y, z) = \begin{vmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{vmatrix}$$

y se puede probar que  $H$  es un homomorfismo  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ .

5.-Ahora sea  $H_0$  el homomorfismo definido anteriormente y sean  $L^t$  y  $T^t$  sean las familias de un solo parámetro de transformaciones definidas por

$$L^t(x_0) = e^{At}x_0$$

y

$$T^t(x_0) = \Phi_1(x_0).$$

Definimos

$$H = \int_0^1 L^{-s} H \circ T^s ds$$

Por lo tanto  $H \circ T^t = L^t H$  o equivalentemente

$$H \circ \phi_t = e^{At} H(x_0)$$

y nuevamente se puede demostrar que  $H$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$ . Esto completa el bosquejo de la prueba del teorema de Hartman-Grobman, los detalles se pueden consultar en [Perko] o, más completamente en el clásico libro de P. Hartman.

Si todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real no positiva y todos aquellos con parte real cero son simples, entonces la solución  $y = 0$  de  $y' = Ay$  es estable. Si (y solo si) todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real negativa, la solución cero de  $y' = Ay$  es asintóticamente estable. Efectivamente en este

caso si  $\Psi(t, t_0)$  denota la matriz fundamental de  $y' = Ay$  que es la identidad en  $t = t_0$ ,  $\Psi(t, t_0) = \exp((t - t_0)A)$ , existen constantes  $K > 0$ ,  $\sigma > 0$  tal que

$$|\Psi(t, t_0)| \leq K \exp(-\sigma(t, t_0)) \quad (t_0 \leq t < \infty) \quad (1.9)$$

con  $\sigma > 0$ , en el caso de que todos los eigenvalores de  $A$  tengan parte real negativa, o  $\sigma = 0$  si hay eigenvalores simples con parte real cero. Si uno o mas eigenvalores de  $A$  tienen parte real positiva la solución cero de  $y' = Ay$  es inestable.

En el caso de que algunos eigenvalores no sean simples cuando tienen parte real cero, suponiendo que los eigenvalores restantes tienen parte real negativa, se requiere especial investigación. Observamos que la estimación (1.9) es sólo el corolario del Teorema 2.10 de [Brauer(referencias)], cuando  $t = 0$  se reemplaza por  $t = t_0$ . El número  $\sigma$  es cualquier número real tal que  $-\sigma$  es mayor que la parte real de cada eigenvalor de  $A$ . Si todos los eigenvalores con la parte real más grande son simples, entonces  $-\sigma$  puede tomarse igual a esta parte real más grande. Para probar la estabilidad de la solución cero en este caso observamos que cada solución de  $y' = Ay$  tiene forma  $\Psi(t) = \Psi(t, t_0)\Psi(t_0)$ . Entonces utilizando (1.9) con  $\sigma = 0$ , tenemos  $|\Psi(t)| \leq K|\Psi(t_0)|$  para  $t_0 \leq t < \infty$

**Lema 19** *Supongamos que  $(\Omega, \phi_t)$ ,  $(\bar{\Omega}, \psi_t)$  son topológicamente equivalentes, y que  $h : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$  es el homeomorfismo de la equivalencia. Si  $x \in \Omega$  es un punto fijo de  $(\Omega, \phi_t)$  estable, entonces  $h(x)$  es también un punto fijo de  $(\bar{\Omega}, \psi_t)$ ; si  $x$  es asintóticamente estable, entonces lo mismo es  $h(x)$ ; si  $x$  es inestable, entonces  $h(x)$  es inestable. Más aún las mismas conclusiones se siguen si se trata de una órbita estable, asintóticamente estable o inestable.*

**Demostración** Si  $x \in \Omega$  es estable entonces para toda vecindad  $V$  de  $x$  existe  $V'$  vecindad de  $x$  tal que si  $y$  esta en  $V'$  entonces para todo  $t > 0$   $\phi_t(y)$  esta en  $V$ . Consideremos las vecindades  $\bar{V} = h(V)$  y  $\bar{V}' = h(V')$  de  $h(x)$  en  $\bar{\Omega}$ , entonces si  $\bar{y}$  esta en  $\bar{V}'$ , existe  $y$  en  $V'$  tal que  $\bar{y} = h(y)$  entonces para todo  $t > 0$   $\phi_t(y)$  esta en  $V$  entonces  $h(\psi_t(y))$  esta en  $h(V) = \bar{V}$ .

Por otro lado

$$h(\phi_t(y)) = \psi_{\tau(t)}(h(y))$$

y si  $t > 0$  entonces  $\tau(t) > 0$  y como  $\tau$  es biyectiva entonces si  $\bar{t} > 0$ , existe  $t > 0$  tal que  $\bar{t} = \tau(t)$ , por lo tanto  $\psi_{\bar{t}}(\bar{y}) = \psi_{\tau(t)}(h(y))$  y, además,  $\psi_{\tau(t)}(h(y)) = h(\phi_t(y))$  y  $h(\phi_t(y))$  esta en  $\bar{V}$  por tanto  $\psi_{\bar{t}}(\bar{y}) \in \bar{V}$ .

Para probar que es asintóticamente estable si  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\phi_t(y)) = x$  entonces

$$\begin{aligned} h(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(y)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} h(\phi_t(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{\tau(t)}(h(y)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{\bar{t}}(\bar{y}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{\bar{t}}(\bar{y}) = h(x) = y$$

**Teorema 20** *Sea  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x_0$  un punto fijo hiperbólico y consideremos la expansión de Taylor de  $f$  alrededor de  $x_0$*

$$f(x) = Df(x_0)(x - x_0) + g(x)$$

donde  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|g(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$ . Si todos los eigenvalores de  $Df(x_0)$  tienen parte real no positiva y todos aquellos con parte real cero son simples, entonces la solución  $x(t) = x_0$  de

$$\dot{x} = f(x)$$

es estable. Si (y solo si) todos los eigenvalores de  $Df(x_0)$  tienen parte real negativa, es asintóticamente estable.

### Demostración

La demostración se basa en el teorema de Harman-Gobman pues éste nos asegura la existencia de un homeomorfismo entre un sistema lineal y el no lineal, así podemos decir que son topológicamente equivalentes de acuerdo a la definición y por el lema anterior obtenemos todas las implicaciones correspondientes, con lo que queda demostrado el teorema.



# Capítulo 2

## Bifurcaciones

Los cambios cualitativos en ecuaciones diferenciales, también llamados bifurcaciones, tienen como una de sus principales características los cambios ocurridos en sus puntos fijos, ya sea que se creen, se destruyan o cambien su estabilidad. Desde el punto de vista de una dimensión, esto resulta ser lo más relevante para determinar el tipo de bifurcación, sin embargo para dos dimensiones interactúan otro tipo de trayectorias como son los ciclos límite. Las bifurcaciones se clasifican de acuerdo con los cambios que ocurren en sus puntos fijos y sus ciclos límite. Notaremos que al referirnos a bifurcaciones, generalmente estamos tomando familias de sistemas de ecuaciones con parámetros  $\dot{x} = f_\mu(x)$  en donde  $\mu$  es un vector de parámetros.

En una dimensión, dos ecuaciones diferenciales de la forma  $\dot{x} = f(x)$  son cualitativamente equivalentes si tienen el mismo número de puntos fijos, de la misma naturaleza y en el mismo orden en la línea fase.

### 2.1. Bifurcaciones silla-nodo

En la familia de sistemas en donde ocurre esta bifurcación, varían dos puntos fijo variando el parámetro moviéndose uno hacia el otro, chocan y finalmente desaparecen. Sus líneas fase cambian de esta manera al variar los parámetros.

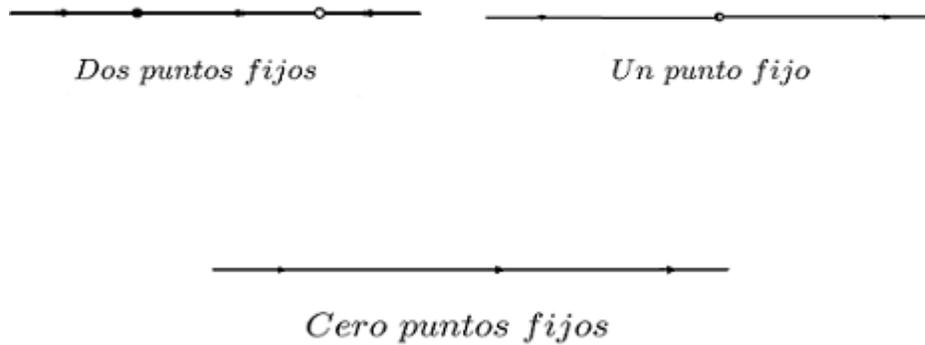
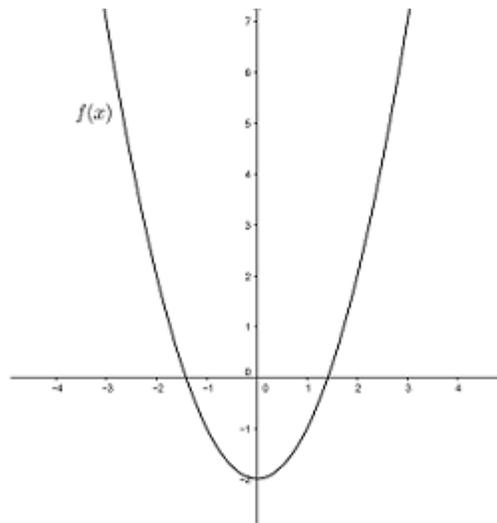


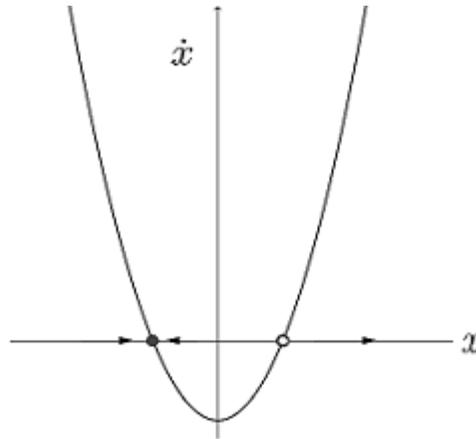
Figura 2.1: En las figuras se muestra las líneas fase del sistema silla-nodo.

Para obtener un ejemplo más concreto de la bifurcación silla-nodo nos apoyaremos de sus características, en principio debe tener dos puntos fijos, notemos que existe un a gran variedad de funciones que cumplen esta condición, así tomaremos una de las funciones mas elementales, por ejemplo  $\dot{x} = f(x) = x^2 - 2$ . Primero graficaremos la función  $f(x) = x^2 - 2$



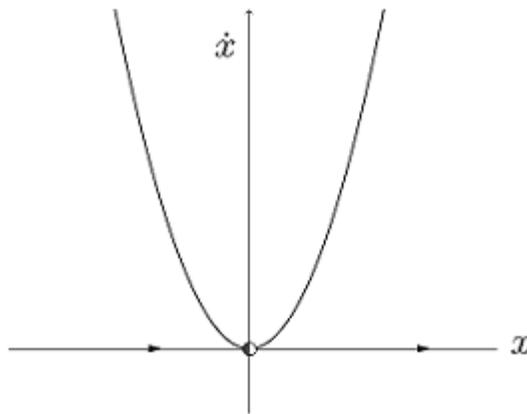
Ahora para poder graficar su línea fase de manera analítica buscaremos sus puntos fijos tales que  $f(x) = x^2 - 2 = 0$  los cuales son  $x = \pm\sqrt{2}$ . Con esto

obtenemos las regiones  $(-\infty, -\sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$  y  $(+\sqrt{2}, \infty)$ ; así tomaremos un punto de cada región e indicaremos con una flecha que indique hacia la derecha si  $f(x) > 0$ , en caso contrario indicara hacia la izquierda como se muestra en la figura. Para futuras referencias indicaremos que un punto es *estable* si las flechas apuntan hacia el y si se repelen sera un punto *inestable*.

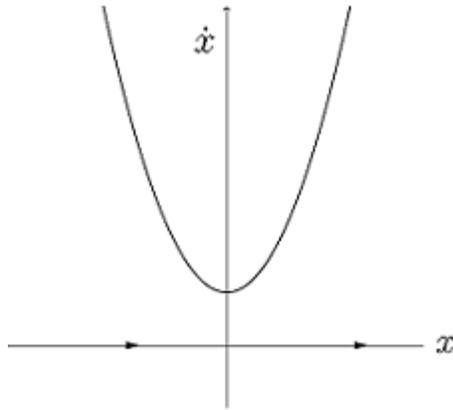


Para una ecuación diferencial de la forma  $\dot{x} = x^2 - \mu$  notemos que para cualquier valor de  $\mu$  diferente de menos dos y menor que cero se mantiene el mismo comportamiento de las trayectorias de la ecuación diferencial.

La siguiente gráfica debe tener solo un punto fijo apoyándonos de la ecuación anterior observemos que al cambiar el valor menos dos por cero la ecuación es  $\dot{x} = x^2$  con esto la gráfica es la siguiente:



Destaquemos que el comportamiento de este tipo de trayectorias ocurre específicamente al mantener el valor cero ya que cualquier otro valor afecta el comportamiento de las trayectorias. Por último no debe tener ningún punto fijo, esto lo podemos obtener al aumentar un número positivo a la ecuación, digamos dos, en cuyo caso la ecuación es  $\dot{x} = x^2 + 2$  y su gráfica es la siguiente:



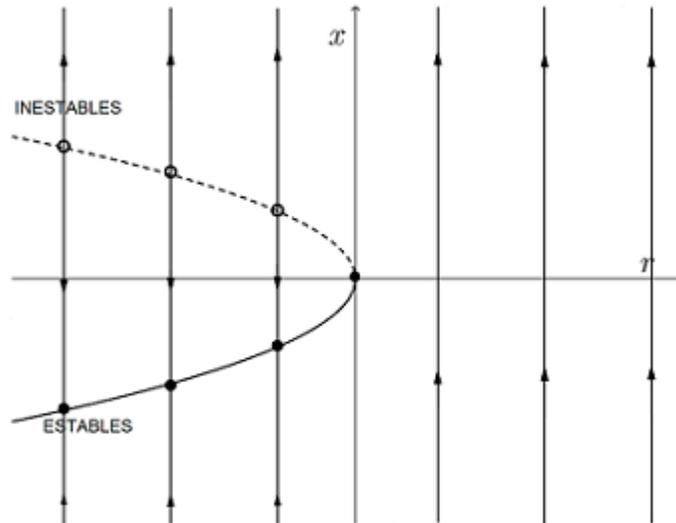
Notemos que al cambiar el valor de dos por un número positivo la ecuación diferencial mantiene sus características. Con lo cual podemos concluir que una ecuación con las características de la bifurcación silla-nodo es:

$$\dot{x} = x^2 + \mu$$

Siendo  $\mu$  el parámetro, que puede ser positivo, negativo o cero.

La primera figura representa el parámetro  $\mu$  negativo, en este tenemos dos puntos fijos el primero es estable y el segundo es inestable, para la segunda gráfica cuyo valor de  $\mu = 0$ , encontramos que solo existe un punto fijo el cual es semi-estable y la última con el parámetro  $\mu$  positivo, no tenemos ningún punto fijo.

El diagrama de bifurcaciones silla nodo es el siguiente:



En el podemos ver plasmados los cambios que surgen al variar el parámetro con las características ya mencionadas.

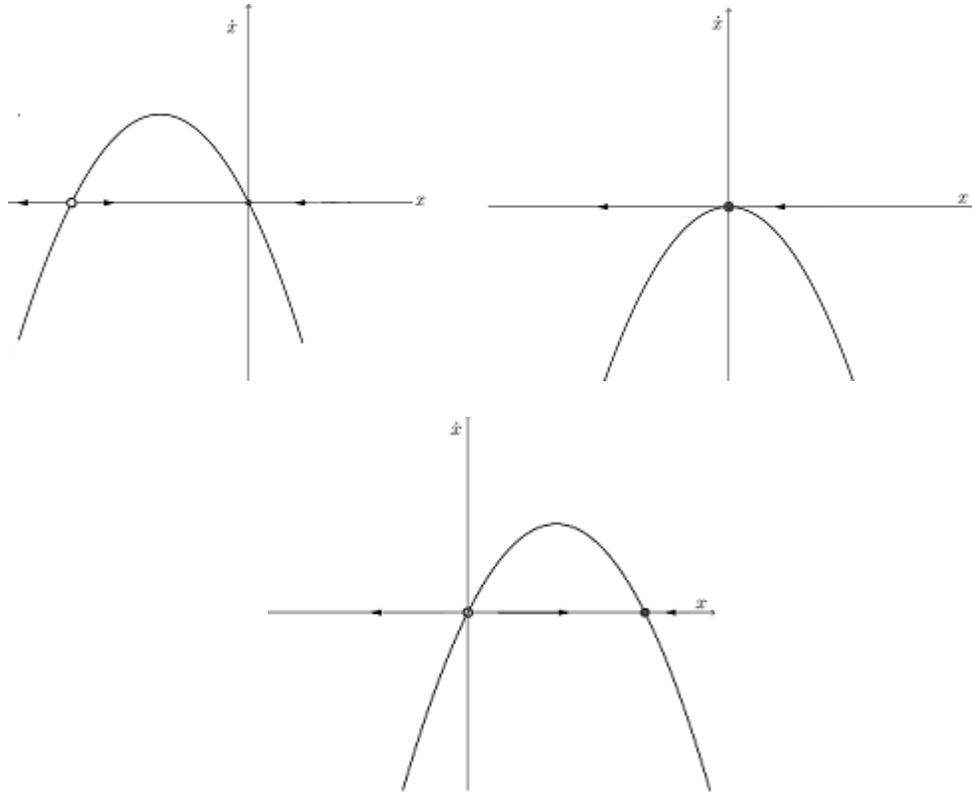
## 2.2. Bifurcaciones transcritis

La bifurcación transcrito es caracterizada por iniciar con dos puntos fijos uno estable y otro inestable, chocar el uno contra el otro y finalmente regresar a tener dos puntos fijos pero con estabilidades contrarias es decir el estable se convierte en inestable y viceversa.

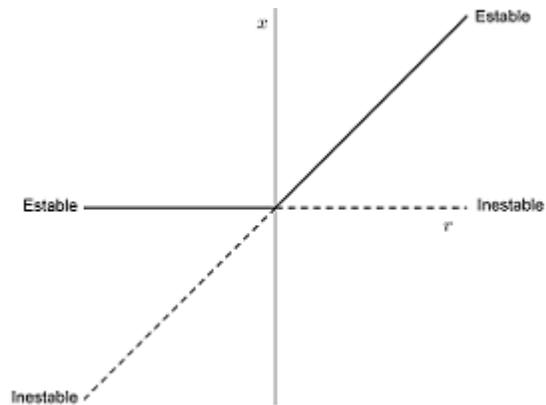
El ejemplo mas representativo de este tipo de bifurcaciones es el siguiente:

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

El comportamiento de este sistema se muestra a continuación



Para  $\mu < 0$  tenemos dos puntos fijos, uno inestable y el otro estable, cuando  $\mu = 0$  los puntos anteriores coalicionan y finalmente cuando  $\mu > 0$  volvemos a obtener dos puntos fijos con la característica ya mencionada. Así tenemos el siguiente diagrama de bifurcaciones



## 2.3. Bifurcaciones Pitchfork

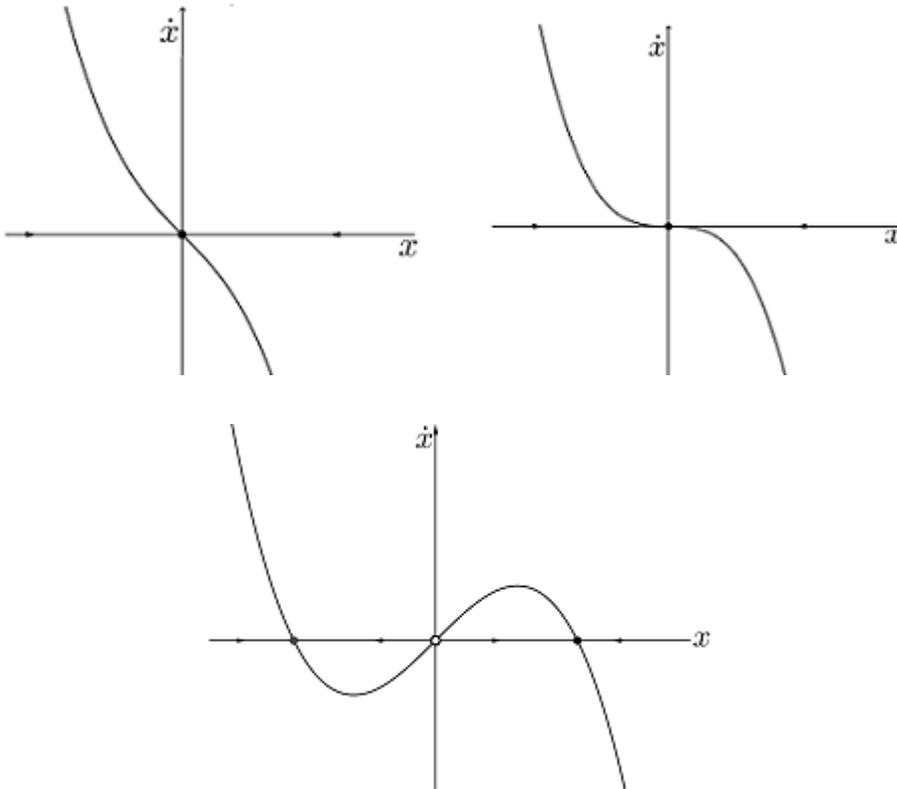
Este tipo de bifurcación se divide en dos tipos: supercrítica y subcrítica.

### 2.3.1. Bifurcación de Pitchfork Supercrítica

La bifurcación de Pitchfork supercrítica es caracterizada por iniciar con un punto fijo estable, mantenerse hasta que el parámetro alcanza un valor positivo con lo cual aparecen tres puntos fijos los cuales tienen un comportamiento estable, inestable y el tercero estable. La forma normal de la bifurcación de Pitchfork supercrítica es la siguiente:

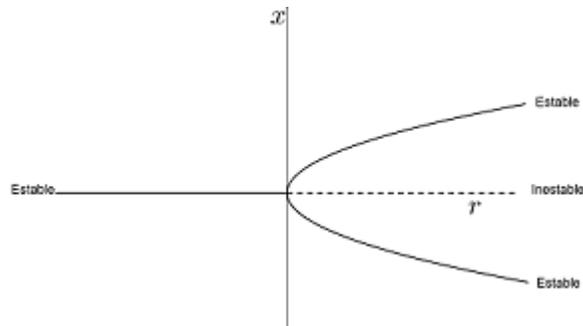
$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

Al variar  $\mu$  tenemos las siguientes gráficas.



Cuando  $\mu < 0$  tenemos solo un punto fijo estable, a medida que  $\mu$  crece hasta llegar a  $\mu = 0$  seguimos teniendo un solo punto fijo estable y al llegar a una  $\mu > 0$  tenemos tres puntos fijos el primero estable, el segundo inestable y el tercero estable. Como se muestra en la gráfica tenemos el mismo número de puntos fijos de un lado del plano como del otro de ahí que se diga que existe simetría en este tipo de bifurcaciones.

El siguiente es el diagrama de bifurcaciones de estas bifurcaciones:

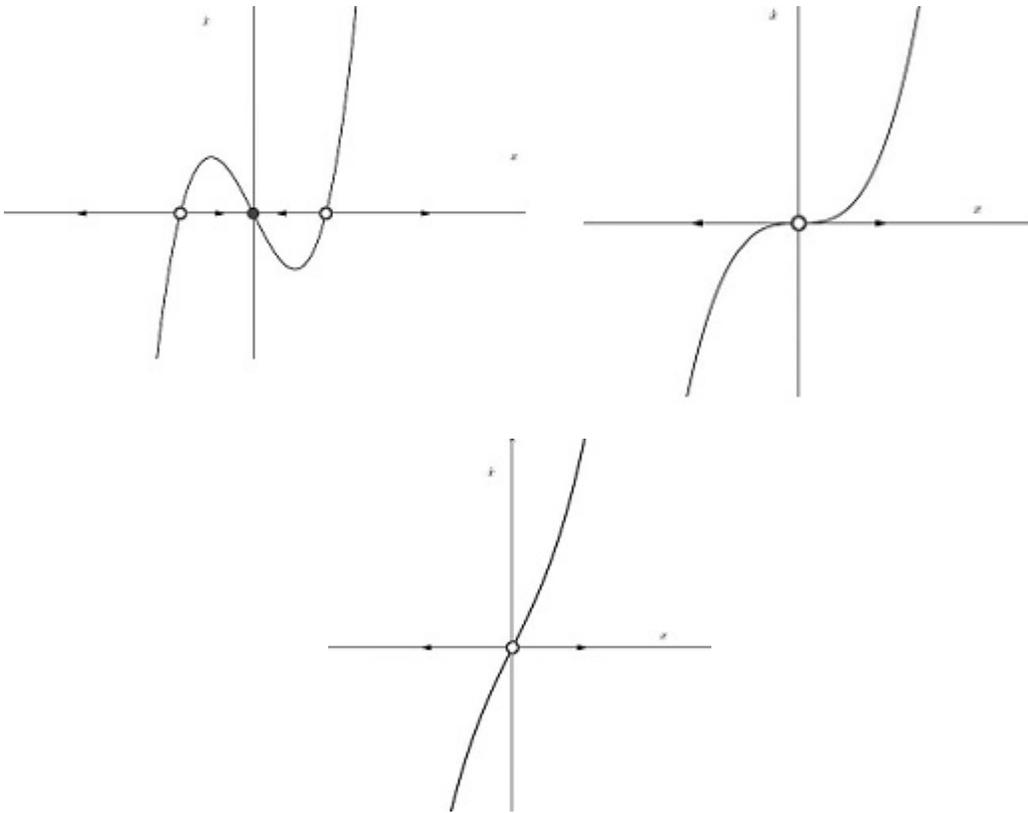


### 2.3.2. Bifurcación de Pitchfork Subcrítica

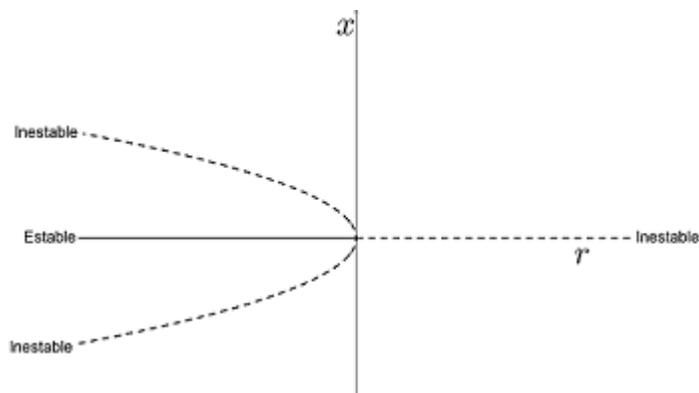
En este caso la bifurcación tiene el siguiente comportamiento: inicia con tres puntos fijos con el orden inestable, estable e inestable con el crecimiento del parámetro se encuentra solo un punto fijo el cual es inestable y así se mantiene conforme crece el parámetro.

El sistema mas representativo de este tipo de bifurcaciones es el siguiente:

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$



Quando  $\mu < 0$  tenemos tres puntos fijos en el siguiente orden inestable, estable, inestable, con  $\mu$  creciendo hasta llegar a  $\mu = 0$  obtenemos un punto fijo inestable el cual se mantiene para  $\mu > 0$ . El siguiente es el diagrama de bifurcaciones.



## 2.4. Bifurcaciones en dos dimensiones

En cuanto a dos dimensiones el comportamiento en algunos casos es en esencia el mismo que en una dimensión, la diferencia surge al integrar una nueva ecuación, pero desde un punto de vista más abstracto se puede estudiar el problema de las bifurcaciones en forma general. En esta sección describiremos el método general y mostraremos ejemplos de bifurcaciones silla-nodo, transcritical y Pitchfork, en la siguiente sección estudiaremos la bifurcación de Hopf

Para dar un tratamiento más o menos unificado de las bifurcaciones en una y dos dimensiones, consideremos una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales  $\dot{x} = f(x, \mu)$  que dependen de manera continua del parámetro  $\mu$ . Si para algún parámetro  $\mu_0$  el sistema  $\dot{x} = f(x, \mu_0)$  tiene un punto fijo hiperbólico, entonces para una vecindad de  $\mu_0$ , en el espacio de parámetros, el sistema  $\dot{x} = f(x, \mu)$  tiene también un punto fijo del mismo tipo, es decir, son localmente equivalentes en vecindades de los puntos fijos. Por lo tanto cambios cualitativos en la dinámica del punto fijo, es decir bifurcaciones, ocurren solamente en puntos fijos no hiperbólicos (referencia [5]).

Mientras que el comportamiento cualitativo en puntos fijos hiperbólicos es (localmente) igual al de su linealización, en puntos no hiperbólicos depende de los términos no lineales. Como sabemos que el comportamiento cualitativo se puede preservar ante cambios de variables, la estrategia para analizar las bifurcaciones, al menos teóricamente, es hacer alguno que transforme el sistema a la forma lo más simple posible, esta es la llamada **forma normal**. Los términos no lineales que efectivamente determinan el comportamiento cualitativo forzosamente permanecen ante tales cambios de coordenadas, no pueden ser eliminados; estos términos se llaman **resonantes**.

Concretamente nos referimos a lo siguiente: supongamos que  $\dot{x} = f(x)$  tiene un punto fijo en  $x = 0$  y desarrollamos al campo vectorial  $f$  de acuerdo al Teorema de Taylor en la forma

$$f(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x) + \cdots + h_k(x) + O\left(\|x\|^{k+1}\right)$$

donde  $h_r$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ . Si  $f = (f_1, \dots, f_n)$  se tiene que

$$h_1(x) = Df(0)x$$

y las componentes de  $h_2(x)$  son de la forma

$$x^T H f_i(0) x$$

donde  $Df(0)$  es la matriz jacobiana (matriz de la derivada de  $f$ )

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

y  $H f_i(0)$  la matriz hessiana de  $f_i$

$$H f_i(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix},$$

$1 \leq i \leq n$ .

La forma normal se obtiene mediante un cambio de coordenadas  $y = \Phi(x)$  de tal suerte que se eliminan los términos no lineales hasta cierto grado, es decir el sistema se transforma en un sistema  $\dot{y} = g(y)$  de forma tal que el desarrollo de Taylor de  $g$  es

$$g(y) = Dg(0)y + \tilde{h}_r(y) + O(\|y\|^{r+1}),$$

con  $r \geq 2$  y  $\tilde{h}_r$  un campo vectorial con componentes homogéneas de grado  $r$ , y los términos homogéneos de grado 2 hasta  $r-1$  (si es que hay) son cero de modo que  $\tilde{h}_r$  es el primer término no homogéneo distinto de cero, y que, además, ya no es posible efectuar más cambios de coordenadas que eliminen el grado  $r$ ; estos son los términos resonantes. Todavía es posible eliminar los términos de grado mayor a  $r$ :

$$g(y) = Dg(0)y + \tilde{h}_r(y), \quad (2.1)$$

y podemos asumir, además, que  $Dg(0)$  es la forma canónica real de Jordan de  $Df(0)$  (ver proposición 2.3.1 referencia [2]). La expresión (2.1) es llamada la forma normal del campo vectorial  $f$ .

En una dimensión el punto fijo es no hiperbólico si y sólo si  $f'(0) = 0$ , de modo que las formas normales son

$$\begin{aligned} g(y) &= y^2 + O(y^3), \\ g(y) &= y^3 + O(y^4), \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Observemos que en las bifurcaciones descritas en la sección anterior, las bifurcaciones silla-nodo y transcítica son del primer tipo, es decir, con término resonante de grado dos y la pitchfork del segundo.

En dimensiones mayores a 1 la no hiperbolicidad puede ser de alguno de los siguientes tipos:

1.  $\text{Det}(Df(0)) = 0, \text{Traza}(Df(0)) \neq 0,$
2.  $\text{Det}(Df(0)) > 0, \text{Traza}(Df(0)) = 0,$
3.  $\text{Det}(Df(0)) = \text{Traza}(Df(0)) = 0,$
4.  $Df(0) = 0$  (matriz cero)

En este trabajo se tomarán en cuenta únicamente los tipos de no hiperbolicidad 1. y 2. y términos resonantes de grado a lo más tres, que son los de interés para el sistema FHN, los otros casos presentan grados de complejidad no abordados en el presente estudio y se remite a la bibliografía especializada: Referencia [2], [5].

Bajo este acuerdo, en dimensión dos podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la parte lineal del campo vectorial correspondiente a un punto fijo no hiperbólico para el tipo 1. es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

y en el tipo 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto para una familia  $\dot{x} = f(x, \mu)$  dependiente de un parámetro, y con punto fijo en  $x = 0$ , típicamente tendremos para el tipo 1.

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

y para el tipo 2.

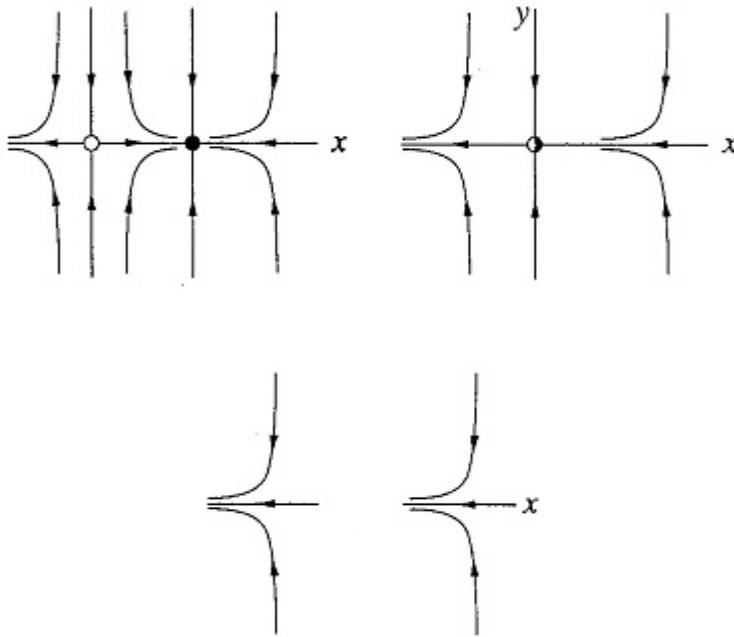
$$Df(0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Un ejemplo de la bifurcación silla-nodo es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu + x^2 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Este ejemplo es del tipo 1 con  $\mu$  el parámetro de la familia de sistemas. Ahora bien, sus puntos fijos  $(x^*, y^*)$  se ven así: para  $\mu > 0$ , tenemos dos puntos fijos los cuales son  $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$  y  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ , en el caso de  $\mu = 0$  solo tenemos un punto fijo  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ , y si  $\mu < 0$  no tenemos ningún punto fijo.

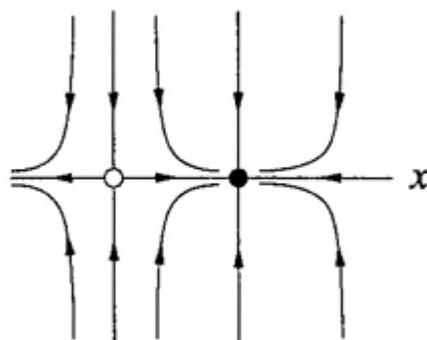
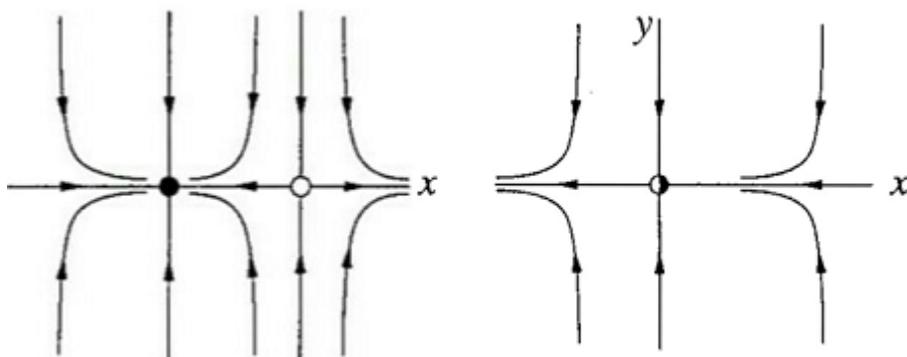
Los planos fase de este tipo de bifurcaciones se muestran a continuación.



Bifurcación transcritical:

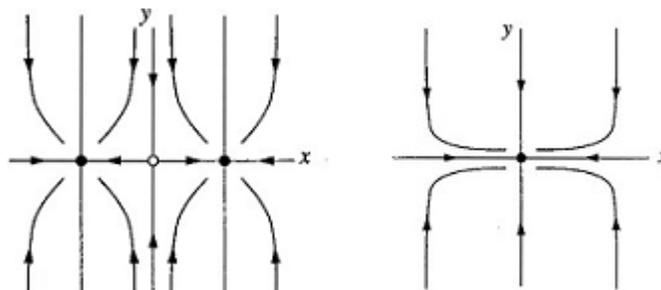
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

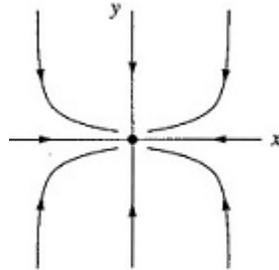
cuyos puntos fijos con  $\mu > 0$  son  $(x^*, y^*) = (\mu, 0)$  y  $(0, 0)$ , si  $\mu = 0$  solo tenemos el punto fijo  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  y con  $\mu < 0$  son  $(x^*, y^*) = (\mu, 0)$  y  $(0, 0)$ . El comportamiento de este sistema es el siguiente:



$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Para este sistema los puntos fijos para  $\mu > 0$  son  $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$ ,  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  y  $(0, 0)$ , en el caso de  $\mu = 0$  es  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  y finalmente para  $\mu < 0$  solo tenemos  $(x^*, y^*) = (0, 0)$

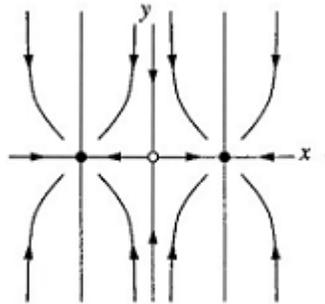
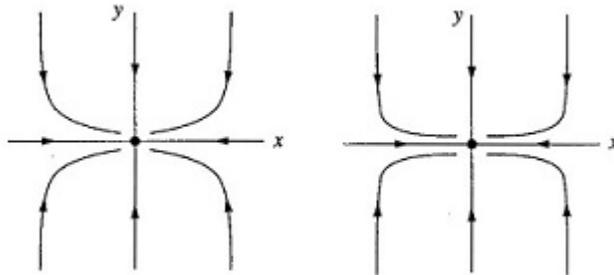




Bifurcación Pitchfork Subcritica:

Para este sistema los puntos fijos para  $\mu > 0$  solo tenemos  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ , en el caso de  $\mu = 0$  es  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  y finalmente para  $\mu < 0$  son  $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$ ,  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  y  $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + x^3 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$



## 2.5. Bifurcación de Hopf

La bifurcación de Hopf es una bifurcación del tipo 2 con términos resonantes de orden tres, esta se caracteriza por la inversión en el tipo de estabilidad de un punto fijo y la emergencia o desaparición de un ciclo límite alrededor de él. Diremos que una no hiperbolicidad del tipo 2 de la sección anterior es una **singularidad de Hopf**. Sea  $X_0$  un campo vectorial con una singularidad de Hopf en el origen. La traza  $TrDX_0(0) = 0$  y la forma normal de  $X_0$  se puede escribir

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2, x_2^2) \left\{ a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.2)$$

con  $\omega = (DetDX_0(x))^{\frac{1}{2}} > 0$  y  $a \neq 0$ . Este campo vectorial es el caso de  $\mu = 0$  de la siguiente familia de sistemas de dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y + (ax - by)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Dependiendo del signo de  $a$  se tienen dos casos de la bifurcación de Hopf. Como es fácil de observar, esta familia es más sencilla de analizar en el plano de coordenadas polares  $(r, \theta)$ .

### 2.5.1. Bifurcación de Hopf supercritica

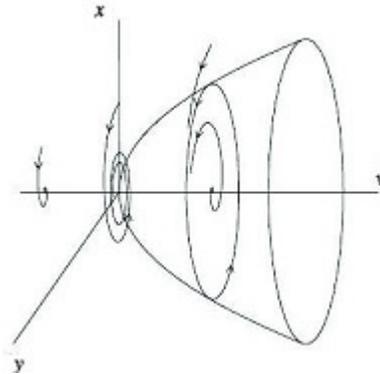
Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y - (x + by)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \omega x_1 + \mu x_2 + (bx - y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

el cual podemos escribir en coordenadas polares,  $\dot{x} = r \cos \theta$ ,  $\dot{y} = r \sin \theta$ , como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2. \end{aligned}$$

Desde esta perspectiva,  $\mu$  controla estabilidad del origen,  $\omega$  la frecuencia de oscilación infinitesimal y  $b$  determina la dependencia de la frecuencia de oscilación para oscilaciones de amplitud grande. Con  $\mu > 0$  hay un ciclo límite estable, que rodea un foco hiperbólico e inestable en el origen. En  $\mu = 0$  el origen es asintóticamente estable pero no hiperbólico. Ahora para  $\mu < 0$  tenemos un foco hiperbólico, estable en el origen.



### 2.5.2. Bifurcación de Hopf subcrítica

Para este caso tenemos el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \mu x - \omega y + (x - by)(x^2 + y^2)$$

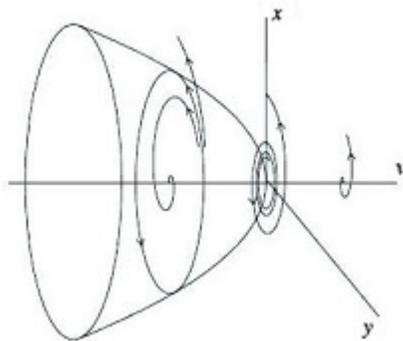
$$\dot{y} = \omega x + \mu y + (bx + y)(x^2 + y^2).$$

En coordenadas polares

$$\dot{r} = \mu r + r^3$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2$$

En este caso para  $\mu > 0$  el origen es inestable e hiperbólico,  $\mu = 0$  el origen es un foco inestable,  $\mu < 0$  hay un ciclo límite inestable y un punto fijo estable en el origen.



Enunciamos sin demostración el teorema fundamental de la bifurcación de Hopf (referencia [2]).

**Teorema 21** *Bifurcación de Hopf*

Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \alpha)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha)$$

con punto fijo en  $(0, 0)$  para todo  $\alpha$  en  $A \in \mathbb{R}$  supongamos que los eigenvalores de  $\lambda_1(\alpha)$  y  $\lambda_2(\alpha)$  del sistema lineal en el origen son imaginarios puros cuando  $\alpha = \alpha^*$ . Si la parte real de los eigenvalores  $Re(\lambda_1(\alpha))$  ( $= Re(\lambda_2(\alpha))$ ) satisface  $\frac{d}{d\alpha} Re(\lambda_1(\alpha))_{\alpha=\alpha^*} > 0$  y el origen es asintóticamente estable cuando  $\alpha = \alpha^*$ , entonces

1.- $\alpha = \alpha^*$  es un punto de bifurcación

2.-Para  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha^*)$ , para algún  $\alpha_1 < \alpha^*$ , el origen es un foco estable.

3.-Para  $\alpha \in (\alpha^*, \alpha_2)$ , para algún  $\alpha_2 > \alpha^*$ , el origen es un foco inestable rodeado de un ciclo límite estable, cuyo tamaño incrementa con  $\alpha$

# Capítulo 3

## Teoría de FitzHugh-Nagumo

### 3.1. Modelación

El modelo de Hodgkin y Huxley (HH) consta de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales, las cuales se basan en las principales características de la dinámica y el potencial de acción de la neurona.

Este sistema se representa de la siguiente forma:

$$\frac{-a\partial^2 V}{2R\partial z^2} + C\frac{\partial V}{\partial t} + G_l(V - V_l) + G_{Na}^0 m^3 h(V - V_{Na}) + G_k^0 n^4(V - V_k) = 0 \quad (3.1)$$

en esta ecuación la  $C$  representa la capacidad por unidad de área del axón (de radio  $a$  y resistividad axoplasmática  $R$ ), por otra parte  $m$ ,  $h$  y  $n$  son funciones que dependen del tiempo y del valor del potencial de membrana, a su vez están relacionadas con conductividad de  $Na$  y de  $K$ , la cual se representa con las siguientes equivalencias.

$$G_{Na} = G_{Na}^0 m^3 h \quad \text{y} \quad G_k = G_k^0 n^4 \quad (3.2)$$

Así mismo modelaron la dinámica de las funciones  $n$ ,  $h$  y  $m$ , por medio de las ecuaciones:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \alpha[V](1 - \Theta) - B[V]\Theta \quad (3.3)$$

En donde  $\Theta$  representa a cualquiera de las funciones  $n$ ,  $h$  o  $m$ , y los coeficientes de  $a$  y  $b$  son diferentes para cada función

Este sistema tiene un gran número de variables lo cuál implica una gran complejidad matemática, por otra parte FitzHugh basándose en el trabajo de Van der Pol, propuso simplificar este modelo en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, una lineal y otra cúbica, paralelamente el investigador Jin-ichi Nagumo propuso, un circuito eléctrico no lineal, gobernado por un sistema de dos ecuaciones también semejante a las de van der Pol, al sistema simplificado propuesto por ambos se le conoce como el modelo de FitzHugh-Nagumo el cual dado que es de dos dimensiones representa un gran material para el análisis cualitativo.

El sistema FHN es el siguiente

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= V(x, y) = I - x(x - a)(x - 1) - y \\ \frac{dy}{dt} &= W(x, y) = b(x - \gamma y)\end{aligned}$$

Siendo este un sistema no lineal, con  $I, \gamma \geq 0, b > 0$ , y  $0 < a < 1$  los parámetros. Puntualicemos que esté sistema no representa una detallada realidad biofísica de las células nerviosas.

## 3.2. Equilibrios de FHN

El sistema de (FHN) se define como un sistema de ecuaciones diferenciales autónomos no lineal:

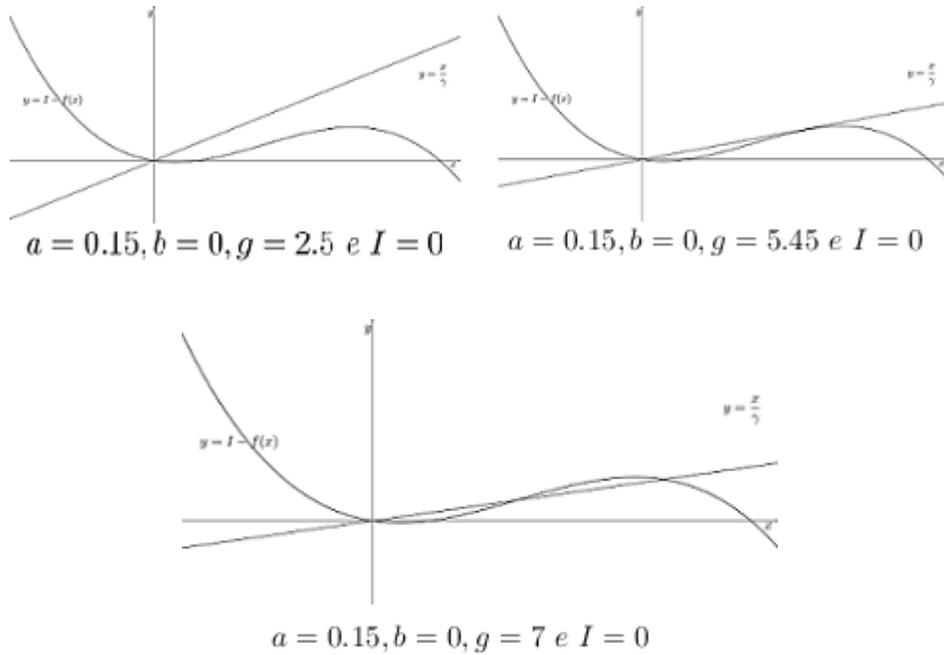
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -f_a(x) - y + I \\ \dot{y} &= b(x - \gamma y)\end{aligned}\tag{3.4}$$

con  $f_a(x) = x(x - a)(x - 1) = x^3 - (a + 1)x^2 + ax$ . El espacio de parámetros está definido por las siguientes desigualdades:

$$0 < a < 1; \quad b > 0; \quad \gamma, I \geq 0$$

Denotaremos  $f_a(x) = f(x)$ , omitiendo el subíndice  $a$ . Las bifurcaciones que analizaremos principalmente serán las bifurcaciones locales, es decir, alrededor de equilibrios. Los equilibrios del sistema son las intersecciones de

las ceroquinas, es decir, las curvas en el plano fase dado por las ecuaciones:  $y = I - f(x)$  y  $y = x/\gamma$ , mostraremos graficamente algunas ceroquinas resultantes además de esto se sigue trivialmente, aunque no por eso menos importante, el siguiente resultado



**Lema 22** *Los equilibrios en los puntos fijos de (3.4) son los puntos  $(x_*, x_*/\gamma)$  con  $x_*$  raíz del polinomio cúbico:*

$$\begin{aligned}
 P_{\gamma, I}(x) &= f(x) + \frac{x}{\gamma} - I \\
 &= x^3 - (a+1)x^2 + \left(a + \frac{1}{\gamma}\right)x - I
 \end{aligned}$$

Ahora analizaremos cuántas raíces y de que naturaleza, puede tener el polinomio  $P_{\gamma, I} = P(x)$ . Supongamos que el polinomio cúbico  $P(x)$  tiene una raíz triple, así

$$P(x) = (x - \alpha)^3$$

entonces

$$x^3 - (a+1)x^2 + \left(a + \frac{1}{\gamma}\right)x - I = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3$$

con lo que  $3\alpha = a + 1$  y esto pasa si y solo si

$$\alpha = \frac{a+1}{3}, \quad a + \frac{1}{\gamma} = \frac{(a+1)^2}{3}$$

si y solo si

$$\gamma = \frac{3}{a^2 - a + 1}$$

y por último  $I = \alpha^3$ . Fácilmente vemos que, si  $0 < a < 1$ , entonces  $a^2 - a + 1 > 0$ . Sean

$$\begin{aligned} c &= \frac{a+1}{3}, & (3.5) \\ \gamma_0 &= \frac{3}{a^2 - a + 1} = \frac{1}{3c^2 - 3c + 1} \\ I_0 &= \left(\frac{a+1}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Vemos que  $c$  es el punto de inflexión de  $f$ , pues  $f''(c) = 6c - 2(a+1) = 0$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} f'(c) &= 3c^2 - 2(a+1)c + a & (3.6) \\ &= 3c^2 - 6c^2 + 3c - 1 \\ &= -3c^2 + 3c - 1 \\ &= -1/\gamma_0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\gamma_0 = -\frac{1}{f'(c)} \quad (3.7)$$

**Proposición 23** *En  $(\gamma_0, I_0)$ , FHN tiene un único equilibrio en el punto de inflexión  $(c, I_0 - f(c)) = \left(c, \frac{c}{\gamma_0}\right)$  de la ceroclina- $x$ .*

**Demostración.** Por (3.6) tenemos que  $\frac{1}{\gamma_0}$  es el valor de la pendiente de  $y = I - f(x)$  en el punto de inflexión en  $\left(c, \frac{c}{\gamma_0}\right)$ . Si  $\gamma = \gamma_0$  e  $I = I_0$ , entonces

la recta tangente en  $\left(c, \frac{c}{\gamma_0}\right)$  es

$$\begin{aligned} y - \frac{c}{\gamma_0} &= \frac{1}{\gamma_0}(x - c) \\ y &= \frac{x}{\gamma_0} \end{aligned}$$

y es por tanto la ceroclina y luego el punto de inflexión es un equilibrio. Veamos que es la única intersección de las ceroclinas, para esto nos apoyaremos de el siguiente lema. ■

**Lema 24** Si  $g(x) = \beta x(\alpha^2 - x^2)$  con  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  entonces el punto de inflexión  $(0, 0)$  además la pendiente en  $(0, 0)$  es  $\beta\alpha^2$  y  $g(x) - \beta\alpha^2 x > 0$  si  $x < 0$ ,  $g(x) - \beta\alpha^2 x < 0$  si  $x > 0$ .

**Demostración.** Claramente  $(0, 0)$  es el punto de inflexión de  $y = g(x)$ . Como  $g(x) = \beta x(\alpha^2 - x^2)$  entonces  $g'(x) = \beta(\alpha^2 - x^2) + \beta x(-2x)$ , así  $g(0) = \beta\alpha^2$  por otro lado si  $x < 0$ ,  $g(x) - \beta\alpha^2 x = \beta\alpha^2 x - \beta x^3 - \beta\alpha^2 x = -\beta x^3 > 0$ , y si  $x > 0$ ,  $g(x) - \beta\alpha^2 x = -\beta x^3 < 0$

Volviendo a la demostración de la proposición, trasladando el punto  $\left(c, \frac{c}{\gamma_0}\right)$  al origen, estamos en la situación del lema con  $\beta\alpha^2 = -1/\gamma_0$ . Con este lema queda demostrado que la intersección de las ceroclinas es un solo punto, por tanto queda demostrada la unicidad. ■

**Lema 25** Si  $\gamma \leq \gamma_0$  entonces el polinomio  $P_{\gamma, I}$  tiene solamente una raíz real. Esta raíz simple si  $\gamma < \gamma_0$ . La única posibilidad de que  $P$  tenga una raíz triple es si  $\gamma = \gamma_0$ ,  $I = I_0$  y en este caso,  $c$  es la raíz triple de  $P$ .

**Demostración.** Supongamos  $\gamma < \gamma_0$ . Como  $c$  es un mínimo de  $f'$ , tenemos  $f'(c) \leq f'(x)$  para toda  $x$ , entonces

$$P'(x) = f'(x) + \frac{1}{\gamma} > f'(x) + \frac{1}{\gamma_0} \geq 0.$$

Supongamos que  $P$  tiene tres raíces reales contando multiplicidades:  $x_0 \leq x_1 \leq x_2$ , entonces

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ P'(x) &= (x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

con lo que

$$P'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \leq 0$$

lo que implica una contradicción, por lo tanto  $P$  tiene una raíz real simple y dos raíces complejas si  $\gamma < \gamma_0$ .

La segunda parte se deduce de la proposición anterior. ■

Por otra parte afirmamos que

$$f'(x) = 0 \text{ si y solo si } x = c \pm A_\infty \text{ donde } A_\infty = (3\gamma_0)^{-1/2}$$

pues  $f'(x) = 0$  si y solo si  $3x^2 - 2(a+1)x + a = 0$ , con lo que tenemos una ecuación de segundo grado la cual resolvemos por formula general, así

$$x = \frac{2(a+1) \pm \sqrt{4(a^2 - a + 1)}}{6} = \frac{a+1}{3} \pm \frac{\sqrt{a^2 - a + 1}}{3}$$

entonces  $x = c \pm \frac{1}{3\gamma_0}$  (esto de (3.5)) por tanto  $x = c \pm A_\infty$  con  $A_\infty = (3\gamma_0)^{-1/2}$

En este sentido donde  $-f(x)$  alcanza su valor mínimo y máximo, respectivamente, corresponden a

$$\begin{aligned} x_{min} &= c - A_\infty \\ x_{max} &= c + A_\infty, \end{aligned}$$

por lo tanto  $f'(x) > 0$  si  $x < x_{min}$  o  $x_{max} < x$  y  $f'(x) < 0$  si  $x_{min} < x < x_{max}$

**Teorema 26** *El sistema de FHN tiene solo un equilibrio para toda  $I > 0$  si y sólo si  $\gamma \leq \gamma_0$ .*

**Demostración.** Por (3.7) si  $\gamma \leq \gamma_0$  el polinomio  $P(x)$  tiene solamente una raíz y por lo tanto FHN tiene un solo equilibrio (lema 25). Probaremos que si  $\gamma > \gamma_0$  entonces, para alguna  $I$ ,  $P(x)$  tiene más de una raíz. Concretamente se mostrará que existe  $I_\gamma > 0$  tal que  $P(x) = P_{\gamma, I}(x)$  tiene una raíz doble  $x_\gamma$  en el intervalo  $(x_{min}, c)$ .

Como  $f'(c) \leq f'(x)$  para toda  $x$  y, como  $-1/\gamma > -1/\gamma_0$ , la ecuación:

$$f'(x) = -\frac{1}{\gamma}$$

tiene dos soluciones, una de ellas menor que  $c$ ; la que llamaremos  $x_\gamma$ . Para toda  $x$  la función  $I(x) = f(x) - f'(x)x$  da el valor de la ordenada al origen

de la recta tangente a  $y = f(x)$  en el punto  $(x, f(x))$ . La derivada de esta función es

$$\begin{aligned} \underline{I}(x) &= f'(x) - f''(x)x - f'(x) \\ &= -f''(x)x \\ &= -(6x - 2(a+1))x \end{aligned}$$

La derivada es positiva para  $0 < x < \frac{a+1}{3} = c$ , por lo tanto  $\underline{I}(x)$  es estrictamente creciente en este intervalo. Se sigue que para toda  $x_{min} < x < c$

$$\underline{I}(x) > \underline{I}(x_{min}) = f(x_{min}) > 0$$

Sea  $\underline{I}_\gamma = \underline{I}(x_\gamma)$ , y como se tiene  $x_{min} < x_\gamma < c$ , por lo tanto  $\underline{I}_\gamma > 0$ . Ahora

$$\begin{aligned} P(x_\gamma) &= f(x_\gamma) + \frac{x_\gamma}{\gamma} - \underline{I}_\gamma \\ &= f(x_\gamma) + \frac{x_\gamma}{\gamma} - (f(x_\gamma) - f'(x_\gamma)x_\gamma) \\ &= x_\gamma \left( \frac{1}{\gamma} + f'(x_\gamma) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto  $(x_\gamma, x_\gamma/\gamma)$  es un punto de equilibrio de FHN.

Como  $P(x) = f'(x) + \frac{1}{\gamma}$ , entonces  $P'(x_\gamma) = 0$  por lo tanto  $x_\gamma$  es una raíz doble de  $P$  y, como  $x_\gamma \neq c$  por lema 1.3 existe otra raíz distinta del polinomio  $P$ .

Con lo que FHN tiene dos equilibrios para  $I = \underline{I}_\gamma$  ■

Por otra parte

$$\begin{aligned} f(x_{min}) &= f(c - A_\infty) \\ &= (c + A_\infty)^3 - 3c(c - A_\infty)^2 + a(c - A_\infty) \\ &= c^3 + A_\infty(3c^2 - a) - A_\infty^3 - c(3c^2 - a) \\ &= c^3 + A_\infty \left( \frac{1}{\gamma_0} \right) - A_\infty^3 - c \left( \frac{1}{\gamma_0} \right) \\ &= I_0 - 3cA_\infty^2 + 2A_\infty^3 \end{aligned}$$

pues  $\gamma_0^{-1} = 3cA_\infty^2$ , así

$$f(x_{min}) = I_0 - 3cA_\infty^2 + 2A_\infty^3$$

La linealización en un equilibrio  $(x^*, x^*/\gamma)$  de FHN es el sistema lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -f'(x^*)x - y \\ \dot{y} &= b(x - \gamma y)\end{aligned}$$

denotaremos a  $DF$  la matriz de la linealización, la cual, en el punto  $(x^*, x^*/\gamma)$ , es:

$$DF = \begin{pmatrix} -f'(x^*) & -1 \\ b & -b\gamma \end{pmatrix}$$

Dos son las bifurcaciones más relevantes que se observan en el sistema FHN: las bifurcaciones silla-nodo y la bifurcación de Hopf, esta última por su implicación en el fenómeno de excitabilidad. Recordemos que la bifurcación silla-nodo consiste en la emergencia de un equilibrio que se separa en dos, una silla y un nodo; la bifurcación de Hopf consiste en un cambio de estabilidad de un equilibrio, de estable a inestable, y la emergencia o desaparición de un ciclo límite. Nosotros estudiaremos las curvas de bifurcaciones silla-nodo y de bifurcaciones de Hopf obteniendo una descripción completa de ellas.

### 3.3. Bifurcaciones silla-nodo

La bifurcación silla-nodo o tangente se dará cuando el polinomio  $P(x) = P_{\gamma, I}(x)$  tenga dos raíces, una simple y otra de multiplicidad dos, que es la que se bifurca. Siendo así, el polinomio se podría factorizar:

$$\begin{aligned}P(x) &= (x - \alpha)(x - \beta)^2 \\ &= x^3 - (2\beta + \alpha)x^2 + (\beta^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha\beta^2\end{aligned}$$

siendo  $\alpha$  la raíz simple y  $\beta$  la doble. El equilibrio  $(\beta, \beta/\gamma)$ , de existir, sería no hiperbólico y es, como mencionamos antes, donde se daría la bifurcación. Bajo el supuesto de que el polinomio se puede factorizar como se indica arriba, las raíces  $\alpha$  y  $\beta$  deben satisfacer las condiciones:

- a)  $I = \alpha\beta^2$ ,
- b)  $a + \frac{1}{\gamma} = \beta^2 + 2\alpha\beta$ ,
- c)  $a + 1 = 2\beta + \alpha$ ,

que resulta de las relaciones entre los coeficientes de  $P$  y sus raíces. De las condiciones b) y c) obtenemos que  $\beta$  debe satisfacer la ecuación cuadrática:

$$\beta^2 - \frac{2}{3}(a + 1)\beta + \frac{a + \frac{1}{\gamma}}{3} = 0,$$

por fórmula general tenemos,

$$\begin{aligned}
 \beta &= c \pm \frac{\sqrt{a^2 - a + 1 - \frac{3}{\gamma}}}{3} \\
 &= c \pm \sqrt{\frac{1}{3\gamma_0} - \frac{1}{3\gamma}} \\
 &= c \pm A(\gamma)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde  $\gamma_0 = \frac{3}{a^2 - a + 1}$  por (3.5), y entonces

$$\alpha = c \mp 2A(\gamma)$$

Esto muestra que  $P$  tendrá únicamente dos raíces reales si y sólo si  $\gamma$  está en el dominio de la función  $A$ . Definimos el par de funciones del parámetro  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 A(\gamma) &= \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma}\right)} \\
 B(\gamma) &= \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma_0} - b\gamma\right)}.
 \end{aligned}$$

El dominio de  $A$  es  $\gamma \geq \gamma_0$ ; el de  $B$  es  $\gamma \leq 1/(b\gamma_0)$ . Ahora bien, de  $P_{\gamma,I}(x) = 0$ , el lugar geométrico de los equilibrios en el plano  $I - x$ , con  $\gamma$  fijo, es la gráfica de

$$\begin{aligned}
 I_{\gamma}(x) &= f(x) + \frac{x}{\gamma} \\
 &= x^3 - (a+1)x^2 + \left(a + \frac{1}{\gamma}\right)x \\
 &= x^3 - 3cx^2 + \left(3c - 1 + \frac{1}{\gamma}\right)x.
 \end{aligned}$$

Sean:

$$\begin{aligned}
 \beta_1(\gamma) &= c + A(\gamma), & \alpha_1(\gamma) &= c - 2A(\gamma) \\
 \beta_2(\gamma) &= c - A(\gamma), & \alpha_2(\gamma) &= c + 2A(\gamma)
 \end{aligned}$$

claramente tenemos :

$$\alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \tag{3.9}$$

siendo iguales únicamente cuando  $\gamma = \gamma_0$ .

**Lema 27** Consideremos  $\gamma$  fija. Para  $\beta = \beta_1(\gamma)$  o  $\beta = \beta_2(\gamma)$ , el punto  $(\beta, \beta/\gamma)$  es un equilibrio no hiperbólico con  $I = I_\gamma(\beta)$ .

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 f'(\beta) &= 3[c \pm A(\gamma)]^2 - 6c[c \pm A(\gamma)] + 3c - 1 \\
 &= 3[c^2 \pm 2cA(\gamma)A(\gamma)]^2 - 6c[c \pm A(\gamma)] + 3c - 1 \\
 &= A(\gamma)^2 - 3c^2 + 3c - 1 \\
 &= 3 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma} \right) \right] - \frac{1}{\gamma_0} \\
 &= -\frac{1}{\gamma}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que la matriz de la linealización en  $(\beta, \beta/\gamma)$  es:

$$DF = \begin{pmatrix} -f'(x^*) & -1 \\ b & -b\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & -1 \\ b & -b\gamma \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

y su determinante

$$\det DF = \frac{-b\gamma}{\gamma} + b = 0.$$

■

Para cada valor de  $\gamma > \gamma_0$  tenemos dos valores de  $I$  para los cuales el sistema de FHN tienen solamente dos equilibrios, a saber:

$$\begin{aligned}
 I_1(\gamma) &= I_\gamma(\beta_1(\gamma)) = \alpha_1(\gamma)\beta_1(\gamma)^2 = I_0 3cA(\gamma)^2 - 2A(\gamma)^3 \\
 I_2(\gamma) &= I_\gamma(\beta_2(\gamma)) = \alpha_2(\gamma)\beta_2(\gamma)^2 = I_0 3cA(\gamma)^2 + 2A(\gamma)^3
 \end{aligned}$$

cumpléndose la relación  $I_1(\gamma) < I_2(\gamma)$  para  $\gamma > \gamma_0$ .

Extendemos continuamente estas funciones a  $\gamma_0$  definiendo  $I_1(\gamma_0) = I_2(\gamma_0) = I_0$ . El siguiente teorema nos dice que la gráfica de estas funciones es la curva silla-nodo.

**Teorema 28** FHN tiene una bifurcación del tipo silla-nodo en  $I = I_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ .

Demostraremos este teorema mostrando que cruzando las curvas  $I = I_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ , hacia la región donde se tiene tres equilibrios, uno de ellos es una silla y los otros nodos y focos para lo cual nos ayudaremos del siguiente teorema

**Teorema 29** Si  $\gamma \leq \gamma_0$ , FHN tiene solamente un equilibrio.

Si  $\gamma > \gamma_0$  entonces FHN tiene:

- a) tres equilibrios distintos si  $I_1(\gamma) < I < I_2(\gamma)$ ,
- b) dos equilibrios distintos si  $I = I_1(\gamma)$  o  $I = I_2(\gamma)$  o
- c) un solo equilibrio si  $I < I_1(\gamma)$  o  $I > I_2(\gamma)$

**Demostración.** La primera parte del teorema pertenece al lema (25) y el inciso b) es por definición de  $I_1$  e  $I_2$ . Si se dan las condiciones del inciso a), denotado por  $P_i(x) = f(x) + \frac{x}{\gamma} - I_i(\gamma)$ , tenemos  $P_1(x) > P(x) > P_2(x)$  para toda  $x$ , como para  $\gamma > \gamma_0$  las raíces de los polinomios  $P_1$  y  $P_2$  satisfacen las desigualdades (3.9):

$$\alpha_1(\gamma) \leq \beta_2(\gamma) \leq \beta_1(\gamma) \leq \alpha_2(\gamma)$$

Entonces

$$P(\alpha_1(\gamma)) < P_1(\alpha_1(\gamma)) = 0$$

$$P(\beta_2(\gamma)) > P_2(\beta_2(\gamma)) = 0$$

$$P(\beta_1(\gamma)) < P_1(\beta_1(\gamma)) = 0$$

$$P(\alpha_2(\gamma)) > P_2(\alpha_2(\gamma)) = 0$$

Por el teorema del valor intermedio  $P(x)$  debe tener tres raíces,  $x_0, x_1, x_2$ , satisfaciendo :

$$\alpha_1(\gamma) < x_0 < \beta_2(\gamma) < x_1 < \beta_1(\gamma) < x_2 < \alpha_2(\gamma)$$

Como las raíces de  $P$  determinan los equilibrios de FHN, el inciso a) queda demostrado.

Finalmente, el inciso c) se sigue de observar, por un lado, que todos los polinomios de  $P(x)$  son traslaciones verticales unos de otros, y por otro lado, que la raíz doble de  $P_1(x)$  esta en el mínimo y la raíz doble de  $P_2(x)$  en el máximo.

Entonces si  $I < I_1(\gamma)$ ,  $P_1(x) < P(x)$  y por lo tanto solamente tiene una raíz simple de  $P_1$ , el otro caso es análogo ■

De acuerdo con este teorema y con la misma notación, las abscisas de los tres equilibrios satisfacen las desigualdades (3.9).

$$\alpha_1(\gamma) < x_0 < \beta_2(\gamma) < x_1 < \beta_1(\gamma) < x_2 < \alpha_2(\gamma)$$

La siguiente proposición nos demuestra que  $(x_1, x_1/\gamma)$  es una silla.

**Proposición 30** Si el equilibrio  $(x^*, x^*/\gamma)$  es tal que:  $\beta_2(\gamma) = c - A(\gamma) < x^* < c + A(\gamma) = \beta_1(\gamma)$ , entonces es una silla.

Para demostrar esta proposición nos ayudaremos de algunos lemas.

**Lema 31**  $I'_\gamma(x) = 0$  si y sólo si  $x = c \pm A(\gamma)$ , lo cual ocurre si y sólo si  $\gamma \geq \gamma_0$ ; además  $I'_\gamma(x) < 0$  si  $c - A(\gamma) < x < c + A(\gamma)$  y, finalmente, para  $\gamma = \gamma_0$ ,  $I'_\gamma(x) = 0$  solamente tiene una solución real:  $x = c$ .

**Demostración.** Esto sucede pues  $I'_\gamma(x) = 3x^2 - 6cx + 3c - 1 + \frac{1}{\gamma} = 0 \iff$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6c \pm \sqrt{36c^2 - (4)(3)(3c - 1 + \frac{1}{\gamma})}}{6} \\ &= c \pm \sqrt{c^2 - c + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\gamma}} \\ &= c \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma} \right)} \\ &= c \pm A(\gamma) \end{aligned}$$

la conclusión del lema se sigue sin dificultad ■

**Lema 32** La función  $A(\gamma)$ , definida para  $\gamma \geq \gamma_0$  tiene las siguientes propiedades

$$a) \lim_{\gamma \rightarrow \infty} A(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3\gamma_0}} = A_\infty$$

$$b) A(\gamma) \geq 0; A(\gamma) = 0 \iff \gamma = \gamma_0,$$

$$c) A(\gamma) < A_\infty \text{ y } x_{min} = c - A_\infty < c - A(\gamma) \hat{a} \leq c + A(\gamma) < c + A_\infty = x_{max},$$

$$d) \frac{dA}{d\gamma} = \frac{1}{6\gamma^2 A(\gamma)}$$

**Demostración.** Las demostraciones de a), b),c) se siguen del hecho de que

$$A(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma} \right)} \text{ y el d) se obtiene solo de un sencillo cálculo ■}$$

Por los lemas anteriores para tales valores de  $x$  se tiene  $I'_\gamma(x) < 0$ . Si el determinante de la linealización en el equilibrio es negativo, entonces éste es una silla, de donde el teorema se sigue del siguiente lema.

**Lema 33**  $\det DF = b\gamma I'_\gamma(x)$

**Demostración.** La linealización en un equilibrio  $(x^*, x^*/\gamma)$  de FHN es el sistema lineal

$$\begin{aligned}x &= -f'(x^*)x - y \\ y &= b(x - \gamma y).\end{aligned}$$

Recordando que

$$DF = \begin{pmatrix} -f'(x) & -1 \\ b & -b\gamma \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

para determinar el tipo de equilibrio se calculan la traza y el determinante

$$\begin{aligned}tr DF &= -f'(x) - b\gamma \\ \det DF &= b(\gamma f'(x) + 1).\end{aligned} \quad (3.12)$$

Como

$$\begin{aligned}\gamma I'_\gamma(x) &= \gamma f'(x) + 1, \\ \det DF &= b(\gamma f'(x) + 1) = b\gamma I'_\gamma(x).\end{aligned}$$

■

Se sigue también de los lemas 31 y 32 que si  $\gamma > \gamma_0$ , existen valores del parámetro  $I$  para los cuales existen dos o tres equilibrios.

Demostraremos ahora que para  $\alpha_1(\gamma) < x^* < \beta_2(\gamma)$ ,  $(x^*, x^*/\gamma)$  es un nodo o un foco, la demostración para el otro equilibrio es completamente semejante. Si  $x^* \leq x_{min}$  entonces  $f'(x^*) \geq 0$  y entonces obviamente  $DF > 0$ , de donde o es un nodo o es un foco, además como  $tr DF \leq -\gamma b < 0$ , este equilibrio es asintóticamente estable, luego es o un nodo o un foco estable

Supongamos ahora  $x_{min} < x^*$ ; como  $f'$  es una función decreciente para  $x \leq c$  y  $\beta_2(\gamma) \leq c$ , y como  $f'(\beta_2(\gamma)) = -1/\gamma$ , entonces

$$0 > f'(x^*) > -1/\gamma,$$

de donde

$$\gamma f'(x^*) + 1 > 0$$

lo cual implica, también en este caso, que el determinante de la matriz de linealización de FHN en  $(x^*, x^*/\gamma)$  es positivo y. por tanto, o un nodo o un foco (que puede o no ser asintóticamente estable). Todo esto demuestra el teorema 28.

El siguiente teorema describe la forma de las gráficas de las funciones  $I_1$  e  $I_2$  que, juntas, forman la curva de bifurcaciones silla-nodo en el plano paramétrico  $\gamma - I$

**Teorema 34** a) Las funciones  $I_1$  e  $I_2$  son estrictamente decrecientes cumpliéndose además:  $I_1(\gamma) \leq I_2(\gamma)$  para toda  $\gamma \geq \gamma_0$

$$b) \lim_{\gamma \rightarrow \infty} I_1(\gamma) = I_0 - 3cA_\infty^2 - 2A_\infty^3$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} I_2(\gamma) = I_0 - 3cA_\infty^2 + 2A_\infty^3 = f(x_{min})$$

$$\text{dónde } a_\infty = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} A(\gamma)$$

c) Sea:

$$\gamma_1 = \frac{4}{(a+1)^2}, \text{ entonces } I_1(\gamma_1) = 0$$

**Demostración.** Por lema (32)

$$\frac{dA}{d\gamma} > 0 \text{ si } \gamma > \gamma_0 \text{ como } \frac{dI_1}{d\gamma} = -6AA'(A+c) < 0 \text{ y}$$

$$\frac{dI_2}{d\gamma} = 6AA'(A-c) = -[6AA'(c-A)] < 0$$

tenemos que  $I_1$  e  $I_2$  son estrictamente decrecientes. La desigualdad es obvia.

Del lema (32)

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} A(\gamma) = A_\infty \text{ por lo tanto}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} I_1(\gamma) = I_0 - 3cA_\infty^2 - 2A_\infty^3$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} I_2(\gamma) = I_0 - 3cA_\infty^2 + 2A_\infty^3 = f(x_{min})$$

(1.16). Si  $I = 0$

$$p(x) = x \left[ x^2 - (a+1)x + \left( a + \frac{1}{\gamma} \right) \right]$$

de donde, si  $(a+1)^2 = 4\left(a + \frac{1}{\gamma}\right)$  el polinomio tendrá una raíz doble. Resolviendo esta última ecuación para  $\gamma$  tenemos:

$\gamma_1 = \frac{4}{(a-1)^2}$ , Se puede comprobar fácilmente que  $\gamma_1 > \gamma_0$ . Como  $I_2(\gamma) \geq f(x_{min}) > 0$  para toda  $\gamma$  debemos de tener que es  $I_1$  quien se hace cero en  $\gamma_1$  en efecto:

$$\begin{aligned}
 A(\gamma_1) &= \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma} \right)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3} \left[ \frac{a^2 - a + 1}{3} - \frac{(a-1)^2}{4} \right]} \\
 &= \frac{a+1}{6}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I_1(\gamma_1) = \frac{(a+1)^3}{27} - \frac{(a+1)^3}{36} - \frac{2(a+1)^3}{216} = 0 \quad \blacksquare$$

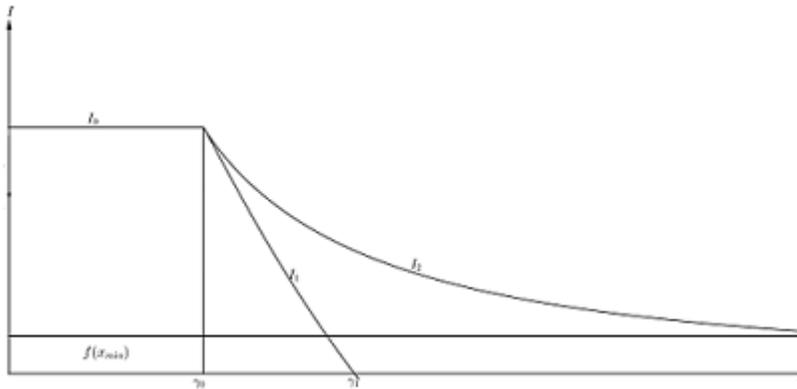


Figura 3.1: En la figura se muestran las funciones  $I_0$ ,  $I_1$  y  $I_2$ .

### 3.4. Bifurcación de Hopf

Esta bifurcación se da cuando, entre otras cosas, la traza de la matriz de linealización es igual a cero:

$$-f'(x) - b\gamma = 0$$

Si esta ecuación no tiene solución, no se da la bifurcación de Hopf y, como  $f'(x) \geq f'(c)$ , se tiene solución si y sólo si  $b\gamma \leq \frac{1}{\gamma_0} = -f'(c)$

Calculamos ahora los valores de estas soluciones usando que  $f'(x) = 3x^2 - 2(a+1)x + a$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) + b\gamma &= 0 \\ 3x^2 - 2(a+1)x + a + b\gamma &= 0 \\ x^2 - 2cx + c - \frac{1}{3} + \frac{b\gamma}{3} &= 0, \end{aligned}$$

recordando que  $c = (a+1)/3$ . Las raíces reales del polinomio cuadrático son:

$$\begin{aligned} \xi_{\pm}(\gamma) &= \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 4\left(c - \frac{1}{3} + \frac{b\gamma}{3}\right)}}{2} \\ &= c \pm \sqrt{\frac{1}{3}(3c^2 - 3c + 1 - b\gamma)} \\ &= c \pm \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma_0} - b\gamma\right)} \\ &= c \pm B(\gamma), \end{aligned}$$

pues  $\gamma_0 = 1/(3c^2 - 3c + 1)$  en donde vemos claramente que éstas existen sólo si  $\gamma \leq \frac{1}{b\gamma_0}$ .

Para  $\gamma \leq \frac{1}{b\gamma_0}$ , definimos :

$$J_1(\gamma) = I_{\gamma}[\xi_+(\gamma)]$$

y

$$J_2(\gamma) = I_{\gamma}[\xi_-(\gamma)]$$

Para estos valores de  $I$  en el equilibrio  $(\xi_{\pm}(\gamma), \xi_{\pm}(\gamma))$  la traza de la linealización es cero, por lo tanto en  $J_i(\gamma), i = 1, 2$ , el equilibrio no es hiperbólico. Para  $b$  fijo, tenemos dos curvas en el plano paramétrico  $\gamma - I$ , de éstas se forma la curva de bifurcación de Hopf.

**Teorema 35** Si  $\gamma < \min\left\{\gamma_0, \frac{1}{b\gamma_0}\right\}$  entonces  $J_i(\gamma), i = 1, 2$ , se da una bifurcación de Hopf.

**Demostración.** Del lema (31) si  $\gamma < \gamma_0$ , la derivada de  $I(x) = I_\gamma(x) = f(x) + \frac{x}{\gamma}$  no se anula y es positiva, por lo tanto es invertible:  $x = x(I)$ ; derivando implícitamente:

$$\frac{dx}{dI} \left( f'(x) + \frac{1}{\gamma} \right) = 1,$$

como  $\gamma < \gamma_0$ ,  $f'(x) \geq f'(c) = -\frac{1}{\gamma_0} > -\frac{1}{\gamma}$  por lo tanto  $\frac{dx}{dI} > 0$ .

Notemos ahora que  $B(\gamma) \neq 0$  para  $\gamma < \min \left\{ \gamma_0, \frac{1}{b\gamma_0} \right\}$ ; se demostrará que al cruzar la curva  $I = J_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$  la derivada de la función traza

$$T(I) = -f'(x(I)) - b\gamma$$

es distinta de cero.

Consideremos primero la función  $Tr(x) = -f'(x) - b\gamma$ , la cual alcanza su máximo en  $x = c$  (al igual que  $-f'(x)$ ), como  $\gamma < \frac{1}{b\gamma_0}$  entonces  $Tr(c) = \frac{1}{\gamma_0} - b\gamma$  por lo tanto  $Tr'(x) = -f''(x) = 6x - 6c = 0$ , sólo si  $x = c$ . De donde  $Tr(x) = 0$  implica que  $x \neq c$ , y entonces la derivada de  $Tr(x)$  no se anula en  $x = \xi_\pm(\gamma)$ . Como para  $\gamma < \gamma_0$ ,  $T(I) = Tr(x(I))$  entonces,

$$\frac{dT}{dI} = \frac{dTr}{dx} \frac{dx}{dI}$$

distinta de cero para  $I = J_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ . Por el teorema de bifurcación de Hopf (referencia [1]) se tiene demostrado el teorema. ■

**Teorema 36** a) Si,  $\gamma \leq \gamma_0$ ,  $J_2(\gamma) \leq J_1(\gamma)$ ,

b) para  $i = 1, 2$ ,  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} J_i(\gamma) = \infty$

$$c) J_1 \left( \frac{1}{b\gamma_0} \right) = J_2 \left( \frac{1}{b\gamma_0} \right) = I \frac{1}{b\gamma_0} (c) = 2c^3 + 3c^2 - c + \frac{c}{b\gamma_0},$$

d) Si  $\gamma_0 < 1/(b\gamma_0)$  existe :  $\gamma_0 \leq \gamma_1 < 1/(b\gamma_0)$  tal que  $J_2(\gamma_1) = J_1(\gamma_1)$  y  $J_2(\gamma_1) > J_1(\gamma_1)$

para :  $\gamma_1 \leq \gamma < 1/(b\gamma_0)$

$$e) \gamma \leq \gamma_0, \frac{dJ_1}{d\gamma} < 0.$$

**Demostración.** Si  $\gamma \leq \gamma_0$  entonces  $\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} \geq 0$ , además

$$\begin{aligned} J_1(\gamma) &= I_0 + \frac{1}{\gamma} - \left(\frac{1}{\gamma_0}\right)c + \left(B(\gamma)^3 + \left(\frac{1}{\gamma_0}\right)B(\gamma)\right) \\ J_2(\gamma) &= I_0 + \frac{1}{\gamma} - \left(\frac{1}{\gamma_0}\right)c + \left(B(\gamma)^3 + \left(\frac{1}{\gamma_0}\right)B(\gamma)\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

se tiene el inciso a.

El b se sigue de

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} J_i(\gamma) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} I[\xi(\gamma)] \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \{f[\xi(\gamma)]\} + \frac{\xi(\gamma)}{\gamma} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Como  $B[1/(b\gamma)] = 0$  y  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} B(\gamma) = \lim_{b \rightarrow 0} B(\gamma) = A_\infty$  y usando  $x_{min} = c - A_\infty$ ,  $x_{max} = c + A_\infty$  se tiene

$$\xi_- \left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) = \xi_+ \left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) = c$$

y

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \xi_-(\gamma) = x_{min}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \xi_+(\gamma) = x_{max}.$$

Por (3.13) tenemos

$$\begin{aligned} J_1 \left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) &= J_2 \left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) \\ &= I_{\frac{1}{b\gamma_0}} \left[\xi_\pm \frac{1}{b\gamma_0}\right] \\ &= I_{\frac{1}{b\gamma_0}}(c) \\ &= I_0 + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_0}\right)c \\ &= c^3 - 3c^3 + 3c^2 - c + \frac{c}{b\gamma_0}. \end{aligned}$$

A partir de (3.13), la ecuación  $J_1(\gamma) = J_2(\gamma)$  tiene tres soluciones, una de ellas es  $1/(b\gamma_0)$  ya contemplada en el inciso c, otra y la tercera es

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{1 + 3b\gamma_0^2 - I}}{b\gamma_0}$$

por lo que podemos obtener  $\gamma_0 \leq \gamma_1 < \frac{1}{b\gamma_0}$

Si  $\gamma = \gamma_0$

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} < 0 \text{ y como } B(\gamma) + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} = \frac{1}{\gamma} - \frac{b\gamma}{3} - \frac{2}{3\gamma_0}$$

entonces  $-b\gamma_0^2 + 2\gamma - 3\gamma_0 < 0$  si  $\gamma > \gamma_1$ ; la desigualdad se obtiene de (3.13).

Finalmente, la función  $B(\gamma)$ , definida para  $\gamma \leq 1/(b\gamma_0)$  tiene las siguientes propiedades

a)  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} B(\gamma) = A_\infty$

b)  $B(\gamma) \geq 0$ ;  $B(\gamma) = 0$  si y sólo si  $\gamma = \frac{1}{b\gamma_0}$ ,

c)  $x_{min} = c - A_\infty < c - B(\gamma) = \xi_-(\gamma) = \xi_+(\gamma) = c + B(\gamma) < c + A_\infty = x_{max}$

d)  $\frac{dB}{d\gamma} = \frac{-b}{6B(\gamma)}$

Así

$$\frac{dJ_1}{d\gamma} = -\frac{1}{\gamma^2}(\xi_+(\gamma)) - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \left( B(\gamma) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} \right) \right) > 0$$

si  $\gamma \leq \gamma_0$ . ■

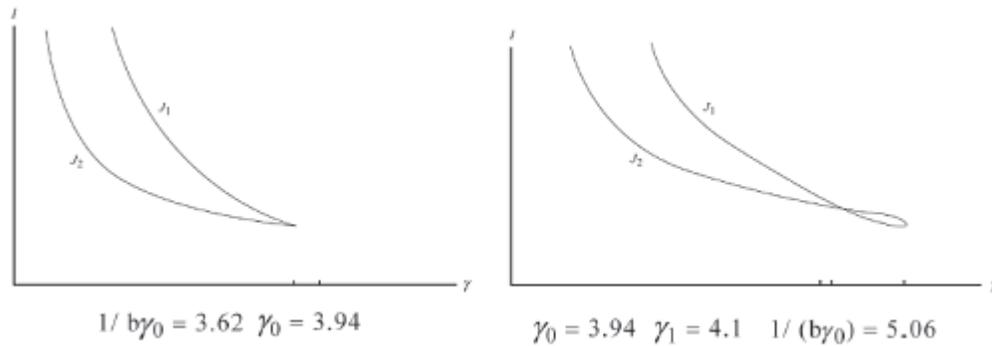


Figura 3.2: En la figura se muestran las funciones  $J_1$  y  $J_2$ .

# Capítulo 4

## Conclusiones

Este trabajo se basó en el sistema de Fitz-Hung-Nagumo. Si bien este sistema es una representación del modelo de la neurona, encontrar estas bifurcaciones en el campo experimental requiere de un ambiente controlado para poder así observarlas; además de esto, al momentos de reproducir dichos parámetros puede que no se logren los obtenidos en este trabajo, ya sea por la fisiología de la misma neurona o del voltaje requerido. Por otro lado, sería bastante interesante cuando se cumplen los parametros, pues con esto observaríamos como al aplicar una voltaje moderado, la reacción de la neurona seria primero mandar más carga a la siguiente mediante las dendritas, pero al cabo de un cierto tiempo esta reacción cesaría, lo que representaría la bifurcación silla-nodo. Sin embargo al aplicar un voltaje dentro de los parámetros que obtuvimos la reacción debería de ser de enviar más carga a la siguiente neurona y mantener este cambio permanentemente, lo que nos mostraría la bifurcación de Hopf.

Todo lo anterior lo podemos justificar de forma analítica, por ejemplo, en una forma más especifica, en el caso de la bifurcación de Hopf si  $\gamma_0 > \frac{1}{b\gamma_0}$  entonces, para  $\frac{1}{b\gamma_0} < \gamma < \gamma_0$  fijo, y al variar el parámetro  $I$ , no se tiene bifurcación de Hopf, pues el único equilibrio existente no cambia su tipo de estabilidad.

Lo anterior fisiológicamente lo podemos ver en la neurona gracias a la interacción de algunas sustancias que una vez iniciada la propagación axonal del impulso nervioso, pueden modificar la cantidad de neurotransmisores liberada por el axón terminal. Por ejemplo la toxina botulínica que bloquea la liberación de acetilcolina, lo cual afectaría a nuestro parámetro  $I$ , de manera que nos acercaría a resultados más relevantes a nivel fisiológico.

# Bibliografía

- [1] Arrowsmith, D. K. Place C. M..1992. *Dynamical Systems: Champan and Hall*, Londres.
- [2] Arrowsmith, D. K. Place C. M. 1990. *An Introduction to Dynamical Systems: Cambridge University Press*, Londres.
- [3] Edward Beltrami.1992. *Mathematics for Dinamic Modeling: Academic Press*, New York.
- [4] Steven H. Strogatz.1992. *Nonlinear Dynamics and Chaos: Perseus Book*, USA.
- [5] Yuri A. Kuznetsov.1998. *Elements of Applied Bifurcation Theory : Springer*, New York.
- [6] Perko L. 2000. *Diferential Ecuation and Dyamical Systems: Springer*, USA.
- [7] F. Ongay Larios y M. A. Aguerro Granados.2010. *Bifurcaciones del sistema de FHN: Universidad Autónoma del Estado de México*, Estado de México.
- [8] C. Barrera Montoya, C. Carrillo Clavet y F. A.Ongay Larios.2003. *El modelo de Fitz Hung-Nagumo para el potencial electrico de una neurona : Aportaciones Matematicas, Serie de Comunicaciones 32*.