UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DEL PUNTO FIJO A LA TEORÍA ECONÓMICA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Monserrat García Martínez

ASESOR DE TESIS:
Dr. Enrique Castañeda Alvarado

El Cerrillo, Piedras Blancas, México
9 de Mayo de 2019

Dedicado a mi familia, en especial a mis padres.

Agradecimientos

La presente tesis es un reto personal, constituye un proceso de investigación en el que, de un modo u otro, han contribuido personas importantes en mi vida académica y personal, demostrándome así su interés, cercanía y apoyo. Por ello quiero expresar mi más profundo agradecimiento a las siguientes personas.

A mis padres por el amor recibido, la dedicación y la paciencia durante la realización de este proyecto, gracias por ser los principales promotores de mis sueños, por confiar y creer cada día en mí. Agradezco a mi madre por preocuparse cada día por el avance y desarrollo de esta tesis, por la compañía, la atención y la motivación que de ella recibo; de igual manera agradezco a mi padre por desear y anhelar siempre lo mejor para mi persona, gracias por cada consejo y por cada una de sus palabras que me han guiado a lo largo de mi vida.

Gracias de corazón a mi director de tesis, el Dr. Enrique Castañeda Alvarado, por todo el apoyo, la paciencia, dedicación, motivación, criterio y confianza depositada en mí desde el principio de este proyecto y haber convertido en realidad lo que era un sueño. Ha sido un privilegio contar con su guía y ayuda.

Agradezco también a mis revisores: el Dr. David Maya Escudero y el Dr. Alfredo Cano Rodríguez por su colaboración, interés y orientación para la culminación de este proyecto.

Gracias a mis hermanos, amigos y a todas las personas que me apoyaron y creyeron en la realización de este trabajo.

Índice general

Agradecimientos **III**

Introducción **VII**

1. Preliminares **1**
1.1. Conceptos Básicos en $\mathbb{R}^m$ 1
1.2. Conos y conos duales 9

2. Teoremas Principales **17**
2.1. Particiones de la Unidad 17
2.2. Teorema de Sperner y sus consecuencias. 19
2.3. Teorema de Sonnenschein. 27

3. Aplicación a la Teoría Económica **29**
3.1. Conceptos Económicos 29
3.2. Funciones conjunto valuadas. 36

Bibliografía **47**

Introducción

La oferta y la demanda son los factores que determinan los precios en una economía de mercado. Los precios están determinados por los mercados de manera tal que la oferta de bienes de los productores es igual a la demanda de bienes por los consumidores. Tal estado de equilibrio es conocido como un *equilibrio de mercado.*
Suponiendo que es posible clasificar todos los diferentes productos y servicios del mundo en un número finito de bienes, digamos m, los cuales están disponibles en unidades infinitamente divisibles. El *espacio de bienes* es entonces $\mathbb{R}^m$. Un *vector de bienes* x es un vector en $\mathbb{R}^m$ que especifica una lista de cantidades de cada bien y estos vectores son cambiados, fabricados y consumidos en el transcurso de una actividad económica, no los productos individuales. Un *vector de precios* p enlista el valor de una unidad de cada bien, así que también pertenece a $\mathbb{R}^m$. De aquí que el valor del vector de bienes x a los precios p es

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i = p \cdot x.$$

Los principales participantes en una economía son los *consumidores.* El propósito esencial de la organización económica es proporcionar vectores de bienes para el consumo final de los consumidores. Vamos a suponer que hay un número finito de consumidores. No todos los vectores de bienes son admisibles como consumo final para un consumidor. El conjunto $X_i \subset \mathbb{R}^m$ de los vectores de bienes admisibles por el consumidor i es su *conjunto de consumo.* Hay una variedad de restricciones que se podrían incorporar al conjunto X_i. Una posible restricción que puede ser puesta a los vectores de consumo admisible es que sean no negativos. Una restricción alternativa es que el conjunto X_i esté acotado inferiormente. Bajo esta interpretación, cantidades negativas de un bien en un vector de consumo final significan que el consumidor está ofreciendo el bien. La cota inferior pone un límite en los bienes que un

consumidor puede adquirir.
Los proveedores están motivados por las ganancias. Cada proveedor j tiene un *conjunto de producción* Y_j. Un *vector de oferta* enlista las cantidades de cada bien ofertado. La *ganancia* o ingreso neto asociado con el vector de oferta y a los pecios p es

$$\sum_{i=1}^{m} p_i y_i = p \cdot y.$$

El problema de los proveedores es entonces elegir un y del conjunto de vectores de oferta que maximicen la ganancia.
El conjunto de las sumas de los vectores de demanda menos las sumas de los vectores de oferta es el conjunto de *exceso de demanda,* $E(p)$. El precio p es un *precio de equilibrio de libre disposición* si existe algún $z \in E(p)$ tal que $z \leq 0$ y siempre que $z_i < 0$ entonces $p_i = 0$.

La hipótesis en esta tesis es:

En una economía de mercado debe existir al menos un vector de precios de equilibrio de libre disposición.

Los teoremas del punto fijo han sido una herramienta importante para mostrar la existencia de soluciones en la economía. Recordemos que, dado un espacio topológico K y una función continua $f : K \longrightarrow K$ decimos que $z \in K$ es un *punto fijo* de f si $f(z) = z$. En este trabajo usaremos el teorema del punto fijo de Brouwer y el teorema del punto fijo de Kakutani para mostrar la existencia de precios de equilibrio de libre disposición.
Esta tesis consta de tres capítulos. En el Capítulo 1 recordaremos conceptos topológicos que se usarán a lo largo de este trabajo, también incluye una sección dedicada a conos y conos duales los cuales nos proporcionan una serie de requisitos para poder asegurar la existencia de un precio de equilibrio de libre disposición.
En el Capítulo 2 hablaremos entre otras cosas de simplejos y subsimplejos completamente etiquetados, enunciamos y demostramos uno de los teoremas más importantes en este trabajo que es el Teorema de Sperner, la importancia de este teorema es que es un teorema de existencia.
En el último capítulo incluímos conceptos económicos y topológicos como el de funciones conjunto valuadas y los teoremas que necesitamos para llegar al teorema de Gale-Debreu-Nikaido el cual nos indica que bajo ciertas

condiciones debe existir al menos un vector de precios de equilibrio de libre disposición.
Este trabajo está basado en el libro: Fixed point theorems with applications to economics and game theory [1].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a introducir conceptos y algunos resultados básicos de la topología que utilizaremos a lo largo de este trabajo, utilizaremos la notación estándar para los números reales y los números naturales, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ respectivamente, I denota al intervalo $[0,1]$ y el conjunto de números reales no negativos lo denotaremos por $\mathbb{R}^+$. Los elementos del espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ los denotaremos con letras minúsculas, así si $x \in \mathbb{R}^m$ este se ve de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Los vectores unitarios en $\mathbb{R}^m$ están denotados por $e_1, \ldots, e_m$. Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^m$, Cl (A) e Int (A) denotan la cerradura y el interior de A respectivamente.

1.1. Conceptos Básicos en $\mathbb{R}^m$

Definición 1.1. *Definimos los siguientes ordenes parciales en $\mathbb{R}^m$. Decimos que $x > y$ si $x_i > y_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $x \geq y$ si $x_i \geq y_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. En este contexto, si y es el vector cero entonces decimos que x es no negativo. El **producto interior** de dos vectores $x, p \in \mathbb{R}^m$ está dado por*

$$p \cdot x = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i.$$

*La **norma euclidiana** de $x \in \mathbb{R}^m$ es*

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} = \sqrt{x \cdot x}.$$

*Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ definimos la **bola de radio** ε **centrada en** x como*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : ||x - y|| < \varepsilon\}.$$

*La **nube de radio** ε **centrada en** F ($F \in \mathbb{R}^m$) es*

$$N_\varepsilon(F) = \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x).$$

Definición 1.2. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^m$, definimos la **distancia** de x a y como*

$$\operatorname{dist}(x, y) = ||x - y||.$$

Definición 1.3. *Sean $K \subset \mathbb{R}^m$ y f una función continua de K en sí mismo. Un **punto fijo** de f es un punto $z \in K$ tal que $f(z) = z$.*

Ejemplo 1.1. *Si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo. En efecto, si $f(0) = 0$, entonces 0 es un punto fijo de f y si $f(1) = 1$ entonces 1 es un punto fijo de f.*
Si $f(0) \neq 0$ y $f(1) \neq 1$ entonces $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Sea $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$g(x) = f(x) - x$$

entonces g es continua y $g(1) < 0 < g(0)$. Así, por el Teorema del valor intermedio (véase [4, Teorema 4, p. 266]), existe $x \in (0,1)$ tal que $g(x) = 0$ y por lo tanto $f(x) = x$.

Definición 1.4. *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^m$ es **convexo** si para cualesquiera $x, y \in C$ y $\lambda \in I$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Véase la Figura 1.1. Para los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y los escalares no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ el vector $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ se llama **combinación convexa finita**.*
*Una **combinación convexa estrictamente positiva** es aquella combinación convexa finita donde $\lambda_i > 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Definición 1.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}^m$, el **casco convexo** de A denotado por $\mathrm{Co}\,(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas finitas de A, es decir, $\mathrm{Co}\,(A)$ es el conjunto de todos los vectores x de la forma*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

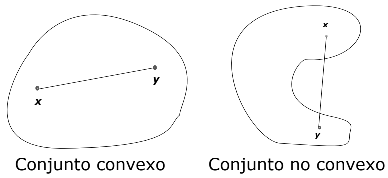

Figura 1.1: Conjunto convexo

para algún n*, donde cada* $x_i \in A$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$*. Véase la Figura 1.2.*

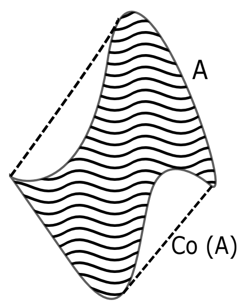

Figura 1.2: Casco convexo

Teorema 1.1. *(Teorema de Caratheodory).*
Sea $E \subset \mathbb{R}^m$*. Si* $x \in \mathrm{Co}\,(E)$*, entonces* x *se puede escribir como una combinación convexa de a lo más* $m+1$ *puntos en* E*. Es decir, existen* $z_0, \ldots, z_m \in E$ *y* $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ *con*

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$$

tales que

$$x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i z_i.$$

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Co}\,(E)$. Entonces existen $z_1, \ldots, z_k \in E$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, esto debido a que si $\lambda_j = 0$ para algún j, entonces x sería combinación convexa de $k-1$ vectores.
Si $k \leq m+1$ hemos terminado.
Supongamos que $k > m+1$. Dado que la dimensión del espacio es m, los $k-1$ vectores $x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$ son linealmente dependientes, es decir, existen $\mu_2, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\sum_{i=2}^{k} \mu_i (x_i - x_1) = 0.$$

Haciendo $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{k} \mu_i$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k} \mu_i (x_i - x_1) &= \sum_{i=2}^{k} \mu_i x_i - \sum_{i=2}^{k} \mu_i x_1 \\
&= \sum_{i=2}^{k} \mu_i x_i - x_1 \sum_{i=2}^{k} \mu_i \\
&= \sum_{i=2}^{k} \mu_i x_i + \mu_1 x_1 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = 0.
\end{aligned}$$

Por la definición de μ_1 nótese que $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0$, de aquí se sigue que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \alpha 0 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \alpha \mu_i) x_i.
\end{aligned}$$

De la definición de μ_1 se deduce que $\mu_i > 0$ para al menos un $i \in \{1, \ldots, k\}$ pues

- Si $\mu_1 > 0$ habremos terminado.
- Si $\mu_1 \leq 0$ entonces $\displaystyle\sum_{i=2}^{k} \mu_i \geq 0$ y dado que no todos los μ_i son nulos existe al menos un $i \in \{2, \ldots, k\}$ tal que $\mu_i > 0$.

Luego, podemos elegir

$$\alpha = \min\{\frac{\lambda_i}{\mu_i} : \mu_i > 0\},$$

supongamos que $\alpha = \frac{\lambda_j}{\mu_j}$ para algún j. Notemos que $\alpha > 0$ y que $\lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, pues si $\mu_i \leq 0$ entonces dado que $\lambda_i > 0$ tendríamos que $\lambda_i - \alpha\mu_i > 0$ y si $\mu_i > 0$ entonces $\lambda_i - \alpha\mu_i = \mu_i(\frac{\lambda_i}{\mu_i} - \alpha) \geq 0$.
En particular $\lambda_j - \alpha\mu_j = 0$.
Así

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \alpha\mu_i) x_i$$

donde $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \alpha\mu_i) = 1$ y $\lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, dado que el coeficiente j-ésimo es nulo se obtiene que x es combinación convexa de a lo más $k - 1$ vectores.
Repitiendo este argumento $k - (m + 1)$ veces se obtiene que x es combinación convexa de a lo más $m + 1$ puntos. $\square$

Ejemplo 1.2. *El casco convexo de F puede no ser cerrado si F no es compacto, incluso si F es cerrado. Por ejemplo, sea*

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq \left|\frac{1}{x_1}\right| \ \text{ y } |x_1| \geq 1\}.$$

Entonces F es cerrado pero $\mathrm{Co}\,(F) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ no es cerrado. Véase la Figura 1.3.

Si una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x lo denotaremos por $x_n \longrightarrow x$.

Proposición 1.1. *Sean $E, F \subset \mathbb{R}^m$. Definimos $g : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por $g(x) = \mathrm{dist}(x, F)$. Entonces*

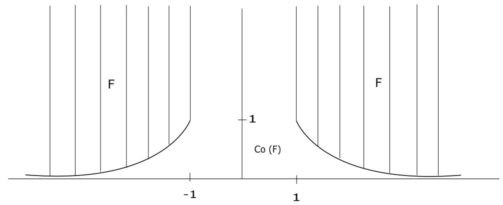

Figura 1.3: Ejemplo de casco convexo de un cerrado

a) *g es continua.*

b) *Si F es compacto, entonces existe $y \in F$ tal que $g(x) = ||x - y||$.*

c) *Si F también es convexo entonces y es único.*

Demostración. a) Dado que la función distancia siempre es continua entonces g es continua.

b) Por definición $\text{dist}(x, F) = \inf\{\text{dist}(x, y) : y \in F\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in F$ tal que $|\text{dist}(x, F) - \text{dist}(x, y_n)| < \dfrac{1}{n}$. Como F es compacto entonces $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow y$ para algún $y \in F$.
Dado que g es continua tenemos que $\text{dist}(x, y_n) \longrightarrow \text{dist}(x, y)$. Así dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\text{dist}(x, y_n) - \text{dist}(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|\text{dist}(x, F) - \text{dist}(x, y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N$ entonces $|\text{dist}(x, F) - \text{dist}(x, y)| < |\text{dist}(x, F) - \text{dist}(x, y_n)| + |\text{dist}(x, y_n) - \text{dist}(x, y)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Como ε es arbitraria concluimos que $\text{dist}(x, F) = \text{dist}(x, y)$.

c) Supongamos que existen $y, y' \in F$ tales que $g(x) = ||x - y||$ y $g(x) = ||x - y'||$. Como F es convexo entonces $\lambda y + (1 - \lambda) y' \in F$ para $\lambda \in [0, 1]$. Dado que la distancia de un punto a una recta está determinada de forma única por la longitud del segmento perpendicular a la recta dada que pasa por x entonces $y = y'$.

$\square$

Observación 1.1. *En la proposición anterior la función $h : E \longrightarrow F$ dada por $||x - h(x)|| = g(x)$ es continua y si $x \in E \cap F$, entonces $g(x) = 0$ por lo que h es la función identidad para todo $x \in E \cap F$.*

Definición 1.6. *Un **hiperplano** en $\mathbb{R}^m$ es un conjunto de la forma*

$$\{x \in \mathbb{R}^m : p \cdot x = c\}$$

donde $0 \neq p \in \mathbb{R}^m$ *y* $c \in \mathbb{R}$*.*

Definición 1.7. *Un conjunto de la forma*

$$\{x \in \mathbb{R}^m : p \cdot x \leq c\}$$

($\{x \in \mathbb{R}^m : p \cdot x < c\}$*) es llamado* ***semi espacio cerrado (abierto)****.*

Definición 1.8. *Dos conjuntos* A *y* B *se dice que están* ***estrictamente separados*** *por un hiperplano si existe algún* $p \in \mathbb{R}^m$ *con* $p \neq 0$ *y algún* $c \in \mathbb{R}$ *tales que para cada* $x \in A$ *y* $y \in B$

$$p \cdot x < c < p \cdot y.$$

Esto es, A *y* B *están en distintos semi espacios abiertos. En este trabajo escribiremos esto como* $p \cdot A < c < p \cdot B$*. Véase la Figura 1.4.*

Nótese que el hiperplano de la definición anterior está generado por $p \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$ de la Definición 1.6.

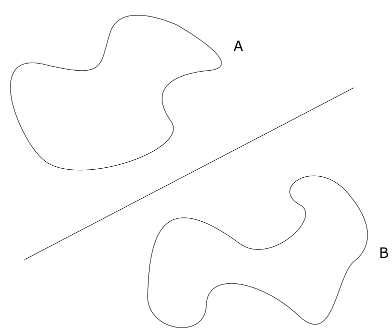

Figura 1.4: Dos conjuntos estrictamente separados

Teorema 1.2. *(Teorema de separación del hiperplano).*
Sean $C, K \subset \mathbb{R}^m$ *convexos, no vacíos y disjuntos con* C *cerrado y* K *compacto. Entonces* C *y* K *están estrictamente separados por un hiperplano.*

Demostración. Sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ la función distancia dada por

$$f(x) = \text{dist}(x, C) = \inf\{||x - c|| \quad \text{para todo} \quad c \in C\},$$

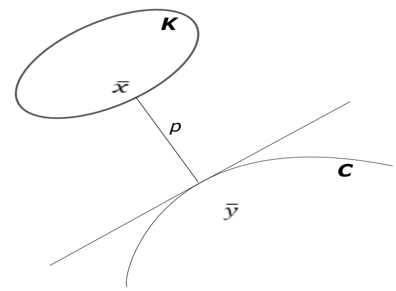

Figura 1.5: Teorema de separación del hiperplano

la cual es continua y dado que K es compacto alcanza su mínimo sobre K digamos en el punto $\overline{x}$.
Sea $\overline{y}$ un punto en C tal que $f(\overline{x}) = ||\overline{x} - \overline{y}||$. Si $p = \overline{x} - \overline{y}$ entonces $0 < ||p||^2 = p \cdot p = p \cdot (\overline{x} - \overline{y})$ de aquí que $p \cdot \overline{x} > p \cdot \overline{y}$. (Véase la Figura 1.5).
Necesitamos mostrar que $p \cdot \overline{y} \geq p \cdot y$ para todo $y \in C$ y $p \cdot \overline{x} \leq p \cdot x$ para todo $x \in K$. Sea $y \in C$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ hagamos $y_\lambda = (1-\lambda)\overline{y} + \lambda y$ el cual pertenece a C si $\lambda \in [0,1]$ pues C es convexo, de aquí que

$$\begin{aligned}
||\overline{x} - y_\lambda||^2 &= [\overline{x} - ((1-\lambda)\overline{y} + \lambda y)] \cdot [\overline{x} - ((1-\lambda)\overline{y} + \lambda y)] \\
&= [\lambda\overline{x} + \overline{x} - \lambda\overline{x} - (1-\lambda)\overline{y} - \lambda y)] \cdot [\lambda\overline{x} + \overline{x} - \lambda\overline{x} - (1-\lambda)\overline{y} - \lambda y)] \\
&= [\lambda(\overline{x} - y) + (1-\lambda)(\overline{x} - \overline{y})] \cdot [\lambda(\overline{x} - y) + (1-\lambda)(\overline{x} - \overline{y})] \\
&= (1-\lambda)^2||\overline{x} - \overline{y}||^2 + 2\lambda(1-\lambda)[(\overline{x} - \overline{y}) \cdot (\overline{x} - y)] + \lambda^2||\overline{x} - y||^2.
\end{aligned}$$

Diferenciando con respecto de λ y evaluando en $\lambda = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
-2||\overline{x} - \overline{y}||^2 + 2(\overline{x} - \overline{y}) \cdot (\overline{x} - y) &= -2p \cdot (\overline{x} - \overline{y}) + 2p(\overline{x} - y) \\
&= 2p \cdot (-\overline{x} + \overline{y} + \overline{x} - y) \\
&= 2p \cdot (\overline{y} - y).
\end{aligned}$$

Como $\overline{y}$ es punto mínimo de f sobre C entoces su derivada debe ser mayor o igual a cero, así

$$p \cdot \overline{y} \geq p \cdot y.$$

Análogamente

$$p \cdot \overline{x} \leq p \cdot x.$$

Entonces

$$p \cdot x \geq p \cdot \overline{x} > p \cdot \overline{y} \geq p \cdot y$$

para todo $x \in K$ y para todo $y \in C$.

$\square$

1.2. Conos y conos duales

Definición 1.9. *Un **cono** es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^m$ cerrado bajo la multiplicación por escalares no negativos. Es decir, C es un cono si para todo $x \in C$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $\lambda x \in C$. (Véase la Figura 1.6)*

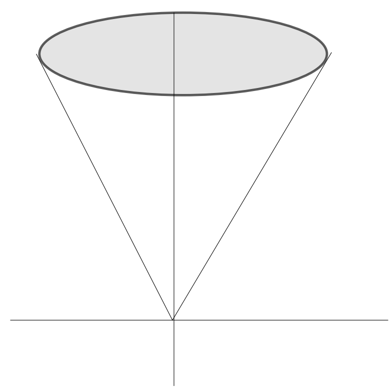

Figura 1.6: Cono

Nótese que el conjunto que consta sólo del cero (el cual denotaremos por $\hat{0}$) en $\mathbb{R}^m$ es un cono. (Véase la Figura 1.7)

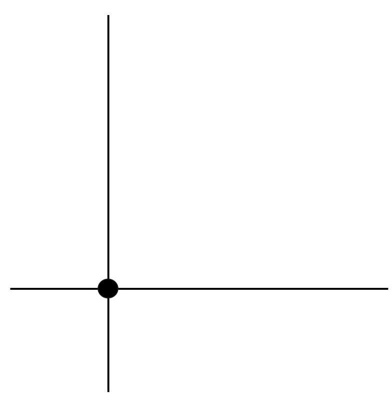

Figura 1.7: Cono 0

Proposición 1.2. *La intersección de conos es un cono. Véase la Figura 1.8.*

Demostración. Supongamos que $\{C_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia indizada de conos. Sean $z \in \bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Dado que $z, \lambda z \in C_\alpha$ para todo $\alpha \in J$ tenemos que $z, \lambda z \in \bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha$ $\square$

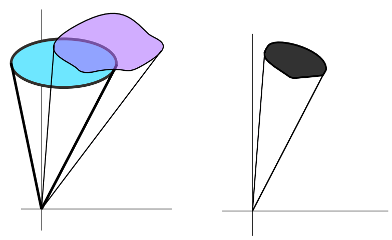

Figura 1.8: Intersección de conos

Proposición 1.3. *Si C es un cono, entonces $\hat{0} \in C$.*

Demostración. Sea $x \in C$. Como $\lambda x \in C$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$, en particular para $\lambda = 0$ se tiene que $\hat{0} \in C$. $\square$

Proposición 1.4. *Cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ genera un cono, $\{\lambda x : x \in E, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$. El cono generado por E es la intersección de todos los conos que contienen a E. Véase la Figura 1.9.*

Demostración. Sea $C_E = \{\lambda x : x \in E, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$, veamos primero que C_E es un cono. Para esto, sean $\lambda x_0 \in C_E$ y $\lambda' \in \mathbb{R}^+$ para algún $x_0 \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Como $\lambda'\lambda \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $\lambda'\lambda x_0 \in C_E$. Por lo tanto $\lambda'(\lambda x_0) \in C_E$.
Ahora sea $\mathcal{C} = \{C : C \text{ es un cono y } E \subset C\}$. Mostraremos que $C_E = \bigcap \mathcal{C}$.
Dado que C_E es un cono que contiene a E tenemos que $\bigcap \mathcal{C} \subset C_E$.
Notemos que $C_E \subset \bigcap \mathcal{C}$ pues $E \subset \bigcap \mathcal{C}$ y como $\bigcap \mathcal{C}$ es un cono por la Proposición 1.2 entonces contiene elementos que se ven de la forma λx para algún $x \in E$ y algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Proposición 1.5. *Un cono es convexo si y solo si es cerrado bajo la adición, es decir, el cono C es convexo si y solo si $x + y \in C$ para todo $x, y \in C$.*

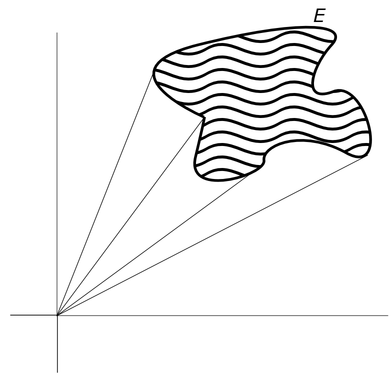

Figura 1.9: Cono generado por un conjunto E

Demostración. Supongamos que C es convexo. Sean $x, y \in C$. Dado que C es un cono, tenemos que $\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{1-\lambda}y \in C$ para $\lambda \in (0,1)$. Como C es convexo tenemos que

$$\lambda(\frac{1}{\lambda}x) + (1-\lambda)(\frac{1}{1-\lambda}y) = x + y \in C.$$

Ahora supongamos que C es cerrado bajo la suma. Para ver que C es convexo, sean $x, y \in C$ y $\lambda \in I$. Como C es un cono entonces $\lambda x \in C$ y $(1-\lambda)y \in C$ de aquí que $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Por lo tanto C es convexo. (Véase la Figura 1.10) $\square$

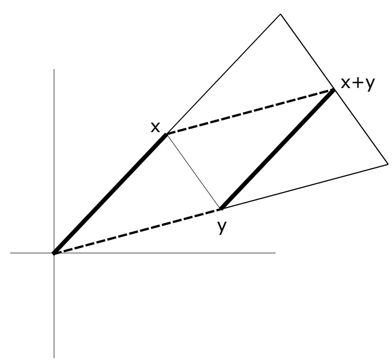

Figura 1.10: Suma de vectores

Definición 1.10. *Sea $C \subset \mathbb{R}^m$. El* ***cono dual*** *de C, denotado por C^*, es*

$$\{p \in \mathbb{R}^m : p \cdot x \leq 0, \ \textit{para todo } x \in C\}.$$

Ejemplo 1.3. *Si $C \subset \mathbb{R}^m$ consta de un solo punto digamos q, entonces*

$$C^* = \{p \in \mathbb{R}^m : p \cdot q \leq 0\},$$

es decir, C^* es el semi espacio cerrado acotado por el hiperplano $\{p \in \mathbb{R}^m : p \cdot q = 0\}$ el cual contiene al origen. Véase la Figura 1.11.

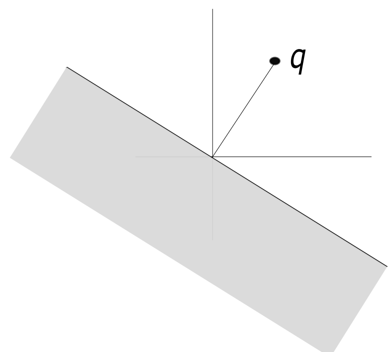

Figura 1.11: Cono dual de un punto

Proposición 1.6. *Si A un conjunto de índices y $M_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ para todo $\alpha \in A$, entonces*

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha\right)^* = \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha^*.$$

Demostración. Sea $p \in \left(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha\right)^*$. Por la definición de cono dual tenemos que $p \cdot x \leq 0$ para todo $x \in \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$. Entonces $p \cdot x \leq 0$ para todo $x \in M_\alpha$ y para cada $\alpha \in A$. De aquí que $p \in M_\alpha^*$ para todo $\alpha \in A$. Por lo tanto $p \in \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha^*$.

Nótese que las implicaciones inversas también se cumplen, por lo tanto

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha\right)^* = \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha^*.$$

□

Proposición 1.7. *Sean $M, N \subset \mathbb{R}^m$. Si $M \subset N$ entonces $N^* \subset M^*$.*

Demostración. Sea $p \in N^*$. Por la definición de cono dual tenemos que $p \cdot x \leq 0$ para todo $x \in N$, en particular para todo $x \in M$ se cumple que $p \cdot x \leq 0$. Por lo tanto $p \in M^*$. $\square$

El regreso de la proposición anterior no siempre se cumple como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4. *Sea $M = \{p\} \subset \mathbb{R}^m$ y sea $N = \{q\} \subset \mathbb{R}^m$ donde q es un punto en el rayo que parte desde $\hat{0} \in \mathbb{R}^m$ y pasa por p tal que $p \neq q$ entonces*

$$M^* = N^*$$

pero Mno es subconjunto de N. Véase la Figura 1.12.

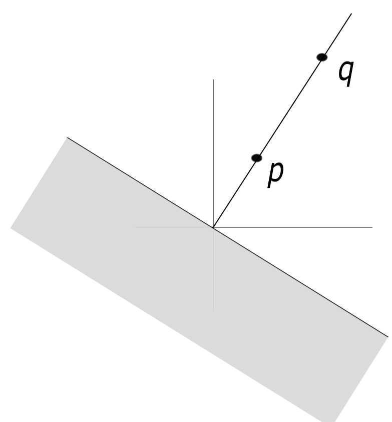

Figura 1.12: Dual de dos puntos

Proposición 1.8. *Si $M \subset \mathbb{R}^m$ entonces*

$$M^* = (\mathrm{Cl}\,(M))^*.$$

Demostración. Dado que $M \subset \mathrm{Cl}\,(M)$ tenemos por la Proposición 1.7 que $(\mathrm{Cl}\,(M))^* \subset M^*$.
Probaremos que $M^* \subset (\mathrm{Cl}\,(M))^*$, para esto, sea $p \in M^*$. Por la definición de cono dual tenemos que $p \cdot x \leq 0$ para todo $x \in M$. Dado un punto arbitrario

$y_0 \in \mathrm{Cl}\,(M)$, sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M que converge a y_0 entonces $p \cdot y_n \leq 0$ para todo n, por la continuidad del producto punto tenemos que

$$p \cdot y_0 = \lim_{n\to\infty} [p \cdot y_n] \leq 0.$$

Por lo tanto $p \in (\mathrm{Cl}\,(M))^*$. Así concluimos que $M^* = (\mathrm{Cl}\,(M))^*$. $\square$

Proposición 1.9. *Si $M \subset \mathbb{R}^m$ entonces*

$$M^* = (\mathrm{Co}\,(M))^*.$$

Demostración. Dado que $M \subset \mathrm{Co}\,(M)$, tenemos por la Proposición 1.7 que $(\mathrm{Co}\,(M))^* \subset M^*$.
Probaremos que $M^* \subset (\mathrm{Co}\,(M))^*$, para esto, sea $p \in M^*$. Por la definición de cono dual tenemos que $p \cdot x \leq 0$ para todo $x \in M$. Si $y \in \mathrm{Co}\,(M)$, entonces por el Teorema de Caratheodory podemos escribir

$$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$$

donde $k \leq m+1$, $y_i \in M$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$ y $\lambda_0,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

Se sigue que

$$p \cdot y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (p \cdot y_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot 0 = 0.$$

Entonces $p \in (\mathrm{Co}\,(M))^*$. Por lo tanto $M^* = (\mathrm{Co}\,(M))^*$. $\square$

Proposición 1.10. *Si C es un cono, entonces C^* es un cono convexo y cerrado y $(C^*)^* = \mathrm{Cl}\,(\mathrm{Co}\,(C))$.*

Demostración. El cono dual de un punto es un semi-espacio cerrado y acotado por un hiperplano, el cual es un cono cerrado y convexo. Por la Proposición 1.2 tenemos que C^* es la intersección de tales semi-espacios, por tanto C es un cono cerrado y convexo.
Sea $p \in \mathrm{Cl}\,(\mathrm{Co}\,(C))$ entonces $p \cdot x \leq 0$ para todo $x \in (\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Co}\,(C)))^* =$

$(\mathrm{Co}\,(C))^* = C^*$. Por lo tanto $p \in (C^*)^*$.
Si $x_0 \notin \mathrm{Cl}\,(\mathrm{Co}\,(C))$, por el Teorema 1.2 existe $p \in \mathbb{R}^m$ distinto de cero, tal que

$$p \cdot y < 0 < p \cdot x_0$$

para todo $y \in \mathrm{Cl}\,(\mathrm{Co}\,(C))$. De la primer desigualdad tenemos que $p \in (\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Co}\,(C)))^*$ y $x_0 \notin (C^*)^*$. □

Proposición 1.11. $(\mathbb{R}^{m+})^* = \{x \in \mathbb{R}^m : x \leq 0\}$.

Demostración. Por definición

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^{m+})^* &= \{x \in \mathbb{R}^m : p \cdot x \leq 0 \ \text{ para todo } \ p \in \mathbb{R}^{m+}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^m : x \leq 0\}.\end{aligned}$$

□

Proposición 1.12. *Si el cono C pertenece al semi espacio abierto $\{x \in \mathbb{R}^m : p \cdot x < c\}$, entonces $c > 0$ y C de hecho pertenece al semi espacio $\{x \in \mathbb{R}^m : p \cdot x \leq 0\}$.*

Demostración. Dado que $C \subset \{x \in \mathbb{R}^m : p \cdot x < c\}$ se tiene que para todo $x \in C$, $p \cdot x < c$, como C es un cono, en particular para $\hat{0} \in C$ se cumple, así que $c > 0$ y haciendo variar a c entonces $C \subset \{x \in \mathbb{R}^m : p \cdot x \leq 0\}$. □

Capítulo 2

Teoremas Principales

En este capítulo enunciaremos algunos teoremas importantes los cuales utilizaremos para la demostración del teorema principal 3.11.

2.1. Particiones de la Unidad

Proposición 2.1. *Sea $C \subset \mathbb{R}^m$ un cono convexo y cerrado y sea $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto y convexo. Entonces $K \cap C^* \neq \emptyset$ si y sólo si para todo $p \in C$, existe $z \in K$ tal que*

$$p \cdot z \leq 0.$$

Demostración. Supongamos que $K \cap C^* = \emptyset$. Por el Teorema 1.2 podemos separar a K y C^* estrictamente por un hiperplano. Es decir, existen $q \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$q \cdot C^* < c < q \cdot K.$$

Dado que C^* es un cono, por la Proposición 1.12, tenemos que $c > 0$ y $q \cdot C^* \leq 0$. Así por la Proposición 1.10 y el hecho de que C es compacto y convexo se concluye que $q \in (C^*)^* = C$ y $q \cdot K > 0$, contadiciendo que $p \cdot z \leq 0$.
Por otro lado, sea $z \in K \cap C^*$. Dado que C es un cono convexo y cerrado, por la Proposición 1.10 tenemos que $p \cdot z \leq 0$ para todo $p \in C$. □

Definición 2.1. *Sea J un conjunto de índices. Una colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una **cubierta abierta** de $K \subset \mathbb{R}^m$ si U_α es abierto para cada $\alpha \in J$ y $K \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.*

Una ***partición de la unidad subordinada*** *a la cubierta abierta* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *es un conjunto finito de funciones continuas* $f_1,\dots,f_k : K \to \mathbb{R}^+$, *tales que*

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1,$$

y para cada i *existe algún* U_α *tal que* f_i *se anula fuera de* U_α.
Una colección de funciones continuas $\{f_\alpha : K \longrightarrow \mathbb{R}^+\}$ *es una* ***partición de la unidad localmente finita*** *si cada punto tiene una vecindad sobre la cual todas excepto una cantidad finita de* f_α *se anulan y*

$$\sum_{\alpha\in J} f_\alpha = 1.$$

Teorema 2.1. *Sean* J *un conjunto de índices,* $K \subset \mathbb{R}^m$ *compacto y* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *una cubierta abierta de* K *por abiertos en* $\mathbb{R}^m$. *Entonces existe una partición de la unidad subordinada a* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

Demostración. Como K es compacto, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ tiene una subcubierta finita $U_1,\dots,U_k$ que cubre a K. Para cada $i \in \{1,\dots,k\}$ definimos $g_i : K \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por $g_i(x) = \min\{||x-z|| : z \in U_i^c\}$, la cual es continua y se anula fuera de U_i. Además, no todos los g_i se anulan simultáneamente ya que los $U_i's$ son una cubierta de K. Para cada $i \in \{1,\dots,k\}$, sea

$$f_i = \frac{g_i}{\sum_{j=1}^{k} g_j}.$$

Dado que g_i es continua para todo $i \in \{1,\dots k\}$ y no todas las g_i se anulan simultáneamente entonces f_i es continua para todo $i \in \{1,\dots,k\}$, además

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1.$$

Entonces $\{f_1,\dots,f_k\}$ es la partición de la unidad deseada. □

El teorema anterior es más general, una variante la enunciamos a continuación y el teorema más general se puede consultar en [1, Teorema 41.7, p. 295].

Teorema 2.2. *Sean* J *un conjunto de índices,* $E \subset \mathbb{R}^m$ *y* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *una cubierta abierta de* E, *entonces existe una partición de la unidad localmente finita subordinada a* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

2.2. Teorema de Sperner y sus consecuencias.

Definición 2.2. *Un **n-simplejo** es el conjunto de todas las combinaciones convexas estrictamente positivas de un conjunto afinmente independiente de* $n+1$ *elementos. Un **n-simplejo cerrado** es el casco convexo de un conjunto afinmente independiente de* $n+1$ *vectores. Véase la Figura 2.1.*

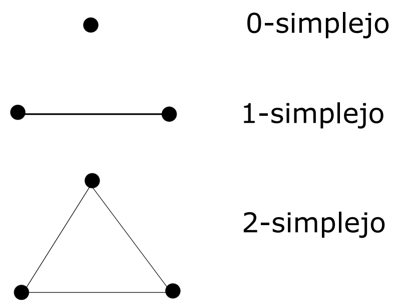

Figura 2.1: Ejemplos de simplejos cerrados

Definición 2.3. *Un conjunto* $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ *es **afinmente independiente** si*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

y $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ *implica que* $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Dado un conjunto afinmente independiente $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ denotamos por $x_0 \cdots x_n$ al simplejo de todas las combinaciones convexas estrictamente positivas de los vectores x_i, $i \in \{0, \dots, n\}$ es decir,

$$x_0 \cdots x_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i > 0, \text{para todo } i = 0, \dots, n; \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Cada x_i es un **vértice** de $x_0 \cdots x_n$ y cada k-simplejo $x_{i_0} \cdots x_{i_k}$, donde $i_j \in \{0, \dots, n\}$ para cada $j \in \{0, \dots, k\}$, es una **cara** de $x_0 \cdots x_n$. De esta manera, cada vértice es una cara y $x_0 \cdots x_n$ es una cara de él mismo.
Para $y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{Co}\left(\{x_0, \dots, x_n\}\right)$, definimos

$$\chi(y) = \{i : \lambda_i > 0\}.$$

Si $\chi(y) = \{i_0, \ldots, i_k\}$, entonces $y \in x_{i_0} \cdots x_{i_k}$. Esta cara es llamada el **portador** de y en el simplejo $x_0 \cdots x_n$. Se sigue que la unión de todas las caras de $x_0 \cdots x_n$ es la cerradura de él mismo.

Proposición 2.2. *Sean $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ afinmente independientes entonces*

$$\mathrm{Cl}\,(x_0 \cdots x_n) = \mathrm{Co}\,(\{x_0, \ldots, x_n\}).$$

Demostración. Sea $y \in \mathrm{Cl}\,(x_0 \cdots x_n)$.

- Si $y = x_i$ para algún $i \in \{0, \ldots, n\}$ entonces $y = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j$ donde $\lambda_i = 1$ y $\lambda_j = 0$ para $j \in \{0, \ldots, n\}$ donde $i \neq j$. Por lo tanto $y \in \mathrm{Co}\,(\{x_0, \ldots, x_n\})$.

- Si $y \neq x_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, entonces y pertenece a alguna cara de $x_0 \cdots x_n$, supongamos sin pérdida de generalidad que $y \in x_0 \cdots x_k$ donde $k \in \{0, \ldots, n\}$. Por la Definición 2.2 tenemos que $y = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$ donde $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{0, \ldots, k\}$. Haciendo $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ tenemos que y se puede escribir como combinación convexa de $x_0, \ldots, x_n$ y por lo tanto $y \in \mathrm{Co}\,(\{x_0, \ldots, x_n\})$.

Por otro lado, si $y \in \mathrm{Co}\,(\{x_0, \ldots, x_n\})$ entonces $y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ donde $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ y $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. Si

$$\chi(y) = \{i \in \{0, \ldots, n\} : \lambda_i > 0\} = \{i_0, \ldots, i_k\},$$

entonces $x_{i_0} \cdots x_{i_k}$ es el portador de y, por lo tanto $y \in \mathrm{Cl}\,(x_0 \cdots x_n)$. $\square$

Definición 2.4. *El **n-simplejo estandar** es*

$$e_0 \cdots e_n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y_i > 0, i = 0, \ldots, n; \sum_{i=0}^{n} y_i = 1\}.$$

*Δ_n denotará la cerradura del n-simplejo estandar la cual llamamos el **n-simplejo estandar cerrado**. Escribiremos simplemente Δ cuando n sea claro en el contexto.*

Ejemplo 2.1. *Dados* $x, z \in \Delta$. *Si* $x \leq z$ *entonces* $x = z$. *En efecto, supongamos que* $x = (x_0, \ldots, x_n)$ *y* $z = (z_0, \ldots, z_n)$ *y supongamos que* $x < z$ *entonces* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i < \sum_{i=0}^{n} z_i$ *esto contradice la definición de* Δ.

Definición 2.5. *Sean* $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ *afinmente independientes,* J *un conjunto de índices y* $T = x_0 \cdots x_n$ *el n-simplejo generado por* $x_0, \ldots, x_n$. *Una* ***subdivisión simplicial*** *de* $\mathrm{Cl}(T)$ *es una colección finita de simplejos* $\{T_i : i \in J\}$ *que satisface que*

$$\bigcup_{i \in J} T_i = \mathrm{Cl}(T)$$

y tales que para cualesquiera $i, j \in J$ *se tiene que* $\mathrm{Cl}(T_i) \cap \mathrm{Cl}(T_j)$ *es vacía o igual a la cerradura de una cara común.*
Nótese que los vértices de T_i *no son necesariamente los vértices de* T. *La* ***medida*** *de una subdivisión es el diámetro del subsimplejo más grande.*

Ejemplo 2.2. *La colección*

$$\{x_0x_2x_4,\, x_1x_2x_3,\, x_1x_3x_4,\, x_0x_2,\, x_0x_4,\, x_1x_2,$$

$$x_1x_3,\, x_1x_4,\, x_2x_3,\, x_3x_4,\, x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\}$$

indicada con lineas sólidas en la Figura 2.2 no es una subdivisión simplicial de $\mathrm{Cl}(x_0x_1x_2)$ *pues* $\mathrm{Cl}(x_0x_2x_4) \cap \mathrm{Cl}(x_1x_2x_3) = \mathrm{Cl}(x_2x_3)$ *no es la cerradura de una cara de* $\mathrm{Cl}(x_0x_2x_4)$. *Reemplazando* $x_0x_2x_4$ *por* $x_0x_2x_3$, $x_0x_3x_4$ *y* x_0x_3 *como lo indica la línea punteada en la misma figura, tenemos 136 intersecciones dos a dos las cuales son vacías o bien es la cerradura de una cara común, por ejemplo*

$$\mathrm{Cl}(x_0x_2x_3) \cap \mathrm{Cl}(x_1x_2x_3) = \mathrm{Cl}(x_2x_3)$$

$$\mathrm{Cl}(x_0x_2x_3) \cap \mathrm{Cl}(x_1x_3x_4) = \mathrm{Cl}(x_3)$$

$$\mathrm{Cl}(x_0x_2x_3) \cap \mathrm{Cl}(x_1) = \emptyset$$

por lo tanto, esta sí es una subdivisión simplicial.

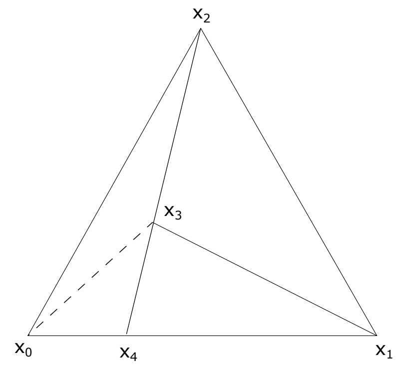

Figura 2.2: Subdivisión simplicial

Definición 2.6. *Sean* $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ *afinmente independientes,* $T = x_0 \cdots x_n$*, supongamos que* $\mathrm{Cl}\,(T)$ *está subdividido simplicialmente. Sea* V *la colección de todos los vértices de todos los subsimplejos, notemos que cada* $x_i \in V$*. Una función*

$$\lambda : V \longrightarrow \{0, \ldots, n\}$$

tal que $\lambda(v) \in \chi(v)$ *es llamada un* ***etiquetado propio*** *de la subdivisión. Lo llamamos un subsimplejo completamente etiquetado si* λ *toma todos los valores* $0, \ldots, n$ *sobre su conjunto de vértices.*

Teorema 2.3. *(Teorema de Sperner).*
Sean $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ *afinmente independientes,* $T = x_0 \cdots x_n$ *y* $\mathrm{Cl}\,(T)$ *subdividido simplicialmente y propiamente etiquetado por la función* λ*. Entonces existe un número impar de subsimplejos completamente etiquetados en la subdivisión.*

Demostración. Por inducción matemática sobre n.
Para $n = 0$ el n-simplejo T consiste de un solo punto x_0, el cual debe tener la etiqueta 0, y así existe un subsimplejo completamente etiquetado, él mismo.
Ahora, supongamos que el enunciado es cierto para $n - 1$ y lo probaremos para n.
Definamos los siguientes conjuntos:

- A el conjunto de todos los n-simplejos de T completamente etiquetados.
- B el conjunto de todos los n-simplejos de T tal que la imagen de λ es exactamente $\{0, \ldots, n-1\}$.

- C el conjunto de los $(n-1)$-simplejos sobre la frontera de T los cuales tienen todas las etiquetas $\{0,\ldots,n-1\}$ y

- D el conjunto de todos los $(n-1)$-simplejos de T que tienen todas la etiquetas $\{0,\ldots,n-1\}$.

Nótese que $C \subset D$ y que los conjuntos A, B, C y D no todos son vacíos dado que $\mathrm{Cl}\,(T)$ está propiamente etiquetado por la función λ.
Notemos que un $(n-1)$-simplejo está en la frontera y es la cara de un solo n-simplejo en la subdivisión, o bien, es la cara común de dos n-simplejos. Podemos ver esta situación como una gráfica, es decir, una colección de vértices y aristas donde D es el conjunto de aristas y $E = A \cup B \cup C$ el conjunto de vértices. Decimos que la arista $d \in D$ y el vértice $e \in E$ inciden siempre que:

- $e \in A \cup B$ y d es una cara de e o

- $e = d \in C$.

Véase la Figura 2.3 para un ejemplo.

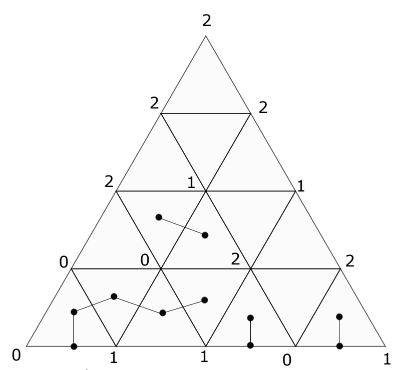

Figura 2.3: Teorema de Sperner

Sea $e \in E$, el **grado** de e, denotado por $\delta(e)$ es el número de aristas que inciden en él. Si $e \in B$ entonces una etiqueta está repetida en exactamente dos caras de e por lo tanto, el grado de $e \in B$ es 2. El grado de $e \in A \cup C$ es 1. Por otro lado, cada lado es incidente en exactamente dos vértices. Si un $(n-1)$-simplejo está en la frontera y tiene las etiquetas $\{0,\ldots,n-1\}$ entonces es incidente en sí mismo y en un n-simplejo que puede ser un vértice en A o en B . Si un $(n-1)$-simplejo es una cara común de dos n-simplejos

entonces cada n-simplejo está ya sea en A o en B.
Así

$$\delta(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in A \cup C, \\ 2 & \text{si } e \in B. \end{cases}$$

Un argumento de teoría de gráficas nos dice que $\sum_{e \in E} \delta(e) = 2|D|$ esto es porque cada lado une exactamente dos vértices, contando el número de lados que inciden en cada vértice y sumándolos contamos cada vértice dos veces.
Por la definición de δ,

$$\sum_{e \in E} \delta(e) = |A| + 2|B| + |C|.$$

Así $2|D| = |A| + 2|B| + |C|$ de modo que $|A| + |C|$ es par. Por la hiótesis de inducción $|C|$ es impar, por lo tanto $|A|$ debe ser impar. $\square$

Teorema 2.4. *(Teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics).*
Sean $\Delta \subset \mathbb{R}^{m+1}$ y $\{F_0, \ldots, F_m\}$ una familia de subconjuntos cerrados de Δ tal que para cada $A \subset \{0, \ldots, m\}$ tenemos que

$$\mathrm{Co}\left(\{e_i : i \in A\}\right) \subset \bigcup_{i \in A} F_i.$$

Entonces $\bigcap_{i=0}^{m} F_i$ es compacto y no vacío.

Demostración. La intersección es compacta pues es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, véase [2, Teoremas 26.2 y 26.3, pp. 187-188].
Sea $\varepsilon > 0$, subdividimos Δ en subsimplejos de diámetro menor o igual a ε.
Sea v un vértice de la subdivisión y supongamos sin pérdida de generalidad que v pertenece a la cara $e_0 \cdots e_k$, para algún $k \in \{0, \ldots, m\}$ entonces existe algún $i \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $v \in F_i$.
Si etiquetamos todos los vértices de esta manera entonces el etiquetado satisface la hipótesis del Teorema de Sperner, así, existe un subsimplejo completamente etiquetado digamos $p_{\varepsilon_0} \cdots p_{\varepsilon_m}$ con $p_{\varepsilon_i} \in F_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$.
Si ε tiende a 0 podemos elegir una subsucesión p_{ε_i} que converge a algún $z \in \Delta$ pues el diámetro de cada subsimplejo es menor o igual a ε. Como F_i es un cerrado y $p_{\varepsilon_i} \in F_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$, tenemos que $z \in \bigcap_{i=0}^{m} F_i$. $\square$

Lema 2.1. *Sean* $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^{m+1}$*,* $K = \mathrm{Co}\left(\{a_0, \ldots, a_m\}\right)$ *y* $\{F_0, \ldots, F_m\}$ *una familia de conjuntos cerrados tal que para cada* $A \subset \{0, \ldots, m\}$ *tenemos que*

$$\mathrm{Co}\left(\{a_i \in \mathbb{R}^{m+1} : i \in A\}\right) \subset \bigcup_{i \in A} F_i.$$

Entonces $K \cap \bigcap_{i=0}^{m} F_i$ *es compacto y no vacío.*

Demostración. Nuevamente por [2, Teoremas 26.2 y 26.3, pp. 187-188] la compacidad es inmediata. Definimos la función $\sigma : \Delta \longrightarrow K$ por

$$\sigma(z) = \sum_{i=0}^{m} z_i a_i.$$

Si $\{a_0, \ldots, a_m\}$ no es un conjunto afinmente independiente entonces σ no es inyectiva pero sin embargo si es continua pues es una transformación lineal.
Sea $E_i = \sigma^{-1}[F_i \cap K]$ para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$.
Dado que σ es continua, para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$ se tiene que E_i es un subconjunto cerrado de Δ.
Tenemos que $\{E_0, \ldots, E_m\}$ satisface el Teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics (Teorema 2.4), así que existe

$$z \in \bigcap_{i=0}^{m} E_i.$$

Entonces

$$\sigma(z) \in K \cap \bigcap_{i=0}^{m} F_i.$$

$\square$

Corolario 2.1. *(Corolario de Fan).*
Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ *y para cada* $x \in X$ *sea* $F(x) \subset \mathbb{R}^m$ *cerrado. Supongamos que:*

- *Para cualquier subconjunto finito* $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$*,*

$$\mathrm{Co}\left(\{x_1, \ldots, x_k\}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k} F(x_i).$$

- *$F(x_0)$ es compacto para algún $x_0 \in X$.*

Entonces $\bigcap\limits_{x \in X} F(x)$ *es compacto y no vacío.*

Demostración. Sean $x_1, \ldots, x_k \subset X$, por hipótesis tenemos que $\mathrm{Co}\left(\{x_1, \ldots, x_k\}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k} F(x_i)$.
Por el Lema 2.1

$$\mathrm{Co}\left(\{x_1, \ldots, x_k\}\right) \cap \bigcap_{i=1}^{k} F(x_i)$$

es compacto y no vacío, así $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F(x_i)$ es no vacío, por lo tanto $\{F(x)\}_{x \in X}$ tiene la propiedad de la intersección finita. De aquí que por [2, Teorema 26.9, p. 193] $\bigcap\limits_{x \in X} F(x)$ es cerrado y no vacío. Dado que $F(x_0)$ es compacto y $\bigcap\limits_{x \in X} F(x) \subset F(x_0)$ entonces $\bigcap\limits_{x \in X} F(x)$ es compacto y no vacío. □

Teorema 2.5. *(Teorema del punto fijo de Brouwer).*
Sea $f : \Delta_m \longrightarrow \Delta_m$ continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Sean f_i con $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, las funciones coordenadas de f, $\varepsilon > 0$, subdividimos Δ_m simplicialmente en subsimplejos de diámetro menor o igual a ε.
Sea V el conjunto de vértices de la subdivisión y definimos una función de etiquetado $\lambda : V \longrightarrow \{0, \ldots, m\}$ como sigue:
para $v \in x_{i_0} \cdots x_{i_k}$ elegimos

$$\lambda(v) \in \{i_o, \ldots, i_k\} \cap \{i \in \{i_0, \ldots, i_k\} : f_i(v) \leq v_i\}$$

notemos que la intersección es no vacía, pues si $f_i(v) > v_i$ para todo $i \in \{i_0, \ldots, i_k\}$ dado que $v \in x_{i_0} \cdots x_{i_k}$ tendríamos que

$$1 = \sum_{i=0}^{m} f_i(v) > \sum_{j=0}^{k} v_{i_j} = \sum_{i=0}^{m} v_i = 1$$

lo cual es una contradicción.
De esta manera λ satisface la hipótesis del Teorema de Sperner, entonces

existe un subsimplejo completamente etiquetado, es decir, existe un subsimplejo $p_0 \dots p_m$ tal que $f_i(p_i) \leq p_i$ para cada $i \in \{0, \dots, m\}$.
Si ε tiende a 0 y dado que Δ_m es compacto podemos elegir una subsucesión convergente de simpejos tal que p_i tiende a z pues el diámetro de cada subsimplejo es menor o igual a ε para todo $i = 0, \dots, m$ y para algún $z \in \Delta_m$.
Dado que f es continua debemos tener que $f_i(z) \leq z_i$ para todo $i = 0, \dots, m$ así, por el Ejemplo 2.1 se tiene que $f(z) = z$. $\square$

Teorema 2.6. *Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ convexo y compacto y sea $f : K \longrightarrow K$ continua. Entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Dado que K es compacto, está contenido en algún simplejo suficientemente grande T. Definimos $h : \mathrm{Cl}\,(T) \longrightarrow K$ por $h(x)$ igual al punto en K más cercano a x. Por la Observación 1.1 h es continua y es igual a la identidad sobre K. Así $f \circ h : \mathrm{Cl}\,(T) \longrightarrow K \subset \mathrm{Cl}\,(T)$ tiene un punto fijo digamos z. Tal punto no puede pertenecer a $\mathrm{Cl}\,(T) \setminus K$ debido a que la imagen de $\mathrm{Cl}\,(T)$ bajo $f \circ h$ está en K. Por lo tanto $z \in K$ y $f \circ h(z) = z$ pero $h(z) = z$, y así $f(z) = z$. $\square$

2.3. Teorema de Sonnenschein.

Definición 2.7. *Una **relación binaria U** sobre un conjunto K asocia a cada $x \in K$ un conjunto $U(x) \subset K$ que puede ser interpretado como el conjunto de aquellos objetos en K que son "mejores que", "mas grandes que" o bien "que están despues de" x. Definimos $U^{-1}(x) = \{y \in K : x \in U(y)\}$. Un elemento $x \in K$ es **U-maximal** si $U(x) = \emptyset$. El conjunto **U-maximal** es $\{x \in K : U(x) = \emptyset\}$. La **gráfica de U** es $Gr(U) = \{(x, y) \in K \times K : y \in U(x)\}$.*

Teorema 2.7. *(Teorema de Sonnenschein).*
Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto y convexo y sea U una relación sobre K tal que:

- *$x \notin \mathrm{Co}\,(U(x))$ para todo $x \in K$ y*
- *si $y \in U^{-1}(x)$, entonces existe algún $x' \in K$ posiblemente $x' = x$ tal que $y \in \mathrm{Int}(U^{-1}(x'))$.*

Entonces K tiene un elemento U-maximal y el conjunto U-maximal es compacto.

Demostración. Notemos que $\{x \in K : U(x) = \emptyset\}$ es justamente
$$\bigcap_{x\in K} (K \setminus U^{-1}(x)).$$
Por hipótesis,
$$\bigcap_{x\in K} (K \setminus U^{-1}(x)) = \bigcap_{x'\in K} (K \setminus \mathrm{Int}(U^{-1}(x'))).$$
Esta última intersección es compacta ya que es intersección de conjuntos compactos.
Para cada $x \in K$, hacemos $F(x) = K \setminus \mathrm{Int}(U^{-1}(x))$, como se indicó anteriormente, cada $F(x)$ es compacto. Mostraremos que si $y \in \mathrm{Co}\,(\{x_1, \ldots, x_n\})$ entonces
$$y \in \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i).$$
Supongamos que $y \notin \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i)$ entonces $y \in U^{-1}(x_i)$ para todo $i = 0, \ldots, n$ así, $x_i \in U(y)$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ pero entonces $y \in \mathrm{Co}\,(\{x_i\}) \subset \mathrm{Co}\,(U(y))$ lo cual contradice la hipótesis. Se sigue del Corolario 2.1 que
$$\bigcap_{x\in K} F(x) \neq \emptyset.$$
□

Corolario 2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto y sea U una relación sobre K tal que:*

- $x \notin U(x)$ *para todo* $x \in K$.
- $U(x)$ *es convexo para todo* $x \in K$.
- $\{(x, y) \in K \times K : y \in U(x)\}$ *es abierto en* $K \times K$.

Entonces el conjunto $U-$maximal es compacto y no vacío.

Demostración. Dado que $U(x)$ es convexo y $x \notin U(x)$ para todo $x \in K$ tenemos que $x \notin \mathrm{Co}\,(U(x))$ para todo $x \in K$. Sea $y \in U^{-1}(x)$, como $\{(x, y) \in K \times K : y \in U(x)\}$ es abierto en $K \times K$ existe $x' \in K$ tal que $y \in \mathrm{Int}(U^{-1}(x'))$. Así por el Teorema 2.7 tenemos que el conjunto $U-$maximal es compacto y no vacío. □

Capítulo 3

Aplicación a la Teoría Económica

En este capítulo hablaremos de algunos conceptos dentro de la teoría económica y de algunos teoremas que son importantes para la demostración del teorema principal que es el Teorema 3.11.

3.1. Conceptos Económicos

Definición 3.1. *Un* ***bien o servicio*** *es un elemento tangible o material destinado a satisfacer necesidades de un consumidor o grupos de consumidores que lo demandan o necesitan.*

Definición 3.2. *El* ***precio*** *es la cantidad de dinero que permite la adquisición o uso de un bien o servicio.*

Definición 3.3. *Un* ***proveedor*** *es una persona o empresa que proporciona bienes o servicios a otras personas o empresas.*

Definición 3.4. *Un* ***consumidor*** *es la persona o empresa que adquiere o utiliza un bien o servicio que los proveedores ponen a su disposición.*

Definición 3.5. *Una* ***transacción*** *es el convenio por el cual dos partes llegan a un acuerdo comercial, generalmente de compra-venta.*

Definición 3.6. *Un* ***mercado*** *es un conjunto de transacciones o intercambios de bienes o servicios entre individuos (proveedores y consumidores).*

Definición 3.7. *La **demanda** es la cantidad de bienes y servicios que pueden ser adquiridos por consumidores a diferentes precios.*

Definición 3.8. *La **oferta** es aquella cantidad de bienes o servicios que los proveedores están dispuestos a vender a los consumidores bajo determinadas condiciones de mercado.*

En este trabajo supondremos que es posible clasificar todos los bienes y servicios en un número finito, digamos $m \in \mathbb{N}$, los cuales están disponibles en unidades infinitamente divisibles (kilos, litros, metros o unidades de tiempo) en este sentido, a lo largo de este trabajo $\mathbb{R}^m$ podrá representar el **espacio de bienes y servicios** que lo llamaremos solamente como **espacio de bienes**. A partir de este momento supondremos que hay un conjunto finito de consumidores los cuales han sido previamente numerados.

Definición 3.9. *Un vector $x \in \mathbb{R}^m$ que indica en cada coordenada una cantidad de cada bien es llamado un **vector de bienes**.*

Estos vectores son intercambiados, manufacturados y consumidos en el curso de una actividad ecónomica, no bienes individuales, aunque un intercambio típico involucra cantidades cero de varios bienes.

Definición 3.10. *Un vector $p \in \mathbb{R}^m$ que indica en cada coordenada el valor de una unidad de cada bien es llamado un **vector de precios**. Así, el valor del vector de bienes $x \in \mathbb{R}^m$ a los precios p es*

$$p \cdot x = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i.$$

El propósito principal de una actividad económica es proveer vectores de bienes para el consumo final de los consumidores. Obviamente no todos los vectores de bienes son admisibles como consumo final para un consumidor, es decir, no puede comprar todo.

Definición 3.11. *El **conjunto de consumo de un consumidor i** es el conjunto de vectores de consumo admisibles para este, y lo denotaremos como X_i.*

Definición 3.12. *Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto no vacío, decimos que A está **acotado inferiormente** si existe $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in A$.*

Observemos que el conjunto de consumo es un conjunto de vectores no negativos y acotado inferiormente ya que cantidades negativas de un bien en un consumo final significan que el consumidor estaría ofertando el bien. La cota inferior pone un límite en los servicios que un consumidor puede adquirir y también puede ser un requerimiento mínimo de algunos bienes por parte del consumidor. En una economía de propiedad privada los consumidores también se caracterizan parcialmente por su dotación inicial de bienes. Esto se representa como un punto en el espacio de bienes $w_i \in \mathbb{R}^m$, estos son los recursos que poseé el consumidor i.

Definición 3.13. *Sean $i \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}^m$ un vector de precios, $X_i \subset \mathbb{R}^m$ y $M_i \in \mathbb{R}^+$ el conjunto de consumo y el ingreso del consumidor i respectivamente, entonces el conjunto de vectores de bienes que el consumidor i puede adquirir a los precios p dado su ingreso M_i es llamado su* ***conjunto de presupuesto*** *y es justamente*

$$\{x \in X_i : p \cdot x \leq M_i\}.$$

Obsérvese que el conjunto de presupuesto podría ser vacío.

Debido a que el producto punto saca escalares se concluye que una característica importante del conjunto de presupuesto es que se mantine sin cambios si el vector de precios y el ingreso son multiplicamos por el mismo número positivo.

Proposición 3.1. *Si $X_i = \mathbb{R}^{m+}$ y $p > \hat{0}$ entonces el conjunto de presupuesto es compacto.*

Demostración. Definimos $h_p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ como $h_p(x) = p \cdot x$ la cual es continua y dado que $p > \hat{0}$ entonces $h_p^{-1}([0, M_i]) = \{x \in X_i : p \cdot x \leq M_i\}$ es cerrado. Por otro lado, supongamos que $A = \{x \in X_i : p \cdot x \leq M_i\}$ no es acotado inferiormente, entonces existe en una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en A tal que $||x_n|| \longrightarrow \infty$ de aquí que la norma de la proyección de los vectores x_n sobre p también tiende a infinito, pero

$$||\text{Proy}_p x_n|| = \frac{p \cdot x_n}{||p||^2}||p|| \leq \frac{M_i||p||}{||p||^2} = \frac{M_i}{||p||}$$

para todo n, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\{x \in X_i : p \cdot x \leq M_i\}$ es acotado. $\square$

Un problema importante en la economía de un consumidor. El problema enfrentado por un consumidor en una economía de mercado es elegir un vector de consumo o un conjunto de ellos del conjunto de presupuesto. Para esto, el consumidor debe tener algún criterio de elección. Una manera de formalizar el criterio es asumir que el consumidor i tiene un índice de utilidad, es decir, una función con valores reales $u_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre el conjunto de vectores de consumo. La idea es que el consumidor prefiere adquirir el vector x que el vector y si $u_i(x) > u_i(y)$ y es indiferente si $u_i(x) = u_i(y)$.

Definición 3.14. *Sean $i \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^m$ un vector de bienes y $u_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de utilidad entonces*

$$U_i(x) = \{y \in X_i : u_i(y) > u_i(x)\}$$

es el conjunto de vectores de consumo que el consumidor i prefiere estrictamente que el vector de consumo x.

Definición 3.15. *Sean $i \in \mathbb{N}$ y $X_i \subset \mathbb{R}^m$ el conjunto de consumo del consumidor i. El conjunto de vectores maximales en el conjunto de presupuesto es llamado el **conjunto de demanda del consumidor i**.*

Los proveedores están motivados por ganancias, cada proveedor j tiene un conjunto de producción Y_j de vectores de suministro tecnologicamente factibles.

Definición 3.16. *Un vector de bienes $y \in \mathbb{R}^m$ que especifica en cada coordenada la cantidad de cada bien ofertado es un **vector de oferta**. Las entradas (o inversiones) están denotadas por cantidades negativas y las salidas (o ventas) por cantidades positivas.*

Definición 3.17. *Sean $y \in \mathbb{R}^m$ un vector de oferta y $p \in \mathbb{R}^m$ un vector de precios entonces*

$$p \cdot y = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i$$

*es la **ganancia** asociada con el vector de oferta y a los precios p.*

El problema de los proveedores es entonces elegir un y del conjunto de vectores de oferta que maximicen la ganancia asociada.

Definición 3.18. *El conjunto de vectores de oferta que maximizan la ganancia es llamado el* ***conjunto de oferta****.*

Definición 3.19. *El conjunto de sumas de vectores de demanda menos las sumas de vectores de oferta es el* ***conjunto de exceso de demanda*** *y lo denotamos por* $E(p)$*.*

Ley de Walras.
Dado un vector de precios $p \in \mathbb{R}^m$ existe un vector $f(p) \in \mathbb{R}^m$ de exceso de demanda para cada bien. Asumimos que f es una función continua de p. El enunciado matemático de la ley de Walras puede tomar cualquiera de las siguientes dos formas:

- La **forma fuerte de la ley de Walras** es
$$p \cdot f(p) = 0$$
para todo $p \in \mathbb{R}^m$.

- La **forma débil de la ley de Walras** es
$$p \cdot f(p) \leq 0$$
para todo $p \in \mathbb{R}^m$.

El significado económico de la ley de Walras es que en una economía cerrada, cada consumidor se gasta casi todos sus ingresos, es decir, no tienen endeudamientos. El i-ésimo consumidor llega al mercado y se encuentra con un vector de oferta w_i y se va con un vector de bienes x_i. Si todos los consumidores se enfrentan al vector de precios p entonces sus presupuestos individuales requieren que $p \cdot x_i \leq p \cdot w_i$, es decir, no pueden gastar mas de lo que ganan. En este caso el vector de exceso de demanda $f(p)$ es

$$\sum_i x_i - \sum_i w_i$$

la suma del total de demandas menos el total de oferta. Sumando los presupuestos individuales y reorganizando en términos de rendimientos $p \cdot f(p) \leq 0$ que es la forma débil de la ley de Walras. La forma fuerte se obtiene si cada consumidor gasta todo su ingreso.
El caso de una producción económica es similar, el j-ésimo proveedor produce un vector de salida neta y_j que produce un ingreso neto de $p \cdot y_j$. En

una economía de propiedad privada este ingreso neto es redistribuido a los consumidores. La nueva restricción presupuestaria de un consumidor es que

$$p \cdot x_i \leq p \cdot w_i - \sum_j \alpha_{i_j}(p \cdot y_i),$$

donde α_{i_j} es la aportación del consumidor i al ingreso neto del proveedor j. Así,

$$\sum_i \alpha_{i_j} = 1$$

para cada j. Por lo tanto el exceso de demanda $f(p)$ es justamente

$$\sum_i x_i - \sum_i w_i - \sum_j y_j.$$

Definición 3.20. *Sea $p \in \mathbb{R}^m$ un vector de precios. Decimos que p es un* ***vector de precios de equilibrio Walrasiano*** *si alguna combinación de sumas de vectores de oferta menos sumas de vectores de demanda es cero, es decir, $0 \in E(p)$.*

Definición 3.21. *Un* ***equilibrio Walrasiano de libre disposición*** *sucede cuando algunos bienes exceden la oferta en el equilibrio siempre que sus precios sean cero.*

Definición 3.22. *Sea $p \in \mathbb{R}^m$ un vector de precios. Decimos que p es un* ***precio de equilibrio de libre disposición*** *si existe algún $z \in E(p)$ tal que $z \leq 0$ y si $z_i < 0$ entonces $p_i = 0$.*

Teorema 3.1. *(Teorema de Hartman y Stampacchia).*
Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto y convexo y sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Entonces

$$\{q \in K : q \cdot f(q) \geq p \cdot f(q) \, \textit{para todo} \, p \in K\}$$

es compacto y no vacío.

Demostración. Definimos la relación U sobre K por $q \in U(p)$ si y sólo si

$$q \cdot f(p) > p \cdot f(p).$$

Dado que f es continua y el producto punto es una función continua, entonces $Gr(U) = \{(p, q) \in K \times K : q \in U(p)\}$, véase Definicion 2.7, es un conjunto abierto. Además, por la misma continuidad de f, $U(p)$ es convexo y $p \notin U(p)$ para cada $p \in K$. Así por el Corolario 2.2 existe un $q_0 \in K$ tal que $U(q_0) = \emptyset$, es decir, para cada $p \in K$ no es cierto que $p \cdot f(q_0) > q_0 \cdot f(q_0)$. Entonces para todo $p \in K$, $q_0 \cdot f(q_0) \geq p \cdot f(q_0)$. Por el contrario, cualquiera de tales q_0 es $U-$maximal, así por el mismo corolario el conjunto $U-$maximal es compacto y no vacío. $\square$

Teorema 3.2. *Sea* $f : \Delta_m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ *continua y tal que*

$$p \cdot f(p) \leq 0$$

para todo $p \in \Delta_m$. *Entonces el conjunto, de precios de equilibrio de libre disposición,* $\{p \in \Delta_m : f(p) \leq 0\}$ *es compacto y no vacío.*

Demostración. Sea $H = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : x \leq 0\}$, notemos que

$$f^{-1}(H) = \{p \in \Delta_m : f(p) \leq 0\}.$$

Como f es continua y H es cerrado, entonces $f^{-1}(H)$ es un cerrado en Δ_m y dado que Δ_m es compacto entonces $f^{-1}(H)$ es compacto. Por el Teorema 3.1 y la Ley de Walras existe un $q \in \Delta_m$ tal que $p \cdot f(q) \leq q \cdot f(q) \leq 0$ para todo $p \in \Delta_m$. Así por la Proposición 1.11, $f(q) \leq 0$. $\square$

El teorema anterior nos indica que si el dominio de f es el simplejo unitario cerrado en $\mathbb{R}^{m+1}$ y si f es continua y satisface la forma débil de la ley de Walras, entonces existe un vector de precios de equilibrio de libre disposición. Es decir, existe algún $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(p) \leq 0$. Dado que solo estamos considerando precios no negativos si $f(p) \leq 0$ y $p \cdot f(p) \leq 0$ entonces si la función coordenada $f_i(p) < 0$ se debe tener que $p_i = 0$. Recordemos que en un equilibrio de libre disposición si un bien está en exceso de oferta este debe ser gratuito, véase la Definición 3.21. De esta manera el teorema anterior nos asegura que debe existir al menos una lista que indica el precio de cada bien de tal forma que la demanda de un bien es menor o igual a la oferta de ese bien y como estamos considerando que todos los precios son mayores o iguales a cero, si un proveedor está ofreciendo mas cantidad de un bien que la que los consumidores desean adquirir entonces el precio de ese bien debe ser cero, por ejemplo cuando ofrecen 2×1.

3.2. Funciones conjunto valuadas.

Dado un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^m$ denotamos por 2^Y a la familia de subconjutos de Y que son no vacíos.

Definición 3.23. *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}^m$, una **función conjunto valuada** γ de X en Y es una función de X a la familia de subconjuntos de Y la cual vamos a denotar por $\gamma : X \longrightarrow 2^Y$.*
*La **gráfica** de γ es*

$$Gr\,\gamma = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \gamma(x)\}.$$

Definición 3.24. *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}^m$, $\gamma : X \longrightarrow 2^Y$ una función conjunto valuada, $E \subset X$ y $F \subset Y$.*
*La **imagen** de E bajo γ está definida por*

$$\gamma(E) = \bigcup_{x \in E} \gamma(x).$$

*La **inversa superior** de F bajo γ está definida por*

$$\gamma^+[F] = \{x \in X : \gamma(x) \subset F\}.$$

*La **inversa inferior** de F bajo γ está definida por*

$$\gamma^-[F] = \{x \in X : \gamma(x) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Definición 3.25. *Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^k$ y $\gamma : X \longrightarrow 2^Y$ una función conjunto valuada, decimos que γ es **semi-continua superiormente en** x si cada que x pertenece a la inversa superior bajo γ de un conjunto abierto en Y entonces esta es una vecindad de x.*
*La función conjunto valuada γ es **semi-continua superiormente** si es semi-continua superiormente en x para todo $x \in X$.*

Definición 3.26. *Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^k$ y $\gamma : X \longrightarrow 2^Y$ una función conjunto valuada, decimos que γ es **semi-continua inferiormente en** x si cada que x pertenece a la inversa inferior bajo γ de un conjunto abierto en Y entonces esta es una vecindad de x.*
*La función conjunto valuada γ es **semi-continua inferiormente** si es semi-continua inferiormente en x para todo $x \in X$.*

Definición 3.27. *Sean* $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^k$ *y* $\gamma : X \longrightarrow 2^Y$ *una función conjunto valuada. Decimos que* γ *es* ***continua*** *si es semi-continua superior e inferiormente.*

Definición 3.28. *Sean* $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^k$ *y* $\gamma : E \longrightarrow 2^F$ *una función conjunto valuada, decimos que* γ *es* ***cerrada en*** x *si para cada sucesión* $x_n \longrightarrow x$ *y* $y_n \longrightarrow y$ *con* $y_n \in \gamma(x_n)$ *se tiene que* $y \in \gamma(x)$.
Decimos que γ *es* ***cerrada*** *si es cerrada en* x *para todo* $x \in E$*, es decir, si* $Gr\gamma$ *es cerrada en* $E \times F$.

Definición 3.29. *Sean* $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^k$ *y* $\gamma : E \longrightarrow 2^F$ *una función conjunto valuada, decimos que* γ *es* ***abierta*** *si* $Gr\gamma$ *es abierta en* $E \times F$.

Definición 3.30. *Sean* $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^k$ *y* $\gamma : E \longrightarrow 2^F$ *una función conjunto valuada decimos que* γ *tiene* ***secciones abiertas (cerradas)*** *si para cada* $x \in E$, $\gamma(x)$ *es abierto (cerrado) en* F*, y para cada* $y \in F$, $\gamma^{-}[\{y\}]$ *es abierto (cerrado) en* E.

Proposición 3.2. *Sean* $E, F \subset \mathbb{R}^m$, $\gamma : E \longrightarrow 2^F$ *una función compacto valuada, es decir, con valores compactos. Entonces,*
γ *es semi-continua superiormente en* x *si y sólo si para cada sucesión* $x_n \longrightarrow x$ *y* $y_n \in \gamma(x_n)$ *existe una subsucesión convergente de* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con límite en* $\gamma(x)$.

Demostración. Supongamos que γ es semi continua superiormente en x, $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \in \gamma(x_n)$. Dado que γ es compacto-valuada, $\gamma(x)$ tiene una vecindad acotada U. Como γ es semi-continua superiormente, existe una vecindad V de x tal que $\gamma(V) \subset U$. Así $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está eventualmente en U, por tanto está acotada, y así tiene una subsucesión convergente. Dado que los conjuntos compactos son cerrados, tenemos que $\gamma(x)$ es cerrado y por lo tanto este límite pertenece a $\gamma(x)$.
Ahora, supongamos que para cada sucesión $x_n \longrightarrow x$, $y_n \in \gamma(x_n)$, existe una subsucesión de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con límite en $\gamma(x)$. Supongamos que γ no es semi-continua superiormente; entonces existe una vecindad U de x y una sucesión $z_n \longrightarrow x$ con $y_n \in \gamma(z_n)$ y $y_n \notin U$. La sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener subsucesiones con límite en $\gamma(x)$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 3.3. *Sean* $E, F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^m$ *y* $\gamma_i : E \longrightarrow 2^{F_i}$ *una función conjunto valuada semi continua inferiormente para cada* $i \in \{1, 2\}$*. Entonces*

$$\gamma_1 \times \gamma_2 : E \longrightarrow 2^{F_1 \times F_2}$$

dada por $(\gamma_1 \times \gamma_2)(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$*es semi continua inferiormente.*

Demostración. Sea $W \subset F_1 \times F_2$ abierto. Mostraremos que $(\gamma_1 \times \gamma_2)^{-}[W]$ es abierto.
Sea $p \in (\gamma_i \times \gamma_2)^{-}[W]$, entonces $(\gamma_i \times \gamma_2)(p) \cap W \neq \emptyset$, sea $q \in (\gamma_i \times \gamma_2)(p) \cap W$ y como W es abierto existen $U \subset F_1$ y $V \subset F_2$ tales que $q \in U \times V \subset W \subset F_1 \times F_2$, entonces $U \times V$ es abierto en $F_1 \times F_2$ y dado que γ_1 y γ_2 son semi continuas inferiormente tenemos que $\gamma_1^{-}[U] = \{x \in E : \gamma_1(x) \cap U \neq \emptyset\}$ y $\gamma_2^{-}[V] = \{x \in E : \gamma_2(x) \cap V \neq \emptyset\}$ son abiertos. Además,

$$\begin{aligned}
(\gamma_1 \times \gamma_2)^{-}[U \times V] &= \{x \in E : (\gamma_1 \times \gamma_2)(x) \cap (U \times V) \neq \emptyset\} \\
&= \{x \in E : \gamma_1(x) \cap U \neq \emptyset \text{ y } \gamma_2(x) \cap V \neq \emptyset\} \\
&= \{x \in E : \gamma_1(x) \cap U \neq \emptyset\} \cap \{x \in E : \gamma_2(x) \cap V \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

Dado que intersección finita de abiertos es abierto tenemos que $(\gamma_1 \times \gamma_2)^{-}[U \times V]$ es abierto. Nótese que $p \in (\gamma_1 \times \gamma_2)^{-}[U \times V] \subset (\gamma_1 \times \gamma_2)^{-}[W]$ por lo tanto $\gamma_1 \times \gamma_2$ es semi continua inferiormente. $\square$

Teorema 3.3. *(Teorema de Cellina).*
Sean $E \subset \mathbb{R}^m$ compacto, $F \subset \mathbb{R}^k$ convexo y $\gamma : E \longrightarrow 2^F$ una función conjunto valuada, semi continua superiormente y con valores compactos y convexos. Para $\delta > 0$ definimos γ_δ como

$$\gamma_\delta(x) = Co\,(\bigcup_{z \in N_\delta(x)} \gamma(z)).$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$Gr\gamma_\delta \subset N_\varepsilon(Gr\gamma).$$

Notemos que esto no dice que $\gamma_\delta(x) \subset N_\varepsilon(\gamma(x))$ para todo x.

Demostración. Supongamos que el lema no se cumple. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión (x_n, y_n) con $(x_n, y_n) \in Gr\gamma_{\frac{1}{n}}$ tal que $\operatorname{dist}((x_n, y_n), Gr\gamma) \geq \varepsilon$. Ahora, si $(x_n, y_n) \in Gr\gamma_{\frac{1}{n}}$ entonces $y_n \in \gamma_{\frac{1}{n}}(x_n)$, así

$$y_n \in \mathrm{Co}\,(\bigcup_{z \in N_{\frac{1}{n}}(x_n)} \gamma(z)).$$

Por el Teorema de Caratheodory existen

$$y_{0,n}, \ldots, y_{k,n} \in \bigcup_{z \in N_{\frac{1}{n}}(x_n)} \gamma(z)$$

tales que

$$y_n = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,n} y_{i,n}$$

con $\lambda_{i,n} \geq 0$, $\sum \lambda_{i,n} = 1$, y $y_{i,n} \in \gamma(z_{i,n})$ con $|z_{i,n} - x_n| < \frac{1}{n}$. Dado que E es compacto y γ es semi-continua superiormente, la Proposición 3.2 implica que podemos encontrar sucesiones convergentes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\lambda_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n \longrightarrow x$, $y_{i,n} \longrightarrow y_i$, $\lambda_{i,n} \longrightarrow \lambda_i$, $z_{i,n} \longrightarrow x$ para todo i donde

$$y = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i y_i$$

y $(x, y_i) \in Gr\gamma$ para todo i. Como γ es convexo valuada, $(x, y) \in Gr\gamma$. Por otro lado, la condición $\operatorname{dist}((x_n, y_n), Gr\gamma) \geq \varepsilon$ para todo n implica que $\operatorname{dist}((x, y), Gr\gamma) \geq \varepsilon$ lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 3.4. *(Teorema de aproximación de von Neumann).*
Sean $E \subset \mathbb{R}^m$ compacto, $F \subset \mathbb{R}^k$ convexo y $\gamma : E \longrightarrow 2^F$ una función conjunto valuada, semi continua superiormente y con valores compactos y convexos. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función continua f tal que $Grf \subset N_\varepsilon(Gr\gamma)$.

Demostración. Por el Teorema 3.3 existe un $\delta > 0$ tal que la función conjunto valuada γ_δ satisface que $Gr\gamma_\delta \subset N_\varepsilon(Gr\gamma)$. Dado que E es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $\{N_\delta(x_i)\}_{i=1}^n$ es una cubierta abierta de E. Elegimos $y_i \in \gamma(x_i)$. Por el Teorema 2.2, existe $f_1, \ldots, f_n$, una partición de la unidad subordinada a esta cubierta y sea

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot y_i.$$

Entonces f es continua y como f_i se anula fuera de $N_\delta(x_i)$, $f_i(x) > 0$ implica que $|x_i - x| < \delta$ así $f(x) \in \gamma_\delta(x)$. $\square$

Definición 3.31. *Sean $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^k$ y $\gamma : E \longrightarrow 2^f$ una función conjunto valuada. Decimos que γ es* ***cerrada*** *en x si cada que $x_n \longrightarrow x$, $y_n \in \gamma(x_n)$ y $y_n \longrightarrow y$ entonces $y \in \gamma(x)$. Una función conjunto valuada es cerrada si es cerrada en cada punto de su dominio, es decir, si su gráfica es cerrada.*

Teorema 3.5. *(Teorema de Browder).*
Sean $E \subset \mathbb{R}^m$ *y* $\gamma : E \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^k}$ *una función conjunto valuada con valores convexos tal que* $\gamma^{-1}(\{y\})$ *es abierto para cada* $y \in \mathbb{R}^k$. *Entonces existe una función continua* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *tal que* $f(x) \in \gamma(x)$ *para cada* x.

Demostración. Por el Teorema 2.2 existe una partición de la unidad localmente finita $\{f_y\}_{y\in\mathbb{R}^k}$ subordinada a $\{\gamma^{-1}(\{y\})\}_{y\in\mathbb{R}^k}$, así $f(x) = \sum_y f_y(x) \cdot y$ es continua. Si $f_y(x) > 0$ entonces $y \in \gamma(x)$. Dado que γ tiene valores convexos, $f(x) \in \gamma(x)$. □

Teorema 3.6. *Sean* $\varepsilon > 0$, $E \subset \mathbb{R}^m$ *compacto y* $\gamma : E \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^k}$ *una función conjunto valuada con valores convexos y semi continua inferiormente. Entonces existe un función continua* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *tal que* $f(x) \in N_\varepsilon(\gamma(x))$ *para cada* $x \in E$.

Demostración. Para cada $y \in \mathbb{R}^k$ sea $W_y = \{x \in E : y \in N_\varepsilon(\gamma(x))\}$. Entonces $x \in \gamma^-[N_\varepsilon(\gamma(x))] \subset W_y$. Dado que γ es semi continua inferiormente y que cada W_y es abierto. Entonces $\{W_y\}_{y\in\mathbb{R}^k}$ es una cubierta abierta de E. Por lo tanto, por el Teorema 2.2 existe una partición de la unidad $f_1, \ldots, f_n$ subordinada a una cubierta finita $\{W_{y_1}, \ldots, W_{y_n}\}$ para E. Sea

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot y_i.$$

Dado que $N_\varepsilon(\gamma(x))$ es convexa y $f_i(x) > 0$ tenemos que $y_i \in N_\varepsilon(\gamma(x))$, por lo tanto $f(x) \in N_\varepsilon(\gamma(x))$ para cada $x \in E$. □

Recordemos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en $\mathbb{R}^m$ es una sucesión de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$.

Teorema 3.7. *Sea* $E \subset \mathbb{R}^m$ *compacto y* $\gamma : E \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^k}$ *una función conjunto valuada semi continua inferiormente con valores cerrados y convexos. Entonces existe* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *una función continua tal que* $f(x) \in \gamma(x)$ *para cada* $x \in E$.

Demostración. Construimos una sucesión de funciones $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que para cada $x \in E$

- $f_n(x) \in B_{\frac{1}{2^n}}(f_{n-1}(x))$ y
- $f_n(x) \in N_{\frac{1}{2^n}}(\gamma(x))$.

La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se construye por inducción. Por el Teorema 3.6 existe una función f_1 tal que $f_1(x) \in N_{\frac{1}{2}}(\gamma(x))$. Dadas $f_1, \ldots, f_n$ construimos f_{n+1} definiendo primero γ_{n+1} como $\gamma_{n+1}(x) = \gamma(x) \cap B_{\frac{1}{2^n}}(f_n(x))$. Por la hipótesis de inducción $\gamma_{n+1}(x)$ es no vacío. Hacemos $\mu(x) = B_{\frac{1}{2^n}}(f_n(x))$. Dado que cada f_n es continua entonces μ es semi continua inferiormente. Luego, por la Proposición 3.3 la correspondencia $\gamma \times \mu$ es semi continua inferiormente. Sea $W \subset \mathbb{R}^k$ abierto. Entonces

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1}^{-}[W] &= \{x : \gamma(x) \cap W \neq \emptyset; \mu(x) \cap W \neq \emptyset\} \\
&= \{x : \gamma \times \mu(x) \cap [N_{\frac{1}{2^n}}(\gamma(x)) \cap (\mathbb{R}^k \times W)] \neq \emptyset\} \\
&= (\gamma \times \mu)^{-}[N_{\frac{1}{2^n}}(\gamma(x)) \cap (\mathbb{R}^k \times W)]
\end{aligned}$$

el cual es abierto, ya que $\gamma \times \mu$ es semi continua inferiormente. Por lo tanto γ_{n+1} es semi continua inferiormente. Aplicando el Teorema 3.5 a γ_{n+1} obtenemos f_{n+1} con $f_{n+1}(x) \in B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(\gamma_{n+1}(x))$ para cada x. Pero entonces

$$f_{n+1}(x) \in B_{\frac{3}{2^{n+1}}}(f_n(x)) \subset B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(f_n(x)).$$

Por lo anterior $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y dado que E es compacto entonces converge uniformemente a una función f la cual debe ser continua, esto por [3, Teorema 7.12, p. 150]. Además, dado que $\gamma(x)$ es cerrado para cada $x \in E$ tenemos $f(x) \in \gamma(x)$. □

Definición 3.32. *Sean $K \subset \mathbb{R}^m$ y $\gamma : K \longrightarrow 2^K$ una función conjunto valuada. Decimos que $z \in K$ es un* ***punto fijo de*** *γ si $z \in \gamma(z)$.*

Proposición 3.4. *Sean $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^k$ y $\gamma : E \longrightarrow 2^F$ una función conjunto valuada. Si F es compacto y γ es cerrada entonces γ es semi-continua superiormente.*

Demostración. Supongamos que la proposición no se cumple. Entonces existe algún $x \in E$ y una vecindad abierta U de $\gamma(x)$ tal que para cada vecindad V

de x existe un $z \in V$ tal que $\gamma(z)$ no está contenido en U. Así que podemos encontrar sucesiones $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $z_n \longrightarrow x$ y $y_n \in \gamma(z_n)$ con $y_n \notin U$. Dado que F es compacto, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a $y \notin U$. Pero como γ es cerrada, (x, y) pertenece a la gráfica de γ, por lo tanto $x \in \gamma(x) \subset U$ lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 3.8. *Sean $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto, convexo y no vacío, $F \subset \mathbb{R}^k$ compacto y convexo y $\mu : K \to 2^K$ una función conjunto valuada. Supongamos que existe una función conjunto valuada cerrada $\gamma : K \to 2^F$ con valores compactos y convexos y una función continua $f : K \times F \longrightarrow K$ tal que para cada $x \in K$*

$$\mu(x) = \{f(x, y) : y \in \gamma(x)\}.$$

Entonces μ tiene un punto fijo, es decir, existe algún $x \in K$ tal que $x \in \mu(x)$.

Demostración. Por la Proposición 3.4 y el Teorema 3.4 existe una sucesión de funciones $g_n : K \longrightarrow F$ tal que $Grg_n \in N_{\frac{1}{n}}(Gr\gamma)$. Definimos $h_n : K \longrightarrow K$ por $h_n(x) = f(x, g_n(x))$. Por el Teorema de Brouwer, cada h_n tiene un punto fijo x_n, es decir, $x_n = f(x_n, g_n(x_n))$. Como K y F son compactos podemos extraer una subsucesión convergente; así, sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_n \longrightarrow \overline{x}$ y $g_n(x_n) \longrightarrow \overline{y}$. Entonces $(\overline{x}, \overline{y}) \in Gr\gamma$ pues γ es cerrada y así $\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{y}) \in \mu(\overline{x})$. $\square$

Teorema 3.9. *(Teorema de Kakutani).*
Sean $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto, convexo y no vacío y $\gamma : K \longrightarrow 2^K$ una función conjunto valuada cerrada o semi-continua superiormente con valores compactos y convexos. Entonces γ tiene un punto fijo.

Demostración. Sea $f : K \times K \longrightarrow K$ dada por $f(x, y) = y$ la cual es continua. Obsérvese que

$$\gamma(x) = \{f(x, y) \in K : y \in \gamma(x)\},$$

y que f cumple las hipótesis del teorema anterior, por lo tanto γ tiene un punto fijo. $\square$

Teorema 3.10. *Sean $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto y convexo y $\gamma : K \longrightarrow 2^K$ una función conjunto valuada semi-continua inferiormente con valores cerrados y convexos. Entonces γ tiene un punto fijo.*

Demostración. Por el Teorema 3.7 existe una funcion continua $f : K \longrightarrow K$ tal que $f(x) \in \gamma(x)$ para cada $x \in K$ y por el Teorema 2.6 f tiene un punto fijo digamos $x \in K$, entonces $x = f(x) \in \gamma(x)$ por lo tanto γ tiene un punto fijo. $\square$

El siguiente teorema es fundamental para probar la existencia de un equilibrio de mercado en una economía y generaliza el Teorema 3.2 al caso de funciones conjunto valuadas de exceso de demanda. En este caso si γ es una función conjunto valuada que asocia a cada vector de precios p su conjunto de exceso de demanda entonces p es un precio de equilibrio si $0 \in \gamma(p)$. El precio p es un precio de equilibrio de libre disposición si existe $z \in \gamma(p)$ tal que $z \leq 0$. Es decir, el siguiente teorema nos asegura que existe una lista de precios de todos los bienes de tal manera que la cantidad de cada bien que desea adquirir un consumidor en menor o igual que la cantidad de cada bien que ofrece el proveedor. Dada la importancia del siguiente teorema daremos dos demostraciones encontradas en la literatura.

Teorema 3.11. *(Teorema de Gale-Debreu-Nikaido).*
Sea $\gamma : \Delta \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ una función conjunto valuada semi continua superiormente con valores compactos y convexos tal que para todo $p \in \Delta$

$$p \cdot z \leq 0$$

para cada $z \in \gamma(p)$. Si $N = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \leq 0\}$, entonces el conjunto de precios de equilibrio de libre disposición

$$\{p \in \Delta : N \cap \gamma(p) \neq \emptyset\}$$

es compacto y no vacío.

Demostración. Para cada $p \in \Delta$ sea

$$U(p) = \{q : q \cdot z > 0 \text{ para todo } z \in \gamma(p)\}.$$

Entonces $U(p)$ es convexo y $p \notin U(p)$ para cada p, y si $q \in U^{-1}(p)$ tenemos que $p \cdot z > 0$ para todo $z \in \gamma(q)$. Entonces, dado que γ es semi-continua superiormente, $\gamma^+[\{x : p \cdot x > 0\}]$ es una vecindad de q en $U^{-1}(p)$. Por lo tanto $U^{-1}(p)$ es abierto para cada p.
Ahora, p es U-maximal si y sólo si para cada $q \in \Delta$ existe $z \in \gamma(p)$ con $q \cdot z \leq 0$.
Por lo tanto, por la Proposición 2.1 p es U-maximal si y sólo si $\gamma(p) \cap N \neq \emptyset$.
Así por el Teorema 2.7 $\{p : \gamma(p) \cap N \neq \emptyset\}$ es compacto y no vacío. $\square$

A continuación damos una demostración del Teorema de Gale-Debreu-Nikaido (Teorema 3.11) basado en el Teorema 3.8.

Demostración. Recordemos que $\gamma : \Delta \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ satisface que $p \cdot z \leq 0$ para todo $z \in \gamma(p)$ donde γ es semi-continua superiormente, con valores compactos y convexos. Por lo tanto γ es cerrada.
Dado que Δ es compacto y γ es semi-continua superiormente y con valores compactos entonces $\gamma(\Delta)$ es compacto, así $F = \mathrm{Co}\,(\gamma(\Delta))$ es compacto.
Definimos la función de ajuste de precios $f : \Delta \times F \longrightarrow \Delta$ por

$$f(p, z) = \frac{p + z^+}{1 + \sum\limits_i z_i^+}$$

donde $z_i^+ = \max\{z_i, 0\}$ $z^+ = (z_0^+, \ldots, z_n^+)$.
Notemos que f es continua y su rango es Δ. Definimos la función conjunto valuada $\mu : \Delta \longrightarrow 2^\Delta$ por $\mu(p) = \{f(p, z) : z \in \gamma(p)\}$.
Entonces por el Teorema 3.8 μ tiene un punto fijo, digamos $\overline{p}$.
Así $\overline{p} = \dfrac{\overline{p} + z^+}{1 + \sum\limits_i z_i^+}$ para algún $z \in \gamma(p)$.
Dado que $\overline{p} \cdot z \leq 0$ para algún j debemos tener que $\overline{p_j} > 0$ y $z_j \leq 0$ (pues de otro modo $\overline{p} \cdot z > 0$).
Para esta j, $z_j^+ = 0$ y dado que $\overline{p} = \dfrac{\overline{p} + z^+}{1 + \sum\limits_i z_i^+}$ debemos tener que $\sum\limits_i z_i^+ = 0$ pero esto implica que $z \leq 0$. $\square$

Intuitivamente, si $z_i > 0$ para algún i entonces el bien i está en exceso de demanda, así que queremos elevar p_i y esto es lo que hace f.

Conclusiones

Recordemos que la hipótesis de este trabajo fue que:

En una economía de mercado debe existir al menos un vector de precios de equilibrio de libre disposición.

Una vez concluida la investigación nos dimos cuenta que en efecto los teoremas del punto fijo como el de Brouwer y el de Kakutani nos ayudaron a demostrar el teorema de Gale-Debreu-Nikaido el cual nos asegura que bajo ciertas suposiciones como el hecho de que todos los bienes se pueden clasificar en un número finito de bienes que están disponibles en cantidades infinitamente divisibles y que existe un numero numerable de consumidores, existe al menos un vector de precios de equilibrio de libre disposición.
En este trabajo se muestra la existencia de al menos un vector de precios de equilibrio de libre disposición, una investigación a futuro podría ser enfocada a encontrar y desarrollar técnicas para determinar esos vectores.

Bibliografía

[1] Border, K. C. Fixed point theorems with applications to economics and game theory, Cambridge university press, Cambridge, Inglaterra, 1985.

[2] Munkres, J. R. Topología, segunda edición, Pearson Educación S. A., España, Madrid, 2002.

[3] Rudin, W. Principles of mathematical Analysis, tercera edición, McGraw Hill, Nueva York, 1976.

[4] Spivak, M. Cálculo infinitesimal, segunda edición, Editorial Reverté S. A., México, D.F., 2006.